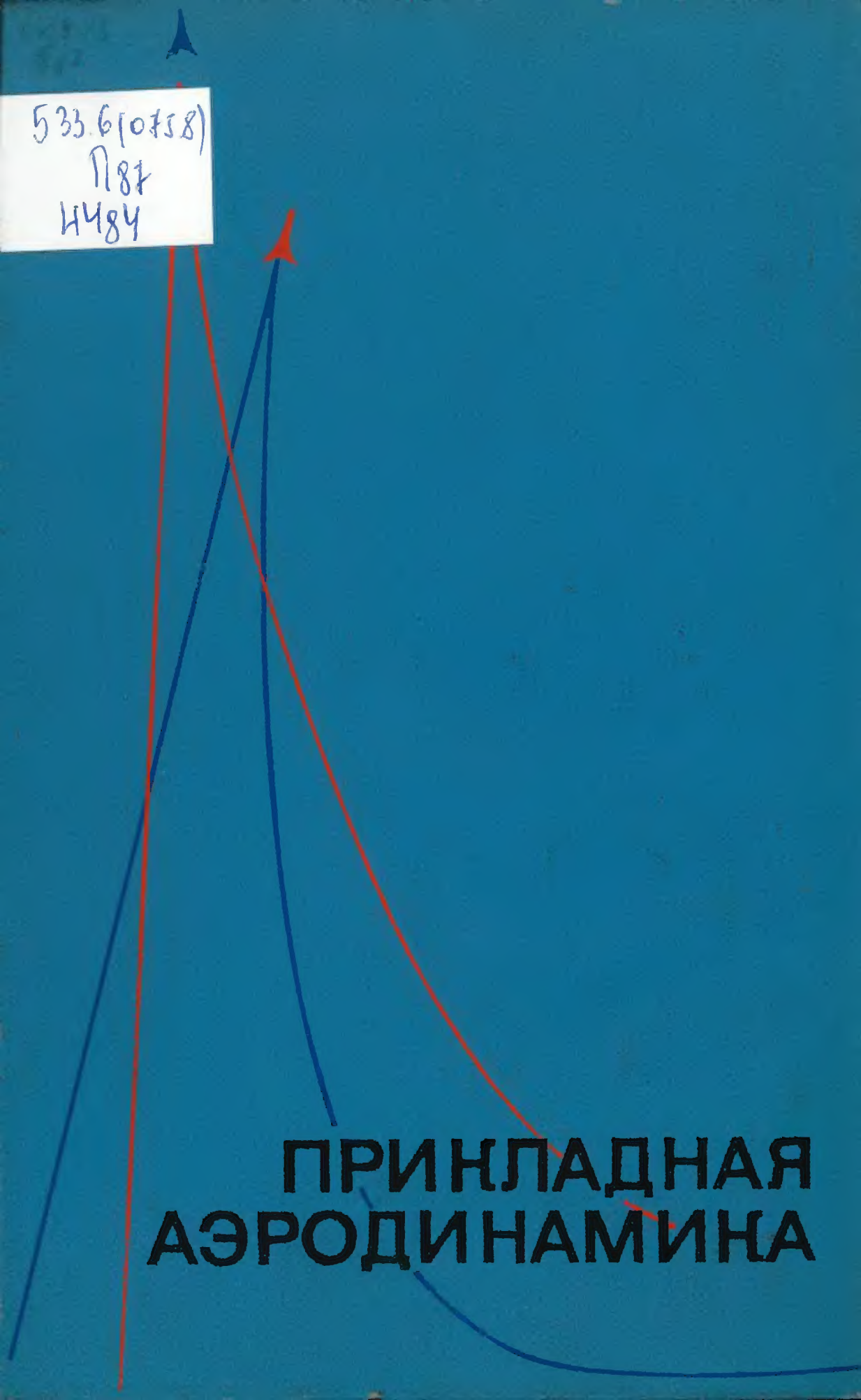
533.6(075.8)
П87
Н484

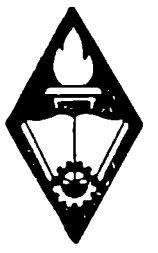


ПРИКЛАДНАЯ АЭРОДИНАМИКА

ПРИКЛАДНАЯ АЭРОДИНАМИКА

Под общей редакцией
профессора
Н. Ф. Краснова

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов высших технических
учебных заведений



Москва
«Высшая школа»
1974

533
П75
УДК 533.6(075)

Н. Ф. Краснов, В. Н. Кошевой, А. Н. Данилов, В. Ф. Захарченко, Е. Э. Боровский, А. И. Хлупнов.

П75 Прикладная аэродинамика
Под ред. Краснова Н. Ф. Учеб. пособие для втузов. М., «Высш. школа», 1974.
732 с. с ил.
Перед загл. авт.: Н. Ф. Краснов, В. Н. Кошевой, А. Н. Данилов и др.

В книге излагаются основы прикладной аэродинамики — одного из важнейших разделов современной аэродинамической науки. Подробно рассматриваются вопросы экспериментальной аэродинамики, включая описание и методы расчета и проектирования аэродинамических установок дозвуковых и сверхзвуковых скоростей, измерительных устройств, а также способы определения на конкретных примерах различных аэродинамических характеристик.

Важное место уделено формулировке и решению задач по фундаментальным разделам аэродинамики, таким как кинематика и динамика жидкости и газа, теория скачков уплотнения, метод характеристик, аэродинамическая интерференция. В них последовательно раскрываются методы расчета параметров обтекания профиля и крыльев, тел вращения, а также в целом летательных аппаратов, причем рассматриваются не только силовое воздействие (давление, трение), но также передача тепла от разогретого омывающего газа и вызванное этим разрушение обтекаемой поверхности (абляция).

Книга предназначена для студентов технических вузов, а также будет полезна инженерам и научным работникам.

П $\frac{20303—067}{001(01)—74}$ 125—74 533

Рецензенты:

Кафедра аэромеханики Киевского института инженеров гражданской авиации.
Докт. физ.-матем. наук Гинзбург И. П.

© Издательство «Высшая школа», 1974 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Изучение современной аэродинамики занимает большое место в подготовке специалистов высшей квалификации по тем естественно-научным и инженерно-техническим областям знаний, где в той или иной мере приходится сталкиваться с явлениями движения воздуха или вообще газовой среды. Несомненно, что аэродинамику следует рассматривать в качестве одной из фундаментальных, базовых, дисциплин, на которую опирается последующая специальная подготовка будущего научного работника — механика или инженера по авиационно-ракетным, артиллерийским и другим смежным специальностям.

В настоящей книге, являющейся учебным пособием, излагаются основы **прикладной аэродинамики** — одного из важнейших разделов современной аэродинамической науки. Быстрое развитие ракетно-авиационной техники стало возможным благодаря успехам этой области аэродинамики, вобравшей в себя не только достижения современной аэродинамической теории, но и других наук, прежде всего вычислительной математики. Здесь прикладная аэродинамика рассматривается в более широком плане как совокупность «классических» разделов, относящихся к методам и практике экспериментальных исследований, а также вопросов и задач по общему курсу аэродинамики. Такой подход к изложению учебного материала более эффективен в целях усвоения научной информации, развития умения и навыков в использовании этой информации, правильной постановки эксперимента, оценки его точности и обобщения полученных результатов. Именно такой единый процесс исследования, основанный на глубоких теоретических знаниях и носящий экспериментальный характер, свойствен практической деятельности современного инженера-аэродинамика.

Быстродействующие электронно-цифровые машины все больше применяются в лабораторной практике для обработки данных, получаемых в результате продувок в аэродинамических трубах моделей летательных аппаратов, а также при решении многих задач, включая комплексные аэродинамические расчеты. Владея основами вычислительной математики, читатель сможет решить многие из задач, помещенных в книге, а также рассмотреть некоторые аспекты, связанные с возможностью автоматизации эксперимента с применением вычислительных машин. Поэтому в книге основное внимание обращено на методику подготовки, проведения и обработки результатов эксперимента, а также на правильный выбор способов решения сформулированных задач с целью получения отдельных конкретных результатов. Одновременно осуществляется анализ этих результатов, раскрывается их физический смысл, что облегчает читателю в случае необходимости самостоятельную разработку алгоритма при использовании электронно-вычислительной машины.

Развитие современной аэродинамики отражает подход к решению инженерных проблем с двух позиций. Можно составить точные общие

уравнения процесса обтекания и найти их решение с помощью вычислительных машин. Подобное решение может вызываться необходимостью получения массовых результатов и имеет смысл для какой-то определенной физической модели исследуемого процесса, обусловливающей многовариантность начальных условий и большой объем вычислительных операций. Вместе с тем исследование обтекания тел может быть осуществлено аналитически — путем постановки теоретических проблем, их корректных физической и математической формулировок, создания новых методов решения задач. Для инженера имеют исключительно важное значение такие аналитические решения при условии, что область их применения известна. Именно этим решениям уделено большое внимание в книге.

В первом разделе книги дана информация об основах экспериментальной аэродинамики, изложены цели и общие методы подготовки и проведения лабораторных работ. Во втором и третьем разделах сформулированы вопросы и задачи, приведены ответы на эти вопросы и рассмотрены решения задач.

Лабораторные работы, вопросы и задачи являются своеобразным отображением в прикладном виде курса аэродинамики. Их выбор осуществлялся с таким расчетом, чтобы помочь в усвоении основополагающих, узловых разделов этого курса. При этом лабораторные работы, ответы на вопросы и решения задач хотя и завершаются числовой иллюстрацией, однако не являются частными, а имеют общий характер и охватывают определенный комплекс учебной информации, способствуя тем самым творческому подходу к усвоению аэродинамики.

Эффект от проведения лабораторных работ и глубина усвоения всей аэродинамики возрастают, если такие работы носят исследовательский характер и в известной мере отражают практическую деятельность экспериментатора. Это учитывалось при изложении содержания лабораторных работ, а также общих сведений, в которых нашла отражение необходимая теоретическая информация и общая методика проведения работы. Правильной организации подготовки, проведения и обработки данных эксперимента помогут конкретные примеры, рассматриваемые в конце каждой лабораторной работы. Согласно общей теме работы студент должен под руководством преподавателя выбрать аэродинамическую установку, измерительные приборы, необходимые модели и материалы, наметить целесообразную форму бланков для записи экспериментальных данных, провести предварительные теоретические расчеты и, что очень важно, предусмотреть рациональные и безопасные условия проведения работы; лишь после этого можно приступать к ее осуществлению.

Основой экспериментальной аэродинамики являются понятия и определения, относящиеся к созданию и эксплуатации аэродинамических установок и измерительных устройств. Этому посвящены две первые главы, в которых последовательно рассматриваются принципы устройства и конкретные конструкции дозвуковых и сверхзвуковых аэродинамических труб, приборов и аппаратов для измерения скорости, давления, трения, суммарных аэродинамических сил и моментов, а также теплопередачи при исследовании в этих трубах обтекания моделей летательных аппаратов и их отдельных элементов (крыло, корпус, оперение).

В экспериментальной аэродинамике широко используют визуальные методы исследования газовых течений. Поэтому в книге большое внимание уделено рассмотрению конструкций и принципов действия оптических приборов, позволяющих наблюдать потоки около обтекаемых поверхностей, а также количественно оценивать параметры газа, характеризующие такие потоки.

В настоящее время все шире используются автоматизированные системы управления подготовкой, проведением и обработкой получае-

мых данных на экспериментальных аэродинамических установках. Важнейшим элементом таких систем являются электронные измерительные устройства. Поэтому в книге большое внимание уделено рассмотрению подобных устройств, использующихся для определения суммарных сил и моментов, а также распределения напряжений.

В третьей главе рассматриваются техника и методика измерения параметров газовых течений. Важнейшим моментом таких измерений является тарировка соответствующих приборов и устройств (манометры и насадки давлений, термоанемометры, аэродинамические весы и др.). Сама техника измерений рассматривается применительно к опытному определению скорости и давления, турбулентности и скоса потока в рабочей части аэродинамической трубы, а также параметров газа в ударной трубе.

Известно, что результаты экспериментальных исследований используются для проверки теоретических выводов и гипотез. С учетом этого описание лабораторных работ в книге сопровождается, там где это возможно и целесообразно, элементами аэродинамического расчета исследуемого летательного аппарата и последующим сопоставлением данных такого расчета с экспериментальными результатами.

При расчете какой-либо аэродинамической характеристики одни ее составляющие могут находиться в результате решения соответствующих уравнений или по готовым аналитическим зависимостям, а другие могут быть определены по экспериментальным данным.

В связи с этим в книге для проведения полных аэродинамических расчетов приведены в виде отдельных иллюстраций также данные, полученные в лабораторных работах.

Настоящая книга написана на основе опыта преподавания курса «Аэродинамика», в том числе его прикладных разделов, в Московском высшем техническом училище им. Н. Э. Баумана в соответствии с учебной программой.

Лабораторные работы составлены в основном применительно к установкам и измерительным устройствам, использующимся в аэродинамической лаборатории МВТУ. Однако большинство лабораторных работ может быть выполнено в любом учебном заведении.

Последовательность вопросов и задач, содержание ответов и решения в основном соответствуют программе учебного курса. Однако отдельные вопросы и задачи носят комплексный характер; они как бы «отклоняются» от такой последовательности, что должно способствовать развитию навыков у читателя к обобщению научной информации, синтезированию ее при отыскании ответов на сложные вопросы и задачи.

В книге важное место при формулировке вопросов и задач занимают такие разделы, как общие понятия и определения аэродинамики, кинематика и динамика жидкости и газа, теория скачков уплотнения и метод характеристик. Значительное место в книге занимают вопросы и задачи, связанные с аэродинамическим расчетом.

При этом акцентируется внимание не только на рассмотрение числовых схем такого расчета, но и на раскрытие физической сущности тех процессов, для которых находятся количественные характеристики.

Все задачи и вопросы сопровождаются достаточно подробными решениями и ответами, основная цель которых — изложить принципы этих решений и ответов, а также указать некий ориентир, который поможет читателю отыскать правильный путь, если он предпримет попытку самостоятельно и в ином порядке, чем в книге, решать сформулированную задачу.

Важнейшим правилом, которым необходимо руководствоваться при решении задач, является нахождение решений в безразмерной форме. При соблюдении аэродинамического подобия такие решения могут быть

распространены с модельных на натурные явления, связанные с обтеканием летательных аппаратов и движением газа вообще. В связи со сказанным читателю следует более глубоко изучить теорию аэродинамического подобия, а также общие методы подобия и размерности [37]. Однако безразмерные решения важны и вне связи с аэродинамическим подобием. Решая в безразмерной форме данную задачу, которая может и не иметь аналога, находят искомые параметры, определяющие процесс, отнесенные к характерным газодинамическим величинам, известным для такого процесса. Например, вычисляют не абсолютные давления, плотности или температуры, а их значения, отнесенные к соответствующим параметрам торможения. Это способствует нахождению правильных решений и более надежной оценке величин отыскиваемых газодинамических параметров. Вместе с тем для выработки реальных представлений о действующих аэродинамических силах, моментах, тепловых потоках, а также других параметрах (давление, температура, плотность и др.) в решениях задач предусматривается определение их абсолютных значений, соответствующих летательному аппарату с известными размерами и формой или каким-либо начальным данным, характеризующим исследуемый поток газа.

В основу изложения материала книги положены учебник «Аэродинамика» [20] и учебное пособие «Аэродинамика ракет» [21]. При изучении основ аэродинамики и газодинамики целесообразно, а в отдельных случаях и необходимо использовать другие учебники и учебные пособия, а также монографии, перечень которых приведен в конце книги. В них, в частности, содержатся различные таблицы и графики газодинамических и термодинамических функций для воздуха и газов, которые используются при решении задач и в аэродинамических расчетах, приведенных в книге.

Пользование данной книгой предполагает знакомство читателя с теоретическими основами аэродинамики, которые могут изучаться как в целом, так и по отдельным разделам в соответствии с порядком расположения лабораторных работ, вопросов и задач.

Естественно, что одно учебное пособие не в состоянии охватить все многообразие лабораторных работ, вопросов и задач, словом, всех тех проблем, которые составляют содержание прикладной аэродинамики. В данном пособии представлена информация, содержание и объем которой достаточны, при условии ее глубокого усвоения, чтобы самостоятельно разобраться в других проблемах, связанных с организацией и проведением аэродинамического эксперимента, формулировкой вопросов и решением аэродинамических задач.

В конце книги приведена специальная переводная таблица единиц измерения физических величин, применяемых в аэродинамике, в новые, соответствующие принятой Международной системе (СИ).

С рукописью книги внимательно ознакомились проф., докт. физ.-матем. наук И. П. Гинзбург, а также проф. А. М. Мхитарян и коллектив руководимой им кафедры. Они высказали ряд критических замечаний, внесли ценные предложения по улучшению рукописи. Всем этим товарищам авторы выражают свою благодарность.

Авторы отдают себе отчет в том, что книга не лишена недостатков и будут признательны читателям, которые найдут возможным высказать свои замечания, направив их по адресу: Москва, К-51, Неглинная ул., 29/14, издательство «Высшая школа».

РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ

МЕТОДЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ И АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО РАСЧЕТА

ГЛАВА I

АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ТРУБЫ

§ 1.1. ПРИНЦИПЫ УСТРОЙСТВА И РАБОТЫ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ТРУБ

1. Основные понятия

Лабораторные установки, создающие газовый поток заданных параметров для экспериментального изучения обтекания твердых тел, называются аэродинамическими трубами. Помещая в этот поток исследуемое тело (модель летательного аппарата, автомобиля, поезда, жилого или производственного здания и т. п.), можно определить действующие на него аэродинамические нагрузки.

Обеспечив предварительный нагрев потока, можно также изучать тепловое воздействие омывающего газа на тело, законы изменения формы этого тела под влиянием уноса массы с поверхности. С помощью различных оптических устройств имеется возможность сделать видимой картину обтекания, обеспечив наблюдение за участками возмущенного потока (скачки уплотнения, местные зоны сжатия и разрежения, пограничный слой и др.).

Исследование силового взаимодействия потока и летательного аппарата представляет собой одну из важнейших задач аэродинамики, решаемых с помощью эксперимента в аэродинамических трубах. В большинстве случаев при проведении таких исследований модель летательного аппарата закрепляется в трубе, а газовый поток набегает на модель с заданной скоростью. Это приводит к тому, что силовое взаимодействие потока и тела происходит в условиях так называемого обращенного движения (в противоположность такому движению полет тела в неподвижной газовой среде носит название прямого движения).

Принцип обращения, как это следует из общего принципа относительности классической механики, применим в случае равномерного прямолинейного поступательного движения тела. При соблюдении этих условий силовое воздействие потока на тело будет одинаковым как в прямом, так и в обращенном движении. Экспериментальные установки, работающие с использованием принципа обращенного

движения, нашли широкое применение в практике аэродинамических исследований.

Аэродинамические трубы, применяемые в настоящее время для определения характеристик летательных аппаратов, состоят из следующих основных элементов: форкамеры, сопла, рабочей части, диффу-

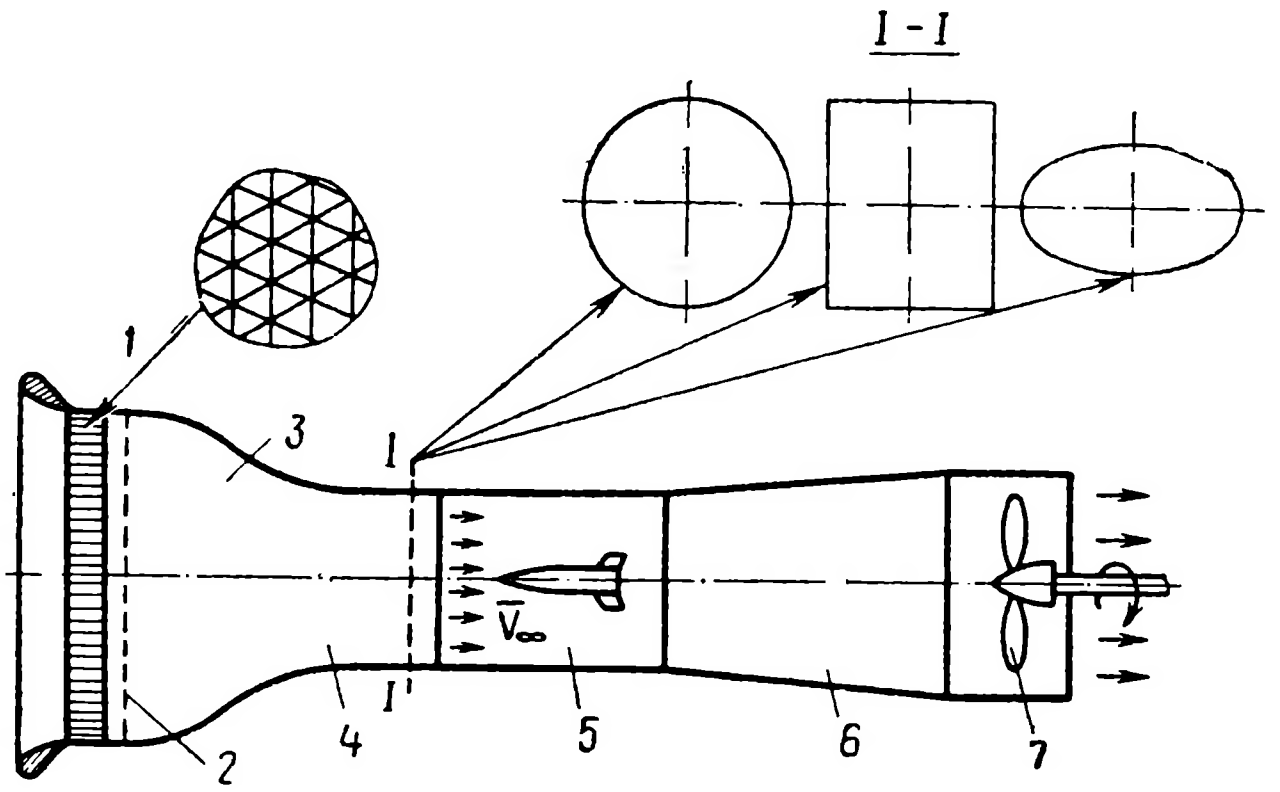


Рис. 1.1.1. Основные элементы аэродинамических труб:

1 — хонейкомб; *2* — сетка; *3* — форкамера; *4* — сопло; *5* — рабочая часть; *6* — диффузор; *7* — привод (вентилятор); *I—I* — возможные формы поперечных сечений сопел

зора и привода (источника энергии). Все эти элементы присущи различным типам труб, как дозвуковым, так и сверхзвуковым, хотя, безусловно, величины скоростей потока, достигаемые в трубах, накладывают существенный отпечаток на их конкретную конструкцию. При этом могут меняться форма и размеры различных узлов и деталей, характер расположения элементов трубы.

На рис. 1.1.1 схематически изображены основные элементы дозвуковой незамкнутой аэродинамической трубы. Воздух в эту трубу попадает через форкамеру, представляющую собой некоторый объем, ограниченный жесткими стенками, с открытой входной частью. Из этого объема газ, находящийся под некоторым давлением, истекает через сопло в рабочую часть трубы. Запас газа в форкамере, необходимый для непрерывной работы трубы, пополняются за счет вентиляторного привода. Форкамера может иметь полузамкнутый объем с открытым выходом для присоединения сопла. Такие форкамеры используются обычно в сверхзвуковых трубах.

В форкамере размещаются приемник полного давления, приборы для измерения температуры и различные устройства для упорядочения движения потока газа перед входом его в сопло (см. рис. 1.1.1). К числу таких устройств относятся хонейкомб, представляющий собой сотообразную решетку, набранную из тонких металлических пластин, и детурбулизирующие сетки.

Хонейкомб разрушает крупные вихри и выравнивает скосы, а сетка способствует созданию равномерного поля скоростей по поперечному сечению форкамеры и уменьшению начальной турбулентности потока. Чем больше размеры форкамеры, тем равномернее поток перед входом в сопло, а это способствует созданию равномерного потока на выходе из сопла и в рабочей части аэродинамической трубы.

Сопло трубы представляет собой канал, имеющий определенную конфигурацию, которая обеспечивает получение заданной скорости однородного газового потока. Форма поперечного сечения сопла обычно определяется видом летательного аппарата, предназначаемого для ис-

следования в трубе (например, овальная форма наиболее подходит для испытания моделей самолетов, круглая—ракет), а также возможностью изготовления такого сопла.

В зависимости от величины скорости потока в трубе сопла подразделяются на до- и сверхзвуковые. Первые имеют вид сужающихся каналов. Скорость потока, создаваемого ими, может регулироваться за счет изменения перепада давления между форкамерой и выходным сечением сопла.

Стенки дозвукового сопла выполняются так, чтобы поток на выходе был равномерным, а струйки газа в нем двигались бы параллельно. Этому требованию отвечает профиль (рис. 1.1.2), рассчитанный по формуле Витошинского:

$$r = r_{вых} \Big/ \sqrt{1-\left[1-\left(\frac{r_{вых}}{r_{вх}}\right)^2\right]\frac{(1-x^2/l^2)^2}{(1+x^2/l^2)^3}}\,, \qquad (1.1.1)$$

где $r_{вх}$ и $r_{вых}$ — радиусы соответственно входного и выходного сечений; l — длина сопла; x — координата сечения вдоль оси сопла.

Сопло, рассчитанное по этой зависимости, имеет несколько неудобную для сопряжения с форкамерой форму входной части из-за резкого изменения в этом месте площади проходного сечения. Практически такое сопряжение осуществляют путем плавного перехода расчетного участка поверхности сопла в форкамеру.

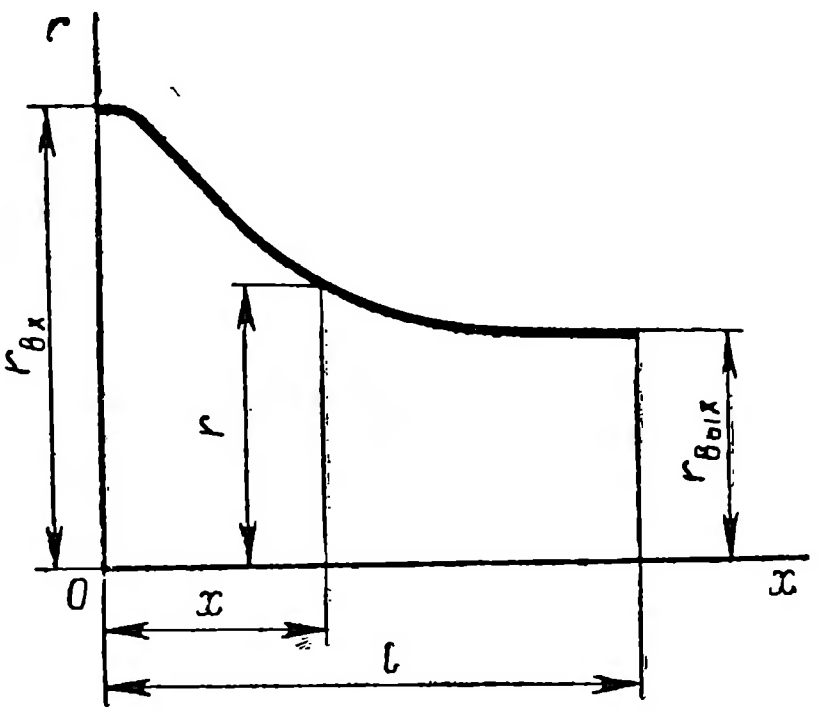


Рис. 1.1.2. Входная часть сопла, рассчитанная по (1.1.1)

Вместо сравнительно простого метода расчета входной части сопла по формуле Витошинского можно использовать другие, хотя и более сложные методы, в частности с использованием электрогидродинамической аналогии (см. § 4.1).

Важной характеристикой дозвуковых сопел является степень поджатия, равная отношению площадей входа $S_{вх}$ и выхода $S_{вых}$ сопла: $n = S_{вх}/S_{вых}$. Как показали исследования, высокая степень поджатия способствует выравниванию профиля скоростей на выходе и уменьшению турбулентности. При этом также существенно уменьшается потребная мощность привода, так как скорости потока воздуха по внутренним каналам трубы с таким соплом невелики и, следовательно, небольшими будут гидравлические потери, на которые расходуется энергия привода.

Сверхзвуковые сопла имеют дозвуковой участок, в котором воздух, поступающий из форкамеры, разгоняется до звуковой скорости, и сверхзвуковой участок, на котором происходит дальнейший разгон и окончательное формирование равномерного сверхзвукового потока.

Каждое сверхзвуковое сопло может обеспечить получение лишь определенного значения числа Маха на выходе $\mathbf{M}_\infty$, зависящего от величины отношения $S_{кр}/S_{вых}$, где $S_{кр}$ и $S_{вых}$ — площади соответственно критического и выходного сечений сопла. Поэтому сверхзвуковые аэродинамические трубы с целью получения нескольких значений числа $\mathbf{M}_\infty$ комплектуются соответствующим набором сменных сопел.

Сверхзвуковые сопла прямоугольного поперечного сечения можно сделать регулируемыми (рис. 1.1.3). Для этой цели гибкая стенка

1 сопла деформируется с помощью гидравлических домкратов *2*, в результате чего изменяются величина отношения $S_{кр}/S_{вых}$, а также профиль стенки. Такую регулировку сопла можно производить во время эксперимента, добиваясь плавного изменения числа M_∞ на выходе. Аэродинамические трубы с регулируемыми соплами удобны в эксплуатации, но сложны в изготовлении.

Для обеспечения на выходе равномерного потока сверхзвуковые сопла выполняются с профилированными стенками. Для их расчета обычно пользуются методом характеристик.

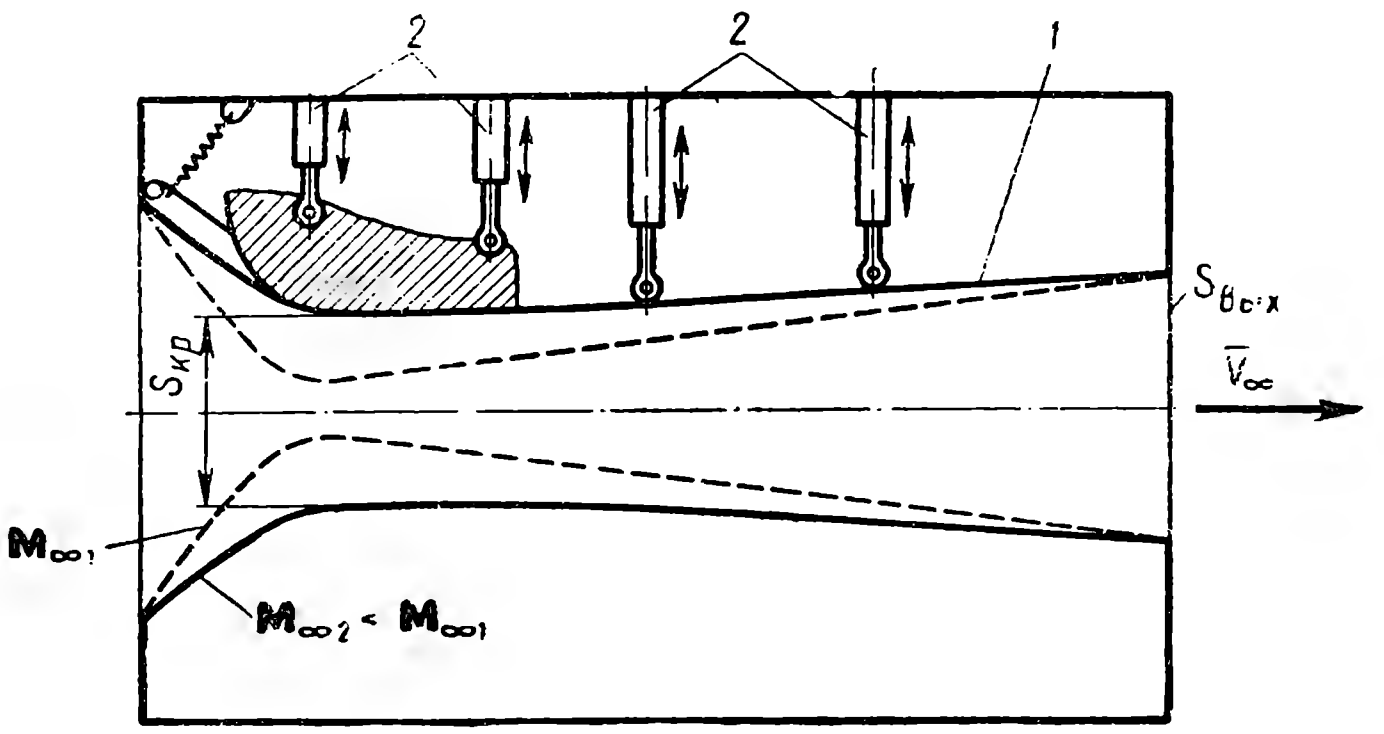


Рис. 1.1.3. Схема сверхзвукового сопла с плавно изменяемой формой стенок:

1 — гибкая стенка; *2* — домкраты; стрелками показаны возможные направления перемещения стенок сопла; — — — — — положение стенок при $M_{\infty 2} < M_{\infty 1}$

Пограничный слой, образующийся на стенках, суживает проходные сечения сопла, что влечет за собой снижение числа Маха на выходе по сравнению с его расчетным значением, так как уменьшается величина отношения площадей выходного и критического сечений. Такого неблагоприятного влияния пограничного слоя на течение газа можно избежать путем увеличения поперечного сечения сопла, найденного методом характеристик, на величину, равную удвоенной толщине вытеснения пограничного слоя $2\delta^*$. Этим в известной степени компенсируется сужение проходных сечений сопла, вызванное пограничным слоем.

Рабочая часть является той частью трубы, где устанавливаются испытываемые модели летательных аппаратов или отдельные их элементы. Газовый поток здесь должен иметь равномерное поле скоростей, температур и давлений.

Рабочие части труб могут быть открытыми и закрытыми, а также иметь вид герметической камеры; схемы их представлены на рис. 1.1.4.

В открытой рабочей части (рис. 1.1.4, *а*) удобно проводить визуальные наблюдения — она обеспечивает свободный доступ к модели при ее установке. Однако в такой рабочей части велики потери кинетической энергии потока, вызванные взаимодействием струи с окружающим воздухом, что приводит к необходимости увеличения мощности привода. В аэродинамической трубе с открытой рабочей частью исключена опасность запирания трубы (см. § 1.3). Это дает возможность использовать модели большего размера, чем в случае применения рабочей части, ограниченной стенками.

Закрытая рабочая часть (рис. 1.1.4, *б*) позволяет менять давление около модели в широких пределах. Возможность проводить эксперимент в условиях разрежения в рабочей части позволяет значи-

тельно уменьшить давление в форкамере, т. е. экономно расходовать энергию, необходимую для работы трубы. Например, в трубе, давление в рабочей части которой равно 0,048 *кГ/см²*, для получения потока с числом $M_\infty=5$ потребуется давление около 25 *атм*, в то время как в трубе с открытой рабочей частью — свыше 520 *атм*. Снижение давлений в форкамерах труб с закрытой рабочей частью обусловливает уменьшение стоимости их оборудования и эксплуатации.

Следует также иметь в виду, что конструкции труб, предназначенных для очень больших сверхзвуковых скоростей, могут быть реальными только при использовании закрытой рабочей части, так как в трубах с открытой рабочей частью их форкамеры нельзя изготовить настолько прочными, чтобы они противостояли большим давлениям. Аэродинамические качества потока в закрытой рабочей части трубы выше, чем в открытой. В частности, поток в ней более равномерный как по направлению, так и по величине скорости.

К недостаткам труб с закрытой рабочей частью относятся: относительная сложность их конструкции; затруднения в обслуживании модели в закрытом пространстве; необходимость тщательной герметизации этого пространства; усложнение аэродинамических весов.

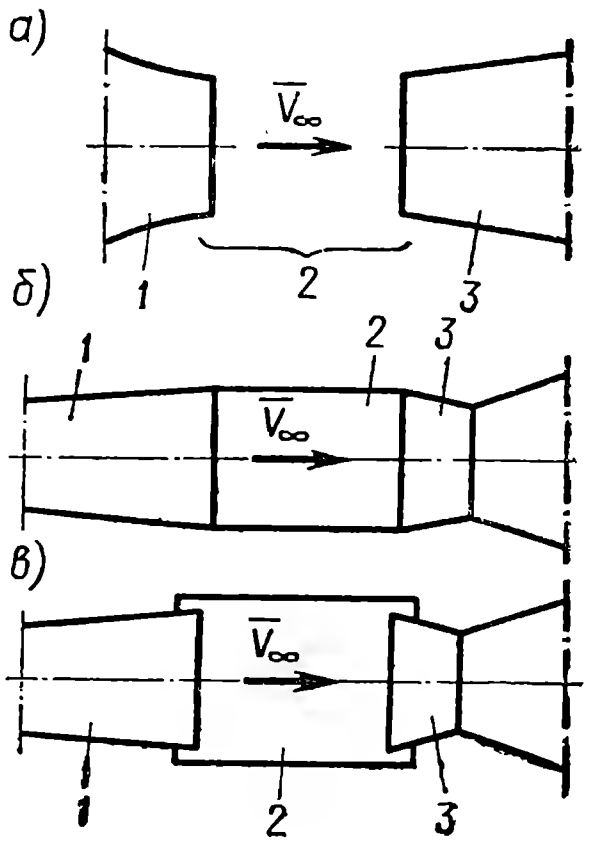


Рис. 1.1.4. Рабочие части аэродинамических труб:

а — открытая; *б* — закрытая; *в* — в виде герметической камеры;
1 — сопло; *2*—рабочая часть; *3* — диффузор

Рабочая часть в виде герметической камеры (рис. 1.1.4, *в*) позволяет изменять давление в потоке и тем самым более успешно имитировать полет на различных высотах. За счет снижения давления в такой камере уменьшается также давление в форкамере, необходимое для достижения расчетного числа M_∞.

Бóльшие по сравнению с закрытой рабочей частью размеры камеры упрощают установку и обслуживание модели. Существенный недостаток такой формы рабочей части заключается в потерях энергии на внешней границе струи за счет вихреобразования и ее смешения с окружающей средой, а также при расширении струи на выходе из сопла. Необходимо подчеркнуть, что все эти потери превышают по величине потери на трение потока о стенки в закрытой рабочей части.

В рабочей части, выполненной в виде герметической камеры (иногда ее называют камерой Эйфеля), можно осуществить непрерывное изменение чисел M_∞ в околозвуковой области, так как свободное расширение потока около модели предотвращает запирание трубы.

Практика показала, что при расчете аэродинамической трубы длина ее рабочей части обычно составляет 2÷3 диаметра выходного сечения сопла.

Диффузор располагается сразу за рабочей частью и представляет собой специальным образом спрофилированный канал, служащий для уменьшения скорости потока газа с целью наиболее эффективного превращения его кинетической энергии в энергию давления. Такая форма канала уменьшает газодинамические потери в потоке (в основном на вихреобразование и скачки уплотнения) и обеспечивает, как следствие, повышение экономичности трубы (снижение стоимости энергетического оборудования, уменьшение затрат на проведение экспериментов).

Различают дозвуковой и сверхзвуковой диффузоры. Первый из них представляет собой расширяющийся вниз по течению

канал, в котором дозвуковой поток постепенно тормозится (см. рис. 1.1.4, *а*).

Исследования показали, что наименьшие потери энергии имеют место при углах расширения диффузора 6÷8°. При бóльших значениях этого угла длина диффузора уменьшается, и, хотя при этом снижаются потери на трение, создаются условия для отрыва пограничного слоя и образования мощных вихрей. В результате суммарные потери могут значительно возрасти. Если же угол расширения менее расчетного, то длина диффузора станет больше, возрастут потери на трение, а также увеличатся размеры трубы.

Сверхзвуковой диффузор состоит из начального сужающегося канала и следующего за ним расширяющегося участка трубы (см. рис. 1.1.4, *б* и *в*). В сужающемся канале сверхзвуковая скорость газа постепенно снижается за счет образования скачков уплотнения. Возникающий при этом дозвуковой поток затем попадает в дозвуковую (расширяющуюся) часть диффузора, где вследствие расширения скорость этого потока еще больше снижается.

Из теории скачков уплотнения известно, что торможение сверхзвукового потока, вызванное системой косых скачков, сопровождается меньшими потерями полного давления, чем торможение за счет прямого скачка. Поэтому сверхзвуковую часть канала диффузора профилируют так, чтобы торможение осуществлялось в системе косых скачков уплотнения. При этом каждому значению скорости потока в рабочей части соответствует своя оптимальная (обеспечивающая наименьшие потери полного давления) система скачков и, следовательно, определенная форма сверхзвукового диффузора.

Исследования показали, что изготовление регулируемых диффузоров оптимальной формы, которая изменяется во время работы трубы, существенного выигрыша в газодинамическом смысле не дает. Практически использование таких диффузоров значительно усложняет конструкцию трубы и ее эксплуатацию. По этой причине регулируемые диффузоры не нашли широкого применения.

Важное требование к конструкции диффузоров заключается в том, чтобы обеспечить положительный продольный градиент давления достаточно малым по величине с целью избежать отрыва пограничного слоя и интенсивного вихреобразования. В противном случае возникающие в связи с этим потери энергии, соизмеримые с потерями в скачках уплотнения, могут значительно снизить эффективность диффузора.

Привод аэродинамической трубы представляет собой устройство, сообщающее потоку газа необходимую энергию, при которой его скорость в рабочей части достигает заданного значения. В качестве привода в дозвуковых трубах часто применяются низконапорные осевые вентиляторы, в сверхзвуковых трубах — многоступенчатые компрессоры. Трубы кратковременного действия оснащаются поршневыми компрессорами, накачивающими газ в баллоны под высоким давлением, из которых он затем поступает в трубу.

Мощность привода в зависимости от размеров рабочей части и числа $\mathbf{M}_\infty$ в ней меняется в широких пределах. Наибольшая мощность, достигнутая в современных крупных высокоскоростных трубах, составляет около 200 тыс. *квт*.

Одно из требований, предъявляемых к приводу, состоит в необходимости обеспечения регулирования числа оборотов вентилятора (компрессора). Это позволяет изменять скорость потока в рабочей части, т. е. проводить испытания при разных числах $\mathbf{M}_\infty$ и $\mathbf{Re}_\infty$.

Помимо перечисленных основных элементов в конструкцию трубы могут включаться другие устройства, необходимые для обеспечения специальных условий эксперимента. К таким устройствам относятся

осушители, служащие для удаления из воздуха излишней влаги, искажающей картину течения в рабочей части. В отдельных конструкциях труб используются подогреватели, необходимые при исследовании аэродинамического нагрева или для предотвращения конденсации компонентов газа. Такая конденсация может наступить вследствие глубокого охлаждения газа при расширении его в сопле. В трубах непрерывного действия за счет трения потока о стенки и лопасти вентилятора происходит нагрев газа. Поэтому в конструкцию таких труб включают различного рода теплообменники, охлаждающие газ.

2. Классификация труб и основные требования, предъявляемые к ним

В основном все использующиеся в настоящее время аэродинамические трубы можно разделить по конструктивным признакам на трубы замкнутого и незамкнутого типа. В трубах первого типа (рис. 1.1.5) непрерывно циркулирует одна и та же масса газа. Трубы замкнутого типа могут работать при различных давлениях в закрытой рабочей части и использоваться, следовательно, как трубы переменной плот-

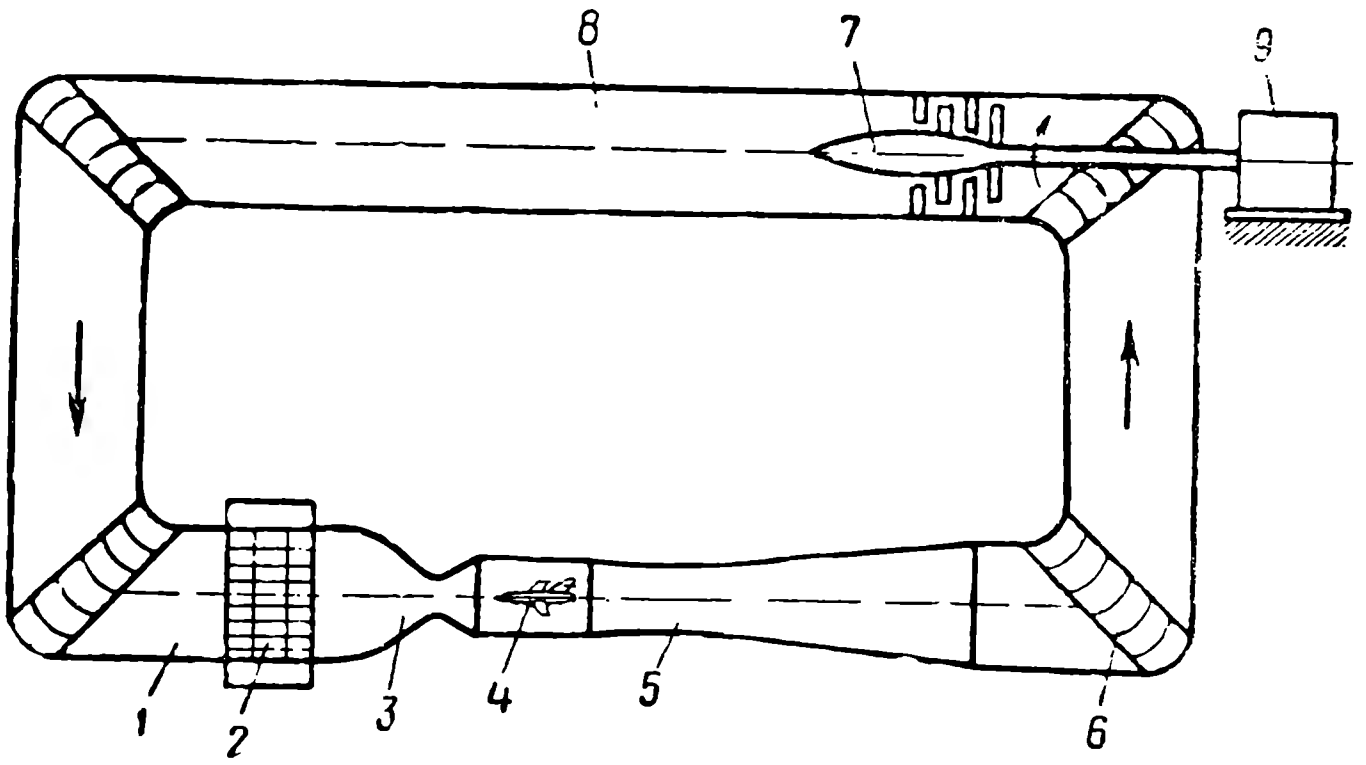


Рис. 1.1.5. Схема замкнутой аэродинамической трубы:

1 — форкамера; *2* — теплообменник для охлаждения рабочего газа; *3* — сопло; *4* — модель в рабочей части; *5* — диффузор; *6* — лопатки, изменяющие направление движения газа; *7* — компрессор; *8* — обратный канал; *9* — электромотор

ности, обеспечивая тем самым возможность исследований обтекания моделей при разных числах Рейнольдса $\mathbf{Re}_\infty = V_\infty l/\nu_\infty$, где V_∞, $\nu_\infty = \mu_\infty/\rho_\infty$ — соответственно скорость и коэффициент кинематической вязкости потока в рабочей части.

С этой целью в контуре трубы перед экспериментом с помощью специальных устройств (компрессор, вакуум-насос) повышают или понижают давление, изменяя тем самым плотность газа, циркулирующего по трубе. Естественно, что стенки такой трубы должны иметь достаточную прочность, а привод — повышенную мощность. В современных замкнутых трубах некоторое количество циркулирующего в ней воздуха может выводиться наружу через специальные клапаны для компенсации его нагрева (поддержания заданной температуры).

В незамкнутых трубах газ, попав в рабочую часть через сопло, затем выбрасывается из трубы. В таких трубах происходит как бы непрерывная смена потоков газа. Так как в каждый момент работы незамкнутой трубы в нее попадает новое количество газа, который должен разгоняться до расчетной скорости, расход энергии в такой трубе

выше, чем в замкнутой установке, где необходимо лишь поддерживать движение циркулирующего газа.

Преимуществом трубы незамкнутого типа является относительно меньшая ее стоимость. Что же касается аэродинамических свойств той и другой трубы, то они зависят от вида применяемых сопел, рабочих частей, диффузоров, обратных каналов, а также спрямляющих аппаратов, устанавливаемых в местах изгибов этих каналов.

В зависимости от скорости потока в рабочей части аэродинамические трубы можно подразделить на дозвуковые ($0<M_\infty<0{,}8$), околозвуковые ($0{,}8<M_\infty<1{,}2$), сверхзвуковые ($1{,}2<M_\infty<5$) и гиперзвуковые ($M_\infty>5$). Иногда эта классификация дополняется трубами малых ($0<M_\infty<0{,}5$) и больших дозвуковых ($0{,}5<M_\infty<1$) скоростей.

Первые три вида труб могут выполняться как по замкнутой, так и незамкнутой схемам. Гиперзвуковые трубы строятся обычно незамкнутыми и с обязательным подогревом рабочего газа.

По виду рабочей части аэродинамические трубы разделяются на трубы с открытой и закрытой рабочими частями, а также с герметической камерой.

В зависимости от длительности работы трубы бывают кратковременного и постоянного действия. Труба кратковременного действия позволяет испытывать модели лишь в течение малого промежутка времени (несколько минут). Питание такой трубы осуществляется от батареи баллонов высокого давления, куда воздух предварительно накачивается компрессорами. Емкость баллонной батареи определяет продолжительность работы аэродинамической трубы.

Кроме труб, работающих от баллонов высокого давления, кратковременными являются вакуумные трубы, в которых перепад давления, необходимый для достижения заданного числа M_∞ в рабочей части, создается путем образования разрежения на выходе из диффузора. Для этой цели применяют либо расположенную за диффузором емкость, из которой перед экспериментом откачивают воздух, либо эжектор, приводимый в действие во время работы трубы. При этом эжектируемый воздух, создающий поток в рабочей части, поступает в трубу из баллонов или непосредственно из атмосферы. Сжатый воздух, необходимый для работы эжектора, предварительно накачивается в баллоны высокого давления. Запас этого воздуха определяет продолжительность работы установки кратковременного действия с эжектором.

В трубах постоянного действия поток газа создается с помощью осевого компрессора, встроенного в аэродинамическую трубу и обеспечивающего необходимую степень сжатия газа для достижения заданных чисел M_∞. Время действия такой трубы практически неограниченно и определяется условиями эксперимента. Трубы постоянного действия сложнее по конструкции, дороже в изготовлении, но обладают определенными преимуществами: позволяют более точно воспроизводить заданные параметры потока и сохранять их значения постоянными в рабочей части в течение длительного времени. Это дает возможность получать результаты эксперимента с большой степенью достоверности.

Аэродинамические трубы должны удовлетворять ряду требований. Одно из них связано с созданием равномерного поля скоростей в рабочей части. Для обеспечения такого поля необходимо выполнять аэродинамический контур трубы (включающий в себя форкамеру, сопло, рабочую часть, диффузор, обратный канал), устройства, расположенные в трубе (спрямляющие решетки, детурбулизирующие сетки, датчики давлений и температуры), а также трубопроводы,

подводящие рабочий газ к форкамере (для баллонных труб), так, чтобы они не создавали условий для возникновения в движущемся газе возмущений (отрыва пограничного слоя и образования вихрей, скосов потока и т. п.). Эти возмущения, возникнув в какой-либо части контура, будут искажать поток, нарушая его равномерность далеко вниз по течению, в том числе и в рабочей части. Поэтому внутренние поверхности трубы должны иметь плавные переходы и повороты, а также тщательно обрабатываться; в местах поворота потока устанавливаются направляющие лопатки (см. рис. 1.1.5); принимаются меры, предупреждающие отрыв пограничного слоя: не допускают больших углов расширения в диффузорах, отсасывают пограничный слой, образующийся на стенках сопла и рабочей части, и др.

Равномерность скоростей в рабочей части характеризуется величиной отношения $\Delta V/V_{ср}=(V-V_{ср})/V_{ср}$, где V и $V_{ср}$ — соответственно местная и средняя скорости в рассматриваемой точке поперечного сечения рабочей части аэродинамической трубы. Эта величина в хорошо отлаженных трубах должна удовлетворять неравенству

$$\Delta V/V_{ср} \leqslant |0{,}75\%|.$$

Поток в рабочей части должен иметь по возможности малый скос относительно оси трубы. Это обеспечивается установкой в трубе хонейкомба, направляющих лопаток и других устройств, препятствующих скашиванию потока. Для характеристики такого скоса обычно измеряют угол $\Delta\alpha$ между проекцией вектора скорости в рассматриваемой точке потока на горизонтальную плоскость симметрии рабочей части и ее осью, а также угол $\Delta\beta$ между проекцией этого вектора скорости на вертикальную плоскость симметрии и той же осью. В современных конструкциях труб эти углы должны находиться в пределах:

$$\Delta\alpha \ll |0{,}5°|, \quad \Delta\beta \ll |0{,}5°|.$$

Важное требование к современным конструкциям труб состоит в обеспечении малого продольного градиента давления dp/dx в рабочей части. Возникновение такого градиента в рабочей части объясняется ее загромождением моделью летательного аппарата, конфигурацией стенок рабочей части и сопла, а также образованием на стенках трубы пограничного слоя, суживающего проходные сечения.

Градиент давления создает эффект «выталкивающей силы», действующей на модель в направлении убывания величины p. В результате продольная сила, действующая на модель, определяется с ошибкой, величина которой может быть приближенно рассчитана по формуле

$$\Delta Q = W_т (dp/dx), \qquad (1.1.2)$$

где $W_т$ — объем модели. При доводке трубы следует стремиться уменьшать градиент давления до нуля.

Достоверность экспериментальных данных, полученных в аэродинамических трубах, зависит от степени турбулентности потока в рабочей части, называемой также начальной турбулентностью и определяемой выражением [20]

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{3}\left(\overline{V_x'^2}+\overline{V_y'^2}+\overline{V_z'^2}\right)}/V_\infty.$$

Здесь V_∞ — осредненная скорость потока в рабочей части при турбулентном движении; $\overline{V_x'^2}$, $\overline{V_y'^2}$, $\overline{V_z'^2}$ — среднеквадратические значения турбулентных пульсаций компонент скорости в направлении осей координат.

Так как в аэродинамических трубах обычно имеет место так называемая изотропная турбулентность, когда $\overline{V_x'^2}=\overline{V_y'^2}=\overline{V_z'^2}$, то $\varepsilon=\sqrt{\overline{V_x'^2}}/V_\infty$. Обычно степень турбулентности определяется в процентах:

$$\varepsilon=\left(\sqrt{\overline{V_x'^2}}/V_\infty\right)100\%. \qquad (1.1.3)$$

В соответствии с рис. 1.1.6, на котором изображено изменение пульсационной скорости в направлении продольной оси рабочей части,

$$V_{ср}=V_\infty=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}V\,dt,\quad \overline{V'^2}=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}(V-V_{ср})^2\,dt,$$

где V — истинная скорость в рассматриваемой точке потока в данный момент времени; $(t_2—t_1)$ — конечный промежуток времени.

Установлено, что турбулентность в атмосфере составляет примерно 0,02%, а в рабочей части аэродинамической трубы, в зависимости от конструктивных особенностей сопла, форкамеры, трубопроводов, подводящих газ от баллонов, и др., она может быть выше. Повышенная начальная турбулентность оказывает неблагоприятное влияние на результаты эксперимента, так как вызывает преждевременный переход ламинарного пограничного слоя на модели в турбулентный. Требование уменьшения начальной турбулентности потока до атмосферной имеет особое значение для малоскоростных труб, так как сопротивление летательных аппаратов при небольших скоростях полета определяется в большей своей части трением, величина которого зависит от положения точки перехода на обтекаемой поверхности.

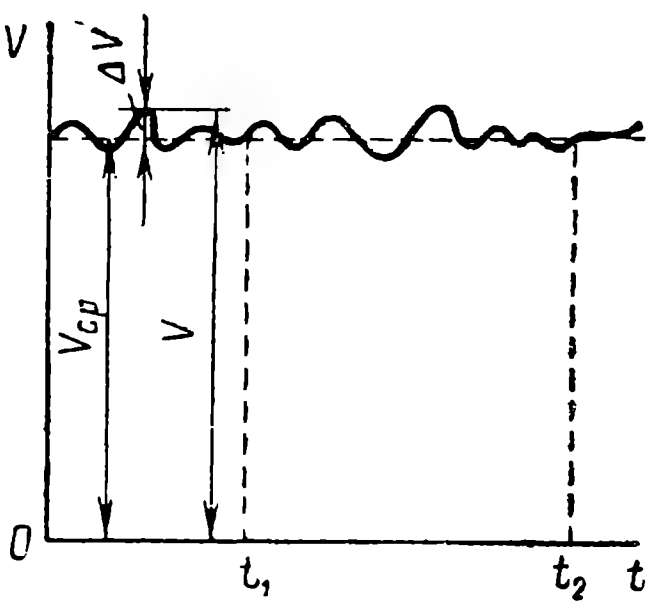


Рис. 1.1.6. Характер изменения величины скорости в турбулентном потоке газа

Влияние начальной турбулентности в рабочей части аэродинамической трубы на характер поляры исследуемого профиля крыла хорошо видно на рис. 1.1.7, где изображены зависимости $c_y=c_y(c_x)$, полученные при одном и том же числе $\mathbf{Re}_\infty=V_\infty l/\nu_\infty$, но при разных значениях ε. Нетрудно заметить, что при одном и том же значении c_y повышение начальной турбулентности может привести к увеличению сопротивления профиля почти вдвое.

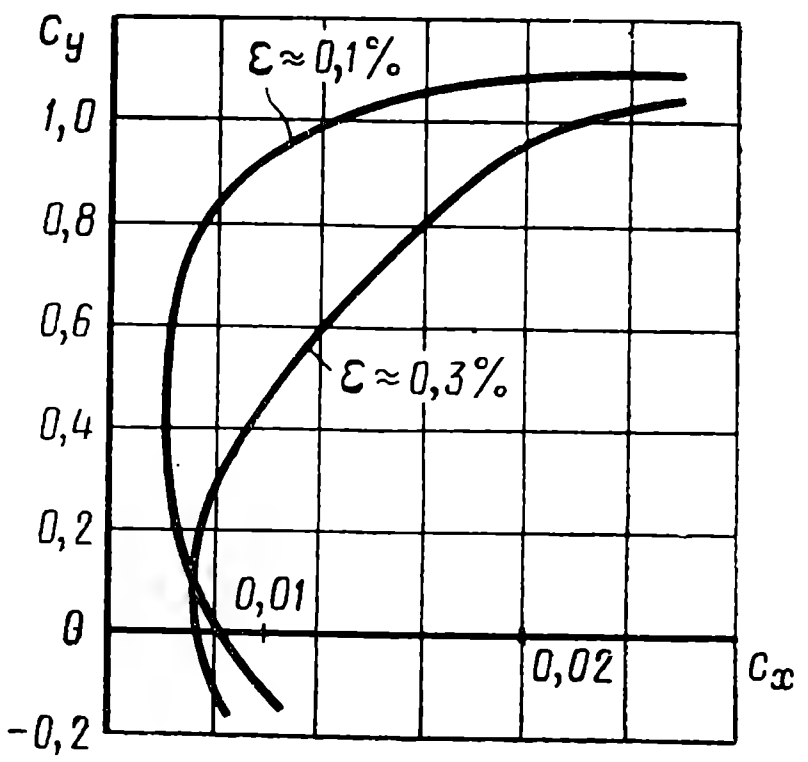


Рис. 1.1.7. Влияние начальной турбулентности потока на вид поляры профиля

Для уменьшения начальной турбулентности может быть предпринят ряд эффективных мер. В частности, в форкамере, где поток имеет небольшую скорость, поперек трубы устанавливают мелкую металлическую сетку, которая устраняет крупные вихри, разбивая их на большое количество более мелких, которые быстро затухают. Одновременно каналы трубы, по которым движется газ, выполняют с плавными переходами, чтобы не допустить отрыва потока от стенок и образования вихрей. Для этой же цели стенки полируют, устраняя шеро-

ховатости, и в поворотных коленах устанавливают направляющие лопатки.

В ряде случаев при проведении специальных исследований, связанных с турбулентным характером движения, требуется не уменьшение, а, наоборот, увеличение начальной турбулентности. Это обычно достигается установкой турбулизирующих сеток на выходном срезе сопла.

Одной из важных характеристик аэродинамической трубы является ее качество, определяющее экономичность установки. Эта характеристика $\lambda_т$ представляет собой отношение кинетической энергии потока в рабочей части $mV_\infty^2/2$ к мощности N, потребляемой приводом, т. е.

$$\lambda_т = mV_\infty^2/(2\cdot 102N) = \rho_\infty V_\infty^3 S/(204N), \qquad (1.1.4)$$

где m — секундный массовый расход газа в трубе; ρ_∞ — плотность воздуха, $кГ\cdot сек^2/м^4$; V_∞ — скорость газа в рабочей части, $м/сек$, площадь поперечного сечения которой S, $м^2$; N — мощность мотора компрессора трубы, $квт$.

Потери энергии в трубе можно разделить на механические (в механизме привода) и гидродинамические (потери на вихреобразование и трение). В соответствии с этим можно ввести еще одну характеристику аэродинамической трубы, определяющую качество потока:

$$\lambda_п = mV_\infty^2/(204N_в), \qquad (1.1.5)$$

где $N_в$ — мощность вентилятора (компрессора), затрачиваемая на преодоление гидродинамических потерь. Если обозначить эти потери через $\Sigma h_п$, где $h_п$ — составляющие потерь, то

$$102N_в = \Sigma h_п.$$

Так как при установившемся движении

$$\sum h_п = \frac{mV_\infty^2}{2}\sum\left(\xi_к\frac{V_к^2}{V_\infty^2} + \lambda_i\frac{l_i}{d_i}\cdot\frac{V_i^2}{V_\infty^2}\right) = \frac{mV_\infty^2}{2}\zeta_\Sigma, \qquad (1.1.6)$$

то качество потока

$$\lambda_п = 1/\zeta_\Sigma. \qquad (1.1.7)$$

Здесь ζ_Σ — суммарный коэффициент сопротивления тракта трубы; $\xi_к$ — коэффициент местных потерь; λ_i — коэффициент сопротивления трения; $V_к$ — скорость потока за участком, для которого рассматривается местное сопротивление; V_i — скорость на участке трубопровода длиной l_i и диаметром d_i, для которого определяется сопротивление трения.

Чем выше качество трубы $\lambda_т$ и потока $\lambda_п$, тем более совершенной является конструкция трубы. В современных установках, предназначенных для получения воздушных потоков с дозвуковыми скоростями и обладающих хорошими аэродинамическими свойствами, качество трубы достигает значений $\lambda_т \approx 4 \div 5$. Так, например, одна из современных труб замкнутого типа, имея площадь рабочей части $S = 6{,}1 \times 6{,}1$ $м^2$, скорость потока $V_\infty = 134$ $м/сек$ и привод мощностью 11 000 $квт$, обладает качеством $\lambda_т = 4{,}8$. На рис. 1.1.8 показано примерное изменение качества различных труб в зависимости от числа $\mathbf{M}_\infty$ в рабочей части.

Исследования показали [35], что повышение давления и снижение температуры газа в рабочей части позволяют увеличить качество трубы. Это обусловливает также повышение качества потока; в существующих конструкциях труб величина этого качества может достигать $5 \div 6$.

Следует иметь в виду, что, несмотря на важное значение характеристик $\lambda_т$ и $\lambda_п$, основные требования, которым должна удовлетворять труба, связаны с необходимостью обеспечения равномерного поля скоростей, малых скосов потока, допустимой начальной турбулентности.

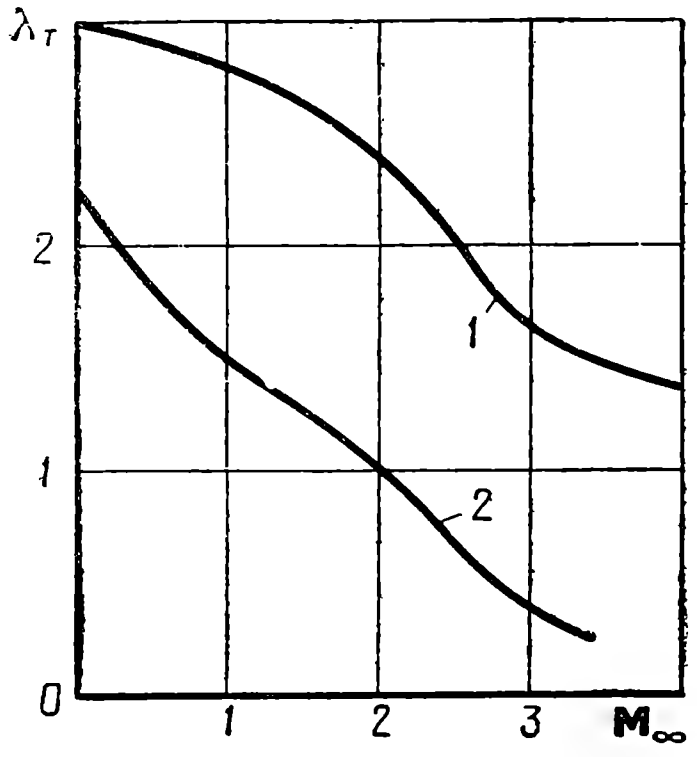


Рис. 1.1.8. Изменение качества аэродинамических труб в зависимости от числа M_∞ в рабочей части:

1 — труба замкнутого типа; *2* — эжекторная труба

3. Основные виды экспериментов в аэродинамических трубах

Рассмотрим основные виды экспериментальных исследований в современных аэродинамических трубах, связанных с изучением обтекания летательных аппаратов и определением их аэродинамических характеристик.

Весовые испытания. Такие испытания предназначены для измерений аэродинамическими весами сил и моментов, действующих на летательный аппарат. При осуществлении этих измерений обычно используется модель летательного аппарата, которая закрепляется при помощи специальных державок на чувствительных элементах весов и помещается в рабочую часть трубы.

По измеренным силам и моментам определяются безразмерные аэродинамические коэффициенты. Для этой цели необходимо знать некоторые параметры потока в рабочей части трубы (например скоростной напор). Определение этих параметров производится при помощи специальных устройств и, как правило, одновременно с весовыми измерениями.

Важное преимущество весовых испытаний состоит в том, что они позволяют определять полную аэродинамическую силу или момент, являющихся результатом воздействия на обтекаемую поверхность летательного аппарата одновременно трения и давления.

Дренажные исследования. Для проведения таких исследований в стенке летательного аппарата просверливаются дренажные отверстия малого диаметра, каждое из которых соединяется с манометром. Во время работы аэродинамической трубы фиксируются показания этих манометров, по которым определяется соответствующее давление. В результате находят поле давлений на заданной поверхности летательного аппарата. Анализируя такое распределение давлений, можно сделать вывод о характере обтекания поверхности, наличии скачков уплотнения, структуре пограничного слоя и т. п.

По найденному распределению давлений можно вычислить суммарные аэродинамические силы и моменты, обусловленные этим распределением.

На рис. 1.1.9 представлена схема выполнения дренажного отверстия на обтекаемой поверхности и соединения этого отверстия (приемника давления) с манометром. Выбор количества и формы расположения дренажных отверстий на модели является существенным этапом подготовки эксперимента. В зависимости от целевого назначения такого эксперимента количество и расположение дренажных отверстий может быть различным. При этом всегда следует иметь в виду, что такие отверстия должны обязательно размещаться в местах предполагаемого значительного изменения давления и при условии достаточно близкого расположения их друг от друга. Это необходимо для того, чтобы картина распределения давления была выявлена наиболее полно, что поз-

волит свести к минимуму погрешности при аппроксимации функции распределения давления по экспериментальным данным.

При выборе количества и схемы расположения дренажных отверстий необходимо учитывать особенности конструкции модели и ее державки. В частности, общее количество таких отверстий может быть ог-

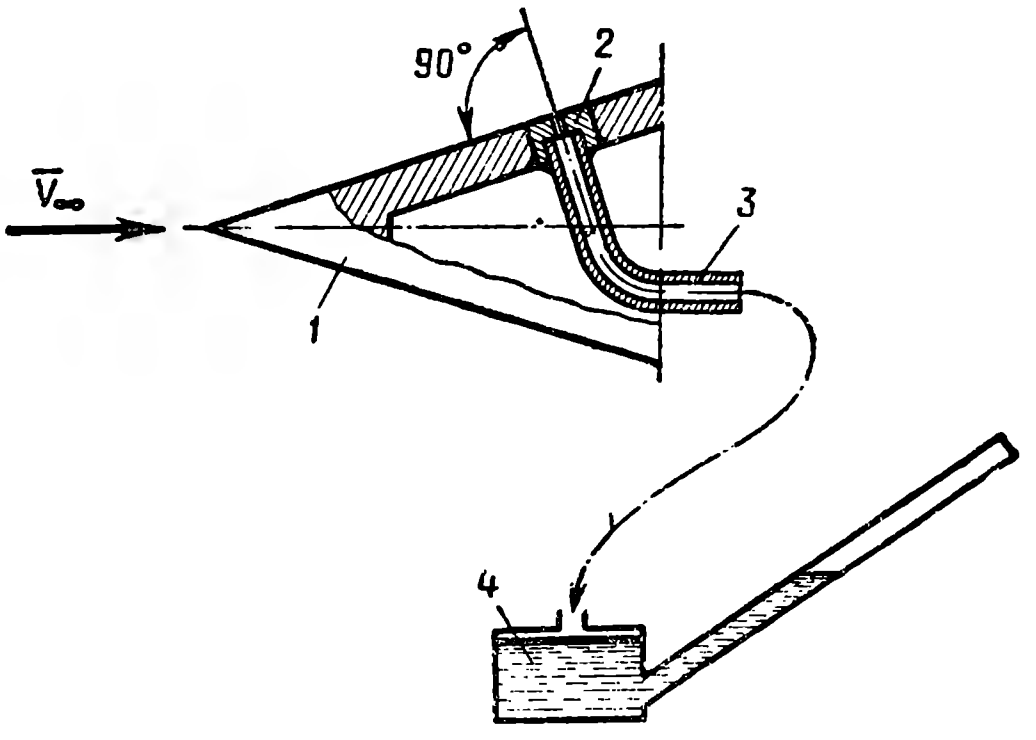


Рис. 1.1.9. Схема измерения давления на обтекаемой поверхности:

1 — испытываемый летательный аппарат; *2* — втулка с просверленным в ней дренажным отверстием; *3* — соединительная трубка; *4* — манометр

раничено допустимым числом дренажных трубок, которые можно разместить в державке и подвести к модели. Кроме того, при исследовании обтекания тонких тел (тонкое крыло или корпус) бывает практически невозможно расположить дренажные отверстия на тех участках поверхности, к которым нельзя подвести дренажные трубки из-за малых поперечных сечений тела.

Особенность дренажных испытаний состоит в том, что по их результатам определяется лишь та составляющая полной аэродинамической силы, которая обусловлена давлением. Силы трения в этом случае не могут быть измерены.

Визуальные методы. При аэродинамических исследованиях широко используются визуальные методы, основанные на различных оптических эффектах, позволяющих наблюдать картину потока около обтекаемого тела или, как говорят, обеспечивающих визуализацию такого потока. Зная визуальную картину обтекания, можно использовать ее вместе с численными результатами расчета действующих сил и моментов для усовершенствования аэродинамической формы проектируемого летательного аппарата.

Существует несколько методов визуального исследования газовых потоков. Наиболее распространенными из них являются оптические методы, основанные на свойстве воздуха (или вообще газа) изменять коэффициент преломления в зависимости от плотности. Специальными приборами, которыми оснащены аэродинамические трубы, можно зафиксировать на фотопластинке неоднородное поле плотностей; по этому полю методами аэродинамики можно рассчитать распределение давлений и других параметров обтекающего газа. Подробно эти методы будут рассмотрены в гл. II.

Помимо оптических существуют другие методы визуализации газовых потоков, основанные на введении в исследуемую газовую область частиц твердых тел или жидкостей. Двигаясь по течению, такие частицы создают видимую картину обтекания поверхности. В аэродинамических лабораториях нашел распространение, в частности, дымовой ме-

тод, используемый при относительно небольших скоростях движения воздуха (примерно до 40 *м/сек*). Согласно этому методу в рабочую часть незамкнутой аэродинамической трубы вводят через специальные насадки дымовые струйки, благодаря которым можно наблюдать аэродинамический спектр обтекания заданной поверхности.

В соответствии с методом газовых струек в поток, обтекающий исследуемую модель, поступает химически активный газ, который, взаимодействуя с веществом, нанесенным на поверхность этой модели, оставляет ясно видимые следы, позволяющие делать заключение о характере течения в пограничном слое.

В последние годы разработаны эффективные методы сублимации, позволяющие исследовать течение в пограничном слое. Для этого на поверхность тела наносятся твердые вещества, легко испаряющиеся во время испытания такого тела в аэродинамической трубе. Так как скорость испарения (сублимации) имеет разную величину в ламинарной и турбулентной зонах пограничного слоя, то после выключения трубы на исследуемой поверхности сохраняются следы, позволяющие судить о протяженности этих зон.

Существуют и другие методы визуализации обтекания тел (наклеивание легкоподвижных шелковинок, вдув дыма через отверстия на обтекаемой поверхности и др.), позволяющие изучить те или иные аэродинамические явления. С этими методами можно ознакомиться по специальной литературе [51, 52].

Изучение аэродинамического нагрева и теплового разрушения летательных аппаратов. Экспериментальные исследования аэродинамического нагрева основаны на обеспечении достаточно большой разности между температурой поверхности исследуемого тела и температурой газа у этой поверхности, близкой к температуре торможения. Это может быть достигнуто либо путем предварительного охлаждения модели, либо подогревом обтекающего воздуха в форкамере. При этом температура поверхности модели в процессе эксперимента фиксируется с помощью тепловых датчиков

Если время выхода трубы на заданный режим установившегося обтекания подогретым воздухом велико, то испытываемое тело может нагреться до высоких температур, что приведет к невозможности эксперимента из-за малой разности температур поверхности и омывающего газа. Вот почему следует защищать модель от воздействия потока в период установления режима обтекания. С этой целью для модели предусматривают специальные защитные колодки, которые во время проведения эксперимента снимаются [44].

При исследовании теплового разрушения фотографируют модель, фиксируя характер такого разрушения во времени, а также измеряют температуру модели в разных точках с помощью термопар.

Особенности конструкции труб. Рассмотренные методы исследования в аэродинамических трубах предъявляют определенные требования как к их конструкции, так и к измерительным устройствам, которыми такие трубы оснащаются. Так, при весовых испытаниях в зависимости от конструкции применяемых весов следует предусмотреть размещение в рабочей части державок и подвесок, на которых крепится модель. Если такие весы используются в трубах с закрытой рабочей частью, то это вызывает необходимость осуществить дополнительные меры по обеспечению ее герметизации.

Визуальные методы исследования предусматривают использование специальных устройств, таких, в частности, как теневой прибор или интерферометр. При этом если рабочая часть закрытая, то в стенках трубы предусматриваются герметические смотровые люки с вмонтированными в них оптическими стеклами.

Исследования аэродинамической теплопередачи проводятся, как правило, с подогревом омывающего воздуха. Одновременно может потребоваться охлаждение стенок трубы с целью предохранения их от прогара, а также защита оптического стекла от повреждения высокотемпературным газом.

4. Влияние условий эксперимента в трубах на величину аэродинамических коэффициентов

По результатам экспериментальных исследований рассчитываются аэродинамические параметры летательных аппаратов. Но для получения истинных величин этих параметров должны быть учтены все особенности, характеризующие условия обтекания модели в рабочей части, которые могут отличаться от условий в свободном полете. Это различие связано с неодинаковыми значениями начальной турбулентности, наличием продольного градиента давлений, изменением скорости из-за ограниченного размера поперечного сечения рабочей части, неблагоприятным влиянием устройств, при помощи которых модель закрепляется в трубе, и др.

Для получения достоверных экспериментальных данных обязательным является требование геометрического подобия испытываемого тела и натурного летательного аппарата, а также обеспечение необходимого аэродинамического подобия. В частности, весьма целесообразным является обеспечение такого подобия одновременно по числам Маха **M** и Рейнольдса **Re**, характеризующим силовое воздействие соответственно за счет сил давления, вызванных сжимаемостью, и трения.

Данные эксперимента в сверхзвуковых трубах могут быть правдоподобны лишь в том случае, если на поверхность модели не попадают возмущения, отраженные или исходящие от стенок рабочей части.

Все указанные выше особенности экспериментальных исследований в трубах вызывают необходимость вводить поправки в полученные результаты таких исследований, чтобы сделать эти результаты более достоверными. Установлено [10], что для дозвуковых аэродиамических труб, например, следует вводить поправки на: 1) загромождение потока моделью и спутной струей; 2) продольный градиент статического давления; 3) влияние подъемной силы крыла, испытываемого в трубе (это влияние сказывается на изменении угла атаки и лобового сопротивления); 4) скос потока в рабочей части «пустой» трубы (без модели); 5) блокинг-эффект; 6) интерференцию модели и устройств, закрепляющих модель в рабочей части.

Число поправок можно уменьшить путем тщательной проработки отдельных элементов и всей конструкции аэродинамической трубы и последующей отладки ее в процессе эксплуатации. Соответствующим подбором очертаний стенок сопла и рабочей части можно значительно снизить продольный градиент и тем свести к минимуму погрешность эксперимента, сделав излишней поправку на его влияние; выполняя модели возможно малыми, уменьшают загромождение потока; расположив в форкамере детурбулизирующие сетки, можно уменьшить начальную турбулентность в рабочей части, приблизив ее по величине к соответствующему значению в атмосфере, и т. д.

Рассмотрим порядок определения поправок к аэродинамическим характеристикам, полученным в аэродинамических трубах.

Поправка на загромождение потока моделью и спутной струей. Модель, помещенная в равномерный поток, движущийся в рабочей части трубы, изменяет площадь проходного сечения этой части. Такое же действие производит спутная струя, образующаяся за моделью. В результате в потоке, между стенками трубы (или

свободной поверхностью струи трубы с открытой рабочей частью) и моделью (а также между стенками и спутной струей), устанавливается течение, отличное от течения вокруг тела в свободном полете: скорости около модели в трубе будут отличаться от скоростей в свободном полете. Это приводит к изменению аэродинамических коэффициентов, которое может быть учтено выражением

$$c_{\text{ист}} = c_{\text{изм}}/(1 + 2\varepsilon_{\text{м}} + 2\varepsilon_{\text{стр}}), \qquad (1.1.8)$$

где $c_{\text{ист}}$ — истинный аэродинамический коэффициент; $c_{\text{изм}}$ — аэродинамический коэффициент, измеренный в трубе; $\varepsilon_{\text{м}}$ и $\varepsilon_{\text{стр}}$ — коэффициенты, учитывающие влияние загромождения рабочей части моделью и струей соответственно; величины $\varepsilon_{\text{м}}$ и $\varepsilon_{\text{стр}}$ зависят от вида и формы рабочей части и моделей (см. [10]).

Поправки на загромождение можно сделать малыми, если выполнять модели малых размеров. Так, если отношение толщины t испытываемого профиля к высоте h рабочей части равно 0,05, то $\varepsilon_{\text{м}} \approx \varepsilon_{\text{стр}} = 0{,}01$; для модели самолета объемом W, испытываемой в трубе с площадью рабочей части S при $W/S = 0{,}05$, значения $\varepsilon_{\text{м}} = 0{,}025$ и $\varepsilon_{\text{стр}} = 0{,}017$.

Поправка, учитывающая продольный градиент давления. Как уже отмечалось, изменение статического давления в рабочей части вдоль оси трубы обусловливает действие на модель дополнительной продольной силы (1.1.2). В результате величина лобового сопротивления $Q_{\text{ист}}$, найденная по измеренному значению этого сопротивления в трубе, будет равна

$$Q_{\text{ист}} = Q_{\text{изм}} + \frac{dp}{dx} W_{\text{т}}.$$

Соответствующий аэродинамический коэффициент

$$c_{x\,\text{ист}} = c_{x\,\text{изм}} + \frac{dp}{dx} \cdot \frac{W_{\text{т}}}{q_\infty S}, \qquad (1.1.9)$$

где q_∞ — скоростной напор; S — характерная площадь исследуемой модели; $c_{x\,\text{изм}}$ — коэффициент лобового сопротивления, измеренный в трубе.

Градиент давления в рабочей части обычно определяется как отношение разности статических давлений в соседних точках на оси трубы Δp к малому расстоянию Δx между этими точками. Используемое в расчетах значение градиента $\Delta p/\Delta x$ выбирается средним по величине для участка трубы некоторой длины. При этом в формуле (1.1.9) величина градиента принимается положительной, если давление вниз по потоку увеличивается.

Поправка на влияние подъемной силы. Размеры рабочей части аэродинамической трубы ограничены, поэтому картина линий тока около испытываемой модели крыла будет отличаться от той, которая имеет место при обтекании натурного крыла, движущегося в атмосфере, причем, очевидно, отличие будет тем больше, чем больше подъемная сила. Как показали исследования, это эквивалентно изменению угла атаки модели крыла по сравнению со свободным полетом на величину

$$\Delta\alpha_{\text{гр}} = \delta_\alpha c_y S/S_{\text{тр}}, \qquad (1.1.10)$$

где c_y — коэффициент подъемной силы модели; $S_{\text{тр}}$ — площадь поперечного сечения рабочей части трубы; δ_α — некоторый коэффициент, определяемый экспериментально.

Изменению угла атаки на величину $\Delta\alpha_{\text{гр}}$ соответствует поправка к измеренному коэффициенту лобового сопротивления

$$\Delta c_x = \delta_{cx} c_y^2 S/S_{\text{тр}}, \qquad (1.1.11)$$

где δ_{cx} — некоторый опытный коэффициент. При испытаниях изолированных крыльев в дозвуковых аэродинамических трубах с закрытой рабочей частью можно принять коэффициенты δ_α и δ_{cx} равными 0,125 для круглых труб и 0,127 для труб с восьмигранным поперечным сечением рабочей части [10].

Так как $\Delta\alpha_{гр}$ (1.1.10) мало, то коэффициент подъемной силы изменяется незначительно и можно считать его величину c_y равной измеренному значению $c_{y\text{изм}}$.

При введении поправки на влияние границ потока следует помнить, что в трубах с закрытой рабочей частью $\Delta\alpha_{гр}$ — величина положительная, а в трубах с открытой частью — отрицательная. Это означает, например, что в трубе с открытой рабочей частью угол атаки $\alpha_{тр}$, измеренный на шкале механизма установки углов атаки, будет больше истинного $\alpha_{ист}$ на величину $\Delta\alpha_{гр}$.

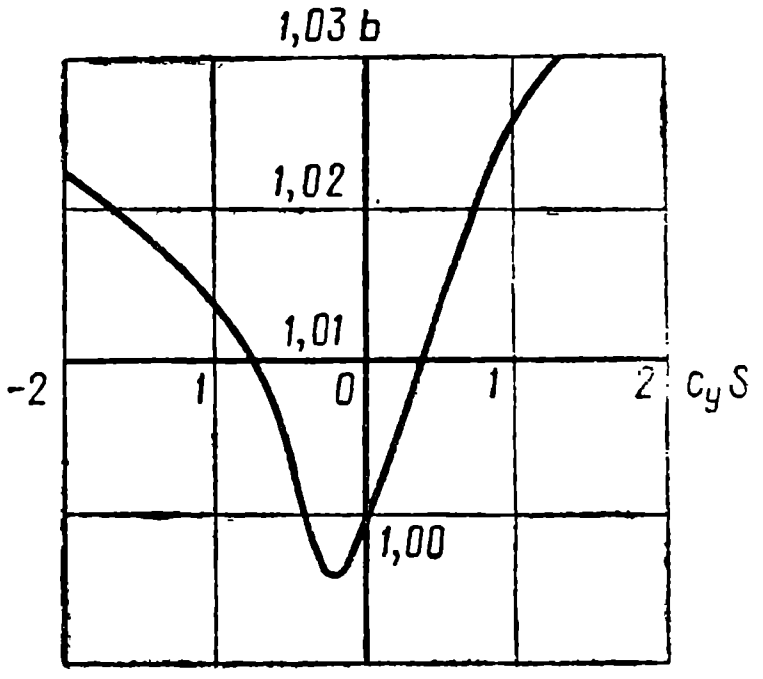


Рис. 1.1.10. График зависимости $b = f(c_y S)$

Поправка на скос потока определяется экспериментально, в частности, с помощью насадков, позволяющих находить направление вектора скорости газового потока в данной точке (см. гл. II).

В результате систематических исследований потока в рабочей части трубы определяются средние значения углов скосов в горизонтальной $\Delta\beta_{ср}$ и вертикальной $\Delta\alpha_{ср}$ плоскостях, проходящих через продольную ось трубы. Эти значения учитываются при определении истинных углов атаки и скольжения:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{ист} &= \alpha_{тр} + \Delta\alpha_{гр} + \Delta\alpha_{ср}; \\ \beta_{ист} &= \beta_{тр} + \Delta\beta_{ср}. \end{aligned}\right\} \qquad (1.1.12)$$

Поправка на блокинг-эффект. Модели летательных аппаратов, испытываемые в аэродинамических трубах, вызывают торможение потока, которое тем сильнее, чем больше подъемная сила (блокинг-эффект). В результате истинное значение скоростного напора в замкнутых трубах уменьшается в соответствии с выражением

$$q_{ист} = q_{тр} b, \qquad (1.1.13)$$

в котором $q_{тр}$ — скоростной напор в рабочей части трубы до установки в нее модели; b — некоторый коэффициент, зависящий от произведения $c_y S$; изменение этого коэффициента (для трубы МГУ А-6) показано на рис. 1.1.10 [10].

Интерференция. Взаимное влияние (интерференция) модели и устройств, закрепляющих модель в рабочей части, может быть определено только с учетом конкретных особенностей эксперимента. При этом в каждом случае должны быть предусмотрены мероприятия по уменьшению воздействия интерференции; сама же поправка на это воздействие находится экспериментально.

§ 1.2. ТРУБЫ ДОЗВУКОВЫХ СКОРОСТЕЙ

1. Незамкнутые трубы (трубы прямого действия)

Схема такой трубы всасывающего типа с закрытой рабочей частью показана на рис. 1.2.1. Вентилятор, вращаемый электромотором, создает разрежение на выходе из диффузора. В зависимости от величины

этого разрежения устанавливается та или иная скорость V_∞ потока в рабочей части. Поскольку она не превышает 30÷50 *м/сек*, то трубы рассматриваемой конструкции применяются для аэродинамических исследований летательных аппаратов, движущихся с небольшими скоростями. В этих трубах проводятся, в частности, дренажные и весовые испытания в условиях, близких к атмосферным.

Незамкнутые трубы позволяют при целесообразном подборе конструкции и формы сопла, рабочей части и диффузора получать хорошие аэродинамические характеристики потока (равномерное поле скоростей; низкая степень турбулентности; небольшой градиент давления вдоль рабочей части).

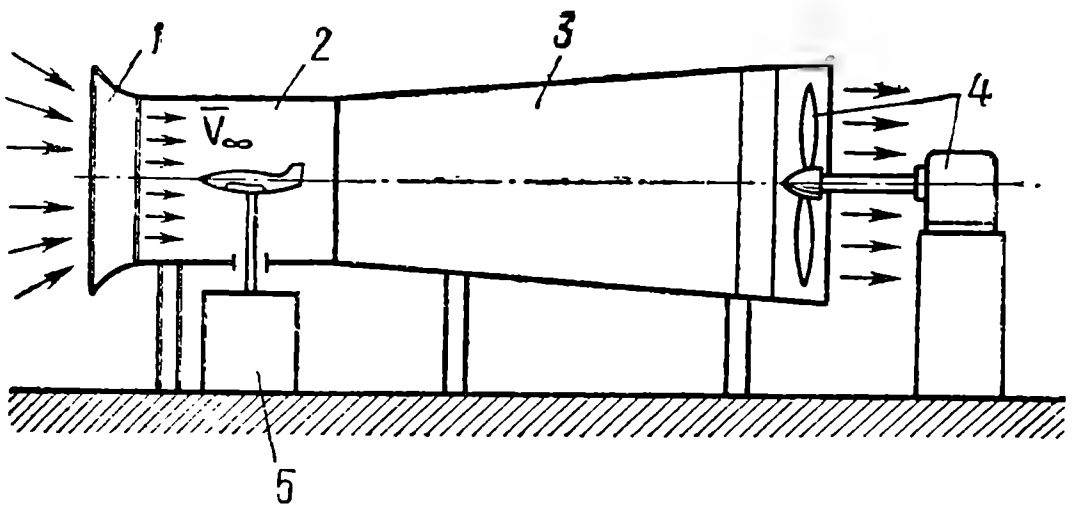


Рис. 1.2.1. Схема незамкнутой дозвуковой трубы с закрытой рабочей частью:
1 — сопло; *2* — рабочая часть; *3* — диффузор; *4* — привод; *5* — аэродинамические весы

На рис. 1.2.2 представлена схема аэродинамической трубы с открытой рабочей частью, работающей в режиме нагнетания. Такой рабочей частью здесь является свободная струя, движущаяся с заданной скоростью, в которую помещаются исследуемые модели.

Поток воздуха создается с помощью вентилятора *2*, вращаемого мотором *1*. Пройдя через лопатки направляющего аппарата *3*, воздух попадает в форкамеру, где установлены решетки *4* хонейкомба и детурбулизирующие сетки *5*. Изменение скорости на выходе трубы обеспечивается применением сменных сопел *6* с различными диаметрами выходных сечений.

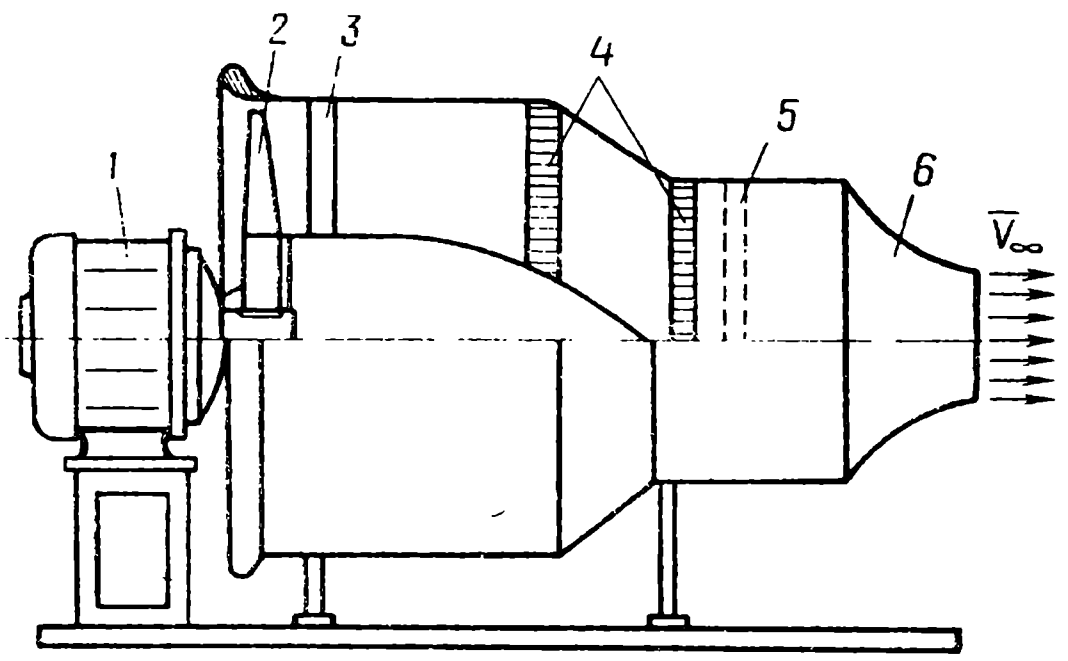


Рис. 1.2.2. Схема аэродинамической дозвуковой трубы с открытой рабочей частью

Используемая для лабораторных работ труба рассматриваемой конструкции характеризуется степенью поджатия сопла $n=4$, диаметром его выходного сечения 250 *мм*, средней скоростью потока на выходе $V_\infty=24{,}5$ *м/сек*. Отклонение скорости в точках выходного сечения от среднего значения составляет не более $\pm 3\%$, а скос потока (в горизонтальной и вертикальной плоскостях) не превышает 1°. Начальная турбулентность потока, измеренная термоанемометром, $\varepsilon \approx 1{,}3\%$.

Эта труба оснащена координатником, служащим для закрепления на нем с помощью державки исследуемой модели и размещения этой модели в необходимом месте рабочей части. Для проведения дренажных испытаний используются групповые регистрирующие манометры, а для весовых исследований — тензометрические весы.

В трубах рассматриваемой конструкции поток в рабочей части характеризуется большой неравномерностью и повышенной начальной турбулентностью по сравнению с трубами всасывания (с закрытой рабочей частью). Однако они более удобны в эксплуатации и предназначены, как правило, для изучения качественной картины обтекания исследуемых тел.

2. Замкнутые аэродинамические трубы

На рис. 1.2.3 представлена схема такой аэродинамической трубы с открытой рабочей частью. По этой схеме изготовлена труба с рабочей частью длиной 1100 *мм*. Канал трубы имеет восьмиугольное сечение; расстояние между противоположными сторонами сопла составляет

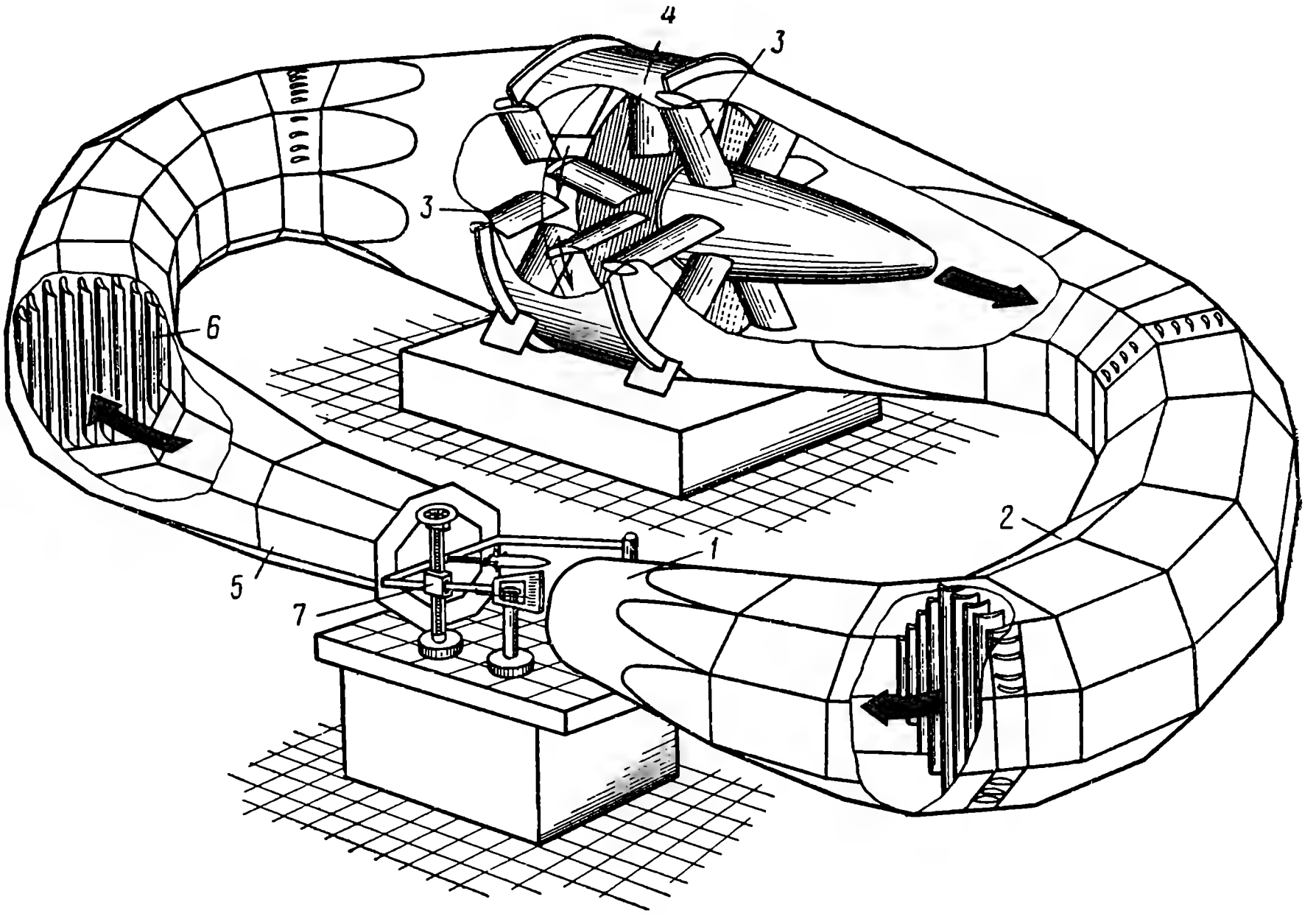


Рис. 1.2.3. Схема замкнутой аэродинамической трубы с открытой рабочей частью:

1 — сопло; *2* — обратный канал; *3* — направляющий аппарат; *4* — вентилятор (компрессор); *5* — диффузор; *6* — направляющие лопатки; *7* — механизм углов атаки с закрепленной на нем моделью летательного аппарата

540 *мм*; степень поджатия сопла равна шести. Привод трубы представляет собой восьмилопастный вентилятор диаметром 1780 *мм*, вращаемый электромотором переменного тока мощностью 45 *квт*. Этот привод обеспечивает скорость потока в рабочей части $V_\infty = 59{,}2$ *м/сек*. В трубе рассматриваемой конструкции число оборотов вентилятора не регулируется, поэтому скорость потока постоянная.

Исследованиями установлено, что неравномерность скорости в рабочей части определяется величиной $\pm 1{,}2\%$, а углы скоса потока (в горизонтальной и вертикальной плоскостях) не превышают 0,45°. Продольный градиент давления в потоке этой рабочей части $dp/dx = 0{,}003$, а начальная турбулентность $\varepsilon \approx 1{,}33\%$.

С целью уменьшения потерь энергии на завихрение в местах поворота потока в канале трубы закреплены направляющие лопатки. Эта труба оснащена теми же приспособлениями для установки модели и измерительными устройствами, что и рассмотренная незамкнутая труба (см. рис. 1.2.2).

3. Трубы с низкой турбулентностью

Для уменьшения разницы в величинах аэродинамических коэффициентов, определенных во время летных и «трубных» испытаний (что объясняется неодинаковыми значениями начальной турбулентности), созданы специальные конструкции труб, обеспечивающие потоки с низкой турбулентностью, близкой к атмосферной. Снижение турбулентно-

сти в таких конструкциях обеспечивается за счет значительного поджатия потока, достигающего значений $n=25$. Исследования показали, что при движении газа по соплу с таким большим поджатием уменьшаются пульсационные скорости турбулентного потока. В частности, весьма малой оказывается поперечная составляющая этой скорости. Это явление можно объяснить уменьшением возможности перемещения ча-

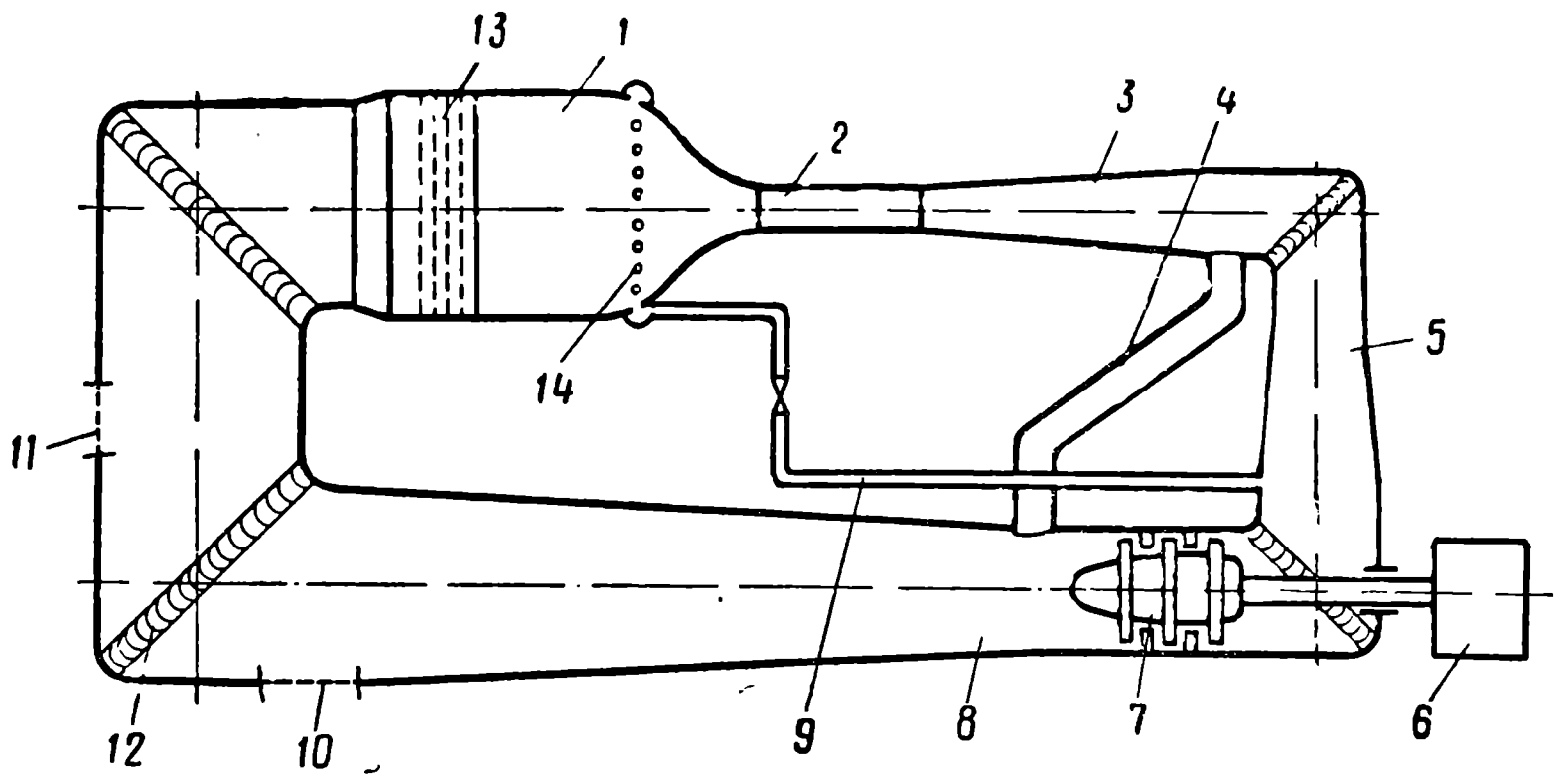


Рис. 1.2.4. Малотурбулентная труба:

1 — форкамера с соплом; *2* — рабочая часть; *3, 5, 8* — диффузоры; *4* — перепускной канал; *6* — двигатель; *7* — вентилятор; *9* — перепускной трубопровод; *10* — выброс воздуха; *11* — забор воздуха; *12* — направляющие лопатки; *13*—сетки; *14* — отверстия для отсоса пограничного слоя

стиц воздуха поперек трубы за счет воздействия на них сближающихся стенок сопла.

В трубах с низкой турбулентностью обязательна тщательная отделка внутренних поверхностей каналов, по которым движется газ, а также установка детурбулизирующих сеток. Снижению турбулентности в значительной мере способствует также отсос пограничного слоя от стенок сопла, так как удаление этого слоя исключает его отрыв и, как следствие, препятствует вихреобразованию, обусловливающему турбулизацию. Перечисленные меры позволяют создать трубы, начальная турбулентность в которых не превышает величины $\varepsilon=0{,}1\%$.

На рис. 1.2.4 представлена схема малотурбулентной дозвуковой трубы. Скорости на выходе из сопла могут меняться от 5 до 100 *м/сек*, что обеспечивается регулировкой оборотов электродвигателя, а также системой перепускных трубопроводов. Рабочая часть длиной 2000 *мм* представляет собой в поперечном сечении квадрат площадью $S=1000\times1000$ *мм*^{2}. Степень турбулентности $\varepsilon=0{,}02\div0{,}06$, что достигается применением сопла с большой степенью поджатия ($n=23$), установкой детурбулизирующих сеток в форкамере и полировкой внутренней поверхности канала трубы.

4. Аэродинамические трубы переменной плотности

Выше указывалось, что соответствующие аэродинамические коэффициенты сил и моментов, действующих на модельные и натурные летательные аппараты и обусловленных влиянием трения и сил давления, вызванных сжимаемостью, будут одинаковы для модели и натуры при соблюдении подобия одновременно по числам Рейнольдса и Маха. Это условие может быть обеспечено при проведении экспериментов в аэродинамических трубах переменной плотности.

Если испытания проводятся в потоке газа, скорость звука в котором такая же, как в натурном потоке ($a_{\infty 2}=a_{\infty 1}$), то из условия равенства

чисел Маха для этих двух потоков ($V_{\infty 2}/a_{\infty 2} = V_{\infty 1}/a_{\infty 1}$) следует, что $V_{\infty 2} = V_{\infty 1}$. Имея это в виду и используя равенство $\mathbf{Re}_2 = \mathbf{Re}_1$ $V_{\infty 2} l_2 \rho_{\infty 2}/\mu_{\infty 2} = V_{\infty 1} l_1 \rho_{\infty 1}/\mu_{\infty 1}$, получим $l_2 \rho_{\infty 2}/\mu_{\infty 2} = l_1 \rho_{\infty 1}/\mu_{\infty 1}$. Полагая, что $\mu_{\infty 2} = \mu_{\infty 1}$, находим $\rho_{\infty 2} = \rho_{\infty 1}(l_1/l_2)$.

Принимая температуру натурного и модельного потоков одинаковой ($T_{\infty 2} = T_{\infty 1}$) и используя уравнение состояния, получим $p_{\infty 2} = p_{\infty 1}(l_1/l_2)$. Таким образом, для обеспечения равенств чисел Рейнольдса и Маха модельного и натурного потоков необходимо, чтобы статическое давление в рабочей части аэродинамической трубы было б о л ь ш е давления в натурном потоке во столько раз, во сколько модель м е н ь ш е натуры.

С этой целью строятся аэродинамические трубы, представляющие собой полностью герметизированные каналы с регулируемым давлением. Повышая это давление (при заданном постоянном числе Маха), можно увеличить плотность и соответствующее число Рейнольдса до такого же значения, как и в натурном потоке. Такие трубы переменной плотности строятся по замкнутой схеме с закрытой рабочей частью. При этом, так как давление внутри трубы может достигать больших значений, следует уделять особое внимание прочности ее конструкции.

5. Расчет аэродинамических труб

Определение параметров газового потока, движущегося по каналу трубы, является основной целью ее аэродинамического расчета. В результате такого расчета находят также мощность вентилятора и расход газа, необходимые для обеспечения заданного числа $\mathbf{M}_\infty$ (или скорости V_∞) в рабочей части.

Аэродинамическому расчету трубы предшествует выбор ее размеров, который осуществляется исходя из назначения аэродинамической установки, определяемого перечнем предполагаемых экспериментов и величиной моделей исследуемых летательных аппаратов.

Расчет труб, предназначенных для получения малых дозвуковых скоростей, производится в предположении, что поток в такой трубе несжимаемый. Зная скорость V_∞ в рабочей части площадью $S_{р.ч}$, можно найти объемный расход газа ($м^3/сек$):

$$Q = S_{р.ч} V_\infty. \tag{1.2.1}$$

По этой величине определяется необходимая мощность двигателя

$$N = QH/(102\eta), \tag{1.2.2}$$

где H — потребный напор вентилятора; η — коэффициент полезного действия вентилятора (значение η может быть принято равным 0,65÷÷0,75).

Потребный напор вентилятора определяется суммированием всех гидродинамических потерь в рассматриваемой трубе. Эти потери обусловлены трением газа о стенки трубы, а также изменением количества движения газа на участках трубы, где имеет место резкая деформация потока газа (поворотные колена, сетки, решетки и т. п.). Необходимо также учесть гидродинамическое сопротивление испытываемой модели и устройств, с помощью которых эта модель устанавливается в трубе.

Суммарная величина гидродинамических потерь $\Sigma h_п$ определяется зависимостью (1.1.6). В соответствии с этим потребный напор

$$H = mV_\infty^2 \zeta_\Sigma/2, \tag{1.2.3}$$

где секундный массовый расход газа в трубе $m = Q\rho_\infty$. Определение суммарного коэффициента потерь ζ_Σ по (1.1.6) связано с нахождением коэффициентов местных потерь (ξ_k) различных устройств (сетки, ре-

шетки, колена и т. п.), входящих в конструкцию трубы (см. [11; 16; 32; 52]). Одновременно должны быть вычислены коэффициенты сопротивления трения λ_i по соответствующим зависимостям, известным из курса гидравлики.

Вычисление потерь в соответствии с (1.1.6) связано с нахождением скоростей в различных сечениях контура трубы. Величина этой скорости определяется из условия сохранения расхода воздуха

$$V_{k(i)} S_{k(i)} = V_\infty S_{\text{р.ч}}, \tag{1.2.4}$$

где $V_{k(i)}$ — отыскиваемая скорость потока в сечении площадью $S_{k(i)}$; V_∞ — скорость в рабочей части площадью поперечного сечения $S_{\text{р.ч}}$. Зная скорости, нетрудно найти величины давлений $p_{k(i)}$ в тех же сечениях, воспользовавшись формулой Бернулли:

$$p_{k(i)} + \rho \frac{V_{k(i)}^2}{2} = p_a + \rho \frac{V_a^2}{2} + \zeta_a \rho \frac{V_a^2}{2}, \tag{1.2.5}$$

где ζ_a — суммарный коэффициент сопротивления участка трубы, расположенного между расчетным сечением $k(i)$ и тем сечением a, где параметры газа известны (p_a, V_a).

При расчете аэродинамической трубы с открытой рабочей частью это сечение совпадает со срезом сопла, в котором скорость определяется величиной V_∞, а давление равно атмосферному $p_{\text{атм}}$. В соответствии с этим

$$p_{k(i)} + \rho \frac{V_{k(i)}^2}{2} = p_{\text{атм}} + \rho \frac{V_\infty^2}{2} + \zeta_a \rho \frac{V_\infty^2}{2}. \tag{1.2.6}$$

Проектируя трубу, следует учесть возможное неблагоприятное влияние загромождения рабочей части моделью на результаты экспериментальных исследований. Это влияние можно свести к минимуму правильным выбором размеров модели, соответствующих данной конструкции трубы и ее рабочей части. Модель, загромождающая рабочую часть закрытого типа, вызывает значительное увеличение скорости потока, в то время как в открытой рабочей части, где стенки отсутствуют, модель будет обтекаться замедленным потоком. Этот эффект замедления обусловлен тем, что давление на внешней части струи остается постоянным на всем ее протяжении, а это приводит к повышению давления у модели и соответствующему снижению скорости.

Уменьшить влияние загромождения на характер обтекания можно путем подбора достаточно малых размеров модели. Так, для неотклоненных тел вращения (нулевой угол атаки) можно пренебречь влиянием их загромождения, если площадь миделевого сечения модели будет не более 4÷5% от площади поперечного сечения рабочей части. Для самолета это влияние будет пренебрежимо малым при условии, что отношение размаха крыльев к ширине рабочей части равно или меньше 0,75 (для прямоугольных крыльев) и 0,6 (для стреловидных).

§ 1.3. ТРУБЫ ОКОЛОЗВУКОВЫХ СКОРОСТЕЙ

Для испытаний моделей летательных аппаратов в диапазоне чисел $\mathbf{M}_\infty$, близких к единице ($0{,}8 < \mathbf{M}_\infty < 1{,}2$), применяются аэродинамические трубы околозвуковых скоростей. К их числу относятся и так называемые трансзвуковые трубы, в рабочей части которых создается поток с числом Маха, равным или несколько большим единицы ($\mathbf{M}_\infty \geqslant 1$).

Исследования показали, что поток в рабочей части обычной конструкции (с гладкими стенками), имеющий скорость, близкую к скорости

звука ($M_\infty \approx 1$), неустойчив к воздействию на него различных возмущений, возникающих при обтекании модели. При этом, например, достаточно небольшого изменения размеров модели или ее угла атаки, чтобы значительно изменились (в сравнении с расчетным значением) околозвуковая скорость и соответствующее число M_∞. Это происходит оттого, что площади критического и выходного сечений околозвуковых сопел мало отличаются друг от друга. После же «загромождения» выходного сечения такого сопла моделью и ее подвеской его площадь уменьшается. Такое уменьшение, даже небольшое, вследствие повышенной чувствительности околозвуковой скорости к величине входного и выходного се-

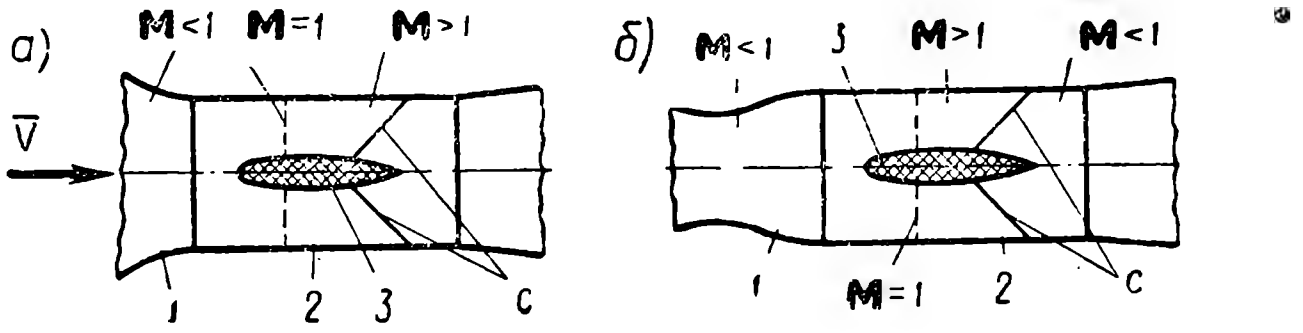


Рис. 1.3.1. Схема течения в околозвуковых трубах с закрытой рабочей частью в условиях запирания:
а — труба с дозвуковым соплом; *б* — труба со сверхзвуковым соплом;
1 — сопло; *2* — стенка рабочей части; *3* — модель;
— — — — — положение критического сечения в потоке газа;
с — скачки уплотнения

чений может привести к существенному изменению этой скорости.

Для обеспечения устойчивого потока в современных конструкциях околозвуковых аэродинамических труб используется закрытая рабочая часть с перфорированными стенками. В таких стенках просверливается большое число отверстий, для того чтобы поток, расширяющийся при обтекании модели, имел возможность частично перетекать в камеру, окружающую рабочую часть трубы.

Из камеры газ отсасывается эксгаустером, благодаря чему практически сводится к минимуму воздействие тех возмущений, которые вызывают изменение величины околозвуковой скорости, и обеспечивается устойчивый характер движения.

Используя перфорированные стенки, удается не только приблизить обтекание в трубе к условиям свободного полета с околозвуковой скоростью, но и существенно ослабить воздействие отраженных от стенок скачков уплотнения на модель.

Как известно, при малых сверхзвуковых скоростях угол скачка (θ_c) оказывается значительным, и отраженный от стенки скачок почти всегда попадает на модель, изменяя характер аэродинамического воздействия на нее по сравнению со свободным полетом. В том случае, когда рабочая часть открыта и выполнена в виде герметической камеры, ударная волна, попадающая на границу свободной струи, будет отражаться от нее в виде волны разрежения, которая также изменяет картину обтекания.

При помощи перфорированных стенок удается найти такое конструктивное решение рабочей части, которое обеспечивает создание условий обтекания, являющихся в какой-то мере промежуточными между условиями на стенке и на свободной границе. Благоприятный эффект достигается при этом за счет взимодействия волн сжатия и разрежения, которые как бы компенсируют друг друга, уменьшая искажение потока.

Рассмотрим особенность околозвуковых труб с закрытой рабочей частью, заключающуюся в ее «запирании». Вследствие загромождения моделью рабочей части критическое сечение может сдвинуться вниз по потоку (рис. 1.3.1, *а*) и оказаться в месте наименьшего проходного се-

чения, образованного стенками трубы и моделью, что в свою очередь приведет к образованию за таким сечением некоторой зоны местных сверхзвуковых скоростей, ограниченной скачками уплотнения. Эта картина течения сохраняется и при дальнейшем изменении давления в форкамере: скорость потока на участке до критического сечения останется постоянной и, как правило, «нерасчетной», т. е. не равной той величине, которую предполагали иметь во время эксперимента. Труба «запирается», искажая картину обтекания.

В околозвуковой трубе, рассчитанной на получение в рабочей части потока скорости, несколько большей звуковой ($M_\infty > 1$), явление запи-

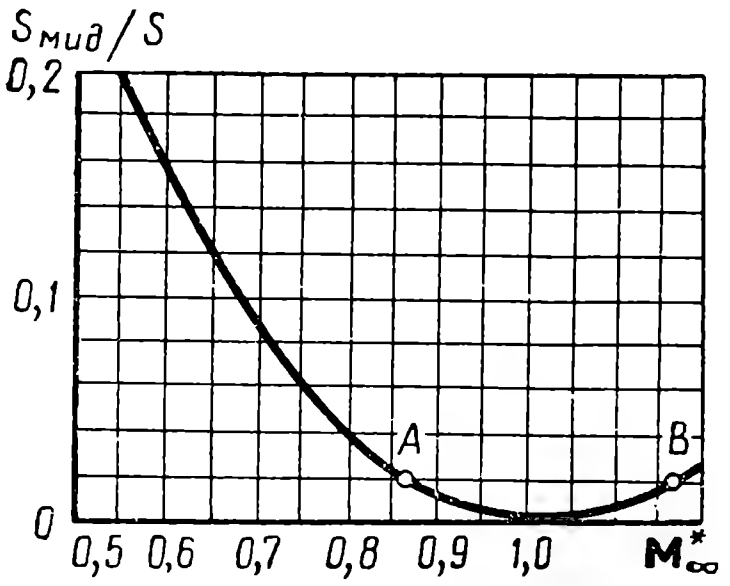


Рис. 1.3.2. Зависимость величины заполнения площади поперечного сечения рабочей части моделью и ее подвеской от числа M^*_∞

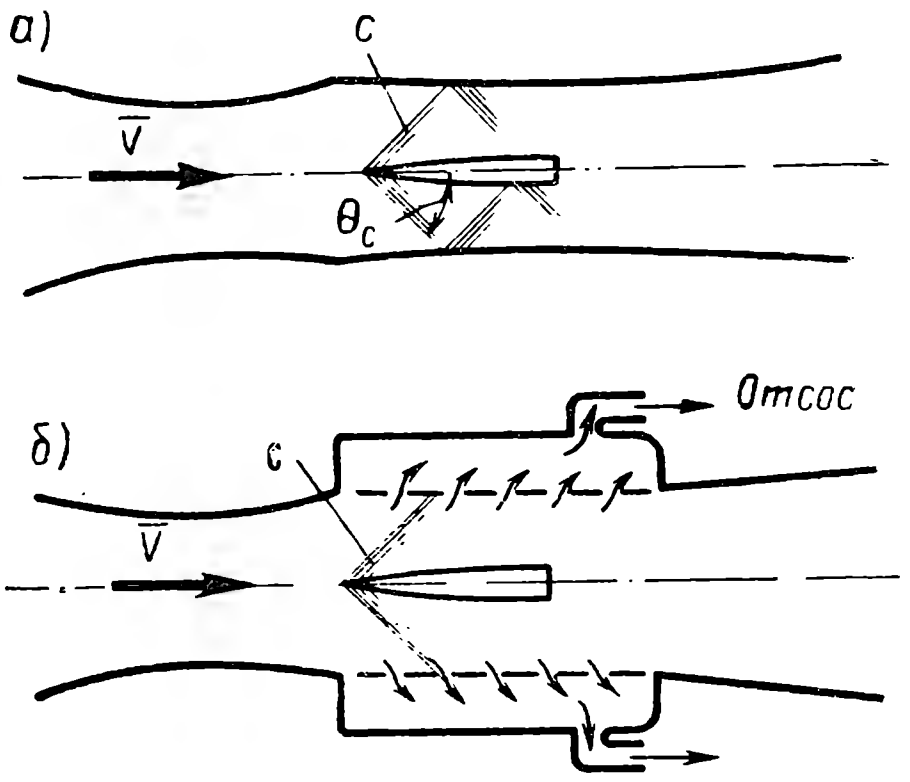


Рис. 1.3.3. Схема течения в околозвуковых трубах со сверхзвуковым соплом: *а* — стенки рабочей части без перфорации; *б* — перфорированные стенки; θ_c — угол скачка уплотнения; *с* — скачки

рания носит аналогичный характер. Сверхзвуковое сопло такой трубы имеет очень малую разницу в площадях критического и выходного сечений (так как число M_∞ близко к единице). Поэтому размещение модели в рабочей части может привести к тому, что наименьшее проходное сечение будет не в критическом сечении сопла, а там, где расположена модель. Именно здесь произойдет переход потока через скорость звука и появятся сверхзвуковая зона и замыкающие ее скачки (рис. 1.3.1,*б*). На модель будет набегать не сверхзвуковой поток из сопла, как ожидалось, а дозвуковой, и повысить его скорость уже не удастся. Произойдет «запирание» околозвуковой трубы со сверхзвуковым соплом.

Число M^*_∞, соответствующее началу запирания трубы, зависит от «загромождения», т. е. степени заполнения площади поперечного сечения рабочей части S моделью и ее подвеской с площадью сечения $S_{мид}$. График, приведенный на рис. 1.3.2, дает возможность оценить величину этого загромождения [32]. Например, значению $M^*_\infty = 0{,}85$ (точка *A* на рисунке) соответствует площадь поперечного сечения модели и подвески $S_{мид} = 0{,}02\ S$. Согласно этому значению экспериментальные исследования можно вести лишь при условии, что степень заполнения меньше 2%. Такой же результат получается при сверхзвуковой скорости (точка *B* на рисунке соответствует $S_{мид} = 0{,}02\ S$ и $M^*_\infty = 1{,}15$).

Исследования показывают, что в околозвуковых трубах экспериментальные данные будут ошибочными, если число M_∞ отличается от величины M^*_∞, соответствующей запиранию, менее чем на 0,02. Согласно графику, приведенному на рис. 1.3.2, при $M^*_\infty = 1$ запиранию соответствует величина $S_{мид}/S = 0$. Это означает, что при звуковой скорости экспе-

римент с моделью невозможен, так как площадь ее поперечного сечения должна быть равна нулю.

Однако, как показал опыт эксплуатации труб, практически возможно устранение запирания в случае, если закрытая рабочая часть таких труб имеет перфорированные стенки и заключена в герметическую камеру (рис. 1.3.3). В такой рабочей части поток, подвергающийся сжатию между твердыми стенками рабочей части и модели, может расширяться, частично перетекая через перфорационные отверстия в герметическую камеру. В силу этого поток около модели не будет характеризоваться наименьшим поперечным сечением, т. е. здесь не образуется критическое сечение, так как оно по-прежнему остается в наиболее узкой части сопла. На выходе из сопла сохраняется расчетный (сверхзвуковой) режим течения, и запирания трубы не происходит.

§ 1.4. СВЕРХЗВУКОВЫЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ТРУБЫ

1. Труба кратковременного действия

На рис. 1.4.1 изображена сверхзвуковая труба для исследования моделей летательных аппаратов в диапазоне чисел M_∞ от 2 до 5. Эта труба относится к типу баллонных аэродинамических установок с кратковременным режимом работы и закрытой рабочей частью.

Заполнение баллонов воздухом производится при помощи компрессоров высокого давления *1*. В конструкции аэродинамической установки предусмотрена батарея, состоящая из 60 баллонов объемом 0,4 $м^3$ каждый. В компрессорной станции установлены три компрессора производительностью 3 $м^3/мин$ каждый, обеспечивающие в баллонах максимальное давление 250 $кГ/см^2$. Перед тем как попасть в баллоны, воз-

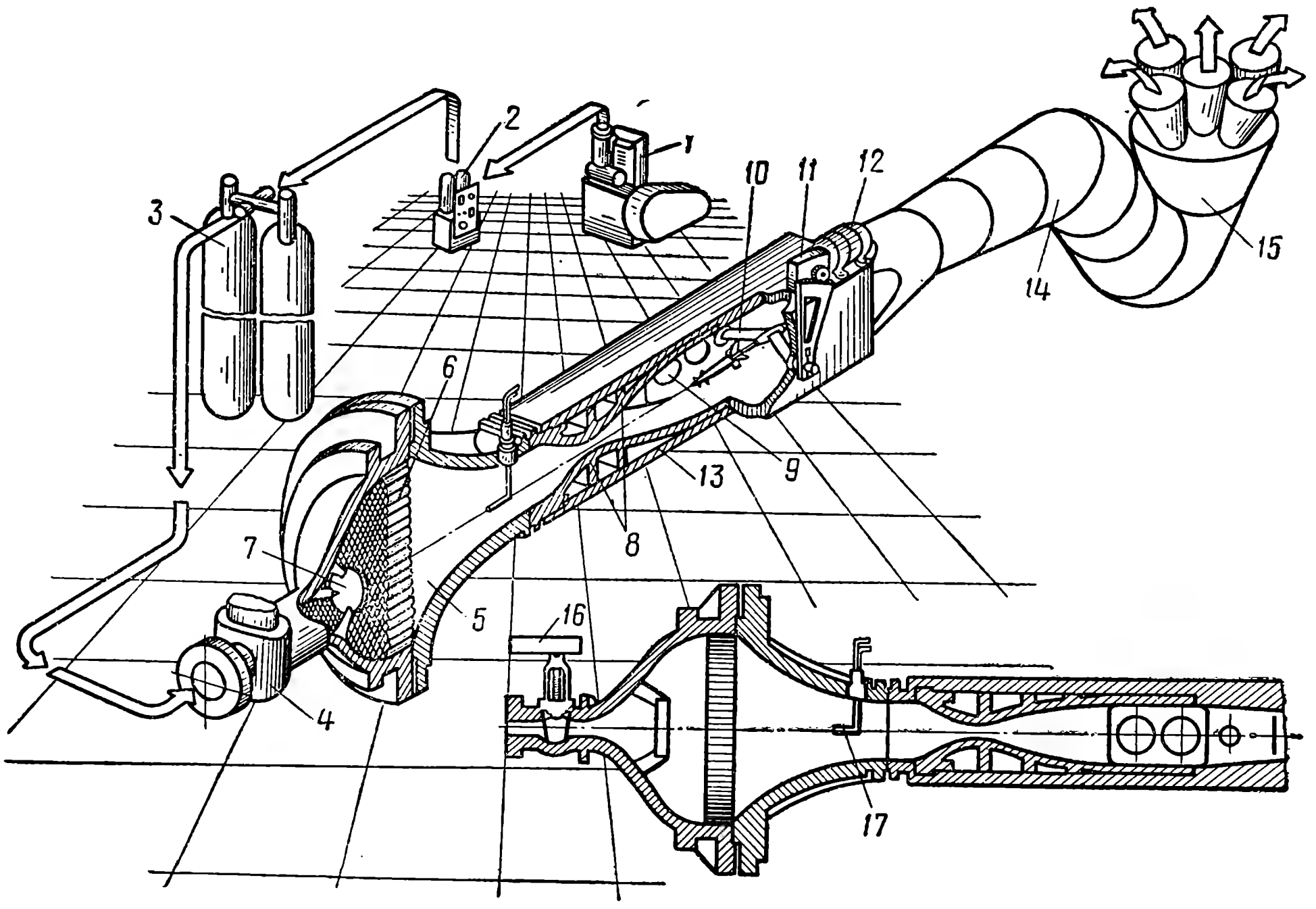


Рис. 1.4.1. Схема сверхзвуковой баллонной трубы:

1 — компрессор; *2* — осушитель; *3* — баллоны; *4* — дроссельная задвижка; *5*—форкамера; *6*—хонейкомб; *7* — диск; *8* — сопловые вкладыши; *9* — окно; *10* — траверса (в положении для придания модели углов атаки α); *11* — редуктор; *12* — электромотор механизма углов атаки; *13* — сопловая коробка; *14* — выхлопная труба; *15* — глушитель; *16* — автоматический привод; *17* — трубка полного напора

дух проходит через осушители, активным веществом в которых является окись алюминия. После осушения воздух имеет точку росы —60° С, при этом, как показывают наблюдения, не происходит конденсации влаги в рабочей части трубы.

Незадолго до пуска трубы открываются запорные вентили, и воздух по трубопроводу высокого давления поступает в форкамеру *5* через дроссельную задвижку *4*. Величина открытия задвижки (степень дросселирования) регулируется автоматическим приводом *16*. При необходимости ручного управления автоматический привод может быть отключен.

Форкамера, куда поступает дросселированный воздух, представляет собой толстостенный стальной резервуар; к нему присоединяется сверхзвуковое сопло. В форкамере помещается хонейкомб *6*, выполненный в виде решетки из тонкой стальной полосы с размером ячеек 60×60 *мм*. С целью выравнивания потока по поперечному сечению форкамеры перед отверстием, через которое поступает воздух, расположен стальной диск *7*. Измерение давления в форкамере осуществляется с помощью трубки полного напора *17*.

Из форкамеры воздух поступает в сопло, образованное двумя профилированными вставками *8*, расположенными симметрично — сверху и снизу — в сопловой коробке *13*. В конструкции трубы предусмотрено несколько пар таких сменных вставок, рассчитанных на получение потока с разными числами M_∞. В боковых стенках сопловой коробки расположены два окна с плоскопараллельными оптическими стеклами, через которые осуществляется наблюдение и фотографирование обтекания модели, установленной в рабочей части трубы длиной 0,8 *м* и квадратным сечением площадью 0,16 $м^2$.

Модели в рабочей части закрепляются с помощью державок, расположенных на траверсе *10*, которая может поворачиваться относительно своей продольной оси. Это позволяет, используя механизм углов атаки, установить необходимый во время эксперимента угол. Общий вид и кинематическая схема механизма углов атаки представлены соответственно на рис. 1.4.2 и 1.4.3.

Механизм работает следующим образом. Оператор кнопкой на пульте управления включает электромотор *1*, вращающий червячный редуктор *4*, на валу которого закреплена траверса *6* с установленной на ней моделью (см. рис. 1.4.3). Одновременно вращение передается на контактное устройство в счетчике *5* углов атаки α. По достижении моделью заданной величины угла α счетчик разрывает электрическую цепь, останавливая мотор *1* и включая тормоз *2*. Если после этого требуется осуществить испытания на другом угле атаки, то оператор с помощью дистанционного управления воздействует на контактное устройство, смещая контакты на некоторую величину, пропорциональную новому углу атаки, и вновь включает двигатель *1*.

Установка углов скольжения β производится путем перестановки траверсы из горизонтального положения (см. рис. 1.4.1) в вертикальное. В этом случае вращение передается на траверсу через зубчатый редуктор, а углы β отсчитываются также с помощью счетчика *5*.

Труба оснащена оптическим прибором ТЕ-23, позволяющим фотографировать аэродинамический спектр. В конструкции этой трубы предусмотрена также промышленная телевизионная установка ПТУ-23-М, передающая изображение картины обтекания на пункт наблюдения. Групповые регистрирующие манометры, используемые при эксплуатации установки, позволяют определять давления как в самой трубе, так и на поверхности исследуемой модели. Для определения аэродинамических сил и моментов применяются тензометрические аэродинамические весы.

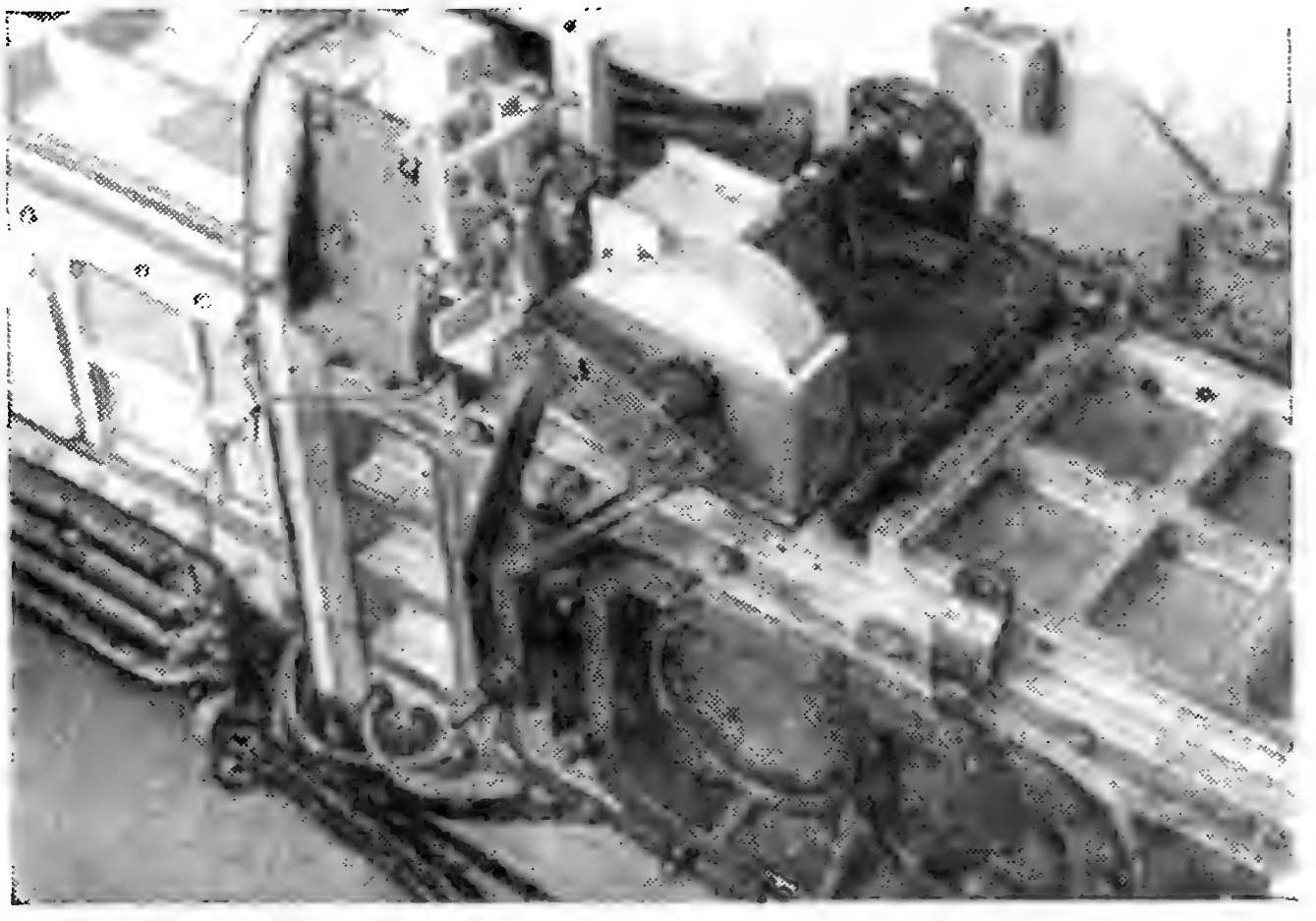


Рис. 1.4.2. Общий вид механизма углов атаки

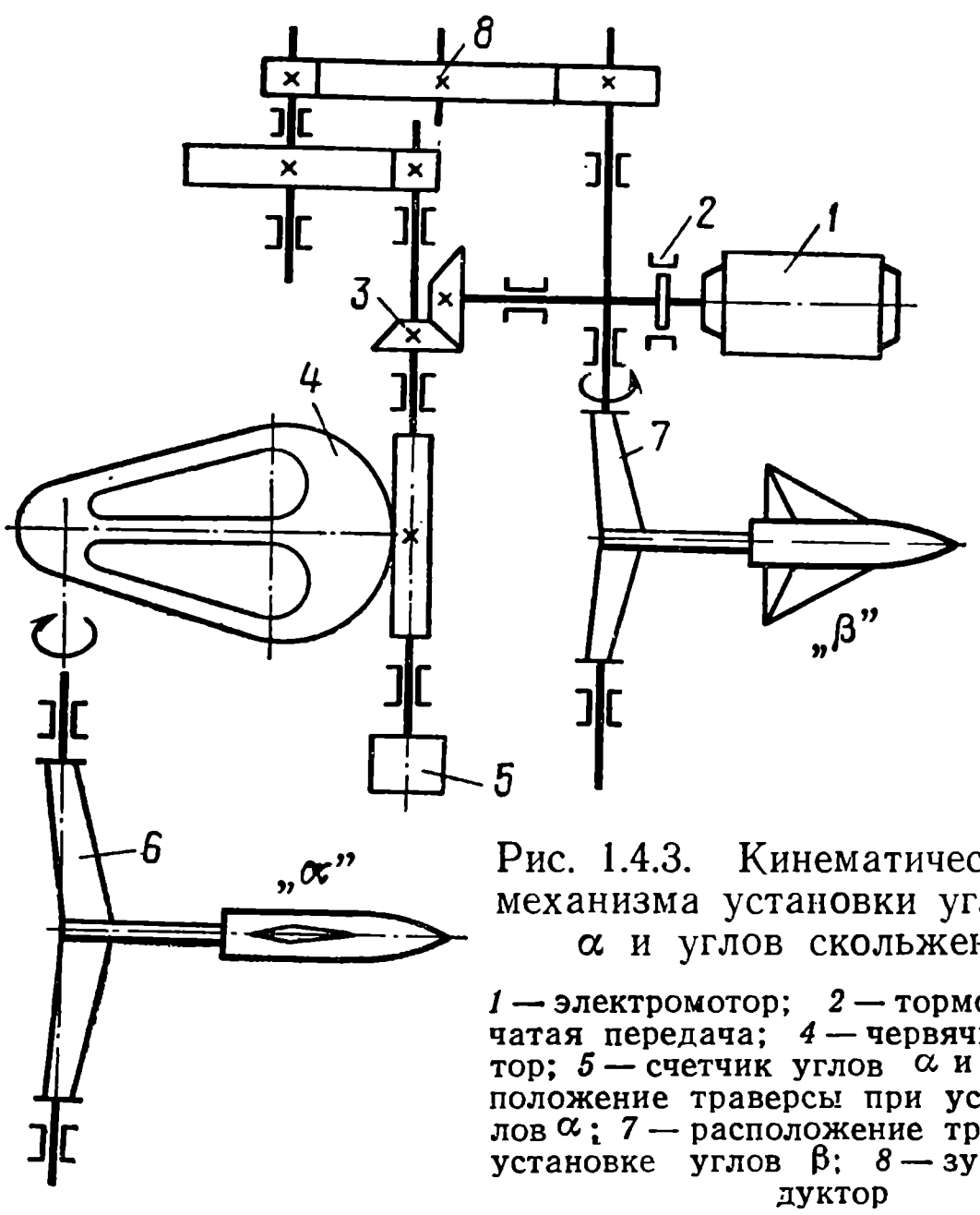


Рис. 1.4.3. Кинематическая схема механизма установки углов атаки α и углов скольжения β:

1 — электромотор; *2* — тормоз; *3* — зубчатая передача; *4* — червячный редуктор; *5* — счетчик углов α и β; *6* — расположение траверсы при установке углов α; *7* — расположение траверсы при установке углов β; *8* — зубчатый редуктор

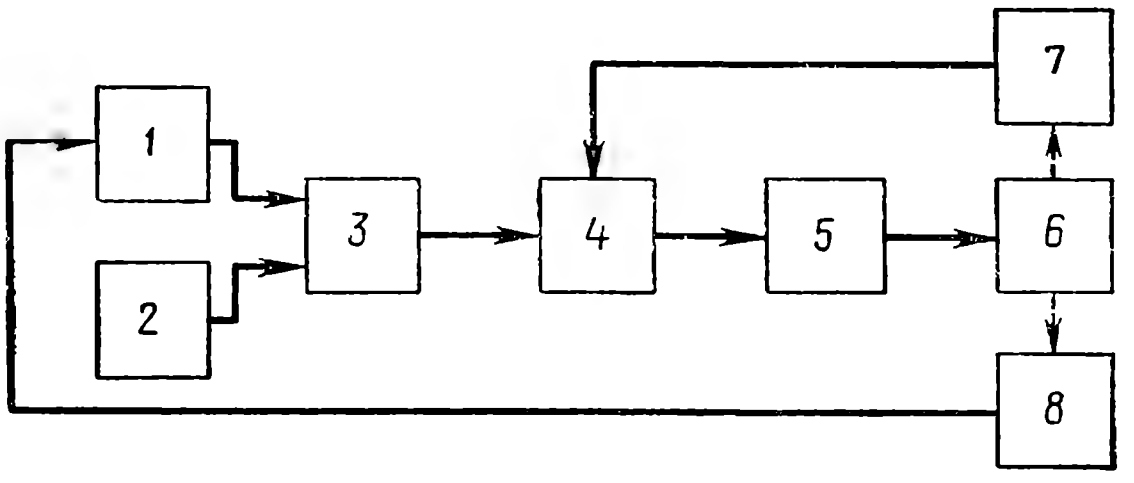


Рис. 1.4.4. Структурная схема системы управления сверхзвуковой аэродинамической трубой:

1 — датчик давления; *2* — «задающее» устройство; *3* — «сравнивающее» устройство» *4* — электронный усилитель; *5* — электромашинный усилитель; *6* — исполнительный двигатель; *7* — устройство обратной связи; *8*—регулирующий орган (задвижка)

Исследования потока в рабочей части трубы показали, что числа M_∞, измеренные в ряде точек, расположенных вдоль продольной оси рабочей части и в ее поперечных сечениях, отличаются между собой не более чем на $\pm 1{,}5\%$. Продольный градиент статического давления в этой рабочей части практически отсутствует, что свидетельствует о хороших аэродинамических свойствах трубы.

Особенностью конструкции рассматриваемой трубы является автоматическая система управления процессом изменения давления в форкамере. Структурная схема этой системы представлена на рис. 1.4.4. С помощью шкалы «задающего» устройства *2* оператор устанавливает

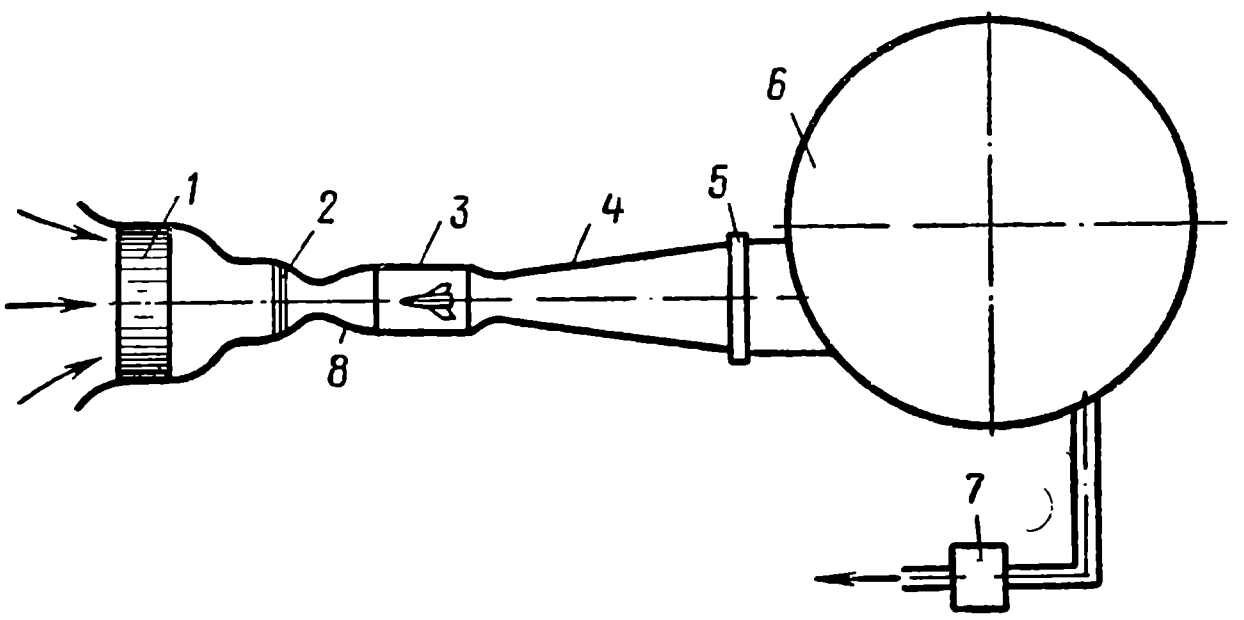


Рис. 1.4.5. Схема вакуумной аэродинамической трубы:

1 — форкамера; *2* — спрямляющие решетки; *3*—рабочая часть; *4* — диффузор; *5* — задвижка; *6* — вакуумная емкость; *7*—вакуумный насос; *8* — сопло

необходимое для обеспечения в рабочей части заданного числа M_∞ давление в форкамере и включает исполнительный двигатель *6*, который открывает задвижку *8*. Поток газа устремляется в форкамеру, где его давление измеряется датчиком *1*, который посылает соответствующий сигнал в «сравнивающее» устройство *3*.

Если давление в форкамере отличается от соответствующей величины, установленной на шкале, то сравнивающее устройство подает сигнал на электронный усилитель, который усиливает этот сигнал и посылает его дальше на электромашинный усилитель. Такой усилитель вырабатывает на выходе мощный сигнал, способный привести в действие исполнительный двигатель, который, вращаясь с необходимой скоростью и в нужном направлении, открывает или прикрывает задвижку. Этот процесс продолжается до тех пор, пока в форкамере не установится заданное давление.

Благодаря применению автоматической системы управления удается значительно ускорить выход трубы на режим установившегося обтекания, что обеспечивает экономное расходование сжатого воздуха. Одновременно исключаются ошибки, почти неизбежные при ручном регулировании величины давления в форкамере трубы, и повышается безопасность обслуживания. Число лиц, участвующих в таком обслуживании, сокращается, что позволяет избежать возможных ошибок при проведении эксперимента из-за несогласованности действия этих лиц.

На рис. 1.4.5 показана схема вакуумной трубы кратковременного действия. Необходимое для ее работы разрежение создается в резервуаре *6* вакуумным насосом *7*. В момент запуска открывается быстродействующая задвижка *5* и атмосферный воздух устремляется в трубу через форкамеру *1*, в которой установлены сетки и решетки *2*, спрямляющие поток. В сопле *8* воздух, приобретая сверхзвуковую скорость с заданным числом M_∞, поступает в рабо-

чую часть *3*, а затем через диффузор *4* попадает в вакуумный резервуар.

Вакуумные трубы в отличие от баллонных более удобны для исследования движения разреженных газов, так как позволяют получить в рабочей части воздушные потоки с малой плотностью. Таким потокам свойственны весьма небольшие числа Рейнольдса, которых удается достичь в этих трубах. Течения газа с большими числами $\mathbf{Re}_\infty$, которыми характеризуется обтекание тел сплошной средой, целесообразнее исследовать в баллонных трубах, позволяющих увеличивать давление и плотность газа в рабочей части.

2. Гиперзвуковые аэродинамические трубы

Конструкция аэродинамической трубы, предназначенной для получения очень больших (гиперзвуковых) скоростей ($\mathbf{M}_\infty > 5$), обладает рядом специфических особенностей. Для получения в такой трубе, например, потока с числом $\mathbf{M}_\infty = 8$ необходимо обеспечить отношение давлений в форкамере и рабочей части $p_0/p_\infty \approx 10^4$, что обусловливает большие абсолютные значения давления в форкамере, которая должна обладать весьма большой прочностью. Обеспечить такую прочность не всегда представляется возможным. Поэтому для поддержания заданного отношения давлений p_0/p_∞ необходимо обеспечить в рабочей части большое разрежение, которое может быть достигнуто при помощи вакуум-камеры.

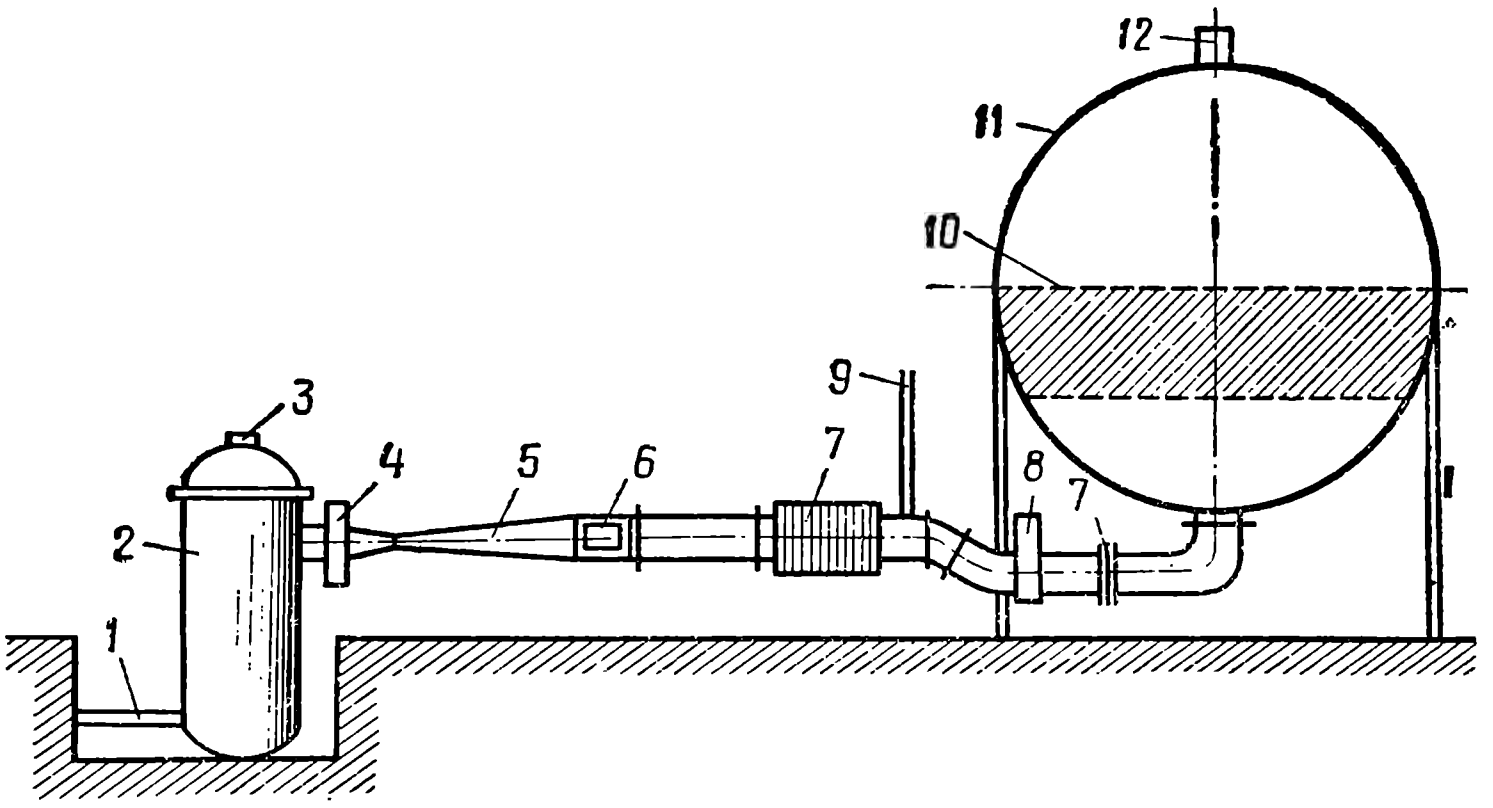


Рис. 1.4.6. Схема гиперзвуковой трубы:

1 — трубопровод высокого давления; *2* — подогреватель; *3* — камера сгорания; *4* — задвижка; *5* — сопло; *6* — рабочая часть; *7* — сильфоны; *8* — задвижка; *9* — трубопровод для откачки; *10* — теплопоглотитель; *11* — вакуум-камера; *12* — патрубок к вакуум-насосу

Глубокий вакуум в рабочей части таких труб обусловливает низкие температуры воздушного потока. В частности, отношению давлений $p_0/p_\infty = 10^4$ соответствует отношение температур $T_0/T_\infty = 14$. В этом случае при температуре в форкамере $T_0 = 288$ К (15° С) температура в рабочей части $T_\infty = 21$ К, что приведет практически к конденсации всех компонентов воздуха. Чтобы избежать этого, в конструкции гиперзвуковых труб предусматриваются подогревающие устройства.

На рис. 1.4.6 показана схема такой трубы. Воздух из баллонов высокого давления поступает в нее по трубопроводу *1*. В теплообменнике *2* он подогревается за счет сжигания газа в камере сгорания *3* и через открытую регулирующую задвижку *4* поступает в сопло *5*, а затем в рабочую часть *6*.

В вакуум-камере *11* разрежение создается насосами, откачивающими воздух через трубопровод *12*. Для быстрого запуска трубы необходимо обеспечить вакуум и в рабочей части путем предварительной откачки воздуха через трубопровод *9*. В момент запуска открываются задвижки *4* и *8*, воздух поступает из баллонов высокого давления в вакуум-камеру, и в рабочей части устанавливается поток с заданным числом Маха. Так как воздух, поступающий в трубу, подогревается до высокой температуры (примерно 1400÷1700° С), то для предохранения вакуум-

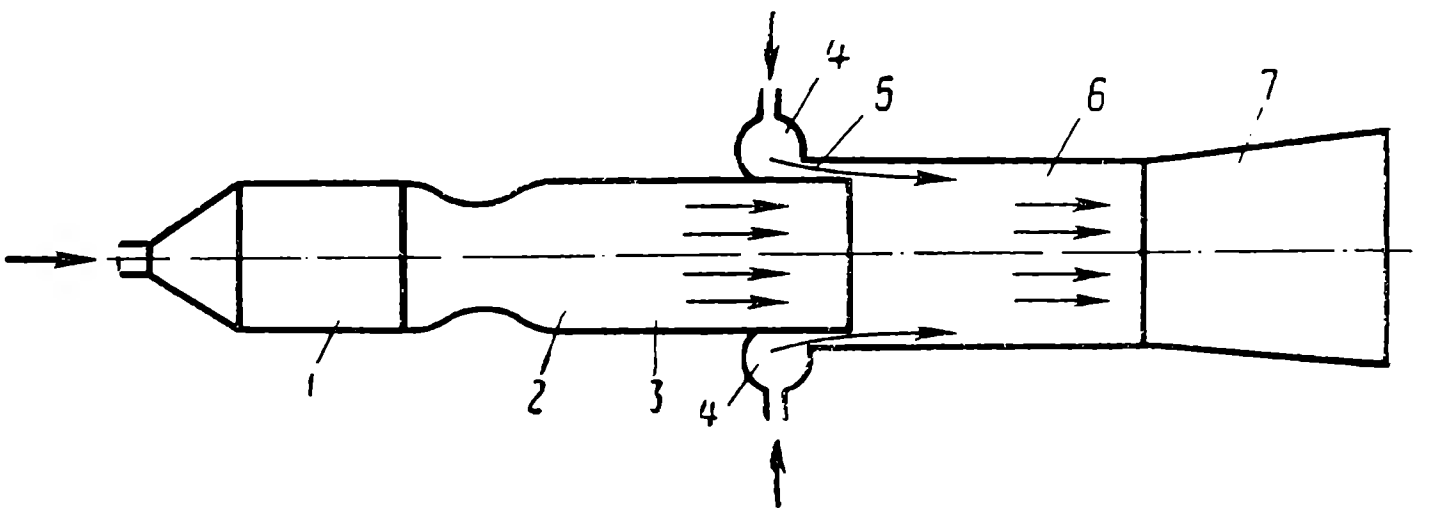


Рис. 1.4.7. Схема эжекторной сверхзвуковой трубы:

1 — форкамера; *2* — сопло; *3* — рабочая часть; *4* — камеры эжектора; *5* — кольцевой зазор; *6* — камера смешения; *7* — диффузор (стрелками показаны направления движения воздуха)

камеры от излишнего нагрева в нее помещают теплопоглощающий материал *10*.

Большие перепады температур и давлений, свойственные трубам гиперзвуковых скоростей, обусловливают появление значительных напряжений в элементах конструкции. Для уменьшения таких напряжений применяются сильфоны *7*.

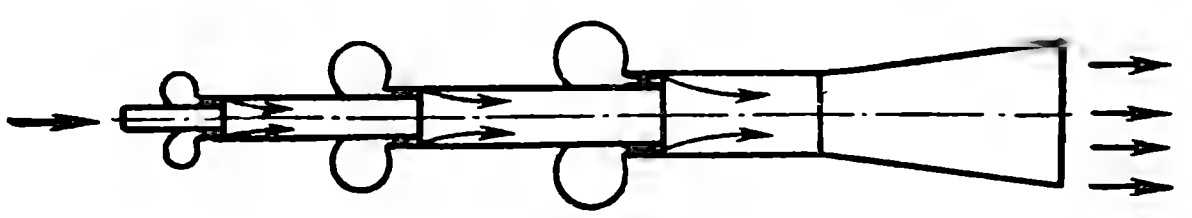


Рис. 1.4.8. Схема трехступенчатого эжектора

Разрежение на выходе из рабочей части трубы можно создавать, используя наряду с вакуумными резервуарами и эжекторы. Принципиальная схема аэродинамической установки с таким эжектором показана на рис. 1.4.7. Воздух высокого давления подается в эжектор *4* и по кольцевому зазору *5* поступает в камеру *6* вместе с потоком воздуха из рабочей части *3*. В результате смешения этого потока воздуха с эжектирующей струей, обладающей большой кинетической энергией, скорость воздуха на выходе из диффузора возрастает, а давление снижается. При этом если разрежения, создаваемого одним эжектором, недостаточно для обеспечения нормальной работы трубы, то применяется многоступенчатый эжектор. В качестве примера на рис. 1.4.8 показана схема аэродинамической трубы с трехступенчатым эжектором.

Высокое разрежение в рабочей части гиперзвуковой трубы способствует образованию «толстого» пограничного слоя на стенке сопла и поверхности обтекаемой модели. Поэтому следует внимательно отнестись к определению допустимых размеров модели, с тем чтобы избежать неблагоприятного взаимодействия пограничных слоев трубы и модели.

3. Аэродинамические установки адиабатического сжатия

Испытания моделей летательных аппаратов, движение которых сопровождается интенсивным аэродинамическим нагревом, можно проводить на установках, где высокоскоростной поток, обтекающий модель, имеет достаточно большую температуру. Один из методов получения таких потоков состоит в сжатии газа поршнем, быстро движущимся в канале трубы. При этом вследствие малой длительности процесс такого сжатия можно считать адиабатическим. Эти аэродинамические ус-

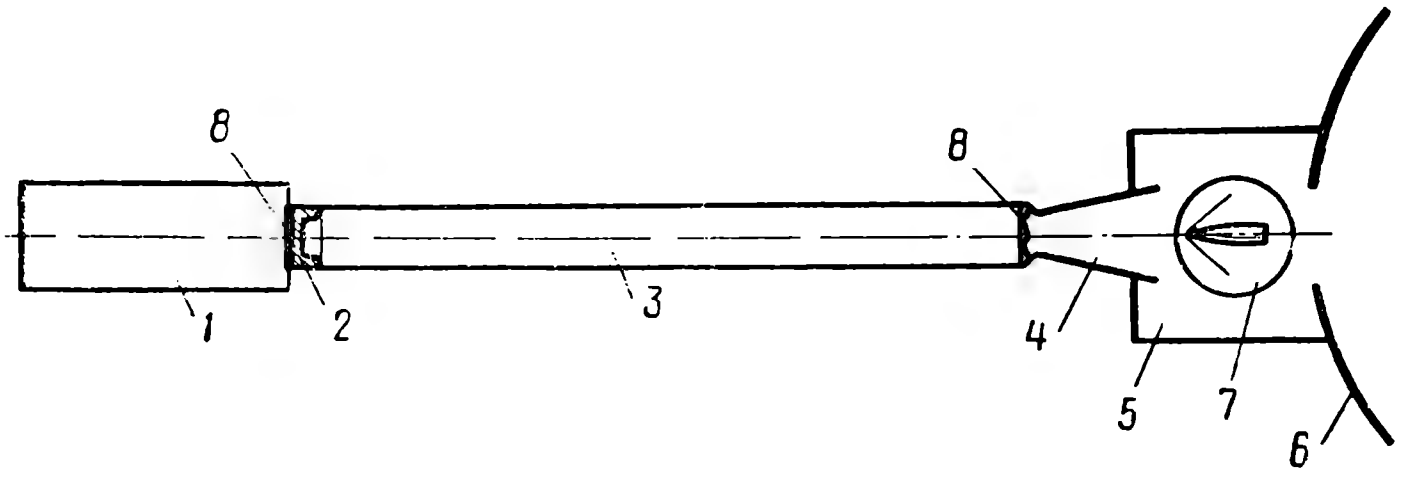


Рис. 1.4.9. Схема установки адиабатического сжатия:

1 — отсек высокого давления; *2* — поршень; *3* — отсек низкого давления; *4* — сопло; *5* — рабочая часть; *6* — вакуум-камера; *7* — окно с оптическим стеклом; *8* — диафрагмы

тановки адиабатического сжатия выполняются по схеме, показанной на рис. 1.4.9. Для приведения такой установки в действие в отсеки высокого давления *1* нагнетается толкающий газ. По достижении заданного давления происходит разрыв диафрагмы *8* и поршень *2* начинает быстрое движение по отсеку низкого давления *3*, сжимая находящийся в нем газ до давлений, достигающих 2000 $кГ/см^2$. За счет такого сжатия происходит сильный нагрев газа, примерно до 3000÷÷4000° С.

В трубе адиабатического сжатия возможны два режима работы. Один из них связан с использованием тяжелого поршня. Скорость движения такого поршня оказывается обычно меньше скорости звука в толкаемом газе, и разогрев газа в отсеке *3* происходит без образования ударной волны, т. е. изэнтропически.

Второй режим работы обусловлен применением легкого поршня. В этом случае скорость поршня резко возрастает и может значительно превысить скорость звука в газе, в котором по этой причине обязательно возникнет ударная волна, располагающаяся перед движущимся поршнем. Достигнув диафрагмы, находящейся перед критическим сечением сопла, эта волна отразится от нее и начнет обратное движение по направлению к поршню. В результате многократного отражения ударной волны от диафрагмы и поршня рабочий газ претерпевает неизэнтропическое сжатие и сильно разогревается. По достижении заданного давления происходят разрыв диафрагмы и истечение газа через сопло. Исследования показывают, что температура этого газа оказывается значительно выше, чем при использовании тяжелого поршня. При этом применение водорода или гелия в качестве толкающего газа позволяет значительно увеличить скорость движения легкого поршня и за счет этого повысить температуру газа перед соплом.

Достоинством установок адиабатического сжатия является возможность получения высокоскоростного и сильно разогретого потока газа большой плотности, что позволяет моделировать полет с гиперзвуковыми скоростями в плотных слоях атмосферы. При этом повышение плотности газа, обтекающего модель в трубе, достигается за счет уменьшения разрежения в отсеке низкого давления.

При выполнении газодинамического расчета обычно считаются заданными числа $\mathbf{M}_\infty$ в рабочей части и схема трубы (или, как говорят, ее аэродинамический контур). В результате такого расчета для труб кратковременного действия, работающих от баллонов сжатого воздуха, определяется минимальное давление в форкамере, необходимое для получения заданного числа $\mathbf{M}_\infty$ в рабочей части, а также находится время работы трубы при заданном запасе сжатого воздуха. Расчет вакуумных труб предусматривает нахождение конечного давления в вакуум-камере и времени работы при заданном ее объеме. В случае труб постоянного действия определяются степень сжатия, расход воздуха и мощность компрессора. Газодинамический расчет труб, предназначенных для больших чисел $\mathbf{M}_\infty$, позволяет определить необходимую температуру подогрева газа.

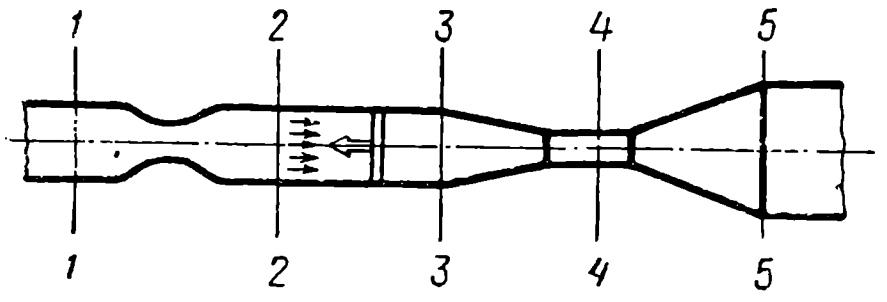


Рис. 1.4.10. Схема аэродинамической трубы для газодинамического расчета

Для всех типов аэродинамических труб в задачу такого расчета входит определение параметров потока (давления, плотности, числа Рейнольдса и др.) в рабочей части и в других сечениях трубы. Обозначим через p, ρ и T соответственно давление, плотность и температуру в потоке, а через p_0, ρ_0 и T_0 — соответственно давление, плотность и температуру изэнтропического торможения потока. Индексы при этих величинах, а также при других параметрах (скорость V, скорость звука a, число $\mathbf{M}=V/a$, относительная скорость $\lambda=V/a^*$) совпадают с номерами поперечных сечений трубы, показанных на рис. 1.4.10. Введем обозначение для коэффициента восстановления давления на каком-либо участке трубы $\nu_n=p_{0(n+1)}/p_{0n}$ и будем считать течение здесь одномерным.

Сопло. Так как при течении газа в форкамере и сопле потери на трение пренебрежимо малы, а теплообмен через стенки ничтожен, то такое течение можно рассматривать как адиабатическое и изэнтропическое. В соответствии с этим параметры потока на срезе сопла могут быть определены по следующим зависимостям:

$$p_2 = p_{01}\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_2^2\right)^{\frac{k}{k-1}}; \qquad (1.4.1)$$

$$T_2 = T_{01}\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_2^2\right); \qquad (1.4.2)$$

$$\rho_2 = \rho_{01}\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_2^2\right)^{\frac{1}{k-1}}, \qquad (1.4.3)$$

где p_{01}, T_{01}, ρ_{01} — соответственно давление, температура и плотность в форкамере трубы.

Отношение площадей сечений сопла S^*/S_2, необходимое для получения заданного числа $\mathbf{M}_\infty=\mathbf{M}_2$ на выходе этого сопла, найдем из уравнения расхода $\rho^* a^* S^* = \rho_2 V_2 S_2$, в соответствии с которым

$$S^*/S_2 = \rho_2 V_2/(\rho^* a^*).$$

Здесь отношение удельных расходов $\rho_2 V_2/(\rho^* a^*)$ является функцией $\mathbf{M}_\infty=\mathbf{M}_2$ (или $\lambda_\infty=\lambda_2$), т. е.

$$S^*/S_2 = q(\mathbf{M}_2) \text{ или } S^*/S_2 = q(\lambda_2), \qquad (1.4.4)$$

где

$$q(\mathbf{M}_2) = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \cdot \mathbf{M}_2 \left(1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}_2^2\right)^{-\frac{k+1}{2(k-1)}},$$

$$q(\lambda_2) = \lambda_2 \left(\frac{k+1}{2} - \frac{k-1}{2}\lambda_2^2\right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Значения $q(\mathbf{M}_2)$ или $q(\lambda_2)$ могут быть найдены из таблиц газодинамических функций соответственно по известным значениям $\mathbf{M}_2$ или λ_2. Коэффициент восстановления давления в форкамере $\nu_1 = 1$.

Рабочая часть. Определим параметры потока в конце рабочей части (в сечении *3—3*), если известны значения этих параметров на срезе сопла. Рассмотрим закрытую рабочую часть и запишем уравнение изменения количества движения потока в ней:

$$m(V_3 - V_2) = (p_2 - p_3)S_2 - \frac{\rho_2 V_2^2}{2}\left(c_x S_{\text{мид}} + \lambda_{\text{тр}} S_2 \frac{l}{d}\right),$$

где m — массовый расход газа в трубе; c_x — коэффициент сопротивления модели и подвески, отнесенный к площади миделевого сечения $S_{\text{мид}}$; $\lambda_{\text{тр}}$ — коэффициент трения; l/d — отношение длины рабочей части к ее диаметру (или высоте).

Произведя некоторые преобразования, получим

$$z(\lambda_3) = z(\lambda_2) - \lambda_2 \frac{k}{k+1}\left(c_x \frac{S_{\text{мид}}}{S_2} + \lambda_{\text{тр}} \frac{l}{d}\right), \qquad (1.4.5)$$

где

$$z(\lambda_3) = \lambda_3 + (1/\lambda_3); \quad z(\lambda_2) = \lambda_2 + (1/\lambda_2).$$

Уравнение (1.4.5) позволяет определить относительную скорость λ_3 в конце рабочей части с учетом сопротивления модели и ее подвески. При этом для нахождения коэффициента трения $\lambda_{\text{тр}}$ можно воспользоваться, например, формулами Никурадзе:

$$1/\sqrt{\lambda_{\text{тр}}} = 2{,}01 \lg(\mathbf{Re}\sqrt{\lambda_{\text{тр}}}) - 0{,}84 \qquad (1.4.6)$$

или

$$\lambda_{\text{тр}} = 0{,}0032 + 0{,}221/\mathbf{Re}^{0{,}237}. \qquad (1.4.7)$$

Здесь число **Re** может быть определено по диаметру или высоте рабочей части трубы. При этом формула (1.4.6) справедлива для чисел **Re** от 10^5 до $3 \cdot 10^6$, а (1.4.7) — от 10^5 до 10^8.

Коэффициент восстановления давления в рабочей части определяется зависимостью

$$\nu_2 = S_2 q(\lambda_2)/[S_3 q(\lambda_3)]. \qquad (1.4.8)$$

Для рабочей части с постоянным поперечным сечением ($S_2 = S_3$)

$$\nu_2 = q(\lambda_2)/[q(\lambda_3)]. \qquad (1.4.9)$$

Для получения одинаковой скорости в начале и конце рабочей части ($\lambda_2 = \lambda_3$) необходимо брать отношение площадей $S_2/S_3 = \nu_2$.

Рассмотрим расчет рабочей части со свободной струей (открытой или в виде герметической камеры). В такой рабочей части давления в начале и конце будут равны ($p_2 = p_3$) и уравнение количества движения примет вид

$$m(V_3 - V_2) = -\frac{\rho_2 V_2^2}{2}\left(c_x S_{\text{мид}} + \xi_c S_2 \frac{l}{d}\right).$$

Из этого уравнения можно получить выражение для числа λ в конце рабочей части

$$\lambda_3 = \frac{\lambda_2}{2}\left(2 - c_x \frac{S_{мид}}{S_2} - \xi_c \frac{l}{d}\right), \qquad (1.4.10)$$

где ξ_c — коэффициент сопротивления свободной струи (обычно $\xi_c \approx 0{,}07$).

Коэффициент восстановления давления в струе

$$\nu_2 = \frac{p_{03}}{p_{02}} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_2^2\right)^{\frac{k}{k-1}} \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_3^2\right)^{-\frac{k}{k-1}}. \qquad (1.4.11)$$

Определив λ_2 и ν_2, можно найти все остальные параметры потока в конце рабочей части:

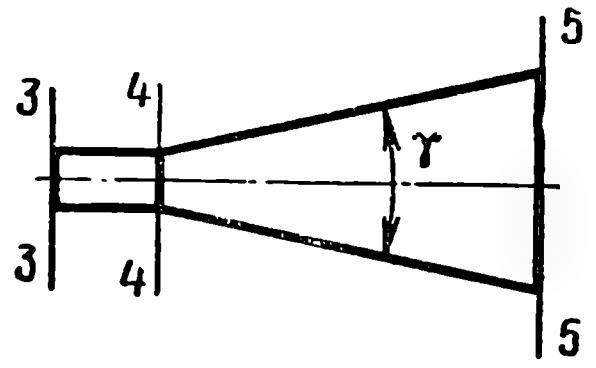


Рис. 1.4.11. Схема дозвукового диффузора

$$p_3 = p_{03}\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_3^2\right)^{\frac{k}{k-1}}; \qquad (1.4.12)$$

$$T_3 = T_{03}\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_3^2\right); \qquad (1.4.13)$$

$$\rho_3 = \rho_{03}\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_3^2\right)^{\frac{1}{k-1}}, \qquad (1.4.14)$$

где $p_{03} = \nu_2 p_{02}$; $T_{03} = T_{02}$; $\rho_{03} = \nu_2 \rho_{02}$.

Диффузор. Расчет диффузора заключается в определении коэффициента восстановления давления $\nu_д = p_{05}/p_{03}$, а также площади поперечного сечения горла *4—4* и параметров потока в конце диффузора (сечение *5—5*). Рассмотрим вначале дозвуковой диффузор и вычислим коэффициенты восстановления давления для участков *3—4* и *4—5* (рис. 1.4.11). При этом будем считать, что на входе в диффузор образуется прямой скачок уплотнения. Тогда коэффициент восстановления давления для участка *3—4* и число λ в сечении *4—4* определяется по формулам прямого скачка:

$$\nu_3 = \frac{p_{04}}{p_{03}} = \lambda_3^2 \left(\frac{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_3^2}{1 - \frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{1}{\lambda_3^2}}\right)^{\frac{1}{k-1}}; \qquad (1.4.15)$$

$$\lambda_4 = 1/\lambda_3. \qquad (1.4.16)$$

Для определения коэффициента сопротивления расширяющейся части диффузора можно пользоваться соотношениями, приведенными в работе [16]. В частности, для конических диффузоров круглого сечения с углами раствора $\gamma = 0 \div 40°$ этот коэффициент

$$\xi_д = \frac{\lambda_{тр}}{8\sin(\gamma/2)}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + 3{,}2\left(\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)^{1{,}25}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2. \qquad (1.4.17)$$

Для квадратных и прямоугольных диффузоров с одинаковыми углами раствора $\gamma = 0 \div 25°$ (для обеих плоскостей)

$$\xi_д = \frac{\lambda_{тр}}{8\sin(\gamma/2)}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + 4\left(\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)^{1{,}25}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2. \qquad (1.4.18)$$

Для плоских диффузоров с углами полураствора $\gamma = 0 \div 40°$ коэффициент сопротивления

$$\xi_д = \frac{\lambda_{тр}}{4}\left[\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}(\gamma/2)}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2\sin(\gamma/2)}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right] + 3{,}2\left(\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)^{1{,}25}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2. \qquad (1.4.19)$$

В формулах (1.4.17÷1.4.19): $\xi_д$ — общий коэффициент сопротивления, учитывающий трение и местные потери; $n = S_5/S_4$ — отношение площадей выходного и входного сечений диффузора; a и b — стороны входного сечения плоского диффузора (b — сторона, постоянная по всей длине); $\lambda_{тр}$ — коэффициент трения, который может быть рассчитан по полуэмпирическим формулам (1.4.6) или (1.4.7), а также по соотношению

$$\lambda_{тр} = 0{,}3164/\mathbf{Re}^{0,25}, \qquad (1.4.20)$$

пригодному для чисел $\mathbf{Re} < 10^5$, причем эти числа **Re** определяются по параметрам на входе в расширяющуюся часть диффузора (сечение *4—4* на рис. 1.4.11).

Коэффициент восстановления давления диффузора (на участке *4—5*)

$$\nu_4 = \frac{p_{05}}{p_{04}} = 1 - \xi_д \frac{k}{k+1} \lambda_4^2 \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_4^2\right)^{\frac{1}{k-1}}. \qquad (1.4.21)$$

Скорость в конце диффузора λ_5 может быть найдена по таблицам газодинамических функций при помощи формулы

$$q(\lambda_5) = q(\lambda_4) \frac{1}{\nu_4} \cdot \frac{S_4}{S_5},$$

в которой

$$q(\lambda_4) = \lambda_4 \left(\frac{k+1}{2} - \frac{k-1}{2} \lambda_4^2\right)^{\frac{1}{k-1}};$$

$$q(\lambda_5) = \lambda_5 \left(\frac{k+1}{2} - \frac{k-1}{2} \lambda_5^2\right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Общий коэффициент восстановления давления диффузора

$$\nu_д = \nu_3 \nu_4. \qquad (1.4.22)$$

При расчете сверхзвукового диффузора примем, что на его начальном участке образуется система косых скачков, завершающаяся прямым скачком, расположенным в горле диффузора (как изображено на рис. 1.4.14, *б*). Пользуясь теорией скачков уплотнения, можно рассчитать коэффициент восстановления давления для такой системы скачков. Соответствующая площадь сечения горла диффузора, обеспечивающая запуск аэродинамической трубы, будет найдена из уравнения расхода газа, движущегося на участке (см. рис. 1.4.10) между срезом сопла (сечение *2—2*) и горлом (сечение *4—4*). При этом примем, что скачок, возникающий во время запуска трубы и перемещающийся в направлении от сопла к диффузору, прямой, а в горле диффузора площадью $S_{4г}$ устанавливается скорость звука $\lambda_4 = 1$. В соответствии с этим уравнение расхода запишем в виде

$$\rho_2 \lambda_2 S_2 = \rho_4^* S_{4г},$$

откуда

$$S_{4г} = \rho_2 \lambda_2 S_2 / \rho_4^*$$

или после подстановки соответствующих зависимостей

$$S_{4г} = \lambda_2 S_2 \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2\right)^{\frac{1}{k-1}} \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \frac{\rho_{02}}{\rho_{04}}.$$

Так как

$$\frac{\rho_{02}}{\rho_{04}} = \frac{1}{\nu_{пр}}; \quad \lambda_2 \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2\right)^{\frac{1}{k-1}} \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} = q(\lambda_2),$$

то

$$S_{4г} = S_2 q(\lambda_2) \frac{1}{\nu_{пр}} \qquad (1.4.23)$$

или

$$S_{4г} = S^*/\nu_{пр},$$

где $\nu_{пр}$ — коэффициент восстановления давления в прямом скачке уплотнения; S^* — площадь критического сечения сопла.

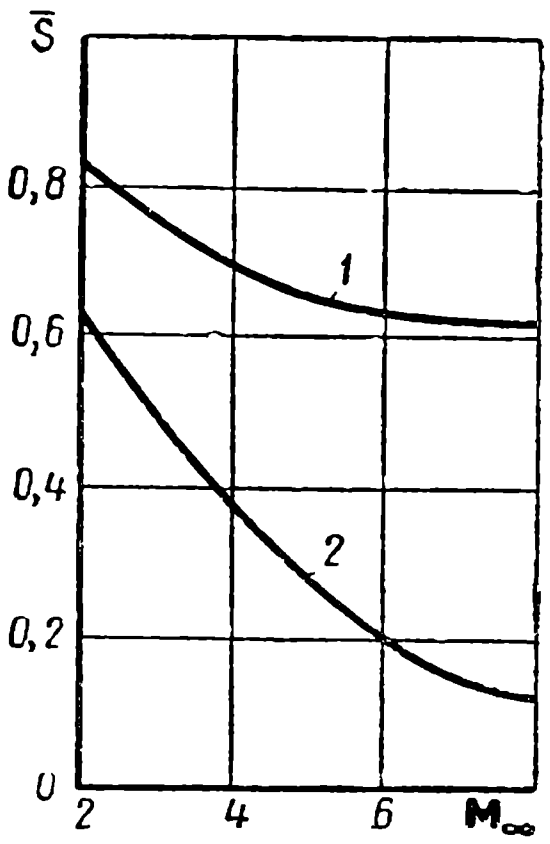


Рис. 1.4.12. Зависимость относительной площади $\bar{S}=S_{4г}/S_2$ горла диффузора от M_∞:

1 — по формуле (1.4.23); *2* — рабочий режим (экспериментальные данные)

Если площадь горла диффузора будет меньше площади $S_{4г}$, то аэродинамическая труба не запустится, как бы ни увеличивали давление в форкамере. Как показали исследования, после запуска трубы площадь горла можно уменьшить до значения $S_{4раб}$, обеспечивающего наибольший коэффициент восстановления давления на рабочем режиме. Величина этой площади обычно определяется опытным путем.

В соответствии с этим в ряде современных конструкций труб предусматриваются регулируемые диффузоры. Запуск таких труб производится при большой площади горла диффузора, а после выхода трубы на расчетный режим эту площадь уменьшают до значений, определяемых экспериментальной кривой *2* на рис. 1.4.12.

Зная коэффициент восстановления давления диффузора $\nu_д$ и скорость λ_3 на входе в диффузор, можно определить скорость λ_5 на выходе из этого диффузора, решив уравнение расхода

$$q(\lambda_5) = q(\lambda_3) \frac{1}{\nu_д} \cdot \frac{S_3}{S_5}, \qquad (1.4.24)$$

в котором $\nu_д = \nu_3 \nu_4$.

Расчет числа **Re** и расхода воздуха в трубе. При расчете числа **Re** в аэродинамической трубе удобно выразить его через относительную скорость λ в рабочей части и параметры торможения в форкамере. Для этого в формулу $\mathbf{Re} = \rho_2 V_2 l/\mu_2$ подставим вместо V_2 выражение

$$V_2 = \lambda_2 a^* = \lambda_2 \sqrt{\frac{2k}{k+1} RT_{01}}$$

и после некоторых преобразований получим

$$\mathbf{Re} = \sqrt{\frac{2k}{(k+1)R}} \cdot \frac{l}{\mu_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{T_{01}}} p_{01} \lambda_2 \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_2^2\right)^{\frac{1}{k-1}}. \qquad (1.4.25)$$

Так как для воздуха $k=1{,}4$, $R=287$ $м^2/(сек^2 \cdot град)$, то

$$\mathbf{Re} = 0{,}0637 \frac{l}{\mu_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{T_{01}}} p_{01} \lambda_2 (1 - 0{,}167\lambda_2^2)^{2{,}5}. \qquad (1.4.26)$$

В этих формулах: l — длина, по которой вычисляется число **Re**; μ_2 — коэффициент динамической вязкости газа в рабочей части, определяемый по формуле

$$\mu_2/\mu_{нач} = (T_2/T_{нач})^{0{,}76}, \qquad (1.4.27)$$

в которой величина $\mu_{нач}$ соответствует начальной температуре $T_{нач}=288$ К и равна $1{,}82 \cdot 10^{-6}$ $кГ \cdot сек/м^2$.

Расход газа определяется зависимостью $m=\rho_2 S_2 \lambda_2 a^*$, которую можно привести к виду

$$m=\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}\sqrt{\frac{2k}{k+1}\cdot\frac{1}{R}}\cdot\frac{p_{01}}{\sqrt{T_{01}}}S^*; \qquad (1.4.28)$$

для воздуха

$$m=0{,}0405\left(p_{01}/\sqrt{T_{01}}\right)S^* \qquad (1.4.29)$$

или

$$m=0{,}0637S_2\left(1/\sqrt{T_{01}}\right)p_{01}\lambda_2\left(1-0{,}167\lambda_2^2\right)^{2,5}. \qquad (1.4.30)$$

Давление в форкамере и время работы трубы. Определение величины минимального давления ($p_{01\,\min}$) в форкамере трубы баллонного типа связано с нахождением суммарного коэффициента восстановления давления. Величина этого коэффициента ν равна произведению коэффициентов восстановления на каждом участке трубы:

$$\nu=\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4.$$

Очевидно, этот коэффициент можно определить как отношение давления торможения на выходе к давлению в форкамере, т. е. $\nu=p_0/p_{01\,\min}$, где

$$p_0=p_a\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_5^2\right)^{-\frac{k}{k-1}};$$

здесь p_a — атмосферное давление.

В соответствии с этим

$$p_{01\min}=p_a/\left[\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_5^2\right)^{\frac{k}{k-1}}\right]. \qquad (1.4.31)$$

Время работы трубы определяется по формуле $\tau=N/m$, в которой N — масса газа, потребная для экспериментов: $N=N_{\text{нач}}-N_{\text{кон}}$. Начальная масса газа в баллонах $N_{\text{нач}}$ зависит от объема этих баллонов $W_{\text{б}}$, а также от начального давления $p_{\text{б.нач}}$ и начальной температуры в них $T_{\text{б.нач}}$. Конечная масса $N_{\text{кон}}$ определяется тем же объемом и конечными значениями давления $p_{\text{б.кон}}$ и температуры $T_{\text{б.кон}}$. В соответствии с этим

$$N_{\text{нач}}=\frac{p_{\text{б.нач}}}{RT_{\text{б.нач}}}W_{\text{б}},\quad N_{\text{кон}}=\frac{p_{\text{б.кон}}}{RT_{\text{б.кон}}}W_{\text{б}},$$

и время работы трубы

$$\tau=\frac{W_{\text{б}}}{Rm}\left(\frac{p_{\text{б.нач}}}{T_{\text{б.нач}}}-\frac{p_{\text{б.кон}}}{T_{\text{б.кон}}}\right). \qquad (1.4.32)$$

В выражении (1.4.32) расход газа m можно определить из (1.4.28) или (1.4.30). Принимая процесс опорожнения баллонов изотермическим, т. е. полагая $T_{\text{б.нач}}=T_{\text{б.кон}}=T_{\text{б}}$, преобразуем (1.4.32) к виду

$$\tau=\frac{W_{\text{б}}}{RmT_{\text{б}}}\left(p_{\text{б.нач}}-p_{\text{б.кон}}\right); \qquad (1.4.33)$$

здесь конечное давление в баллонах

$$p_{\text{б.кон}}=p_a/\left[\nu_{\text{тр}}\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_5^2\right)^{\frac{k}{k-1}}\right], \qquad (1.4.34)$$

где $\nu_{\text{тр}}$ — коэффициент восстановления давления в трубопроводе, соединяющем баллоны с форкамерой, при полностью открытой регулирующей задвижке.

Время работы вакуумной трубы

$$\tau=\frac{W_{\text{в}}}{RmT_{\text{в}}}\left(p_{\text{в.кон}}-p_{\text{в.нач}}\right), \qquad (1.4.35)$$

где $p_{в.нач}$, $p_{в.кон}$ — соответственно начальное и конечное давления газа в вакуум-камере, а $W_в$ — ее объем; $T_в = T_{в.нач} = T_{в.кон}$. Конечное давление в вакуум-камере

$$p_{в.кон} = \nu_1\nu_2\nu_3\nu_4\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_5^2\right)^{\frac{k}{k-1}} p_а. \qquad (1.4.36)$$

Конденсация воздуха. Определим потребную температуру подогрева воздуха для предотвращения конденсации. Рассматривая воздух как объемную смесь, состоящую из 79% азота и 21% кислорода, получим из условия конденсации кислорода

$$T_{01} = \frac{366{,}523\left(1 + 0{,}2M_2^2\right)}{4{,}063 - \lg\left(0{,}21p_2\right)}. \qquad (1.4.37)$$

Конденсация воздуха. Определим потребную температуру пература подогрева воздуха, поступающего в трубу, должна рассчитываться именно из условия этой конденсации.

5. Определение допустимых размеров моделей

Основное требование, которое предъявляется к модели летательного аппарата, состоит в том, чтобы она полностью находилась в зоне невозмущенного равномерного течения в рабочей части аэродинамической трубы. С учетом этого должны быть выбраны соответствующие размеры модели. Эти размеры оказывают влияние на условия работы самой трубы и должны обеспечивать при запуске выход ее на расчетный режим обтекания.

Рассмотрим методы определения максимально допустимых размеров модели. В сверхзвуковой трубе такое определение ведется исходя из требования, чтобы возмущения, вносимые моделью в сверхзвуковой поток, в частности в виде скачков уплотнения или слабых волн сжатия, и отраженные от стенок, не достигали модели.

На рис. 1.4.13 показана схема отражения головного скачка уплотнения, возникающего перед моделью при различных углах атаки. На характере этого отражения сказывается влияние пограничного слоя. Условно считают, что поверхность отражения удалена от твердой стенки рабочей части на толщину вытеснения.

Перед изготовлением модели следует построить и проанализировать схему скачков уплотнения, образующихся в рабочей части, с тем чтобы длина модели не превышала некоторого значения, по достижении которого отраженные скачки попадут на поверхность модели. С ростом угла атаки α допустимая длина модели будет уменьшаться (см. рис. 1.4.13). Следует также иметь в виду, что размеры модели должны удовлетворять условию, согласно которому во время эксперимента она должна располагаться (в рабочей части прямоугольного сечения) внутри клиновидного участка, образованного линиями Маха, как это показано на рис. 1.4.13. На этом участке течение равномерное, а число M_∞ равно тому значению, которое имеет место во всей рабочей части трубы.

При выборе размеров модели следует проанализировать картину расположения скачков и слабых волн возмущения не только в вертикальной плоскости, как это изображено на рис. 1.4.13, но также и в горизонтальной. Это позволит правильно выбрать размеры модели и избежать неблагоприятного воздействия на нее возмущений, отраженных от боковых стенок рабочей части.

При исследовании картины взаимодействия скачков уплотнения со стенкой углы головного θ_c и отраженного φ скачков определяются с помощью обычных методов газовой динамики по известным значениям чи-

сла $\mathbf{M}_\infty$ и угла заострения головной части модели. Толщина вытеснения δ^* может быть с достаточной точностью вычислена по формулам, приведенным в работе [20].

Площадь поперечного сечения модели вместе с устройствами, при помощи которых она крепится в рабочей части трубы, находится из условия допустимого загромождения этой рабочей части, определяемой в свою очередь возможностью запуска трубы и выхода ее на заданный режим работы. Для этой цели рассмотрим схему течения около модели, помещенной в сверхзвуковую трубу (рис. 1.4.14). Схема течения в рабо-

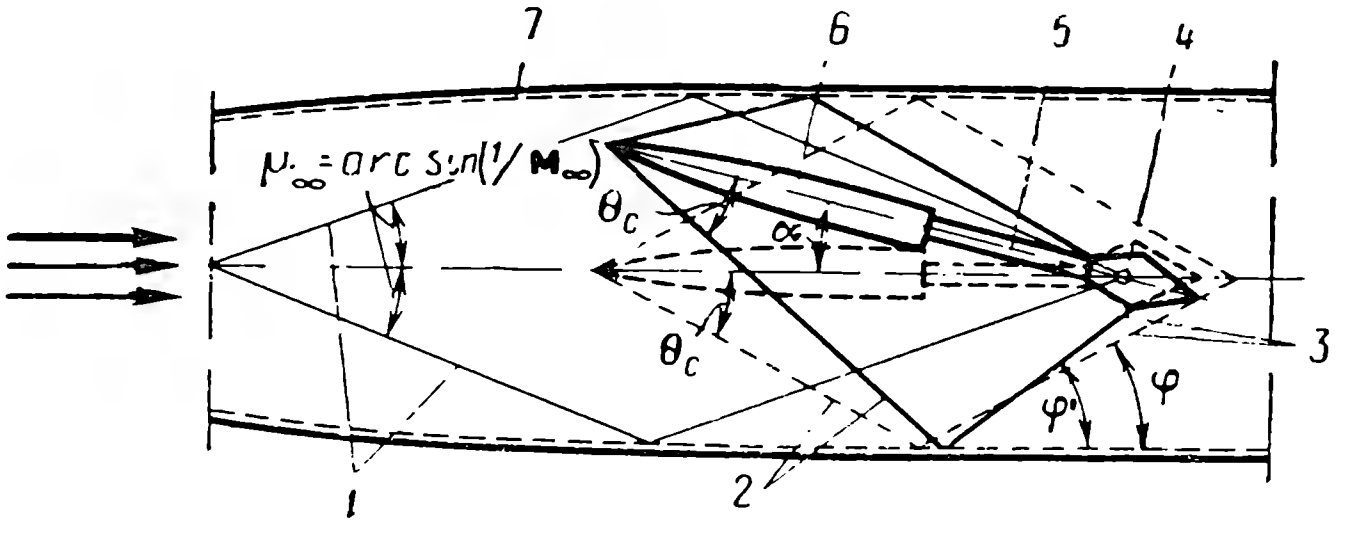


Рис. 1.4.13. К определению степени «загромождения» рабочей части трубы:

1 — линии слабых возмущений; *2* — головные скачки уплотнения; *3* — отраженные скачки уплотнения; *4* — траверса; *5* — державка тензовесов; *6* — модель тела вращения; *7* — пограничный слой

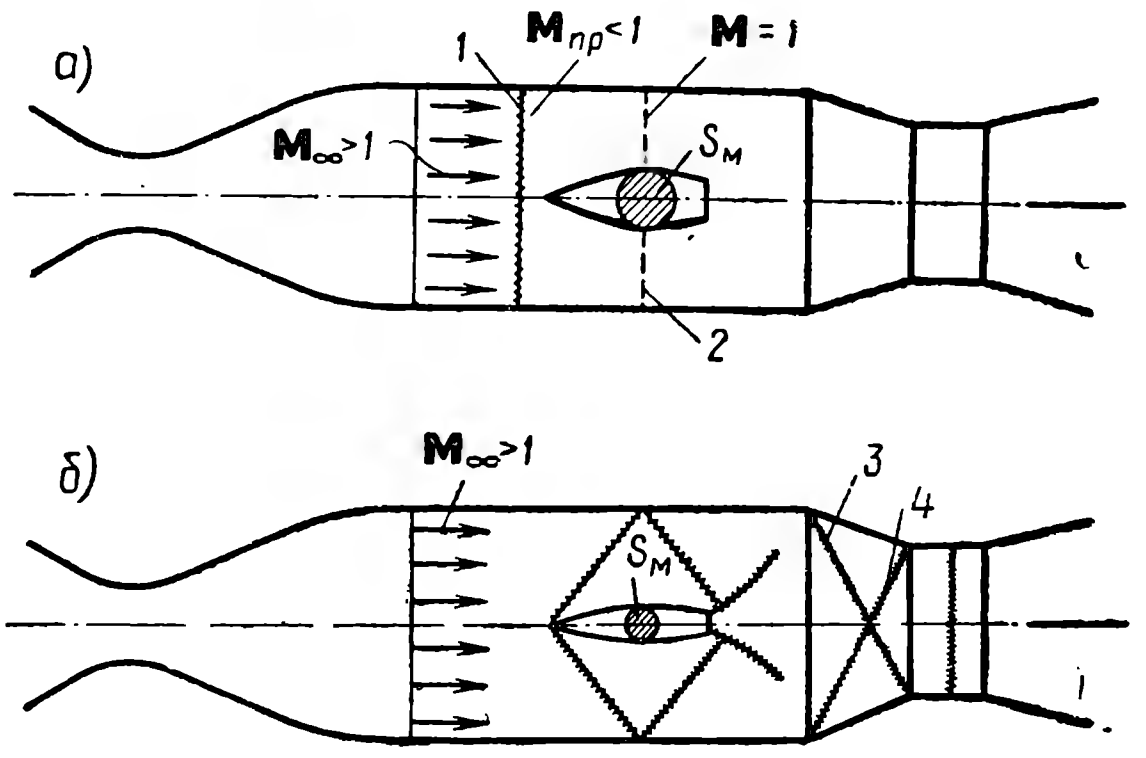


Рис. 1.4.14. К расчету допустимого заполнения поперечного сечения трубы моделью:

а — труба заперта; *б* — труба в режиме установившегося обтекания;
1 — прямой скачок; *2* — «звуковая» линия; *3* — первый косой скачок уплотнения; *4* — второй косой скачок уплотнения

чей части трубы, когда она «заперта» прямым скачком, появившимся перед моделью в момент запуска, изображена на рис. 1.4.14, *а*. Приняв в наиболее узком сечении трубы (там, где диаметр модели наибольший) скорость течения равной скорости звука ($\mathbf{M}_2=1$), можно написать в соответствии с теорией изэнтропического движения газа

$$\frac{S_т - S_м}{S_т} = \frac{\mathbf{M}_{пр}}{\mathbf{M}_2}\left(\frac{1+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_2^2}{1+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_{пр}^2}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} = \mathbf{M}_{пр}\left(\frac{\frac{k+1}{2}}{1+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_{пр}^2}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \qquad (1.4.38)$$

где $S_т$ — площадь участка поперечного сечения рабочей части, равная разности всей ее площади и произведения толщины вытеснения δ^* на периметр рабочей части; $S_м$ — площадь сечения модели в том месте, где $M_2=1$; $M_{пр}$ — число Маха за прямым скачком; его величина определяется по числу M_∞ в рабочей части из выражения

$$M_{пр}^2 = \frac{2/(k-1)+M_\infty^2}{2kM_\infty^2/(k-1)-1}. \qquad (1.4.39)$$

В результате решения уравнений (1.4.38) и (1.4.39) определяется площадь $S_м$, соответствующая режиму «запертой» трубы. Уменьшая эту площадь, можно подобрать такое ее значение, при котором скачок уплотнения переместится в горло диффузора и труба «выйдет» на расчетный режим установившегося обтекания. Для определения допустимой площади $S_м$ можно также использовать экспериментальный график, приведенный на рис. 1.4.15 [44]. При этом следует иметь в виду, что такое определение должно вестись с учетом угла атаки α. Если значение $S_м$ на рис. 1.4.15 найдено для заданного угла α, то соответствующая величина миделевого сечения $S_{мид}=S_м\cos\alpha$.

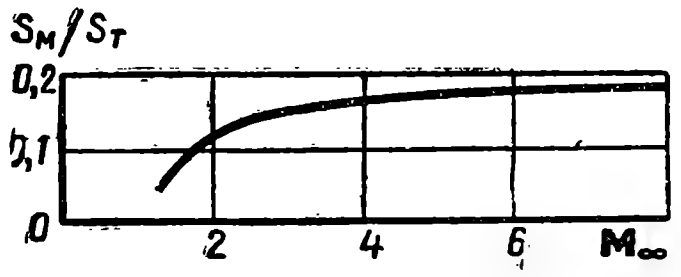


Рис. 1.4.15. Допустимое «загромождение» рабочей части сверхзвуковой аэродинамической трубы (экспериментальные данные)

§ 1.5. УДАРНЫЕ ТРУБЫ

1. Устройство и принцип работы

Ударная труба представляет собой экспериментальную установку для исследования нестационарного обтекания, кинетики химических реакций и теплофизических процессов в газовом потоке. В отдельных случаях такие трубы применяются для изучения установившегося обтекания моделей летательных аппаратов и силового взаимодействия их с обтекающим потоком.

В простейшем виде такая установка (рис. 1.5.1) состоит из двух отсеков трубы, разделенных между собой диафрагмой из легко разрушающегося материала. В левый отсек под большим давлением, которое может достигать несколько сотен атмосфер, нагнетается толкающий газ. При определенных значениях этого давления происходит разрушение диафрагмы *2*, и толкающий газ проникает в отсек низкого давления *3*.

Рассмотрим упрощенную схему, в соответствии с которой разрушение диафрагмы происходит мгновенно, а передняя контактная поверхность толкающего газа является плоской. Обозначим параметры газа в отсеке высокого давления, в момент разрушения диафрагмы, индексом «4» (например, p_4, T_4 и т. д.), а в отсеке низкого давления—индексом «1» (p_1, T_1 и т. д.).

Процессы, происходящие в трубе, изображены графически в координатах t, x; p, x и T, x на рис. 1.5.2. Отсчет времени t на этих графиках производится с момента разрушения диафрагмы. Контактная поверхность, распространяясь в область *1* со скоростью u_2, сжимает газ, находящийся в отсеке низкого давления. В результате возникает ударная волна, которая движется со скоростью c_s, опережая контактную поверхность (фронт этой волны на рис. 1.5.2 обозначен буквой N).

По истечении некоторого времени t_0 контактная поверхность и волна расположатся так, как показано на рис. 1.5.2. Между ними появится область *2*, в которой располагается рабочая пробка с температурой

газа T_2 и давлением p_2. Значения этих параметров будут, очевидно, выше, чем в невозмущенном пространстве отсека низкого давления. В соответствии с рис. 1.5.2 длина рабочей пробки

$$L = (c_s - u_2)\,t.$$

В координатах t, x положения контактной поверхности и ударной волны в каждый момент времени изображаются прямыми OK и ON. Одновременно с движением контактной поверхности в противоположном направлении распространяется с соответствующей скоростью звука в отсеке высокого давления серия волн разрежения R. Как показано на ри-

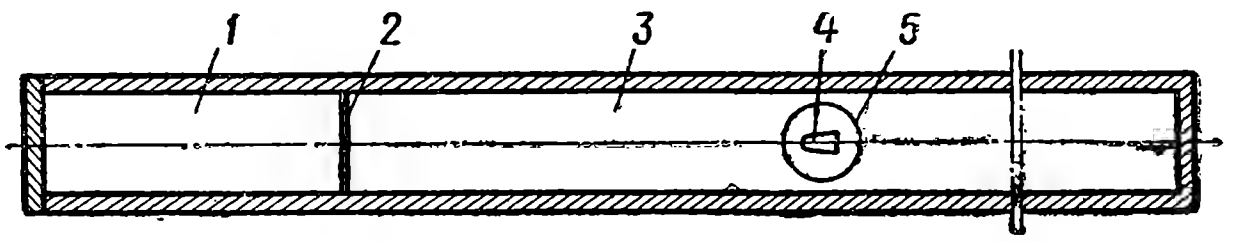


Рис. 1.5.1. Схема ударной трубы:
1 — отсек высокого давления; *2* — диафрагма; *3* — отсек низкого давления; *4* — модель; *5* — окно

сунке, у передней волны скорость будет a_4, а у замыкающей a_3, причем $a_3 < a_4$, так как температура в зоне разрежения падает ($T_3 < T_4$). Следует иметь в виду, что волна, движущаяся со скоростью a_4, распространяется в неподвижном газе, а волна, скорость которой a_3,— в движущейся среде. Поэтому скорость волны относительно трубы $c_3 = a_3 - u_3$ (где u_3 — скорость толкающего газа, направленная в сторону отсека низкого давления). Таким образом, возникает область течения *3*, расположенная между рабочей пробкой *2* и волнами разрежения.

Так как контактная поверхность не является поверхностью разрыва, то давления и скорости справа и слева от этой поверхности одинаковы, т. е. $p_2 = p_3$ и $u_3 = u_2$. При этом, однако, соответствующие температуры не будут равны, ибо по обе стороны от этой поверхности находятся разные газы и к тому же один из них расширяется, а другой испытывает сжатие.

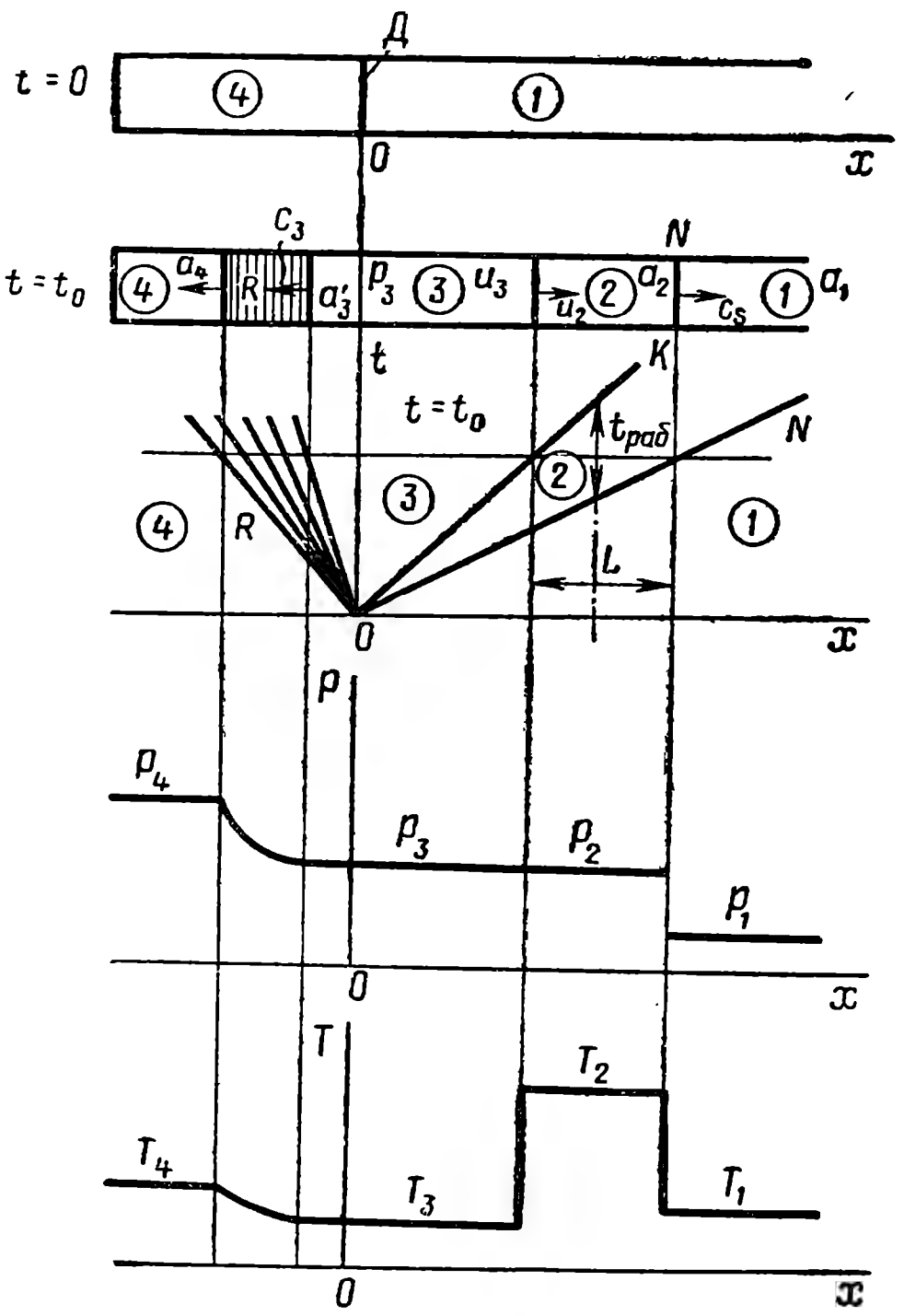


Рис. 1.5.2. Изменение параметров в однодиафрагменной ударной трубе

Для исследования обтекания тел высокотемпературным потоком используется течение в рабочей пробке. Чем дальше вправо от диафрагмы *Д* располагается модель, тем больше продолжительность времени $t_{раб}$ работы трубы, так как по мере этого удаления (до известного предела) растет длина пробки.

2. Аэродинамические ударные трубы

В ударных трубах газ разогревается до высоких температур, что позволяет проводить исследование процессов аэродинамического нагрева, однако числа M_2 в рабочей пробке невелики (не более 5÷6).

В ударных трубах можно увеличить скорость движения газа в рабочей пробке, если на выходе из отсека низкого давления установить расширяющееся сопло. В этих условиях модель обтекается газом, истекающим из сопла, в условиях высоких скоростей и температур. Схема такой аэродинамической ударной трубы показана на рис. 1.5.3.

Толкающий газ из баллонов высокого давления *1* поступает в отсек высокого давления *3*, отделяемый от отсека низкого давления *5* диафрагмой *4*. Низкое давление создается в отсеке *5*, а также в вакуум-каме-

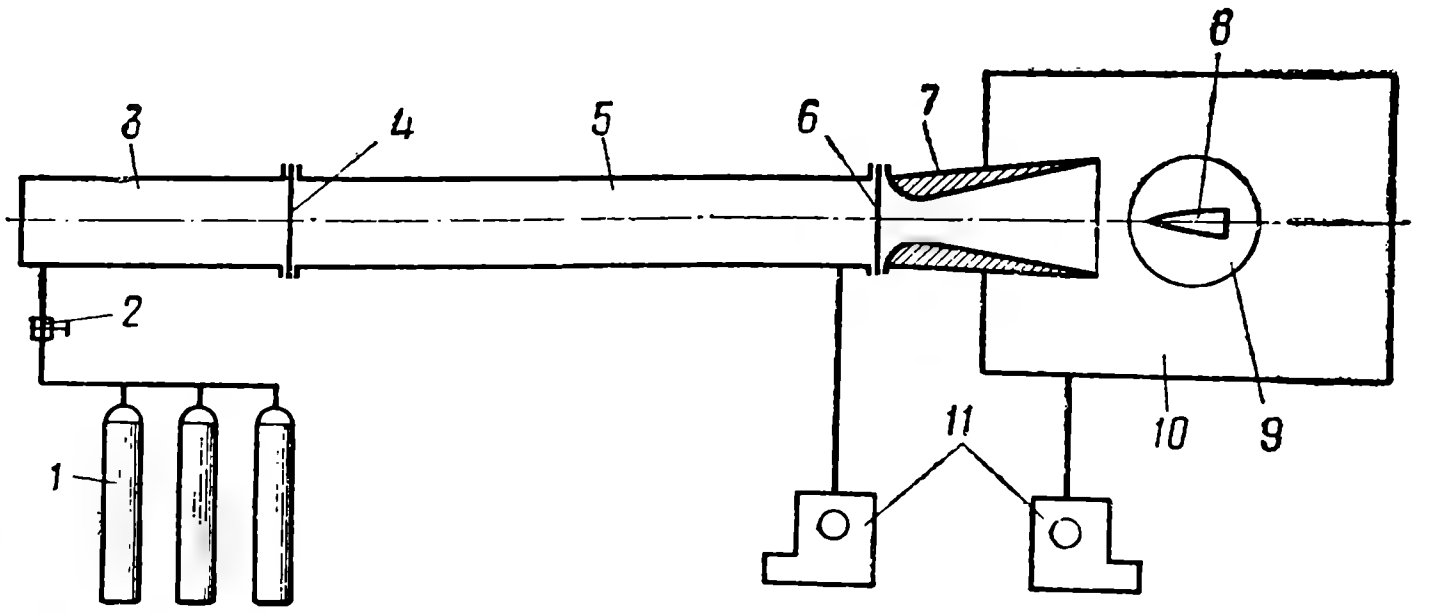


Рис. 1.5.3. Схема аэродинамической ударной трубы:

1 — баллоны с толкающим газом; *2* — вентиль; *3* — отсек высокого давления; *4* — диафрагма; *5* — отсек низкого давления; *6* — диафрагма; *7* — сопло; *8* — модель; *9* — окно; *10* — вакуум-камера; *11*—вакуум-насосы

ре *10* специальными вакуумными насосами *11*. Модель летательного аппарата *8* устанавливается на выходе из сверхзвукового сопла *7* так, чтобы за ней можно было наблюдать с помощью оптических приборов через оконный проем *9*. Диафрагма *6* разделяет между собой отсек низкого давления *5* и вакуум-камеру *10*. По достижении необходимого давления в отсеке *3* разрывается диафрагма *4* и газ устремляется в отсек *5*. Возникшая при этом ударная волна, достигнув диафрагмы *6*, разрывает и ее, и разогретый газ под большим давлением устремляется через сопло в вакуум-камеру *10*. Одновременно ударная волна, отразившись от диафрагмы *6*, начинает движение в сторону отсека высокого давления *3*, вновь сжимая и разогревая газ в рабочей пробке. Через некоторое время она встретится с контактной поверхностью и снова, отразившись от нее, возвратится к соплу. В этот момент прекращается установившееся движение газа в сопле и начинается режим нестационарного течения, сопровождающийся колебательным характером изменения параметров газа.

В ударных аэродинамических трубах, подобных рассмотренной, давления торможения достигают 2000 *атм*, температура—около 7000 К, число **M** потока — примерно 20÷25, а потока в рабочей пробке—до 5÷6; время установившегося движения газа в этой пробке составляет примерно 5÷7 *мсек*.

3. Газодинамический расчет ударных труб

Определим параметры потока в рабочей пробке (u_2, $M_2=u_2/a_2$, p_2, T_2, ρ_2), рассматривая толкающий и толкаемый газы совершенными с постоянными теплоемкостями, а также пренебрегая вязкостью и влиянием перемешивания газов через контактную поверхность.

Ударная волна движется со скоростью c_s, поэтому соответствующее

число Маха $\mathbf{M}_1 = c_s/a_1$. Это число $\mathbf{M}_1$ определяет для ударной волны отношение давлений

$$\frac{p_2}{p_1} = 2k_1 \mathbf{M}_1^2 \frac{1}{k_1+1} - \frac{k_1-1}{k_1+1} \tag{1.5.1}$$

и плотностей

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{k_1+1}{k_1-1} \cdot \frac{p_2}{p_1} + 1\right)\left(\frac{k_1+1}{k_1-1} + \frac{p_2}{p_1}\right)^{-1}. \tag{1.5.2}$$

Согласно уравнению состояния отношение температур для условий после и до ударной волны определяется зависимостью

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2}. \tag{1.5.3}$$

Скорость потока за такой ударной волной (в рабочей пробке)

$$u_2 = u_3 = \frac{a_1}{k_1}\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right)\left(\frac{\frac{2k_1}{k_1+1}}{\frac{p_2}{p_1} + \frac{k_1-1}{k_1+1}}\right)^{1/2}, \tag{1.5.4}$$

а соответствующие числа Маха $\mathbf{M}_2 = u_2/a_2$ (где $a_2 = \sqrt{k_1 R_\text{т} T_2}$; $R_\text{т}$ — газовая постоянная для условий в рабочей пробке).

Число $\mathbf{M}_1$ является неизвестной величиной. Для его определения необходимо знать отношение давлений p_2/p_1, которое находится по заданным параметрам (p_1, p_4, a_1, a_4, k_1, k_4) из уравнения

$$\frac{p_4}{p_1} = \frac{p_2}{p_1}\left[1 - \frac{(k_4-1)\left(\frac{a_1}{a_4}\right)\left(\frac{p_2}{p_1}-1\right)}{\sqrt{2k_1}\sqrt{2k_1 + (k_1+1)\left(\frac{p_2}{p_1}-1\right)}}\right]^{-\frac{2k_4}{k_4-1}}. \tag{1.5.5}$$

Температуры T_2 и T_4 связаны между собой приближенным соотношением

$$\frac{T_2}{T_4} \approx \frac{k_4(k_1-1)}{2k_1}\left(\frac{k_1+1}{k_4-1}\right)^2 \frac{\mu_1}{\mu_4}, \tag{1.5.6}$$

в котором μ_1 и μ_4 — молекулярные веса соответственно рабочего и толкающего газов.

Нетрудно заметить, что, применяя более легкий толкающий газ, можно увеличить температуру T_2 в рабочей пробке, а это повышает эффективность исследований аэродинамической теплопередачи. Изменяя отношение μ_1/μ_2, можно подобрать нужные температуры и числа Маха в рабочей пробке.

Влияние различных газов на предельные значения числа $\mathbf{M}_1 = a_s/a_1$ ударной волны показано в табл. 1.5.1, в которой также приведены соответствующие отношения скоростей звука, рассчитанные по формуле $a_4/a_1 = (T_4/T_1)^{1/2}$.

Таблица 1.5.1

Толкающий газ/рабочий газ	μ_4/μ_1	a_4/a_1	$\mathbf{M}_1$
Воздух/воздух	29/29	1,0	6,1
Гелий/воздух	4/29	2,9	10,7
Гелий/кислород	4/32	3,1	11,2
Гелий/углекислый газ	4/44	3,8	13,0
Водород/воздух	2,02/29	3,8	21,4
Водород/кислород	2,02/32	4,0	23,6
Водород/углекислый газ	2,02/44	4,9	27,5
Водород/ксенон	2,02/131	7,4	48,6

ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ ПРИБОРЫ И УСТРОЙСТВА

Современный аэродинамический эксперимент предусматривает большой комплекс измерений параметров газового потока, обтекающего модель летательного аппарата. Одна часть этих измерений связана с исследованием свойств набегающего (невозмущенного) течения, другая — с определением параметров газа в возмущенном потоке: непосредственно на поверхности обтекаемого тела или вблизи него.

Экспериментальное изучение газовых течений основано на использовании различных по конструкции и назначению измерительных приборов и устройств.

§ 2.1. МАНОМЕТРЫ И ПРИЕМНИКИ ДАВЛЕНИЯ ГАЗА (НАСАДКИ)

Для измерения давлений в газовом или воздушном потоке применяются разнообразные манометры. Причем выбор конкретной конструкции манометра, соответствующей заданным условиям эксперимента, определяется предполагаемой величиной исследуемого давления, характером движения газа (установившийся или нестационарный поток, быстрое или медленное изменение давления), а также требуемой точностью замера. С учетом этих требований рассмотрим некоторые типы манометров, их устройство, принцип действия и области применения.

1. Жидкостные манометры

Дифференциальные манометры применяются для измерения относительно небольших перепадов давлений в газовых средах. Конструктивно они выполняются в виде U-образной трубки, изготовленной из прозрачного материала (стекло, пластмасса) и установленной обычно с наклоном к горизонтальной плоскости (рис. 2.1.1). «Чувствительным элементом» прибора является жидкость, налитая в трубку. Если к левому колену трубки манометра подвести давление p_1, а к правому p_2, причем $p_1 > p_2$, то это вызовет подъем уровня жидкости в правом и соответствующее снижение его в левом колене. Перепад давлений $p_1 - p_2$ будет уравновешиваться давлением жидкости в трубке с высотой, равной вертикальной проекции столба, длина которого определяется разностью показаний уровней в обоих коленах манометра:

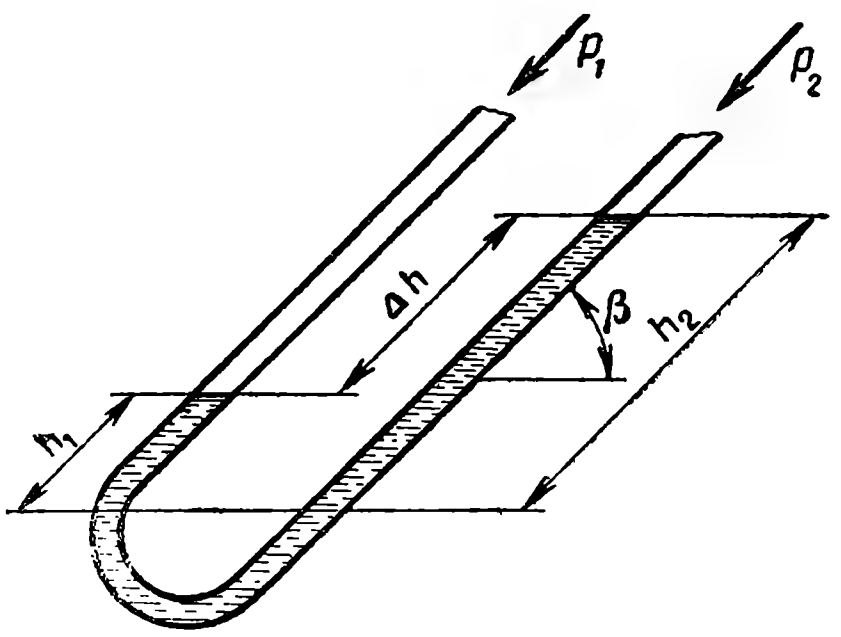


Рис. 2.1.1. Схема жидкостного дифференциального манометра

$$p_1 - p_2 = \gamma \Delta h \sin \beta, \qquad (2.1.1)$$

где γ — удельный вес жидкости; β — угол наклона манометра; $\Delta h = h_2 - h_1$, причем h_1, h_2 — показания уровней жидкости соответственно в левом и правом коленах отсчетной трубки манометра.

Обычно в используемых конструкциях длина отсчетных трубок ограничивается высотой помещения аэродинамической лаборатории. В соответствии с этим, например, дифференциальным ртутным манометром с вертикальными трубками ($\beta = 90°$), расположенными в помещении высо-

той 4 *м*, можно измерить перепады давлений до 5,5 *кГ/см*^{2}; для манометра, заполненного спиртом (γ=0,8 *кГ/дм*^{3}), предельная величина измеряемого перепада давлений составит лишь 0,32 *кГ/см*^{2}. Пределы измеряемых перепадов давлений будут еще меньше, если эти трубки установить наклонно.

Рассмотренные жидкостные манометры используются для измерения давления только в установившихся потоках, что обусловлено инерционностью столба жидкости, вызывающей существенное запаздывание показаний истинной величины давления.

Качество манометра, как и любого измерительного прибора, характеризуется его чувствительностью. Чувствительность манометра определяется отношением величины разности уровней жидкости в отсчетных коленах к соответствующему значению перепада давлений:

$$\Delta h/(p_1 - p_2) = (\gamma \sin \beta)^{-1}. \qquad (2.1.2)$$

Из этой зависимости следует, что чувствительность возрастает по мере уменьшения наклона трубок и снижения удельного веса манометрической жидкости. При этом следует иметь в виду, что угол не должен быть настолько малым, чтобы затруднялся отсчет показаний уровня жидкости в трубке из-за размытия мениска. В практических случаях этот угол выбирается обычно не менее 0,1 *рад*. Чувствительность значительно повышается, если вместо тяжелой «жидкости», какой является ртуть, использовать обычную жидкость, например воду или спирт. Однако в этом случае возможности регулирования чувствительности ограничены, так как плотности таких жидкостей мало отличаются. Чаще в манометрах используется спирт, который позволяет несколько повысить чувствительность, так как он легче воды; к тому же спиртовый столб имеет менее размытый мениск, что дает возможность осуществить более точный отсчет показаний уровня. С этой же целью жидкость в манометре подкрашивают.

Отсчет показаний уровня жидкости производится по шкале, нанесенной непосредственно на поверхность трубки или на экран. Цена деления шкалы составляет обычно 1 *мм*, а систематическая ошибка отсчета — примерно ± 1 *мм*.

Внутренний диаметр трубок жидкостных манометров равен 8$\div$ $\div$12 *мм*. Применение чрезмерно широкой трубки приводит к излишнему увеличению количества жидкости и значительному размыванию мениска. В трубке с очень малым диаметром действуют большие капиллярные силы, затрудняющие измерения. По этой причине следует использовать в манометре жидкости с малым поверхностным натяжением. Необходимо следить за чистотой стенок трубок. Грязь на них затрудняет снятие показаний из-за нарушения формы мениска жидкости.

При работе с манометрами, заполненными ртутью, следует обращать особое внимание на технику безопасности и предупреждать возможные утечки ртути, так как ее пары являются токсичными.

Микроманометры — приборы, предназначенные для измерения малых перепадов давлений (порядка 0,02 *кГ/см*^{2}). Разновидностью таких приборов является чашечный микроманометр, одно колено которого выполнено вместо тонкой трубки в виде чашки-сосуда большого диаметра (рис. 2.1.2 и 2.1.3).

На основании *1* (см. рис. 2.1.3), которое при помощи закрепленного на нем уровня устанавливается регулировочными винтами *2* горизонтально, находится чашка *3*, соединенная с отсчетной трубкой *6*. На секторе *7* имеются отверстия *8* для фиксации угла наклона отсчетной трубки с помощью штифта *9*.

Давление в микроманометр подводится через штуцер *4* переключающего устройства *5*, находящегося на крышке чашки. Переключающая

рукоятка этого устройства имеет два положения: «+», когда измеряемое давление, большее атмосферного, подводится к чашке, и «—», когда оно меньше атмосферного и подается в отсчетную трубку. На поверхности трубки нанесена шкала для снятия показаний с ценой деления 1 *мм*.

Если давления p_1 и p_2 одинаковы, то жидкость занимает положение, отмеченное на рис. 2.1.2 пунктиром. По шкале отсчета на наклонной трубке соответствующий уровень жидкости зафиксирован отметкой h_0. В случае, когда давление p_1 в чашке больше давления p_2 в узкой трубке, жидкость поднимается в ней до уровня h. Так как количество жид-

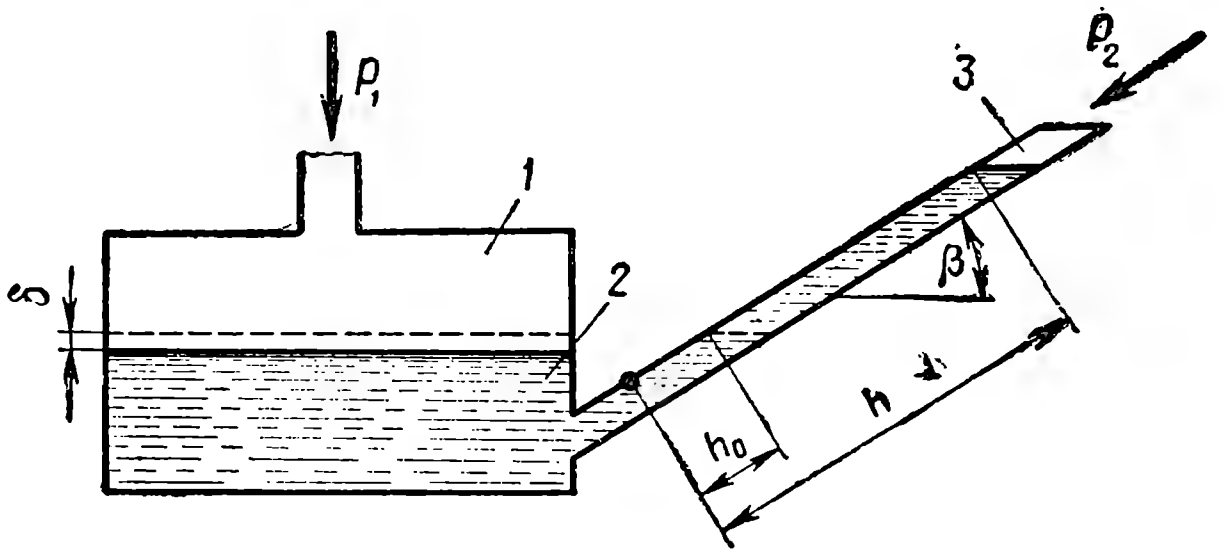


Рис. 2.1.2. Схема чашечного микроманометра:
1 — чашка; *2* — манометрическая жидкость; *3* — отсчетная трубка

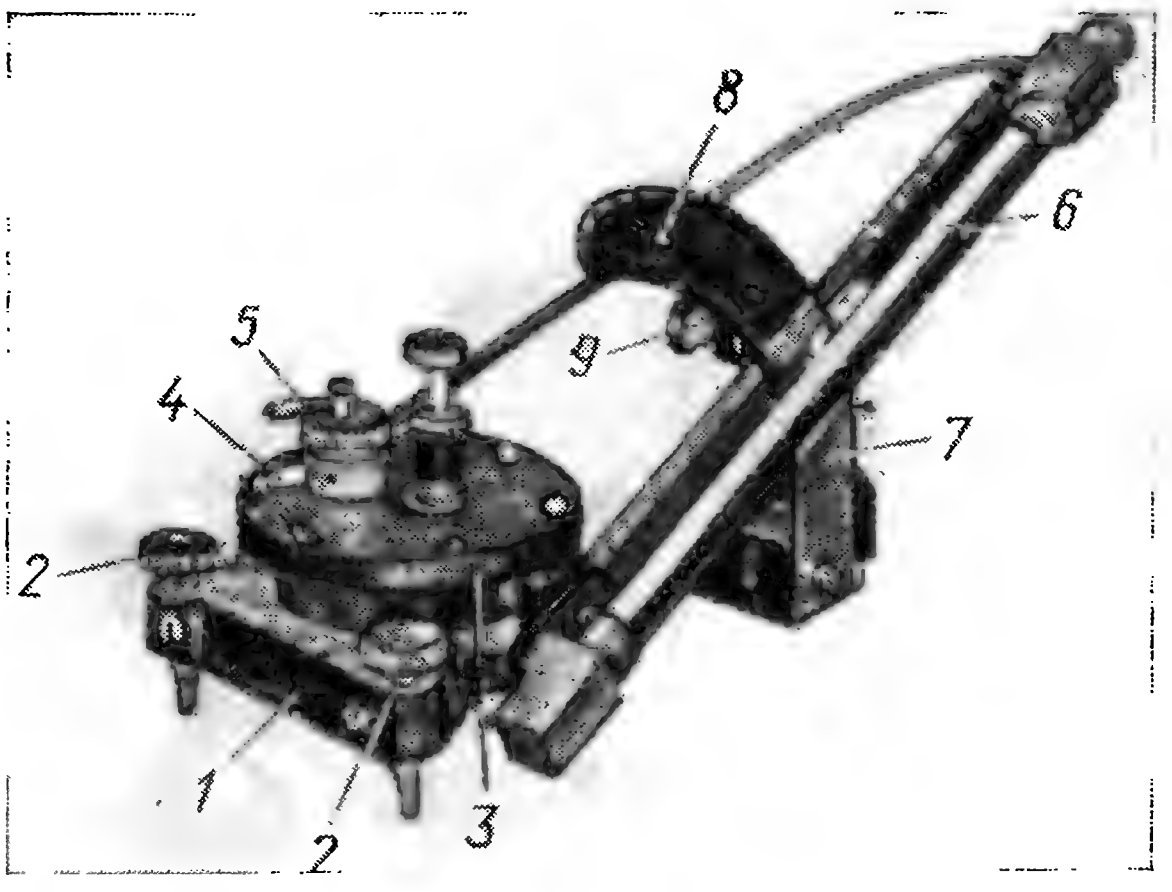


Рис. 2.1.3. Внешний вид чашечного микроманометра:
1 — основание; *2* — регулирующий установочный винт; *3* — чашка; *4* — подводящий штуцер; *5* — переключающее устройство; *6* — отсчетная трубка; *7* — сектор; *8* — отверстие для фиксации наклона отсчетной трубки; *9* — фиксирующий штифт

кости в манометре постоянно, то этот подъем на величину $\Delta h = h - h_0$ вызовет понижение уровня в чашке на некоторую величину δ, которую найдем из условия равенства объемов жидкости в узкой трубке и чашке:

$$f\Delta h = F\delta, \tag{2.1.3}$$

где f и F — площади поперечного сечения соответственно узкой трубки и чашки.

Из (2.1.3) находим

$$\delta = (f/F)\,\Delta h. \tag{2.1.4}$$

Соответствующая разность давлений

$$p_1 - p_2 = (\delta + \Delta h \sin\beta)\,\gamma, \tag{2.1.5}$$

или с учетом (2.1.4)

$$p_1 - p_2 = \Delta h K_1 \gamma \sin\beta, \tag{2.1.6}$$

где

$$K_1 = 1 + f/(F \sin \beta). \qquad (2.1.7)$$

Для заданной конструкции манометра наряду с поперечными сечениями f и F обычно известен также удельный вес жидкости γ. Тогда для каждого угла β наклона отсчетной трубки можно подсчитать фиксированные значения

$$K = K_1 \gamma \sin \beta, \qquad (2.1.8)$$

или с учетом (2.1.7)

$$K = \gamma [1 + f/(F \sin \beta)] \sin \beta. \qquad (2.1.9)$$

Эти значения наносятся на секторе манометра вблизи отверстий, служащих для фиксации наклона отсчетной трубки, под соответствующим углом.

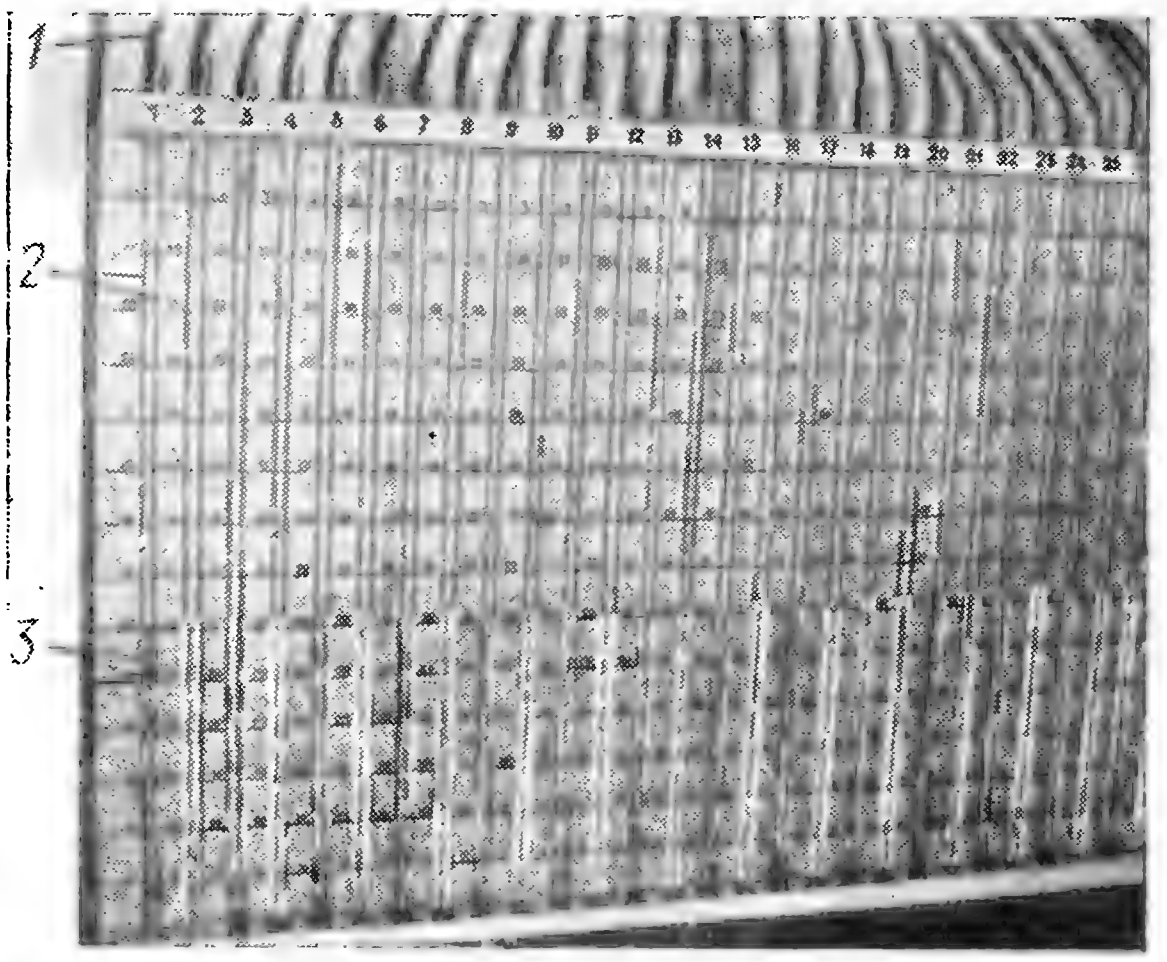


Рис. 2.1.4. Батарейный манометр:

1 — резиновый шланг для подвода измеряемого давления; *2* — U-образная трубка; *3* — манометрическая жидкость

С учетом (2.1.9) зависимость для перепада давлений получит вид

$$p_1 - p_2 = K \Delta h. \qquad (2.1.10)$$

Если в этой формуле разность уровней Δh имеет размерность *мм*, а коэффициент K — $кГ/дм^3$ (размерность удельного веса), то вычисленная разность давлений будет выражена в $кГ/м^2$. Нетрудно убедиться в том, что этой размерности соответствует давление, измеренное в *мм вод. ст.* Таким образом, коэффициент K в (2.1.10) приводит высоту наклонного столба жидкости с некоторым удельным весом γ к высоте вертикального столба воды ($\gamma = 1$ $кГ/дм^3$).

Батарейные манометры применяются для замера давления одновременно в нескольких точках потока. Внешний вид одного из таких манометров показан на рис. 2.1.4. Этот манометр представ-

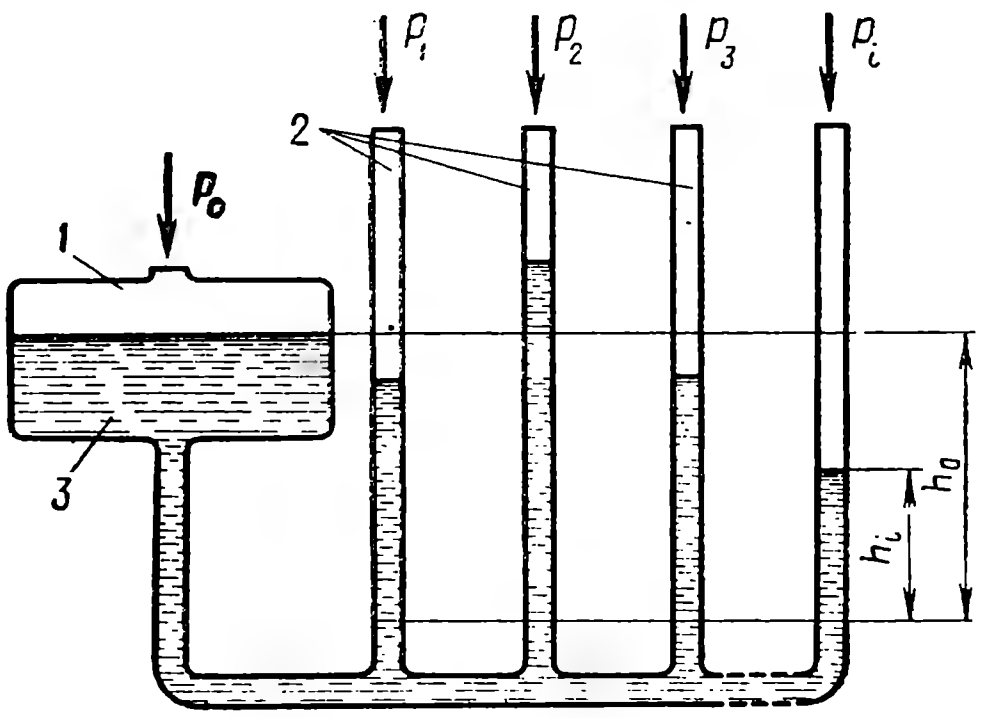


Рис. 2.1.5. Схема чашечного батарейного манометра:

1 — общий резервуар (чашка); *2* — отсчетные трубки; *3* — манометрическая жидкость

ляет собой совокупность нескольких U-образных (дифференциальных) манометров, смонтированных на одном каркасе. Расшифровка показаний такого прибора производится отдельно для каждого дифференциального манометра (канала) с использованием зависимости (2.1.1).

На рис. 2.1.5 показана другая конструкция батарейного манометра — чашечный батарейный манометр. Особенность его состоит в том, что у каждого манометра оставляется по одной отсчетной трубке, присоединяемой к общему разервуару (чашке). Преимущество этого манометра заключается в уменьшении количества снимаемых показаний.

Размеры резервуара по сравнению с поперечным сечением отсчетных трубок должны быть достаточно большими, чтобы исключить взаимное влияние трубок при изменении в них уровней жидкости. В этом случае перепад давлений определяется по показаниям отсчетной трубки из выражения

$$p_i - p_{\text{общ}} = \gamma \sin \beta \cdot \Delta h_i, \tag{2.1.11}$$

где

$$\Delta h_i = h_0 - h_i, \tag{2.1.12}$$

h_i — высота уровня жидкости в отсчетной трубке; h_0 — начальная высота жидкости (общая для всех каналов); p_i — измеряемое давление, подведенное к i-й трубке; $p_{\text{общ}}$ — давление в резервуаре; при этом давление $p_{\text{общ}}$ может быть атмосферным или статическим давлением набегающего (невозмущенного) потока, в частности, воздушного течения в рабочей части аэродинамической трубы.

В ходе эксперимента обычно фотографируют показания всех отсчетных трубок батарейного манометра. Последующую расшифровку этих показаний производят, как правило, по негативным фотоснимкам после окончания опыта. Это позволяет значительно сократить время проведения опыта и получить более точные результаты измерений.

2. Электрические датчики давления

При измерении очень больших или же весьма малых (менее 1 *мм рт. ст*) давлений более точные показания дают манометры, действие которых основано на использовании электрических датчиков давления. Такие датчики являются единственным средством измерения быстро меняющихся давлений в неустановившихся газовых или воздушных потоках.

Необходимо заметить, что электрические датчики давления находят также широкое распространение в аэродинамических лабораториях для обычных измерений, вытесняя более громоздкие по своим размерам и менее удобные в эксплуатации другие измерительные приборы, в частности некоторые виды жидкостных манометров. Устройство и принцип действия таких датчиков основывается на преобразовании давления в электрический сигнал, последующем его усилении с целью более точного замера и, наконец, расшифровке результатов замера, в результате чего определяется соответствующая величина давления.

Рассмотрим некоторые виды электрических датчиков.

В реостатном, или потенциометрическом, датчике (рис. 2.1.6) давление через штуцер *1*, расположенный на корпусе *2*, подводится к внутренней полости упругого элемента *5*. Этот элемент, укрепленный на корпусе, под действием давления деформируется и перемещает по обмотке реостата подвижный контакт *3*.

Если потенциометр подключить к источнику постоянного тока (рис. 2.1.7), то величина снимаемого электрического сигнала будет зависеть от положения подвижного контакта. Так как перемещение

этого контакта определяется деформацией упругого элемента, то, следовательно, величина выходного сигнала будет зависеть от измеряемого давления. Такая электрическая схема обеспечивает большой выходной сигнал, что позволяет фиксировать его шлейфовым осциллографом без дополнительного усиления.

Чувствительность электрического датчика представляет собой отношение изменения электрического сигнала к соответствующему прира-

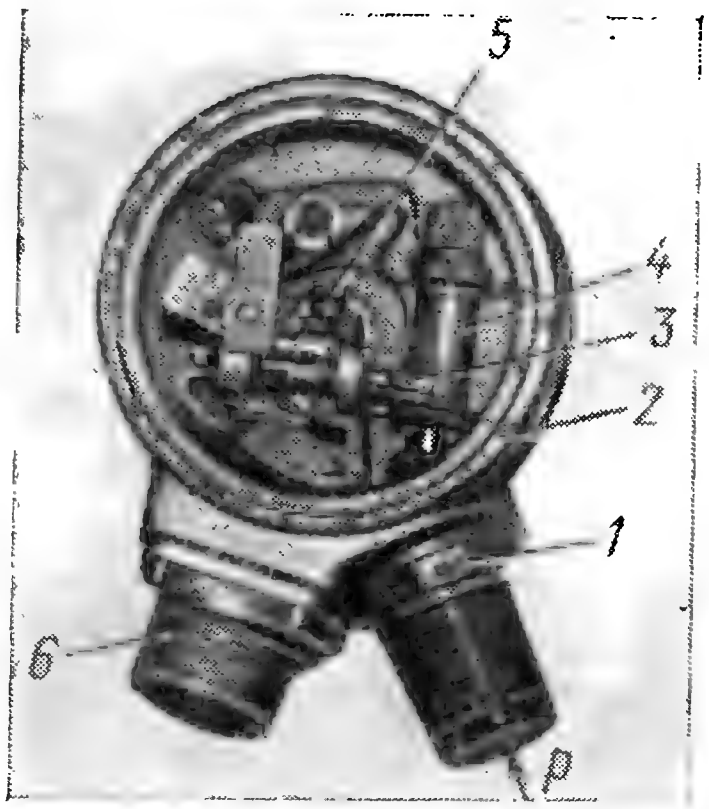


Рис. 2.1.6. Потенциометрический датчик давления:

1 — штуцер; *2* — корпус; *3*—подвижный контакт; *4* — обмотка потенциометра; *5* — упругий элемент; *6* — штепсельный разъем

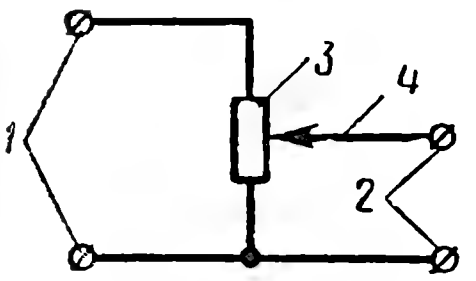


Рис. 2.1.7. Схема включения потенциометрического датчика давления:

1 — клеммы подключения питания; *2* — клеммы для снятия выходного сигнала; *3* — неподвижная обмотка потенциометра; *4* — подвижный контакт

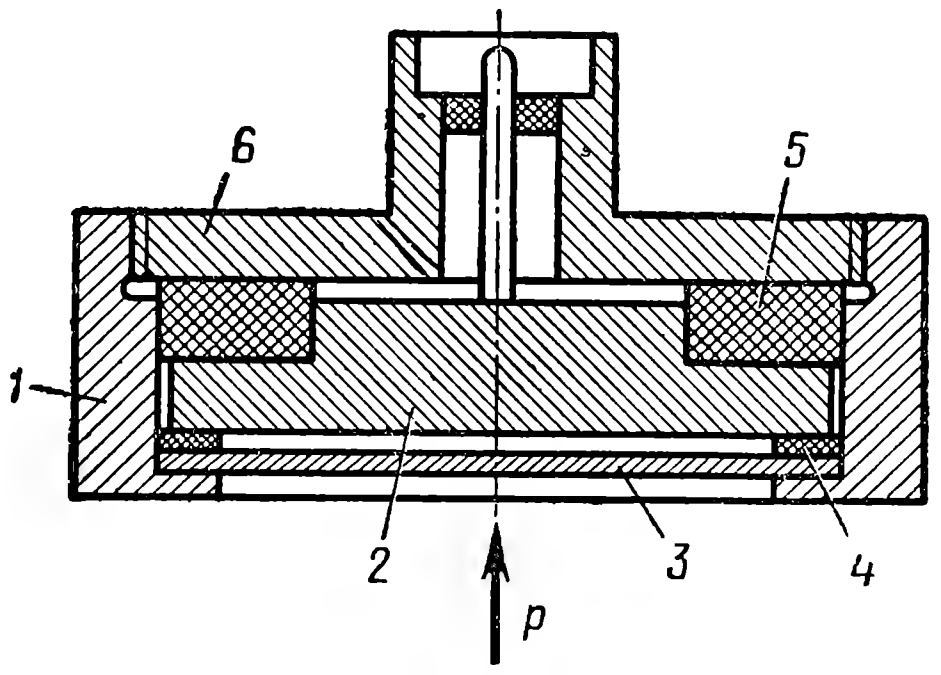


Рис. 2.1.8. Конденсаторный датчик давления:

1 — корпус; *2*—неподвижная обкладка; *3*—подвижная обкладка; *4* — изолирующая прокладка; *5* — уплотнительная шайба; *6* — гайка

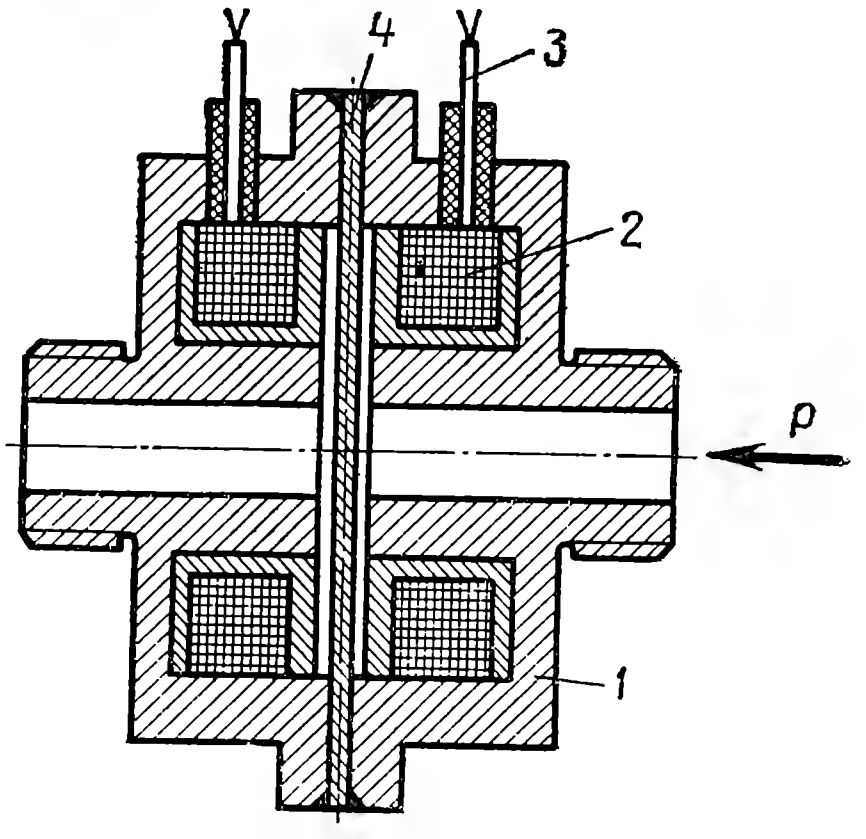


Рис. 2.1.9. Индуктивный датчик давления:

1 — корпус; *2* — обмотки катушек; *3* — выводы; *4* — упругая диафрагма (сердечник)

щению давления. Для потенциометрического датчика чувствительность равна отношению изменения напряжения на выходе к соответствующей разности давлений. Имеющиеся конструкции таких датчиков позволяют измерять давления от 2,5 до 300÷320 *кГ/см*^{2}.

Возможная частота изменения давления при измерении сравнительно невелика и составляет примерно 50 *гц*. Это ограничивает применение реостатных датчиков лишь для случаев, характеризующихся относительно небольшим отклонением течения от стационарного. Следует также принимать во внимание, что измерительный прибор с таким датчиком нельзя устанавливать в местах, подверженных влиянию посторонних вибраций, которые могут вызвать колебание подвижного контакта и, как результат, искажение показаний.

Основным элементом емкостного (конденсаторного) датчика является плоский конденсатор, одна обкладка которого представляет собой тонкую упругую пластину (на рис. 2.1.8 подвижная обкладка *3*). Деформируясь под воздействием давления, она смещается относительно неподвижной обкладки и вызывает изменение емкости конденсатора, измерив которое, можно найти соответствующее изменение давления. Изменение емкости регистрируется специальным электронным прибором, соединенным с выводами конденсатора, один из которых выполнен заодно с неподвижной обкладкой, а другой связан с корпусом.

Чувствительность емкостного датчика определяют как отношение изменения емкости конденсатора к соответствующему изменению давления. Выбором жесткости упругой обкладки можно обеспечить необходимую чувствительность датчика. Этим датчиком можно измерять переменные давления с частотой до 30 *кгц*.

К недостаткам емкостных датчиков следует отнести возможное искажение показаний, вызванное проникновением газа в пространство между обкладками конденсатора. Следует также отметить, что удаление датчика от усилительной и регистрирующей аппаратуры ограничено сравнительно небольшими расстояниями во избежание значительных наводок, которые могут возникнуть в длинных соединительных кабелях. Исследования показывают, что при использовании электрического тока частотой до 100 *кгц* допустимое удаление не должно превышать 0,3÷0,5 *м*.

В индуктивном датчике используется свойство катушек изменять индуктивность при перемещении внутри них металлического сердечника. В корпусе *1* такого датчика (рис. 2.1.9) закрепляются обмотки катушек *2*, между которыми посередине корпуса размещается упругая диафрагма *4* из магнитного материала, играющая роль металлического сердечника. Измеряемое давление подводится к диафрагме через отверстие в корпусе датчика. Для питания датчика обычно используется переменный ток частотой до 50 *кгц*. В электрической схеме датчика предусматриваются специальные электронные усилители.

Чувствительность индуктивного датчика определяется как отношение приращения индуктивности к соответствующему изменению измеряемого давления. Требуемая чувствительность достигается за счет соответствующего подбора толщины мембраны. Современные конструкции датчика позволяют измерять давления, изменение которых происходит в широком диапазоне частот, достигающих примерно 5 *кгц*. Этот датчик позволяет регистрировать также стационарное давление, обеспечивая устойчивые показания (о таком приборе говорят, что он имеет стабильную статическую характеристику). Малые размеры индуктивных датчиков позволяют использовать их для измерения давлений в ограниченных по размеру областях течения газа.

В тензометрическом датчике упругий элемент, воспринимающий давление, несет на себе тензосопротивления (тензодатчики). Изменение давления вызывает деформацию упругого элемента и, как следствие, изменение электрического сопротивления наклеенных тензодатчиков, регистрируемого специальными измерительными приборами.

Упругие элементы изготовляются в виде плоской мембраны, тонкостенного стакана или трубки-кольца. Тензодатчики располагаются в месте наибольших деформаций упругого элемента. На рис. 2.1.10 показана схема такого упругого элемента в виде тонкостенного стакана, на боковых стенках которого расположены датчики. Используемые в современных конструкциях датчики, изготовляемые из тонкой металлической проволоки, фольги или пленки, называются тензисторами.

Изменение величины сопротивления и, следовательно, выходной

электрический сигнал тензодатчика малы, поэтому их трудно измерить. Для увеличения величины этого сигнала тензодатчик с сопротивлением $R_д$ включается в одно из плеч моста Уитстона (рис. 2.1.11). К одной диагонали моста подводится напряжение E, а с другой диагонали снимается напряжение $U_{вых}$, пропорциональное изменению сопротивления $R_д$ датчика и, следовательно, зависящее от величины измеряемого давления. Если есть возможность установить второй датчик $R_к$, измеряющий деформации противоположного знака, то его включают в противоположное плечо моста (см. рис. 2.1.11). Такое включение датчиков позволяет получить на выходе моста сигнал, в два раза больший, чем при использовании только одного датчика.

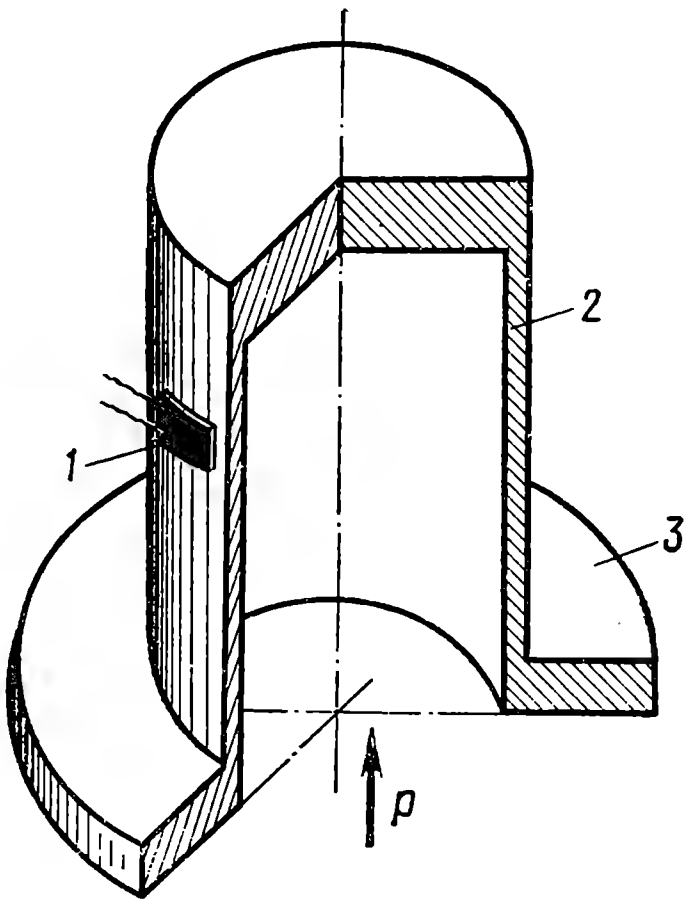


Рис. 2.1.10. Упругий элемент тензометрического датчика давления:

1 — тензодатчик; *2* — тонкостенный стакан; *3* — фланец для крепления стакана в корпусе датчика

Нагревание (или охлаждение) тензодатчиков во время опыта вызывает дополнительное изменение его сопротивления, что приводит к нарушению начальной балансиров-

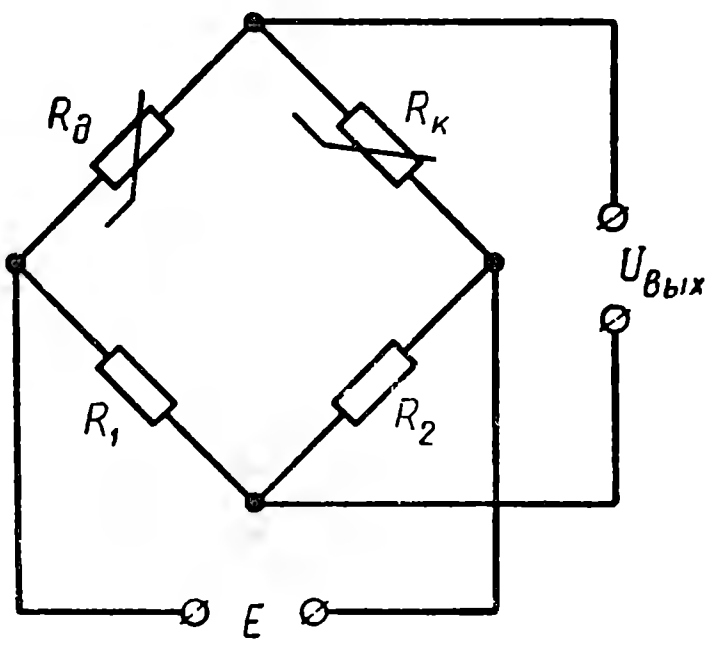


Рис. 2.1.11. Мостовая схема включения тензодатчиков

ки моста и появлению на выходе неучитываемого сигнала. Для устранения этого явления применяют температурную компенсацию, которая заключается в том, что в разные плечи моста включаются два датчика ($R_д$ и $R_к$) с одинаковым изменением сопротивления при нагревании или охлаждении. Такое включение приводит к сохранению балансировки моста при температурных изменениях. Таким образом, в рассматриваемом случае второй датчик с сопротивлением $R_к$ играет роль температурного компенсатора. Обычно такой датчик работает в том же температурном режиме, что и датчик с сопротивлением $R_д$. Если не удается использовать датчик для измерения деформаций противоположного знака, то в качестве температурного компенсатора применяется термокомпенсирующий элемент $R_к$, наклеиваемый в месте нулевых деформаций, где его температура будет такой же, как и основного тензодатчика.

Из рис. 2.1.11 видно, что в схеме моста предусматриваются также резисторы R_1 и R_2. При использовании этой схемы для тензоизмерений обычно в качестве таких резисторов применяются другие датчики, нанесенные на упругий элемент.

Рассмотренная мостовая схема подключается к тензометрической станции, служащей для регистрации и измерения выходного сигнала. На рис. 2.1.12 показан внешний вид одного из промышленных образцов такой станции (типа 8АНЧ-7М) со шлейфовым осциллографом для записи показаний. Эта станция имеет восемь одинаковых усилительных каналов, расположенных в общем корпусе. К каждому

из них может быть подключен один датчик. Таким образом, тензостанция позволяет измерять давления одновременно в восьми точках потока. Органы управления и настройки каждого канала вынесены на лицевую панель, на которой также размещается пульт управления всей станцией и общим источником питания.

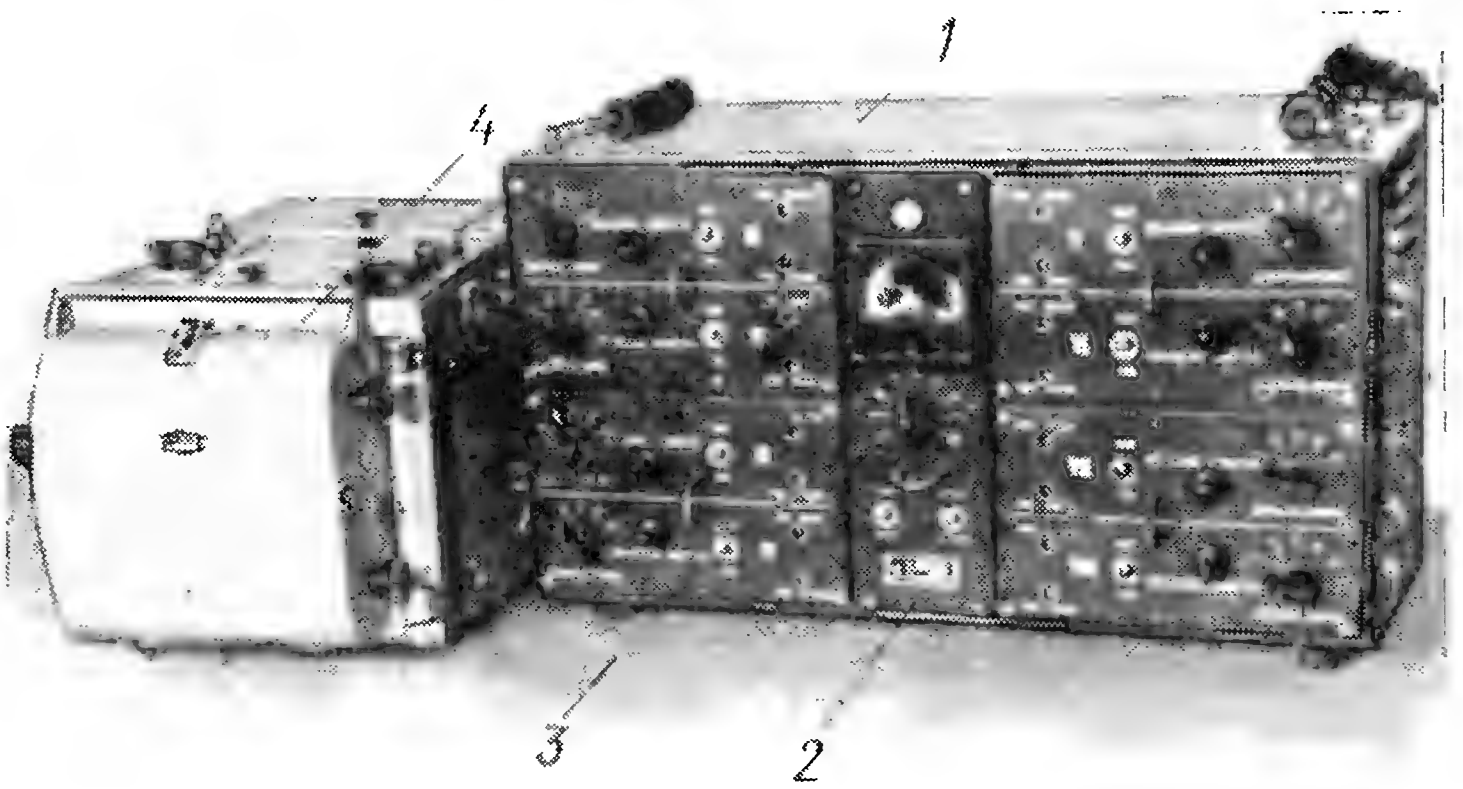


Рис. 2.1.12. Внешний вид тензометрической станции со шлейфовым осциллографом:

1 — тензометрическая станция; *2* — пульт управления; *3* — лицевая панель измерительного канала; *4* — шлейфовый осциллограф

Функциональная структурная схема одного канала представлена на рис. 2.1.13. Одна диагональ схемы *1* с тензодатчиками $R_д$ и $R_к$ подключается к генератору несущей частоты *6*. Под воздействием измеря-

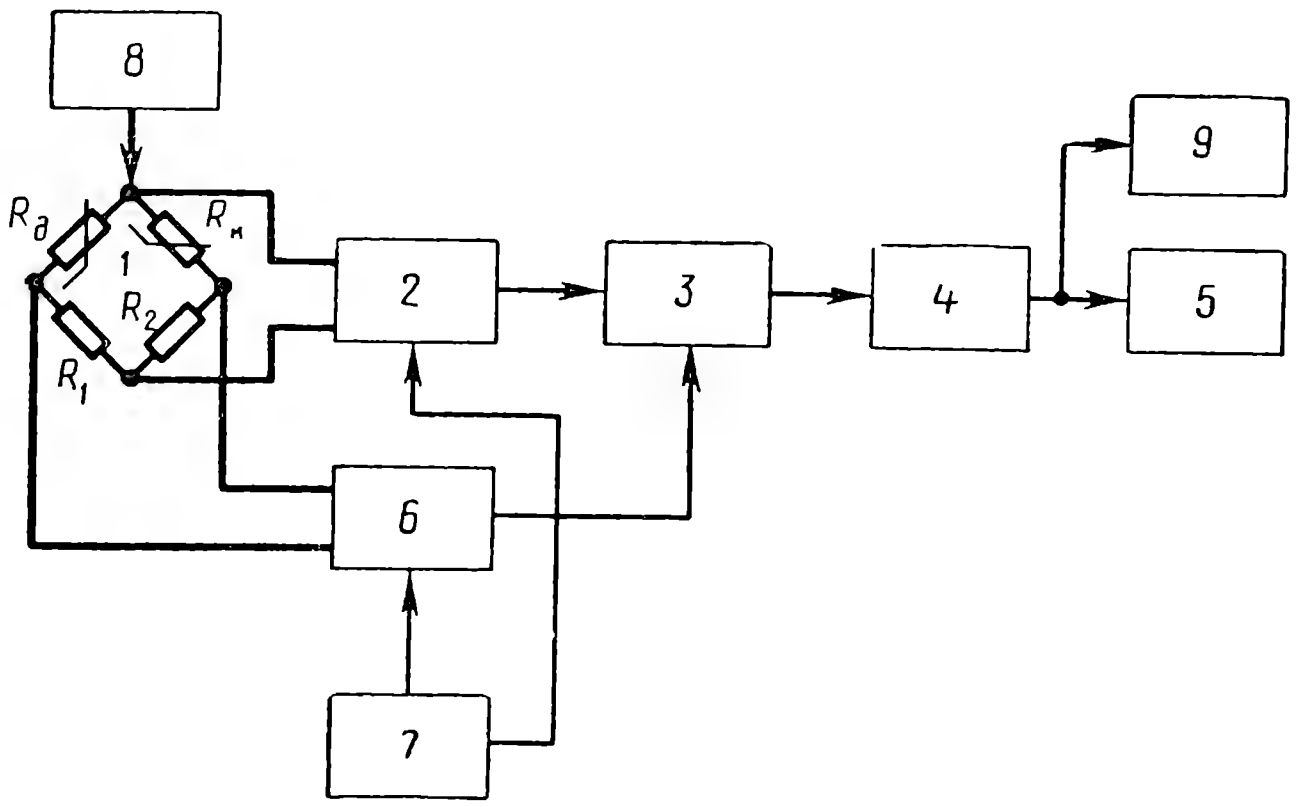


Рис. 2.1.13. Функциональная структурная схема одного канала тензостанции:

1 — мостовая схема; *2* — усилитель; *3* — фазочувствительное устройство; *4* — фильтр; *5* — индикатор; *6* — генератор несущий частоты; *7* — блок питания; *8* — балансное устройство; *9* — осциллограф; $R_Д$ — рабочий тензодатчик; $R_К$ —компенсирующий тензодатчик; R_1 и R_2 — резисторы моста

емого давления вместе с упругим элементом датчика деформируются наклеенные на него тензоэлементы и изменяется их сопротивление. По этой причине нарушается первоначальная балансировка моста (эта балансировка осуществляется специальным балансным устройством) и

появляется сигнал во второй диагонали моста, которая подсоединена к усилителю *2*. После усиления сигнал поступает на фазочувствительное устройство *3*, которое определяет знак деформации и выделяет огибающую амплитудно-модулированного сигнала, обусловленного переменным характером измеряемого давления. Пройдя фильтр *4*, который задерживает высокочастотные колебания с частотой генератора, сигнал регистрируется индикатором *5*. У прибора 8АНЧ-7М, показанного на рис. 2.1.12, в качестве индикатора, общего для всех каналов, используется миллиамперметр, установленный на пульте управления тензо-

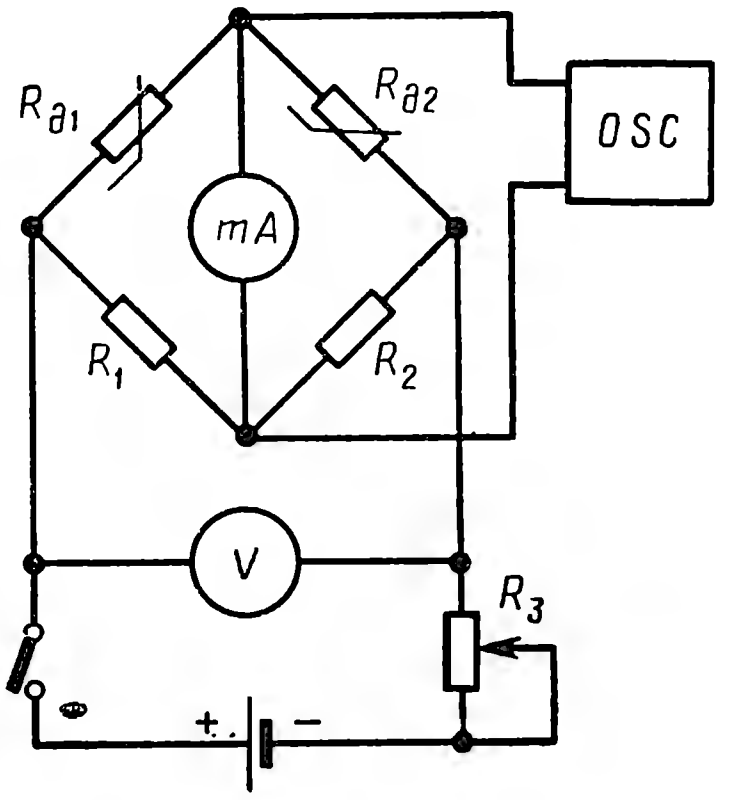


Рис. 2.1.14. Электрическая схема включения гедисторов

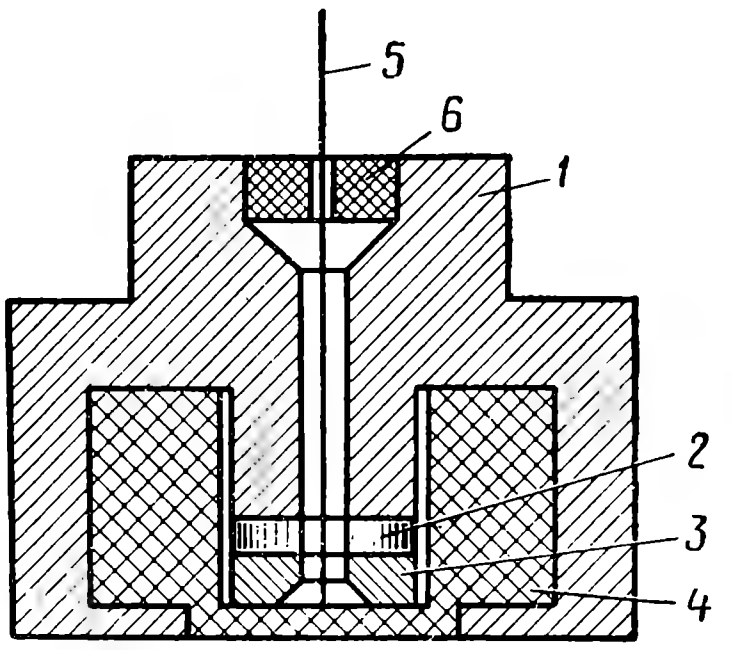


Рис. 2.1.15. Пьезокристаллический датчик давления:

1 — корпус; *2* — пьезоэлемент; *3* — электрод; *4* — фторопластовая мембрана; *5* — вывод; *6* — изолирующая втулка

станцией. Вместе с индикатором для записи показаний может быть использован шлейфовый или катодный осциллограф.

В современной тензометрической практике широкое распространение наряду с датчиками из проволоки, фольги или пленки находят г е д и с т о р ы — полупроводниковые тензодатчики из германиевой дендридной ленты. Электрическая схема включения гедисторов показана на рис. 2.1.14. Благодаря повышенной чувствительности такие датчики не требуют для работы с ними специальных электронных усилительных устройств. Возникающий под воздействием давления выходной сигнал с датчика измеряется миллиамперметром и регистрируется при помощи шлейфового осциллографа. Применение такого датчика ограничено случаями, при которых его температура не превышает 45÷50° С. При значительном разогреве точность измерений существенно снижается. Тензометрические датчики широко применяются для измерения как постоянных, так и переменных давлений. При этом современные конструкции датчиков допускают регистрацию давлений, частота изменения которых не превышает 2 *кгц*.

В п ь е з о к р и с т а л л и ч е с к и х и п ь е з о к е р а м и ч е с к и х д а т ч и к а х используется физический эффект, заключающийся в появлении на гранях пьезокристалла электрического заряда, если к этому кристаллу приложено усилие, совпадающее по направлению с к р и с т а л л о г р а ф и ч е с к о й осью (осью ч у в с т в и т е л ь н о с т и). В используемых конструкциях датчиков, схема одного из которых показана на рис. 2.1.15, величина заряда пропорциональна действующему усилию. Между корпусом *1* датчика и электродом *3* расположен пьезоэлемент *2*. Через фторопластовую мембрану *4*, играющую роль изолятора и предохраняющую пьезоэлемент от повреждения, на него передается усилие, вызванное измеряемым давлением. Возникающий вследствие этого электрический заряд (напряжение) снимается при помощи выводов

датчика, которыми являются корпус и вывод *5*, и измеряется с помощью электронного усилителя постоянного тока или усилителя с обратной емкостной связью.

Чувствительность датчика определяется отношением величины возникающего электрического заряда q к соответствующему давлению. Для пьезокристаллических элементов, работающих на сжатие под действием некоторого усилия F, пьезоэлектрический модуль $d = q/F = 20 \div 23$ *пк/кГ* (1 *пк* $= 10^{-12}$ *к*). Так как на элемент датчика действует усилие $F = pS$ (где p — измеряемое давление; S — площадь кварцевой пластины), то чувствительность датчика

$$B = q/p = dS = (20 \div 23)\, S \text{ пк} \cdot см^2/кГ. \qquad (2.1.13)$$

Конструкции приборов с датчиками из пьезокерамических кристаллов обеспечивают чувствительность, большую в 2—3 раза, чем из кварца. Однако пьезокерамические датчики позволяют измерять переменные давления с частотой от 3 *гц* до 2 *кгц*, в то время как пьезокристаллическими датчиками измеряются значительно большие частоты, достигающие 50 *кгц*. Одно из преимуществ рассматриваемых датчиков заключается в их высокой механической прочности, а также возможности измерений давления в разогретых или, наоборот, переохлажденных потоках. Пьезокристаллические датчики надежно работают при температурах от —240 до +260 °С, а пьезокерамические — лишь от —55 до +100° С.

3. Измерение разрежений

Манометры, предназначенные для измерения весьма малых давлений (разрежений) называются вакуумметрами. В качестве вакуумметров могут использоваться обычные жидкостные или механические манометры, позволяющие замерять малые давления порядка нескольких миллиметров ртутного столба. Значительно меньшие давления могут измеряться специальными вакуумметрами, устройство и принцип действия которых зависят от глубины вакуума исследуемой среды.

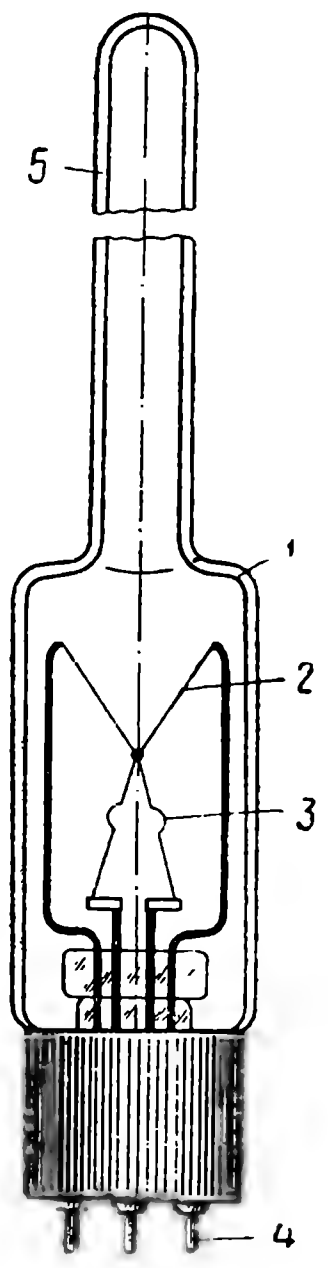


Рис. 2.1.16. Схема датчика теплового вакуумметра:

1 — стеклянный корпус; *2* — нагреваемая нить; *3* — термопара; *4* — электрические выводы; *5* — отламываемая часть стеклянного корпуса

Рассмотрим тепловой вакуумметр, широко используемый для измерения малых давлений от 1 до 10^{-3} *мм рт. ст.* Основным элементом его является температурный датчик (рис. 2.1.16). В стеклянном корпусе *1* этого датчика находится нить подогревателя *2* с укрепленным на ней спаем термопары *3*. Выводы *4*

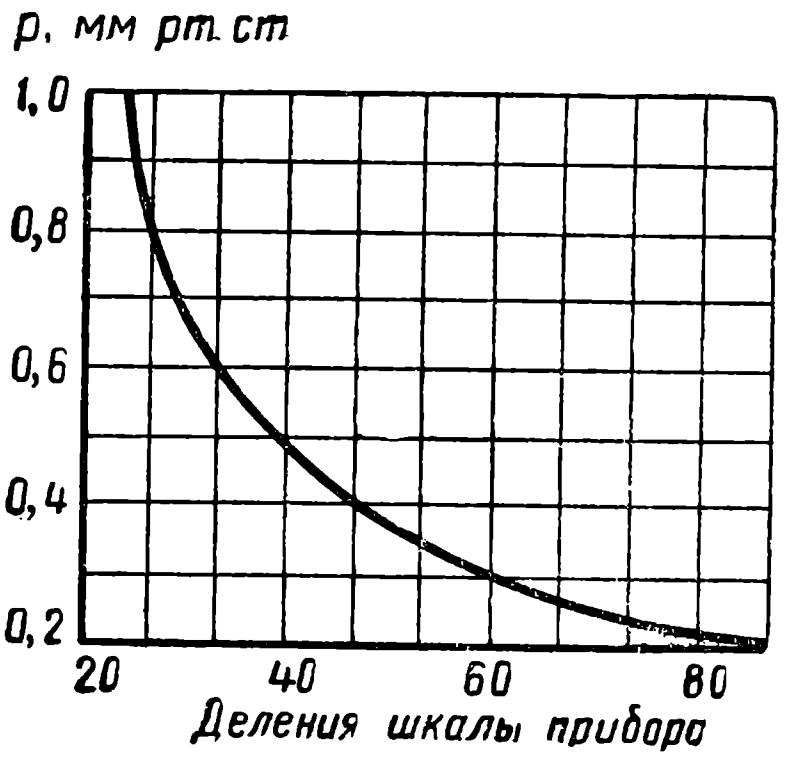


Рис. 2.1.17. Градуировочная кривая датчика теплового вакуумметра

служат для подключения к датчику электрического кабеля, соединяющего этот датчик с источником питания нити подогревателя и милливольтметром для регистрации температуры спая термопары. На температуру нити, разогреваемой постоянным электрическим током, оказывает влияние теплопроводность газа, в котором эта нить находится. В свою очередь теплопроводность, как известно, зависит от плотности газового потока и, следовательно, от давления. Измеряя при помощи термопары температуру нити, можно таким образом найти соответствующее давление.

Для этой цели используются тарировочные графики, которые обычно выполняются заводами, производящими вакуумметры. Для иллюстрации такой график показан на рис. 2.1.17. По горизонтальной оси графика откладываются деления шкалы прибора, регистрирующего температуру спая, а по вертикальной оси — измеряемое давление.

При использовании датчика часть его стеклянного корпуса отламывается (см. рис. 2.1.16) и открытая нить помещается в среду, где требуется измерить вакуум. Затем в соответствии с инструкцией, разработанной заводом-изготовителем, устанавливается начальный ток через нить подогревателя и фиксируется температура спая. Точность измерения вакуумметрами составляет примерно 10÷15 %.

4. Групповой регистрирующий манометр

Рассмотрим конструкцию и принцип действия групповых регистрирующих манометров, позволяющих измерять давления одновременно в нескольких точках потока. В аэродинамических лабораториях широкое применение нашел регистрирующий электромеханический манометр ГРМ, изготовляемый Московским заводом «Контрольприбор». Внешний вид такого манометра изображен на рис. 2.1.18. В корпусе прибора размещены двадцать рычажных весовых элементов (рис. 2.1.19), связанных между собой общим электрическим приводом и механизмом печати (для воспроизведения показаний на бумажной ленте). В верхней части прибора расположена шкала визуального отсчета этих показаний.

Величина измеряемого давления считывается с вертикальной шкалы *1* (см. рис. 2.1.18) напротив указателя *2*. Такие шкалы выполнены для каждого измери-

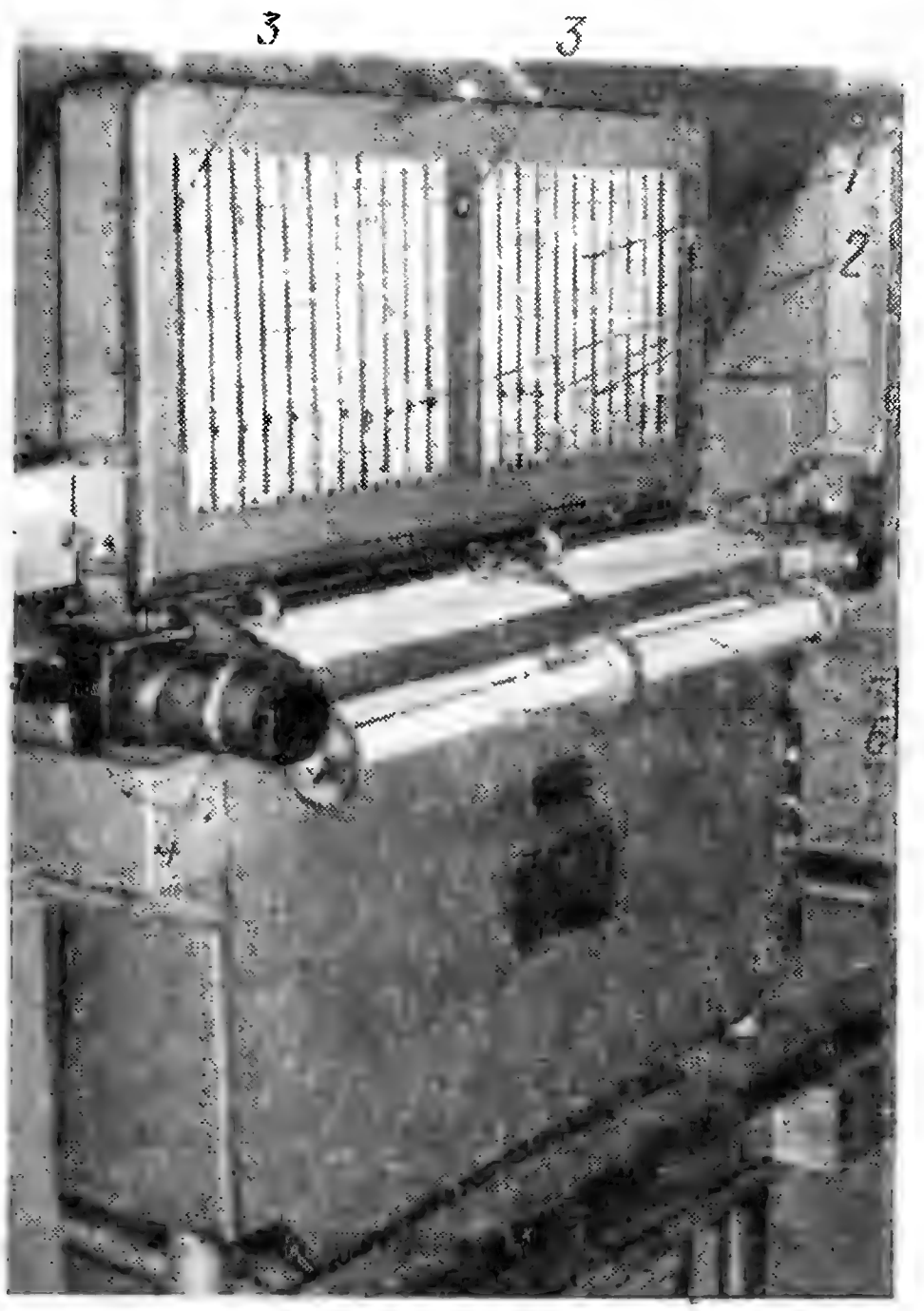


Рис. 2.1.18. Групповой регистрирующий манометр ГРМ:

1 — шкала визуального отсчета; *2* — подвижный указатель; *3* — указатель номера замера; *4* — механизм печати; *5* — бумажная лента; *6* — кнопка включения механизма печати; *7* — выключатель питания; *8* — кнопка передвижения указателя номера замера

тельного канала отдельно (всего две группы таких каналов по 10 в каждой). В крайнем левом столбце каждой половины шкалы располагается указатель *3* номера замера. В средней части прибора находится механизм печати *4*, а внизу, с правой стороны, расположен пульт включения источника питания, механизма печати и устройства для передвижения указателя номера замера.

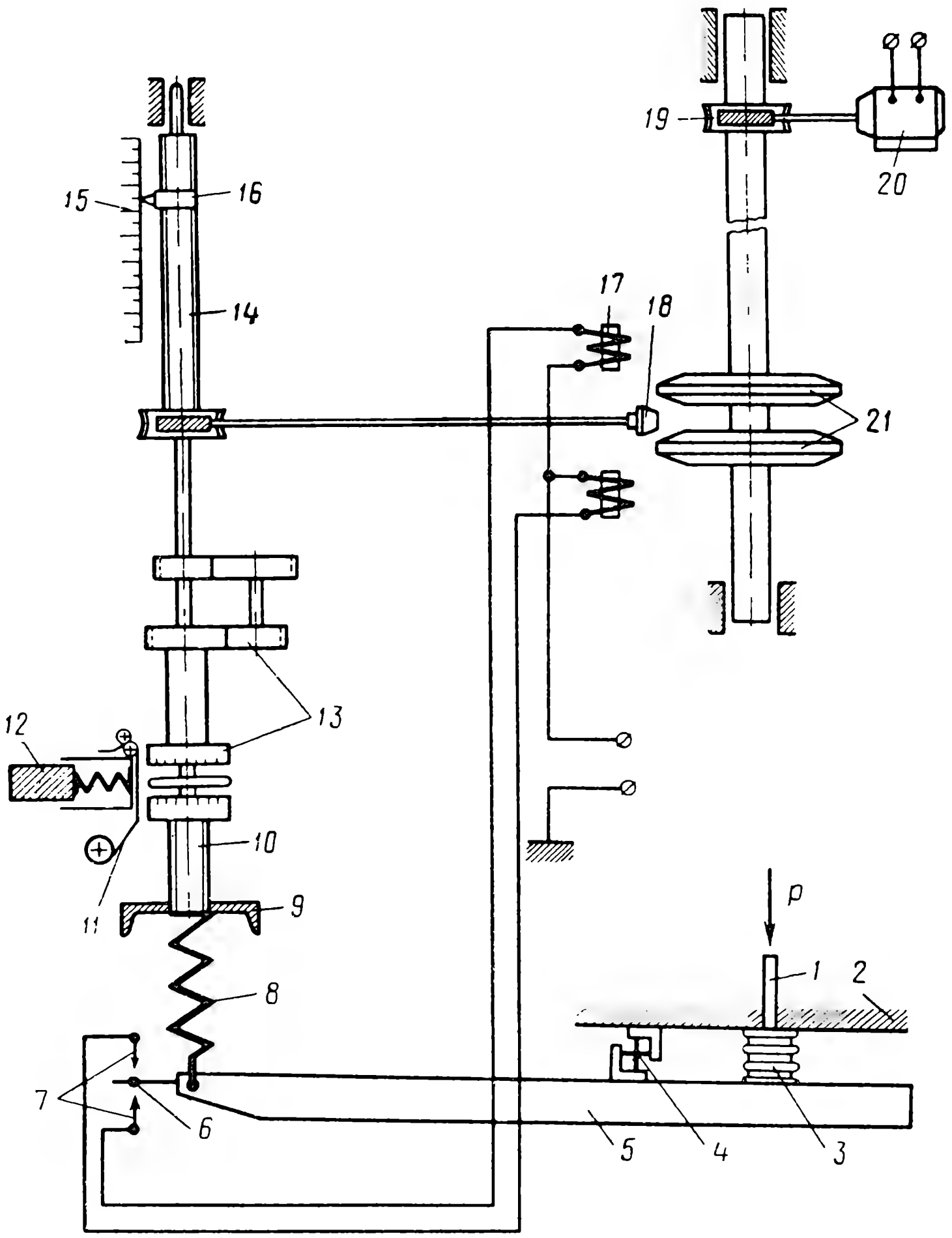


Рис. 2.1.19. Схема рычажного весового элемента прибора ГРМ:

1 — штуцер; *2* — основание; *3* — сильфон; *4* — упругий шарнир подвески; *5* — рычаг; *6* — подвижный контакт; *7* — неподвижные контакты; *8* — винтовая измерительная пружина; *9* — гайка измерительной пружины; *10* — винт; *11* — бумажная лента; *12* — механизм печати; *13* — механизм регистрации; *14* — визуальный винт; *15* — шкала; *16* — указатель; *17* — электромагниты; *18* — ролик; *19* — групповой вал; *20* — электродвигатель привода; *21* — диски привода

Измерение давления воздушного потока осуществляется следующим образом. При помощи специальных приемников (насадков), расположенных в потоке, давление по резиновому шлангу подводится к штуцеру *1*, расположенному на задней стенке ГРМ (см. рис. 2.1.19), и по дренажной трубке — к сильфону *3*, установленному на рычаге *5*. Возникающее от давления в сильфоне усилие передается на этот рычаг, и вследствие нарушения его равновесия происходит замыкание одного из контактов *7*. При этом включается соответствующий электромагнит *17*, который притягивает пластинку с роликом *18*. Через этот ролик враща-

тельное движение передается на винты *10* и *14*, которые приводят в действие механизм регистрации показаний прибора *13*. Одновременно вращение винтов вызывает перемещение гайки *9* на измерительной пружине *8* до тех пор, пока рычаг не окажется в равновесии. Тогда контакты *6—7* разомкнутся и цепь питания электромагнитов *17* разорвется. В этот момент показание прибора будет соответствовать измеряемому давлению.

Запись показаний в условных единицах производится на двух бумажных лентах, перемещение которых осуществляется при помощи

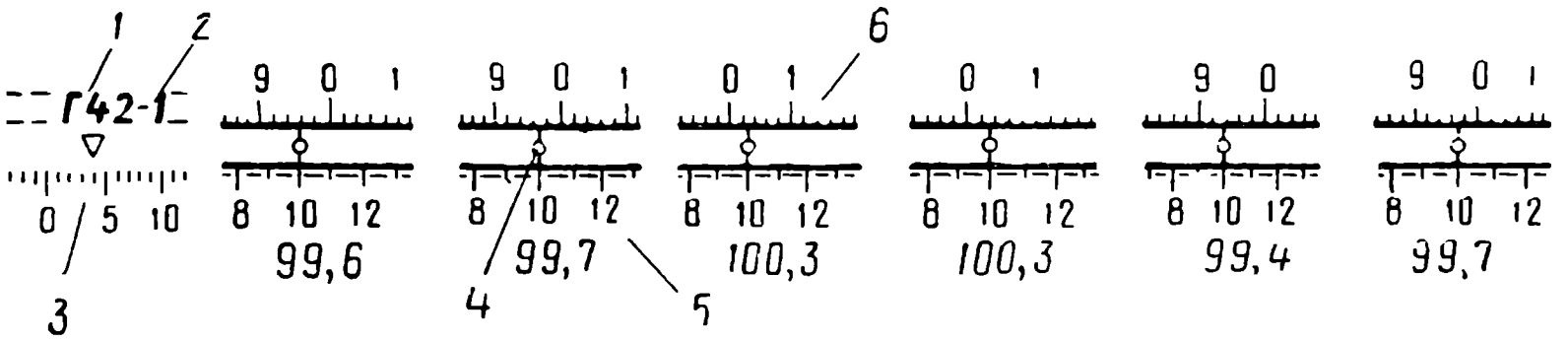


Рис. 2.1.20. Пример отпечатка показаний прибора ГРМ:

1 — индекс прибора; *2* — номер декады; *3* — номер замера; *4* — указатель шкалы; *5* — шкала десятков; *6* — шкала единиц

специального электродвигателя. На каждой ленте фиксируются данные о давлении, соответствующие декаде — группе из десяти измерительных каналов (рис. 2.1.20). Лента имеет одиннадцать колонок отпечатков. Крайняя левая из этих колонок содержит индекс манометра *1* и номер декады *2* (верхний ряд). В нижнем ряду, против неподвижного индекса, располагается считываемый номер замера.

В других колонках, каждая из которых соответствует определенному каналу, сверху и снизу расположены две шкалы. Причем верхняя шкала, цена делений которой составляет 0,2, является по отношению к нижней ниониусом. Это означает, что показание нижней шкалы всегда представляет собой целое число ее делений. В тех случаях, когда такое показание близко к целому числу и не ясно, больше оно или меньше этого числа, необходимо обратиться к верхней шкале. Если нуль на ней расположен справа от указателя *4*, то показание нижней шкалы будет меньше целого числа, если слева, то больше. Примеры расшифровки показаний замеров шести каналов по верхней и нижней шкалам приведены на рис. 2.1.20.

Расчет давления (в $кГ/см^2$) по показаниям манометра осуществляется по формуле

$$p - p_{атм} = \pm (N_0 - N)\, k, \qquad (2.1.14)$$

где N_0 и N — показания прибора в условных единицах, соответствующие атмосферному $p_{атм}$ и измеряемому p давлениям; k — коэффициент прибора.

Значение N_0 определяется как среднее из показаний, соответствующих атмосферному давлению до и после измерений в потоке. Коэффициент k определяется в результате тарирования манометра, осуществляемого обычно на заводе-изготовителе. Знак перед скобкой в формуле (2.1.14) зависит от типа прибора: для манометров с пределами измерения разности давлений $(p—p_{атм})$ от —1 до 0,2 $кГ/см^2$ и от —1 до 1 $кГ/см^2$ следует выбрать знак «+», а для всех остальных — знак «—».

Регистрация результатов измерений манометром может производиться либо путем считывания отпечатанных на ленте показаний, либо по указателю. Современные конструкции манометров типа ГРМ обеспечивают точность измерения давления в случае снятия отпечатанных показаний в пределах ±0,5% от максимальной величины измеряемого избыточного давления, а при визуальном отсчете ±1,5%.

5. Приемники давления газа (насадки)

Различаются приемники (насадки), предназначенные для измерения статического или полного давлений. Основным элементом таких насадков являются дренажные отверстия (каналы), воспринимающие давление. У насадка (приемника) статического давления эти отверстия должны располагаться на боковой поверхности при том условии, чтобы линия тока исследуемого течения совпадала с касательной к этой поверхности в дренажной точке. Насадок полного давления отличается тем, что

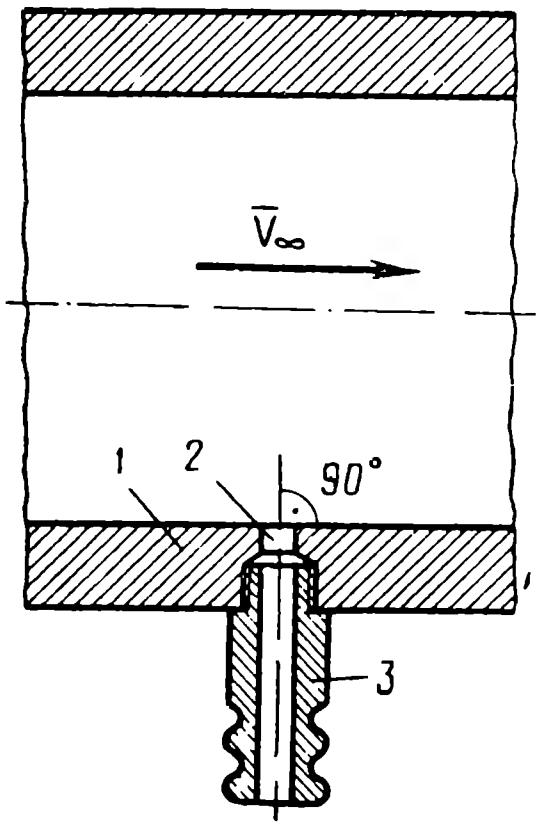


Рис. 2.1.21. Измерение статического давления в трубопроводе:

1 — стенка трубопровода;
2 — приемное отверстие;
3 — штуцер

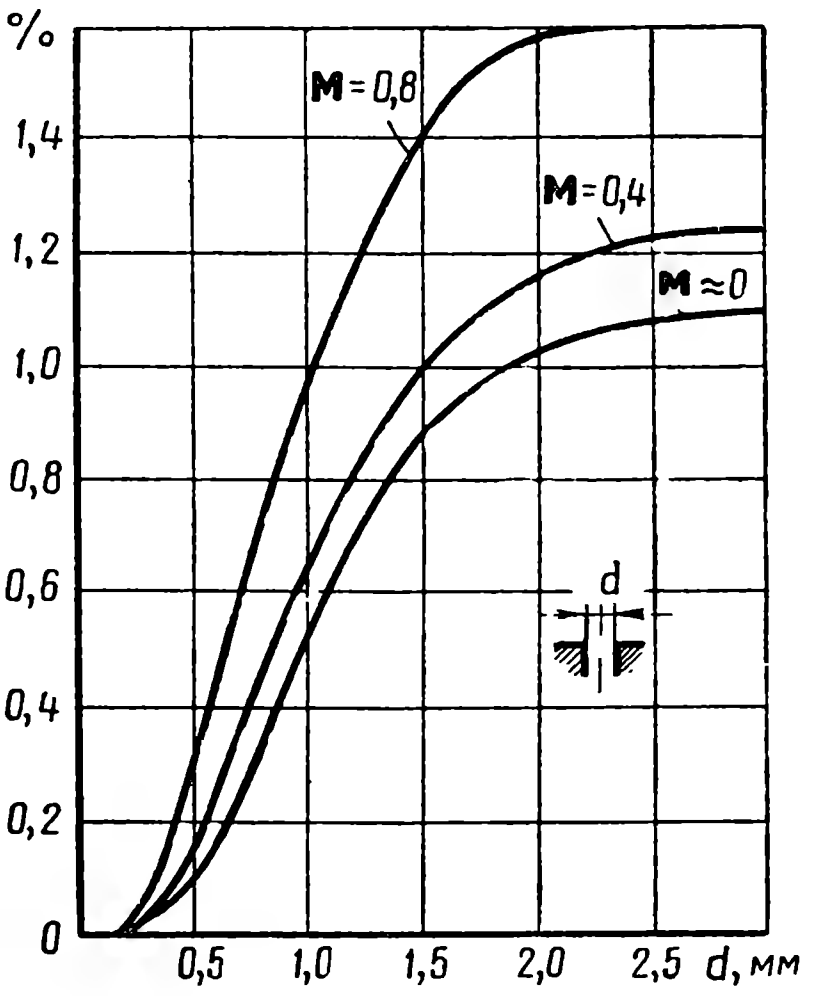


Рис. 2.1.22. Влияние размеров отверстия на величину ошибки измерения статического давления

дренажное отверстие совпадает с точкой полного торможения (критической точкой) на обтекаемой поверхности насадка.

Существует также приемник давления, представляющий собой комбинированный насадок, который предназначен для измерения одновременно статического и полного давлений.

Приемники статического давления. Простейшим приемником статического давления является стенка газопровода с дренажным отверстием, перпендикулярным к обтекаемой поверхности (рис. 2.1.21). Диаметр отверстия не должен превышать 0,3÷0,5 *мм*, так как излишне большой его размер вызовет дополнительные возмущения в потоке, что приведет к искажению измеряемого давления.

На рис. 2.1.22 показано влияние размеров отверстия на величину ошибки измерения в процентах к скоростному напору.

Для измерений статического давления в различных точках потока жидкости или газа применяются специальные приемники, имеющие форму насадков. На рис. 2.1.23 показана схема насадка Прандтля, используемого для таких измерений в дозвуковом равномерно параллельном потоке. Этот насадок представляет собой длинный цилиндр, на боковой поверхности которого просверлены приемные отверстия. Носовая часть цилиндра имеет сферическую форму, а отверстия располагаются от носка на расстоянии, равном примерно 3÷8 диаметрам цилиндра. При таком удалении давление в окретности отверстия восстанавливается до величины, равной измеряемому статическому давлению в невозмущенном течении.

На рис. 2.1.24 показано влияние расстояния до дренажного отверстия на точность измерения такого давления.

Измерение статического давления в сверхзвуковых потоках осуществляется с помощью насадков с конической (рис. 2.1.25) или ожи-

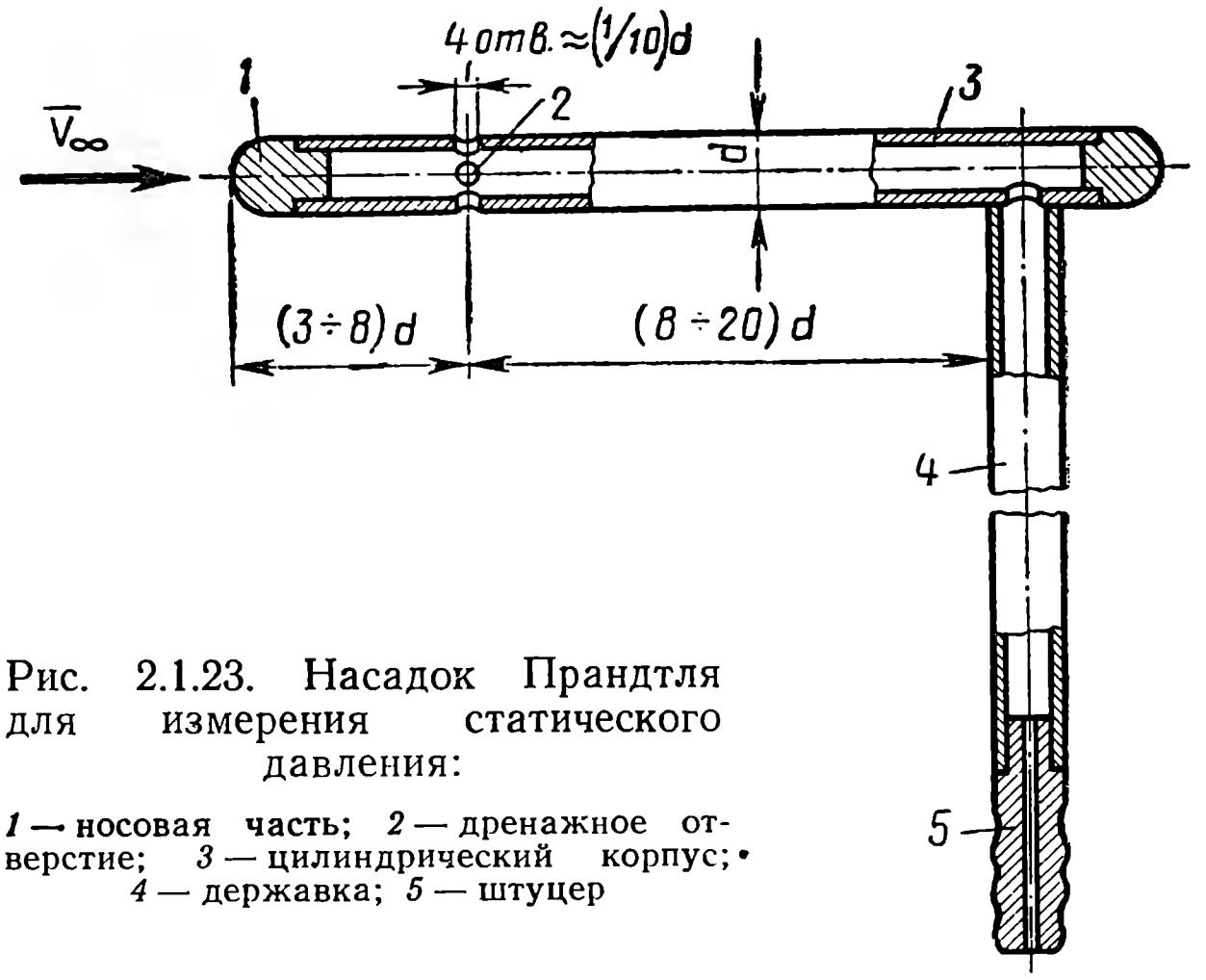


Рис. 2.1.23. Насадок Прандтля для измерения статического давления:

1 — носовая часть; *2* — дренажное отверстие; *3* — цилиндрический корпус; *4* — державка; *5* — штуцер

вальной (рис. 2.1.26) головными частями. На этих рисунках указаны расстояния от носка до дренажных отверстий. Эти расстояния при выбранной форме носка и необходимом его заострении обеспечивают восстановление давлений у приемных отверстий до их значений в набегающем потоке. Заострение определяется углом при вершине конуса или оживала. При расстояниях до дренажных отверстий, указанных на рис. 2.1.25 и 2.1.26, допустимый угол для конуса равен 8°, а для оживала 35°.

Как показывают исследования, приемники с такой формой головных частей пригодны для измерения давлений также в околозвуковых (трансзвуковых) потоках. При этом, однако, следует предусмотреть, чтобы приемное отверстие насадка не попало в зону влияния отраженного от стенки головного скачка уплотнения (рис. 2.1.27). Если это влияние имеет место, то в окрестности приемного отверстия давление будет существенно отличаться от его значения в набегающем потоке и измерение будет ошибочным.

Рассмотренные конструкции отличаются достаточно большой длиной, определяемой значительным удалением дренажного отверстия от передней части. В практике нашли применение также сравнительно короткие насадки, позволяющие измерять статическое давление в некоторой ограниченной области потока. На рис. 2.1.28 показа-

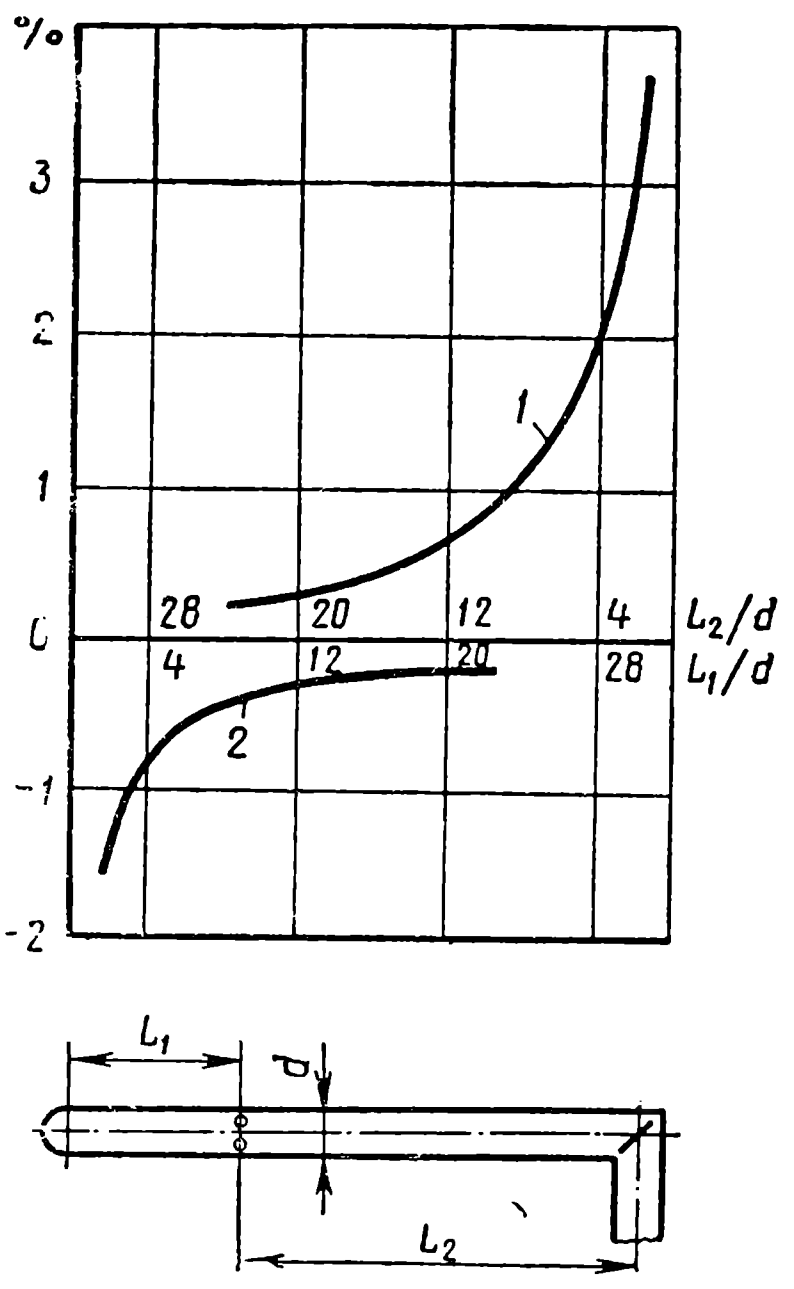


Рис. 2.1.24. Влияние расположения приемного отверстия на корпусе насадка на точность измерения давления:

1 — влияние державки; *2* — влияние носовой части

на схема такого насадка, используемого в дозвуковых потоках. Приемное отверстие размещено в центре тонкого диска, закрепленного на цилиндрической державке. Ее толщина составляет примерно 0,1 D. При таких размерах давление в приемном отверстии диска равно статическому.

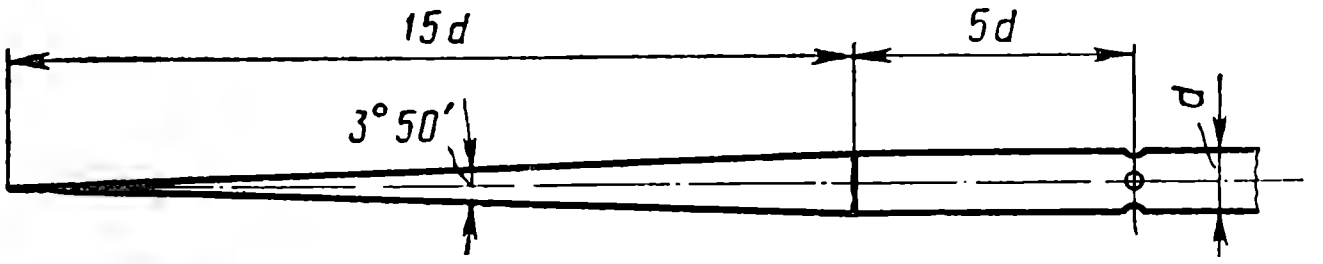


Рис. 2.1.25. Конический насадок для измерения статического давления

Для измерений в ограниченных по размерам каналах или в непосредственной близости от обтекаемой поверхности летательного аппарата применяются миниатюрные насадки, которые, внося незначительные возмущения в поток, обеспечивают достаточно высокую точность измерений. Поперечное сечение такого насадка не должно превышать 3÷5% от диаметра канала или от расстояния до обтекаемой поверхности, в окрестности которой измеряется давление.

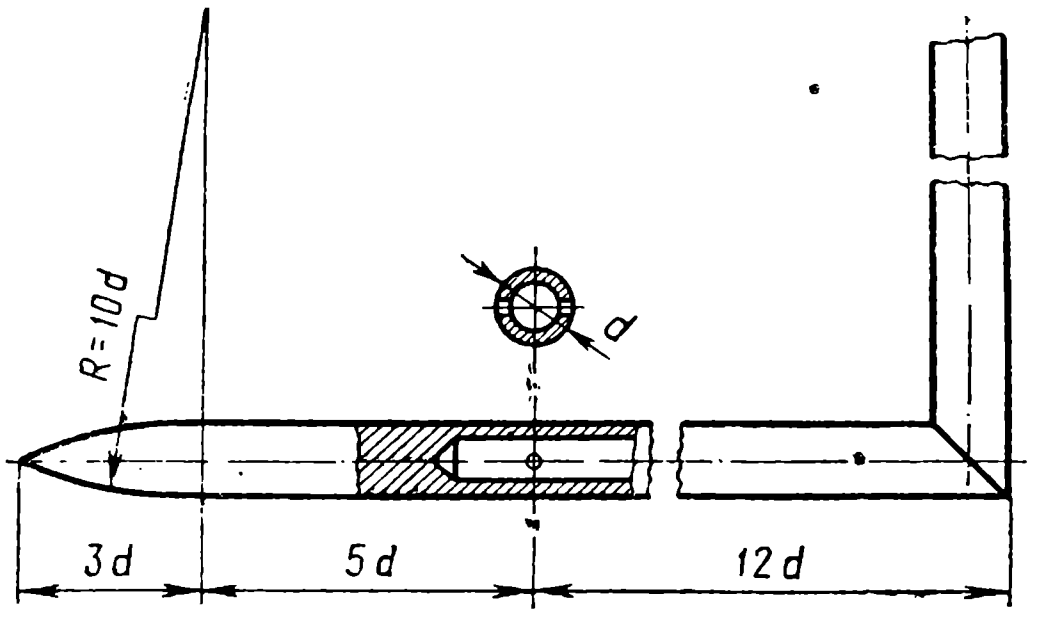


Рис. 2.1.26. Насадок с оживальной головкой для измерения статического давления

При измерениях в дозвуковых потоках широко применяется миниатюрный насадок с протоком, схема которого показана на рис. 2.1.29. Для измерения статического давления при сверхзвуковых скоростях используется насадок, изображенный на рис. 2.1.30. Этот насадок представляет собой «односторонний» клин, на нескошенной поверхности которого располагается дренажное отверстие.

Обычно принимается, что точность замера давления насадком не должна быть ниже 1% от величины скоростного напора. Угол отклонения насадка, при котором ошибка не превышает этой величины, называется углом нечувствительности. Для каждого типа насадка

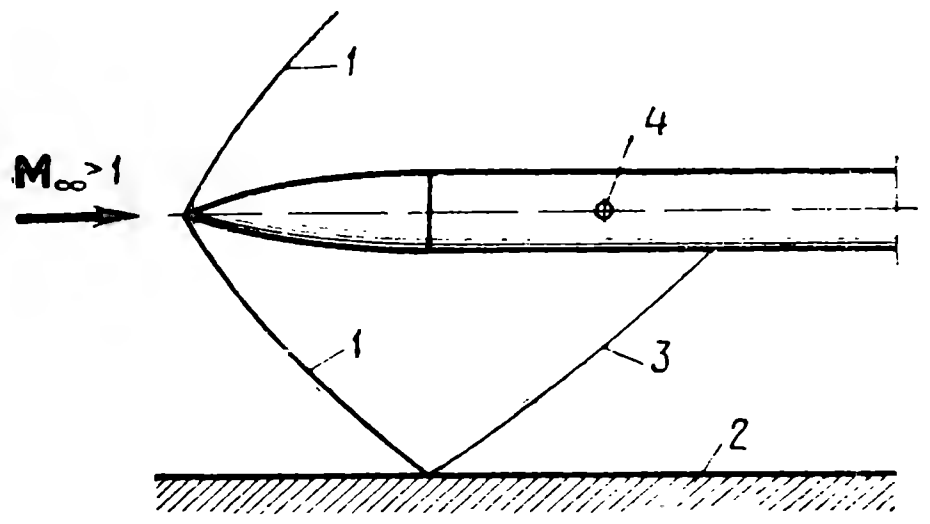


Рис. 2.1.27. Взаимодействие ударных волн со стенкой аэродинамической трубы:

1 — головной скачок уплотнения; *2* — стенка; *3*—отраженная ударная волна; *4* — приемное отверстие

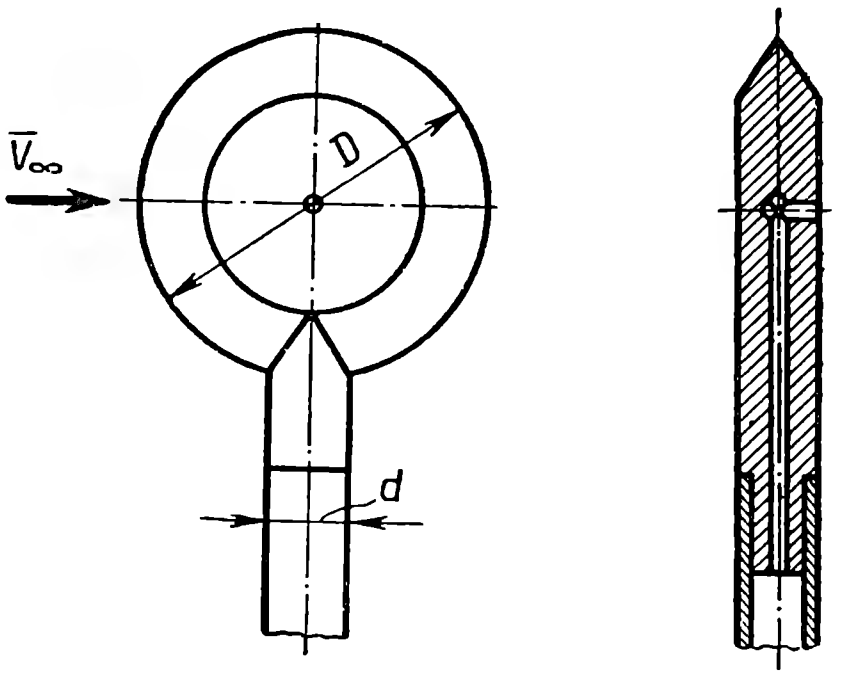


Рис. 2.1.28. Дисковый насадок для измерения статического давления: $d = (0{,}1 \div 0{,}2)\ D$

экспериментально определяются диапазон значений чисел $\mathbf{M}_\infty = V_\infty/a_\infty$ или $\lambda_\infty = V_\infty/a^*$, а также углы отклонения оси насадка от направления скорости набегающего потока, при которых можно осуществлять измерения с допустимой точностью. Для насадка Прандтля этот угол со-

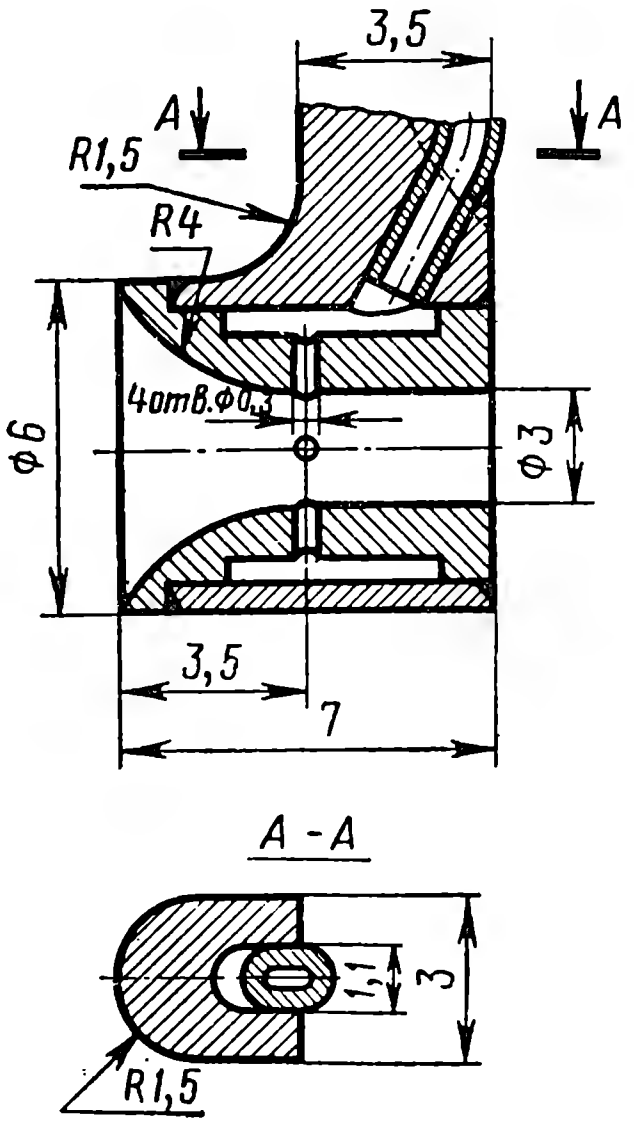


Рис. 2.1.29. Миниатюрный насадок с протоком для измерения статического давления

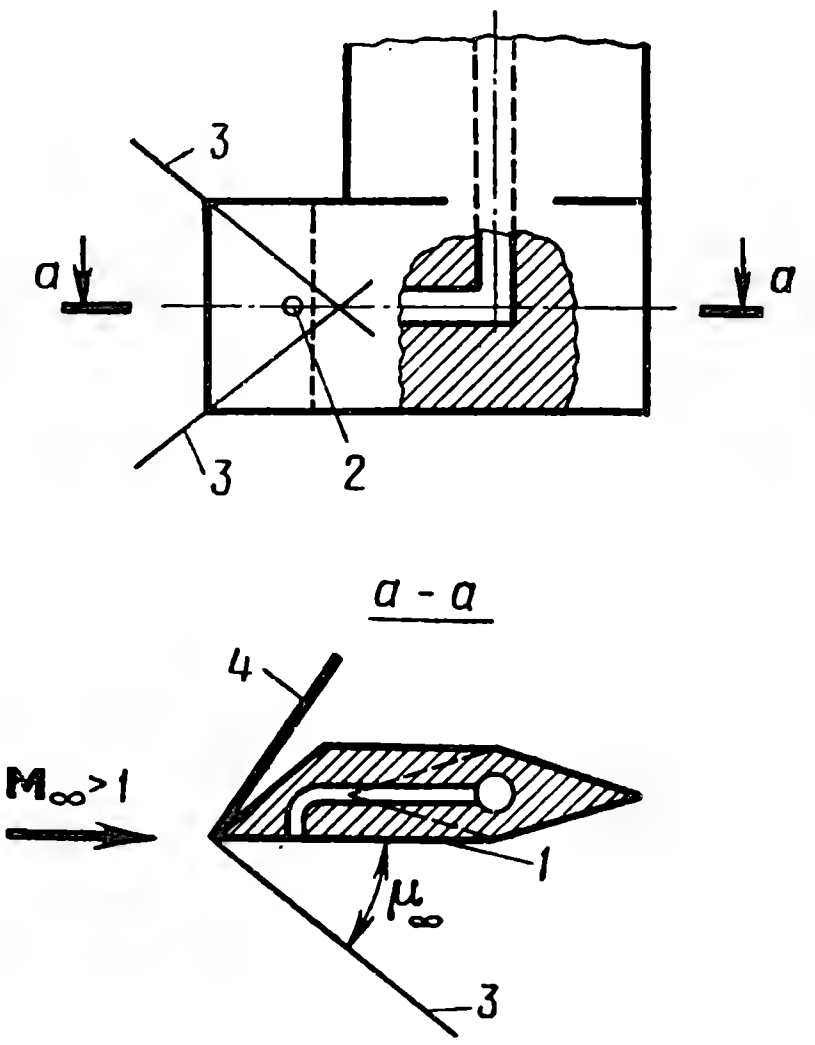


Рис. 2.1.30. Клиновидный насадок для измерения статического давления:

1 — нескошенная поверхность клина; *2* — приемное отверстие; *3* — линии Маха; *4* — скачок уплотнения

ставляет $\pm 6°$ при $\mathbf{M}_\infty \leqslant 0{,}85$. Насадок с протоком, изображенный на рис. 2.1.29, обеспечивает удовлетворительные результаты при углах отклонения $\pm 28°$ и $\mathbf{M}_\infty \leqslant 0{,}83$.

Приемники полного давления (давления торможения). Полное давление измеряется с помощью насадка Пито, который представляет собой пустотелую изогнутую трубку (рис. 2.1.31), соединенную с манометром. В дозвуковом потоке (рис. 2.1.31, *а*) торможение потока происходит непосредственно в трубке. При малых скоростях (несжимаемый поток, число $\mathbf{M}_\infty \approx 0$) возникающее в этой трубке полное давление, регистрируемое манометром,

$$p_0 = p_\infty + \rho_\infty V_\infty^2/2, \tag{2.1.15}$$

а в сжимаемом потоке ($1 > \mathbf{M}_\infty > 0$)

$$p_0 = p_\infty \left(1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\infty^2\right)^{k/(k-1)}. \tag{2.1.16}$$

В сверхзвуковом потоке перед головной частью насадка возникает скачок уплотнения (рис. 2.1.31, *б*), вызывающий торможение газа, который претерпевает дополнительное сжатие в трубке. Образующееся в трубке давление торможения p_0', измеряемое манометром,

$$p_0' = p_c \left(1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}_c^2\right)^{k/(k-1)}, \tag{2.1.17}$$

где p_c, M_c — соответственно давление и число Маха непосредственно за «прямой» частью криволинейного скачка уплотнения:

$$p_c = p_\infty \left(\frac{2k}{k+1} M_\infty^2 - \frac{k-1}{k+1} \right); \tag{2.1.18}$$

$$M_c = \sqrt{\frac{2 + (k+1) M_\infty^2}{2kM_\infty^2 - (k-1)}}. \tag{2.1.19}$$

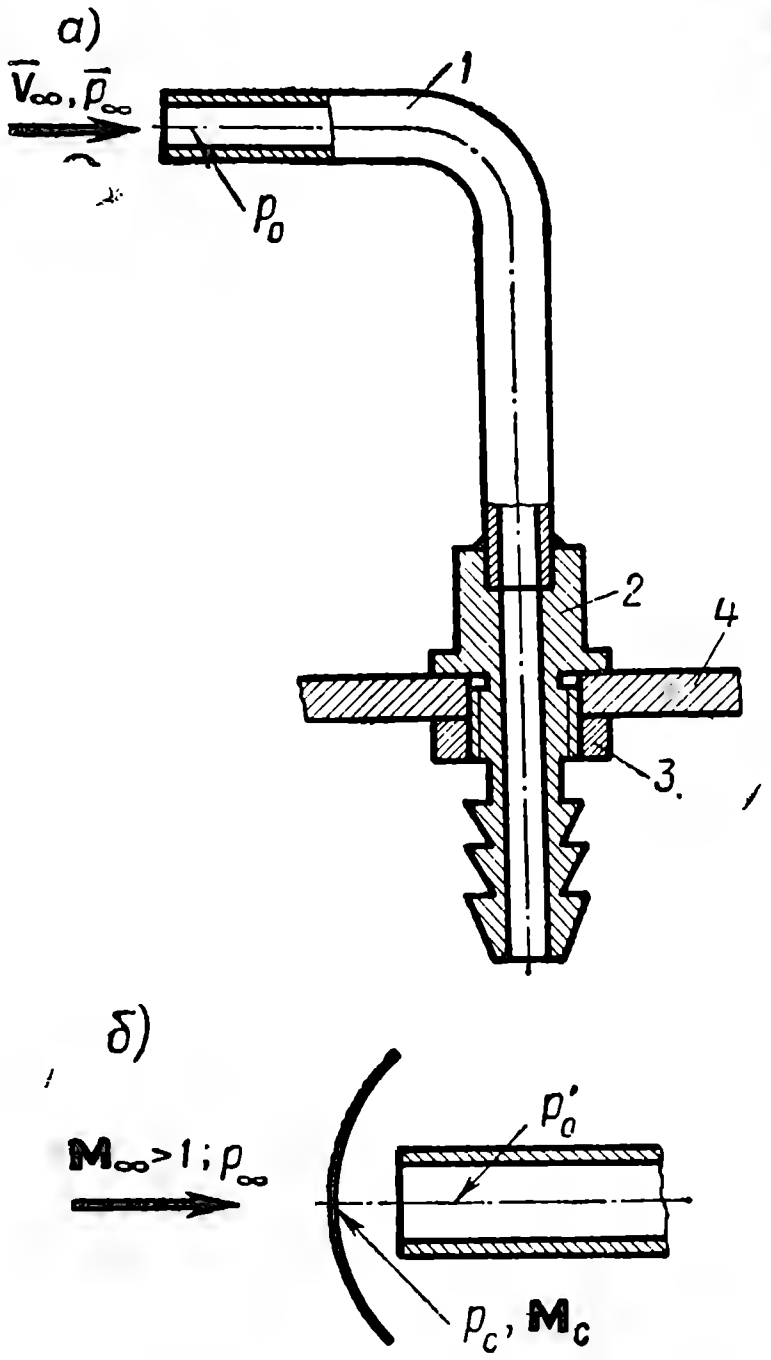


Рис. 2.1.31. Насадок Пито для измерения полного давления:
а — схема обтекания насадка дозвуковым потоком (*1* — изогнутая приемная трубка; *2*—штуцер; *3*—гайка; *4* — стенка); *б* — схема обтекания приемного отверстия сверхзвуковым потоком

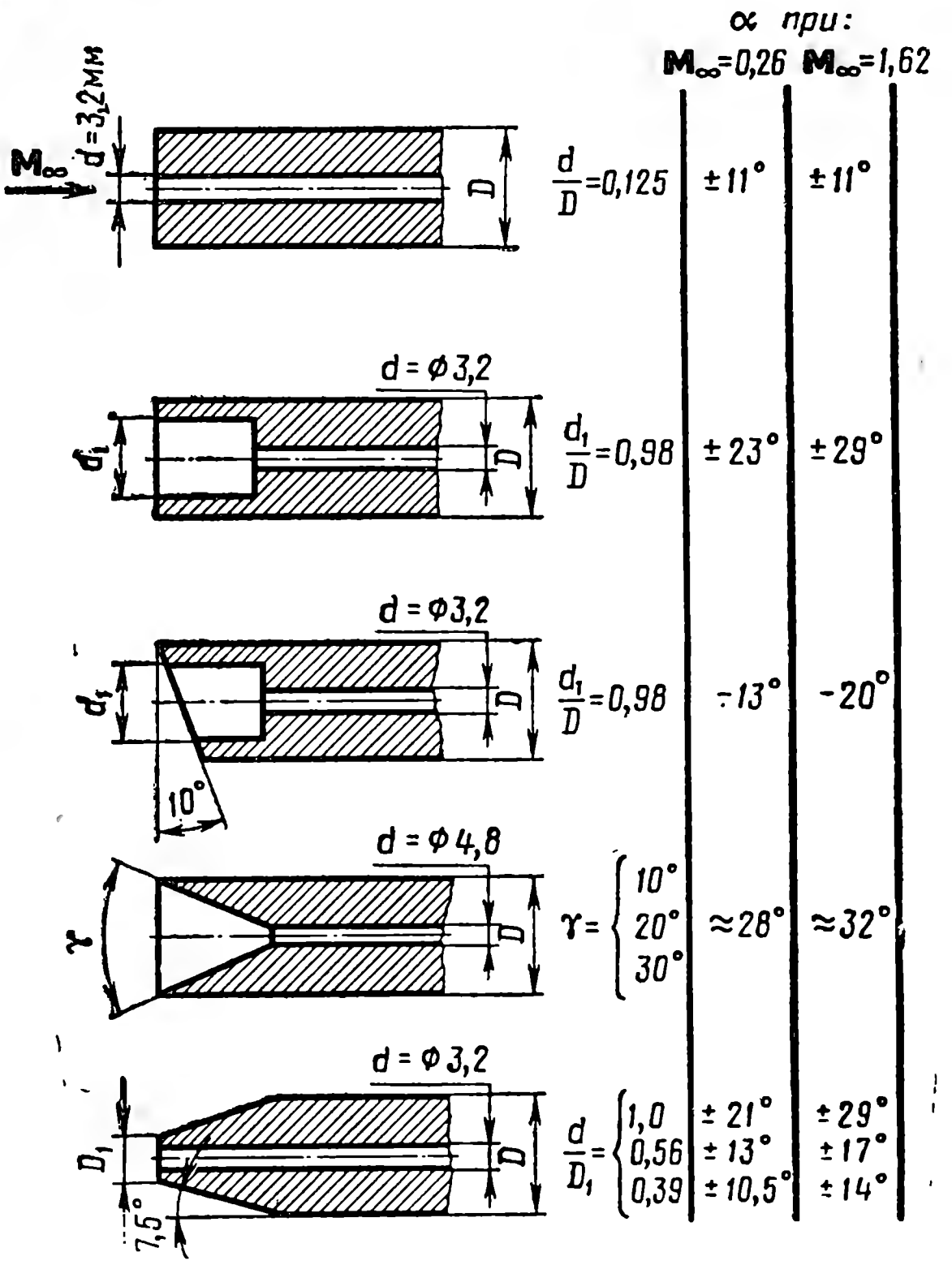


Рис. 2.1.32. Величина углов нечувствительности α для различных форм головной части насадков полного давления

Углы нечувствительности для заданной формы насадка определяются в зависимости от числа M_∞ газового потока, в котором проводятся измерения. На рис. 2.1.32 показаны схемы насадков с различной формой входной части трубки и соответствующие им углы нечувствительности для двух чисел M_∞: 0,26 и 1,62. Как видно, соответствующим выбором формы насадка можно значительно увеличить углы нечувствительности. Это позволяет, не предъявляя жестких требований к расположению насадка в потоке, получать достаточно точные результаты измерений давления.

Такой же эффект имеет место при использовании экранированного насадка (рис. 2.1.33), углы нечувствительности которого могут достигать $\pm(60 \div 65)°$.

Если насадок полного напора находится в потоке, характеризующемся неравномерным распределением скорости по некоторому сечению

в ограниченной области потока, то измеряемое им давление будет соответствовать скорости в точке сечения, которая расположена на «эффективной» оси. Эта ось смещена относительно геометрической оси

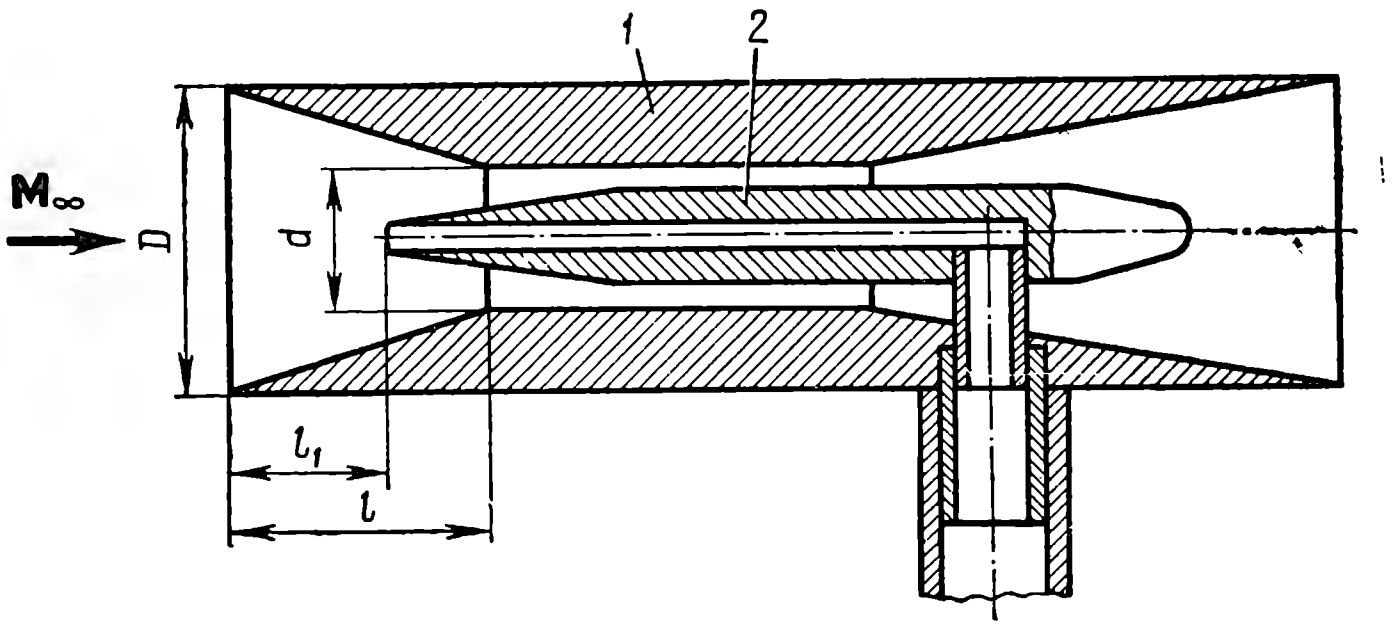


Рис. 2.1.33. Экранированный насадок для измерения полного давления:

1 — корпус (экран); *2* — трубка с приемным отверстим; D — диаметр входного отверстия экрана; l — длина входного конического участка; $l_1=0{,}5\,D$; $d=0{,}5\,D$; углы нечувствительности: ±47° при $l=D$ и ±64° при $l=0{,}15\,D$

входного отверстия, как это показано на рис. 2.1.34, на некоторое расстояние δ, которое с известным приближением определяется из выражения

$$\delta/D = 0{,}131 + 0{,}082d/D, \qquad (2.1.20)$$

где D и d — диаметры соответственно наружной трубки и входного отверстия насадка.

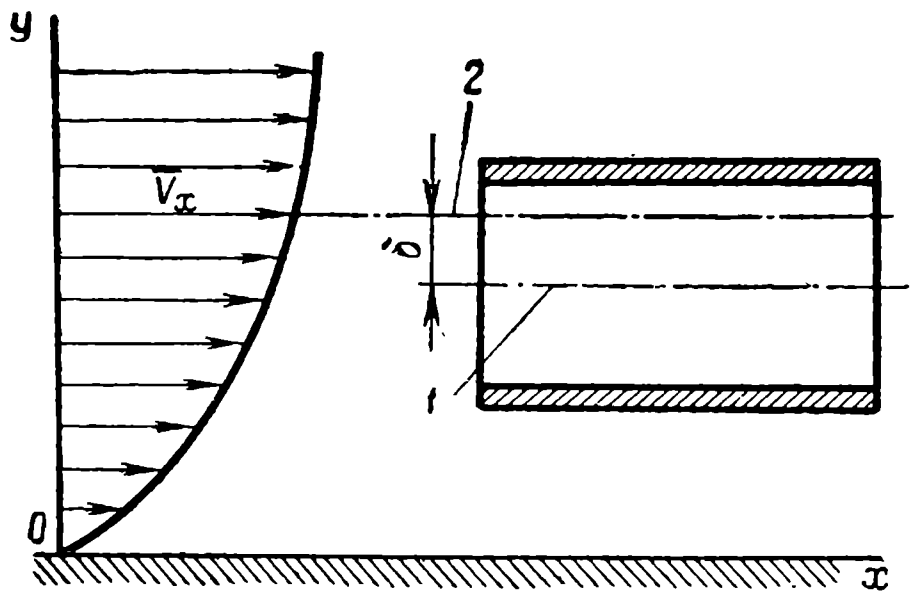


Рис. 2.1.34. Смещение равнодействующей сил давления в неравномерном потоке относительно оси насадка:

1 — геометричская ось насадка; *2* — положение «эффективной» оси

Зависимость (2.1.20) справедлива при условии

$$(D/q)\cdot(dq/dy) = 0{,}1 \div 0{,}2 \quad (q = \rho V^2/2). \qquad (2.1.21)$$

Указанный эффект смещения необходимо учитывать, в частности, при измерениях в пограничном слое. В соответствии с этим эффектом скорость, вычисленная по измеренному полному давлению, будет равна ее значению в той точке сечения пограничного слоя, которая расположена на «эффективной» оси.

Комбинированные насадки. Для измерения давлений в дозвуковых потоках широко используется комбинированный насадок Пито — Прандтля, показанный на рис. 2.1.35. Продольное отверстие *2* насадка воспринимает полное давление, а отверстие *4* на боковой поверхности цилиндрического корпуса *3* — статическое давление. Таким насадком можно измерять давления в воздушных потоках с числами $M_\infty \leqslant 0{,}85$. Угол нечувствительности насадка составляет для указанных чисел Маха примерно ±5°.

Для измерения давлений в около- и сверхзвуковых потоках применяется насадок, схема которого показана на рис. 2.1.36. Этот насадок представляет собой комбинацию обычной трубки Пито и насадка ста-

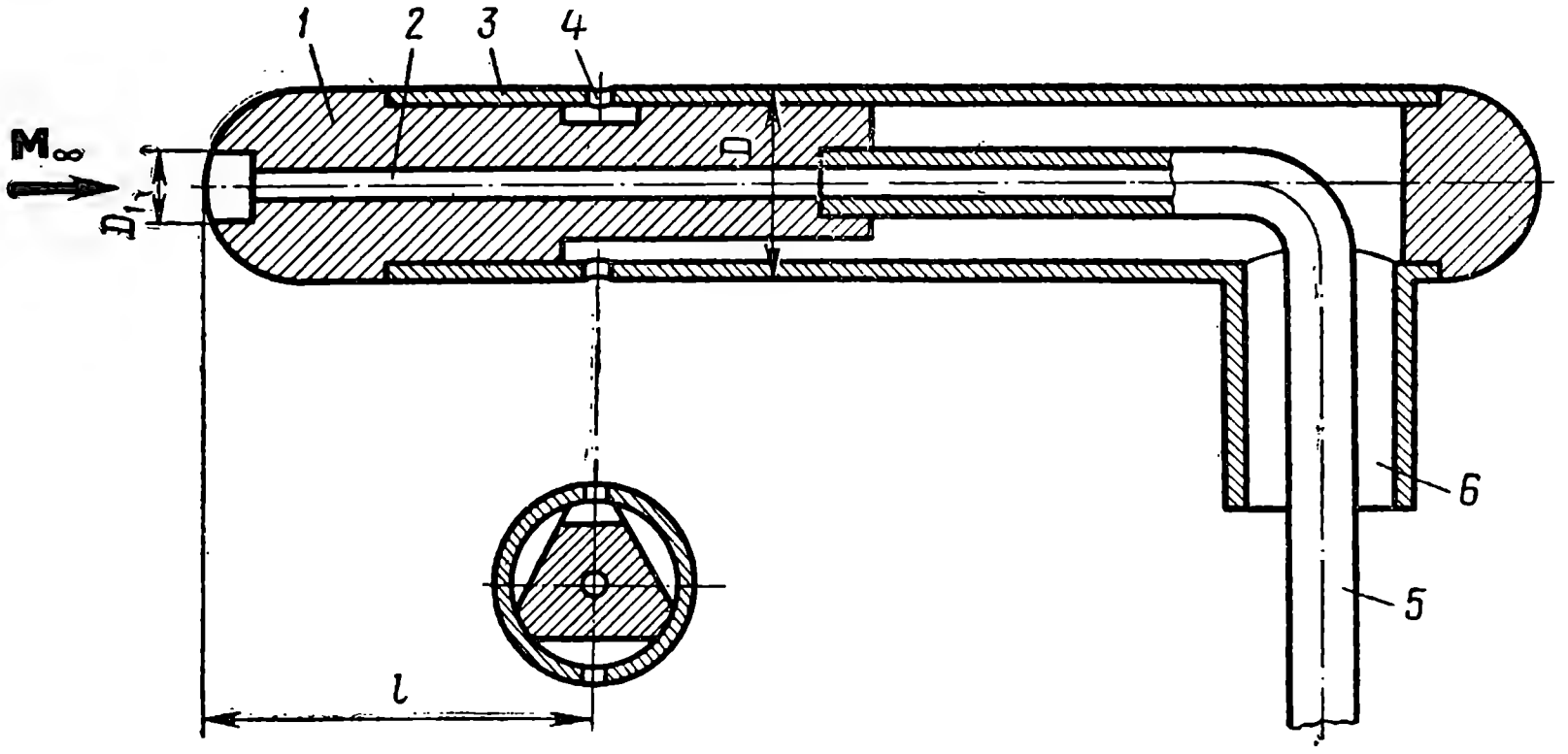


Рис. 2.1.35. Комбинированный насадок Пито — Прандтля (D_1 = =0,3 D; l=3 D):
1 — головка насадка; *2* — продольное отверстие; *3* — цилиндрический корпус; *4* — приемные отверстия статического давления; *5* — трубка вывода для измерения полного напора; *6* — державка и штуцер статического давления

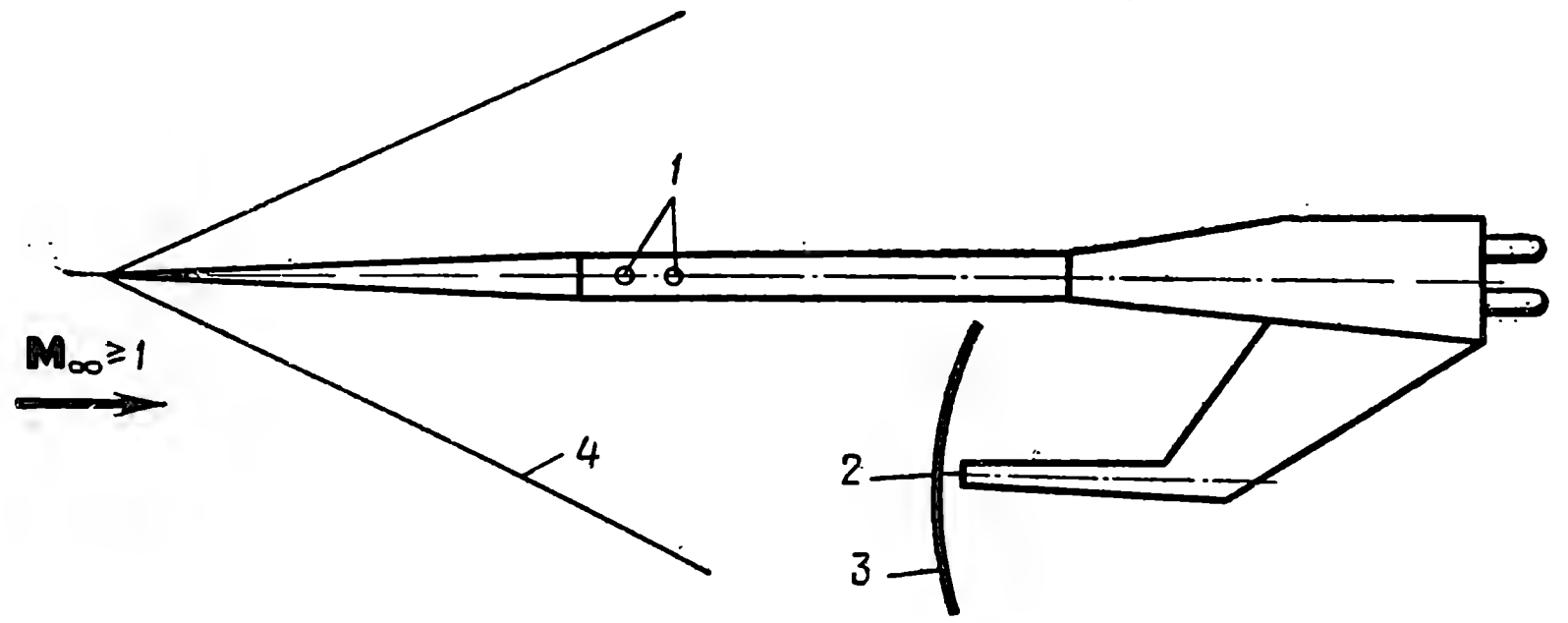


Рис. 2.1.36. Комбинированный насадок:
1 — приемник статического давления; *2* — трубка полного напора; *3* — скачок уплотнения; *4* — линии Маха

тического давления (см. рис. 2.1.25). В этой комбинации трубка Пито располагается так, чтобы скачок уплотнения, возникающий перед нею, находился бы за приемным отверстием насадка статического давления. Конический носок этого насадка должен быть достаточно тонким, чтобы образующийся скачок уплотнения был весьма малой интенсивности, т. е. по существу представлял бы собой волну возмущения (конус Маха). Влияние этой волны на показания трубки Пито будет пренебрежимо малым.

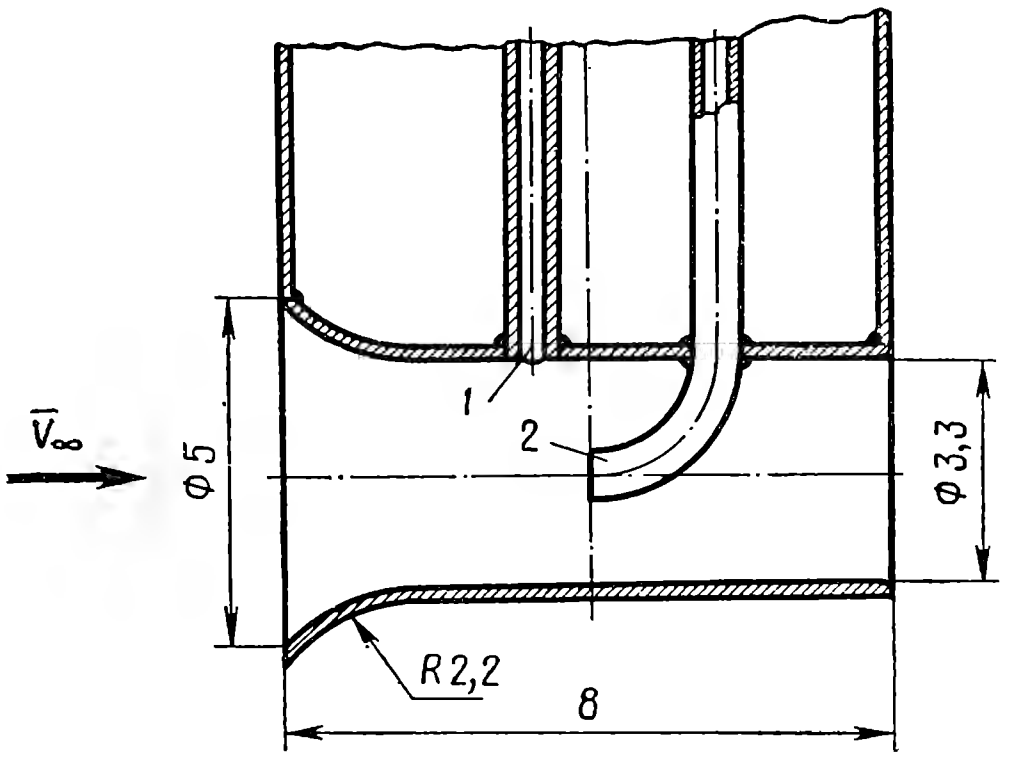


Рис. 2.1.37. Миниатюрный комбинированный насадок с протоком:
1 — приемное отверстие статического давления; *2* — трубка полного напора

Миниатюрный комбинированный насадок для одновременного измерения статического и полного давлений (рис. 2.1.37) можно получить соединением в одной конструкции насадка статического

давления с протоком и экранированного насадка (см. рис. 2.1.29 и 2.1.33).

Другая конструкция такого миниатюрного насадка показана на рис. 2.1.38. Этот насадок изготовляется из двух трубок, одна из которых является приемником полного давления, а другая — статического давления.

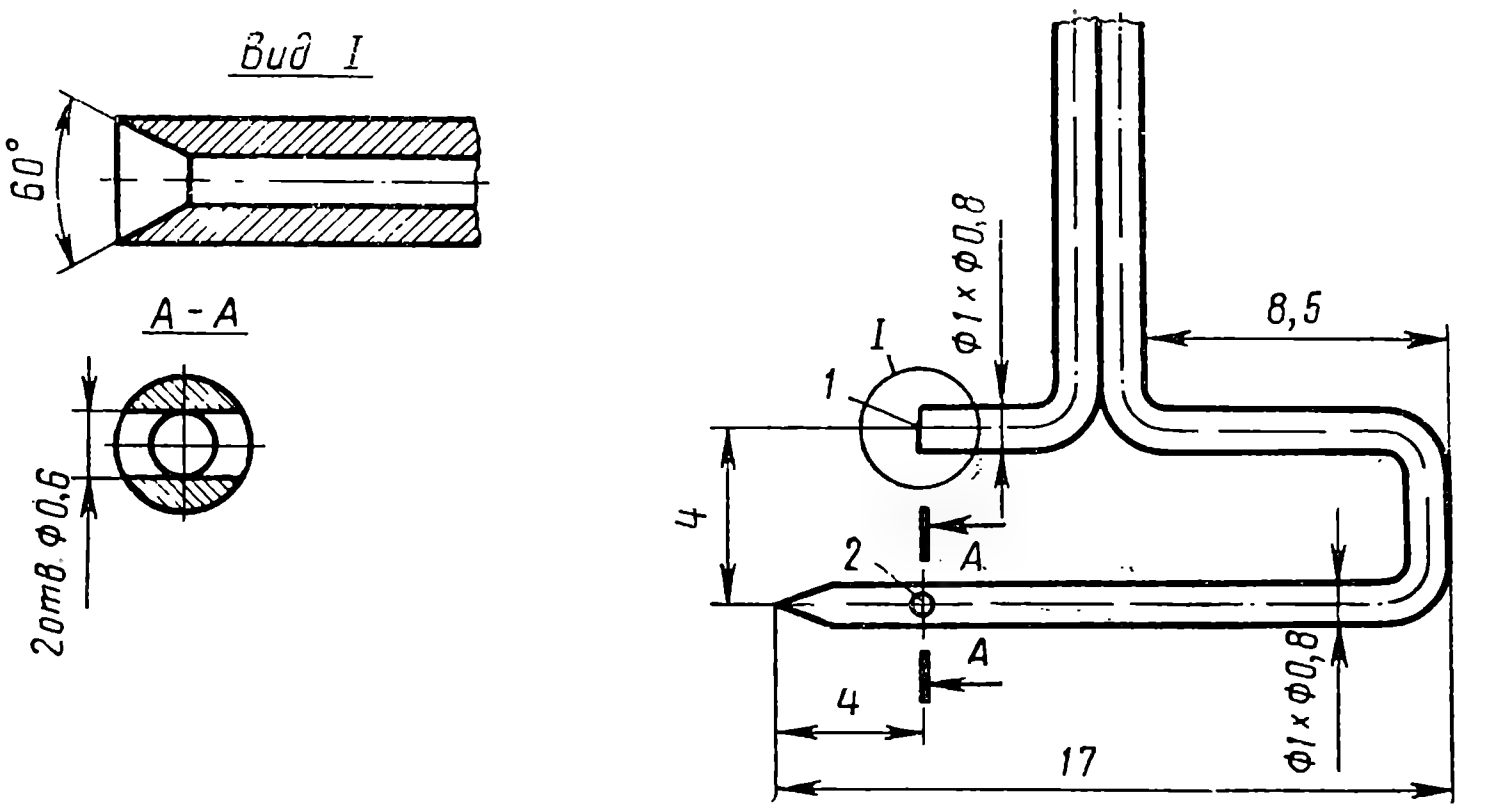


Рис. 2.1.38. Миниатюрный комбинированный насадок:

1 — трубка полного напора; *2* — приемное отверстие статического давления

Измерения полного давления в пограничном слое проводятся специальными микротрубками (рис. 2.1.39) с диаметром приемных отверстий 0,15÷0,2 *мм*. Такие трубки могут быть выполнены из металла или

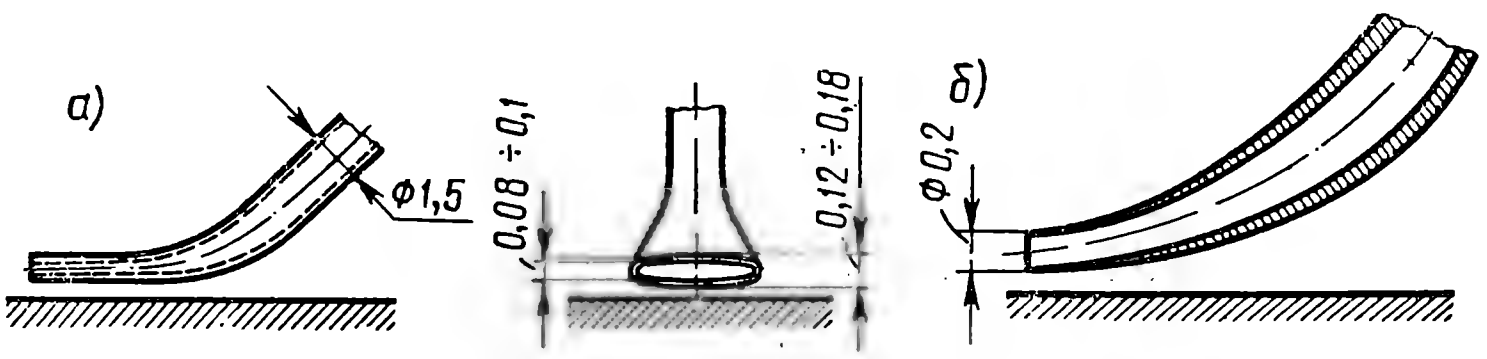


Рис. 2.1.39. Микротрубки полного напора:

а — металлическая; *б* — кварцевая

кварцевого стекла. В измерительных целях могут быть использованы металлические иглы для медицинских шприцев. У таких насадков приемное отверстие имеет форму сильно вытянутого овала, что позволяет уменьшить смещение «эффективной» оси и тем повысить точность измерений. Поперечные размеры насадка должны быть значительно меньше толщины пограничного слоя (менее 0,1 δ), что обеспечит возможность измерения давления практически в выбранной точке этого слоя.

§ 2.2. ПРИБОРЫ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ СКОРОСТИ ПОТОКА

1. Термоанемометры

Принцип действия и устройство термоанемометра основаны на известном физическом эффекте изменения температуры нагретого проводника, помещенного в поток, при изменении скорости его обтекания. Основным элементом этого прибора является проволочный (или пленочный) датчик.

Измерения в установившемся потоке. Теплоотдача проволоки будет равна такому количеству тепла, которое получает датчик

при нагревании электрическим током. Соответствующее количество электроэнергии, идущей на нагревание, определяется по закону Джоуля — Ленца:

$$Q = i^2 R_w, \tag{2.2.1}$$

где R_w — сопротивление датчика; i — сила тока.

Во время опыта поддерживается постоянной сила тока и по изменению сопротивления можно судить о скорости обтекающего газа. Таким образом, по этой схеме термоанемометр работает в режиме постоянного тока (рис. 2.2.1). Начальный ток, соответствующий по-

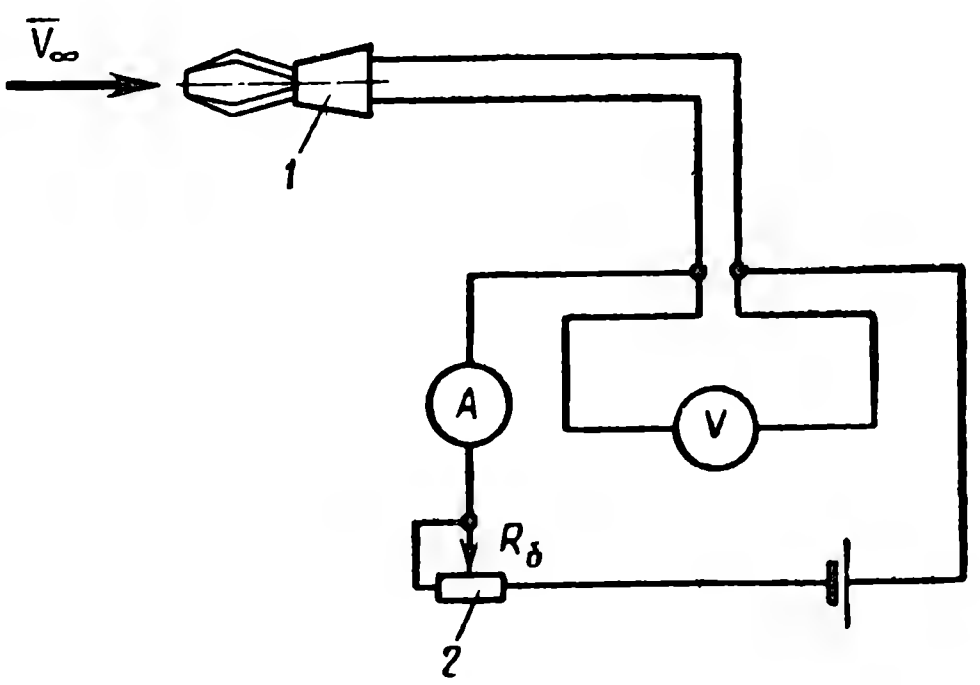


Рис. 2.2.1. Термоанемометр, выполненный по схеме постоянного тока:

1 — датчик; *2* — балластный резистор

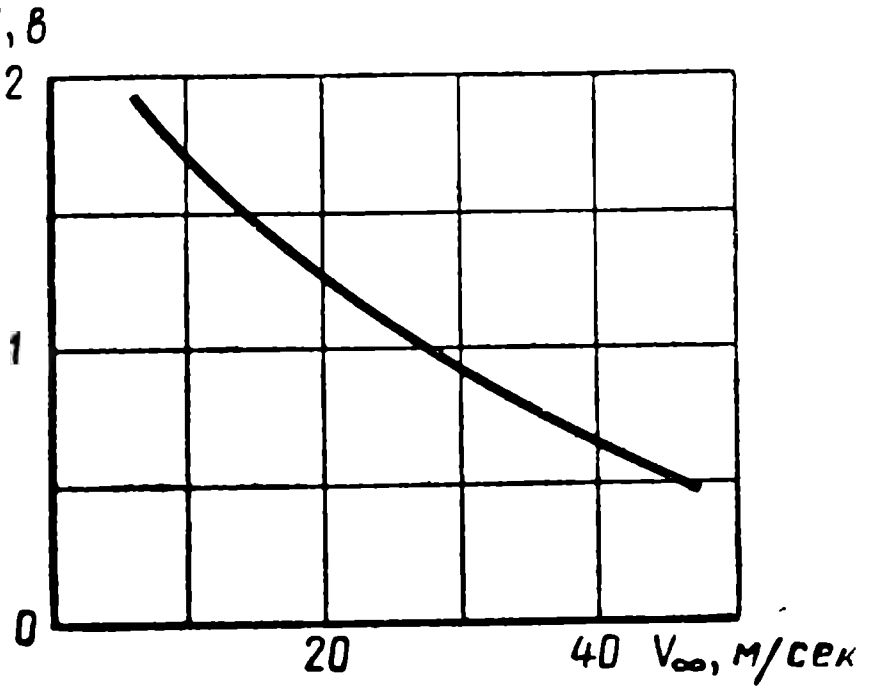


Рис. 2.2.2. Зависимость показаний термоанемометра от скорости потока при включении по схеме постоянного тока

ложению датчика в покоящемся газе, устанавливается с помощью балластного переменного резистора, а во время опыта регистрируются показания вольтметра, соответствующие различным скоростям потока.

Характер зависимости этих показаний от величины дозвуковой скорости виден из рис. 2.2.2. Такая зависимость определяется физическим эффектом, в соответствии с которым при увеличении скорости обтекания проволочка охлаждается сильнее. При этом чем ниже ее температура, тем меньше сопротивление, определяемое в соответствии с формулой

$$R_w = R_н [1 + \alpha_н (T_w - T_н)], \tag{2.2.2}$$

в которой T_w — температура датчика; R_w и $R_н$ — сопротивления датчика соответственно при температуре T_w и начальном значении $T_н = 293$ К; $\alpha_н$ — температурный коэффициент сопротивления материала проволочки при $T_н = 293$ К.

При постоянном токе уменьшение сопротивления датчика вызывает снижение падения напряжения на нем, что видно на рис. 2.2.2.

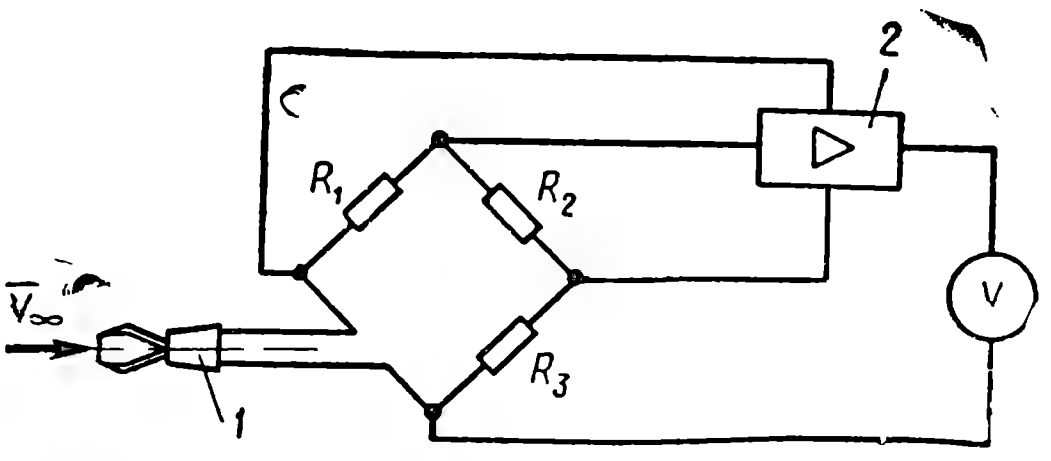


Рис. 2.2.3. Схема термоанемометра с постоянной температурой датчика:

1 — датчик; *2* — усилитель; R_1, R_2, R_3 — резисторы моста

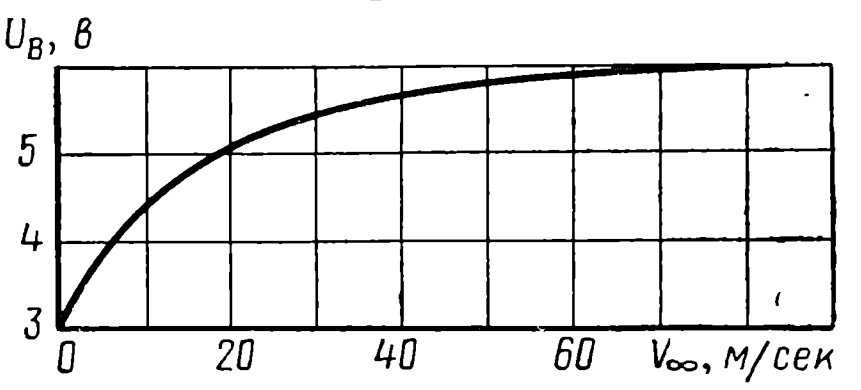


Рис. 2.2.4. Зависимость показаний вольтметра термоанемометра от скорости потока при включении по схеме с постоянной температурой датчика

Термоанемометр может работать также в режиме постоянной температуры датчика (рис. 2.2.3). При этом в начале опыта, как уже указывалось, для неподвижной газовой среды устанавливается начальный ток и, кроме того, записывается начальное показание вольтметра U_0. Обтекание датчика вызовет его охлаждение, что приведет к уменьшению сопротивления. Чтобы не допустить этого и сохранить сопротивление таким, как и в покоящемся газе, необходимо увеличить силу тока. Это в свою очередь приведет к большему падению напряжения. Его величина однозначно определяет скорость потока, в который помещен датчик. Характерная зависимость показаний вольтметра от скорости представлена на рис. 2.2.4.

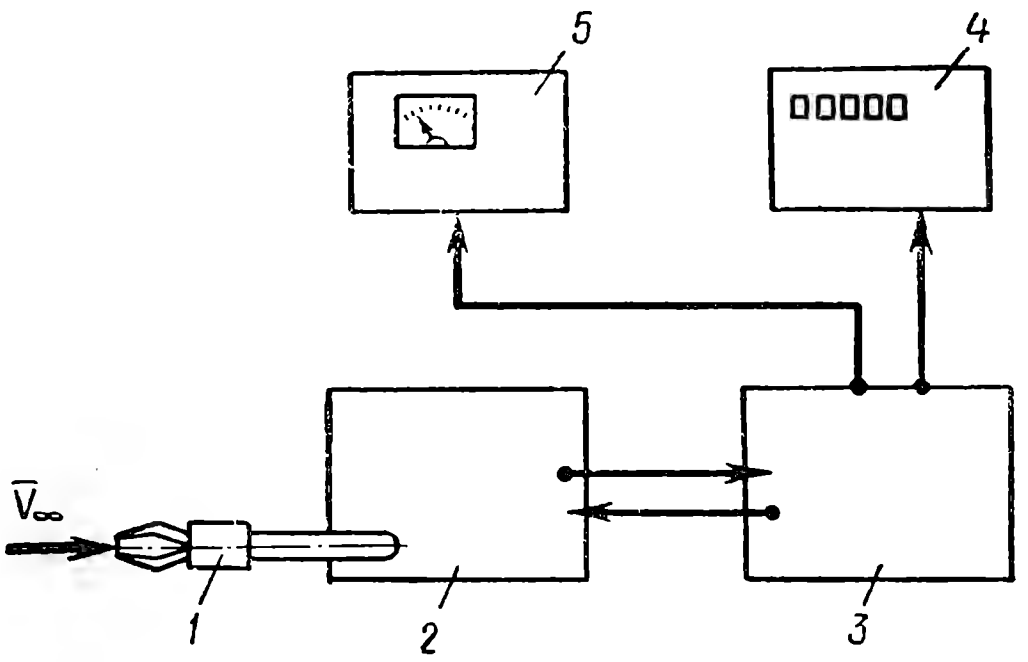


Рис. 2.2.5. Схема соединения приборов термоанемометра:

1 — датчик; *2* — термоанемометр; *3*—вспомогательный прибор; *4* — вольтметр постоянного тока; *5* — вольтметр переменного тока

При измерении скорости потока чаще применяется схема с постоянной температурой датчика. При этом следует заметить, что использование такой схемы предопределяет меры, обеспечивающие сохранность нити датчика после окончания замера. Это вызвано тем, что если сохранить повышенное напряжение, которое имелось при проведении опыта, то при отсутствии движения газа, когда охлаждение датчика уменьшится, возрастет его температура и нить может перегореть. Схема с постоянным током предпочтительней, когда термоанемометр используется для определения температуры торможения газового течения.

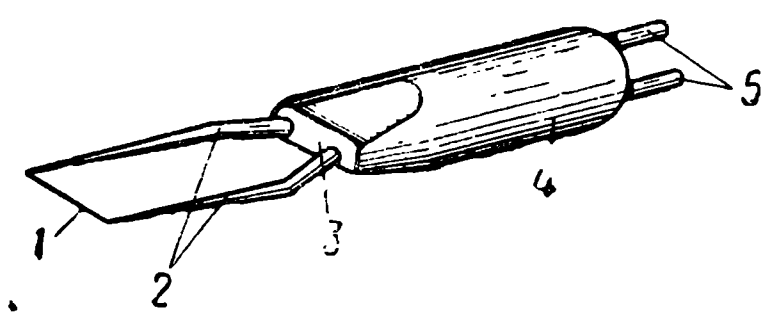


Рис. 2.2.6. Проволочный датчик термоанемометра:

1 — нагреваемая нить; *2* — поддерживающие стойки; *3* — основание; *4* — корпус; *5* — выводы

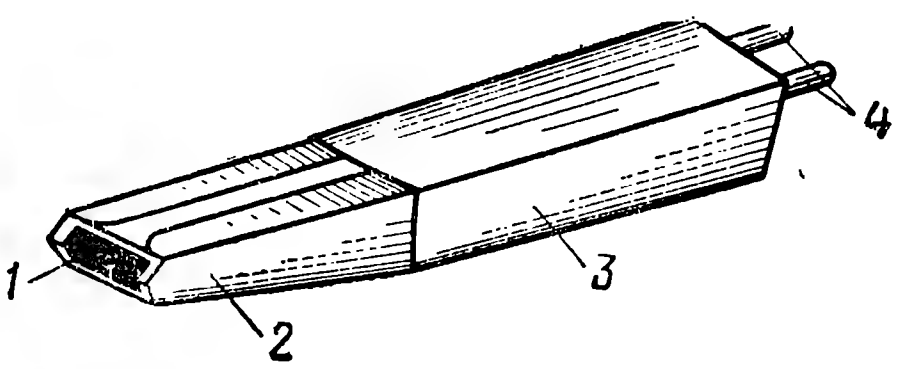


Рис. 2.2.7. Пленочный датчик термоанемометра:

1 — пленка; *2* — кварцевое основание; *3* — корпус; *4* — выводы

Конструктивно термоанемометр выполняется в виде отдельных блоков, которые комбинируются в зависимости от выбранного режима его работы. На рис. 2.2.5 показаны основные приборы и принципиальная схема их соединения в термоанемометре DISA, изготовляемом в Дании.

Соответствующий выбор датчиков термоанемометра и режим их работы обеспечивают необходимую точность измерений. С целью повышения чувствительности термоанемометра датчик включается в одно из плеч мостовой схемы, как показано на рис. 2.2.3.

Для исследования воздушных потоков широко используются датчики (рис. 2.2.6), изготовляемые из вольфрамовой или платиновой проволоки диаметром от 2,5 до 12 *мкм* и длиной от 1 до 12 *мм*. Для измерений в потоках с большими скоростными напорами обычно применяют пленочные датчики (рис. 2.2.7), изготовляемые из вольфрама или платины. Такая пленка, толщиной примерно $1 \div 2$ *мкм*, напыляется на кварцевое основание корпуса датчика.

Датчик устанавливается в потоке так, чтобы нить проволочки или поверхность пленки были перпендикулярны направлению набегающего потока. С измерительными приборами датчик соединяется специальным экранированным кабелем.

Преимущество термоанемометра как прибора для исследования воздушных течений определяется малыми размерами датчика, позволяю-

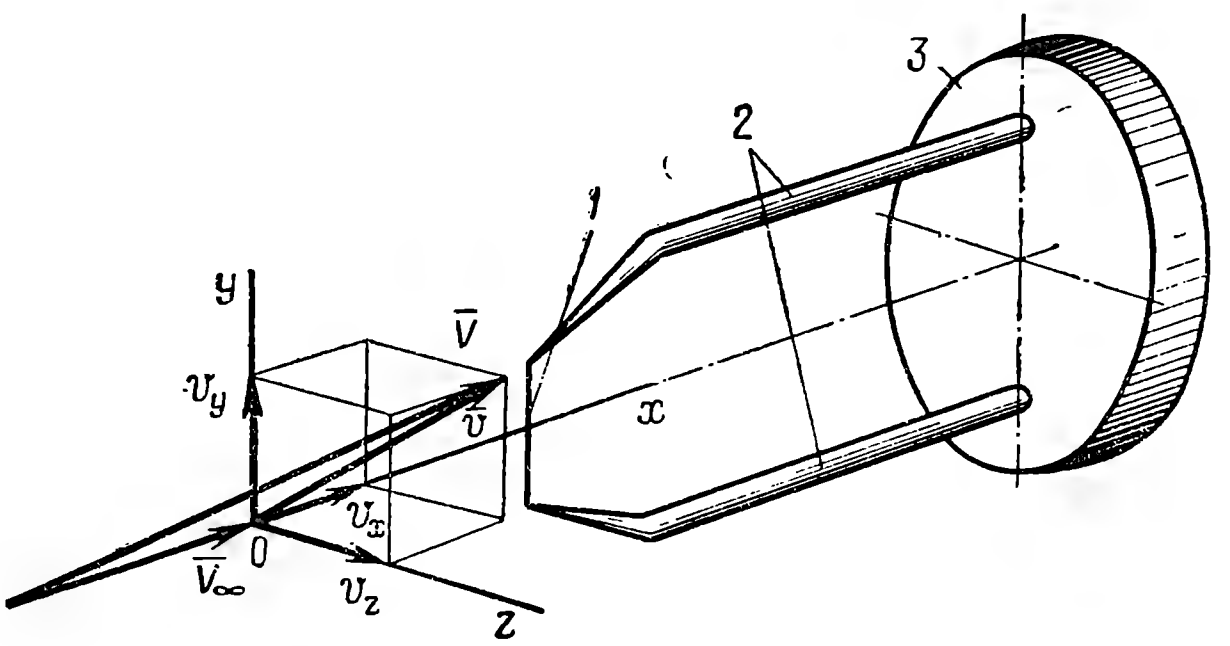


Рис. 2.2.8. Расположение проволочного датчика термоанемометра и составляющие скорости потока:

1 — нагреваемая нить; *2* — стойки; *3* — основание

щими при измерении скорости вносить весьма малые возмущения в поток. Одновременно это делает возможным применение термоанемометров для измерения скорости в потоках, ограниченных малыми размерами, в частности в пограничном слое и в свободном потоке вблизи обтекаемой поверхности. Термоанемометры отличаются также высокой чувствительностью, позволяющей измерять небольшие скорости порядка 0,5÷1 *м/сек*.

Измерение турбулентности. При обтекании датчика турбулентным потоком, вектор скорости которого содержит переменную пульсационную составляющую, сигнал на выходе усилителя термоанемометра будет зависеть и от этой составляющей. В таком сигнале можно выделить его постоянную и переменную составляющие: первую из них измеряют вольтметром постоянного тока, а вторую — вольтметром переменного тока.

Если датчик установлен относительно вектора скорости набегающего потока так, как показано на рис. 2.2.8, то переменная составляющая напряжения на выходе усилителя будет зависеть только от продольной пульсационной составляющей скорости. Это напряжение, измеряемое вольтметром переменного тока, будет пропорционально указанной составляющей.

Для измерения других пульсационных составляющих в конструкции термоанемометра применяется *X*-образный датчик, состоящий из двух взаимноперпендикулярных перекрещивающихся проволочных нитей, закрепленных на отдельных стойках датчика под углом 45° к его основанию (рис. 2.2.9). Каждая проволочка соединяется с отдельным усилителем, на выходе которого измеряется соответствующий сигнал, возникающий при обтекании датчика. Величина этого сигнала зависит при заданной величине скорости потока от ее направления относительно проволочки. В соответствии со схемой на рис. 2.2.9 только вертикальная составляющая v_y пульсационной скорости имеет различные углы с проволочными нитями. Следовательно, возникает разность выходных сигналов с усилителей, по величине которой можно определить значение v_y. Необходимая точность измерений достигается при условии, если частота изменения пульсационной составляющей скорости в

турбулентном потоке меньше собственной частоты колебаний регистрирующей аппаратуры.

Прежде чем приступить к проведению измерений, необходимо сравнить ожидаемую частоту пульсационной составляющей с наименьшей частотой собственных колебаний, которую имеет какой-либо элемент

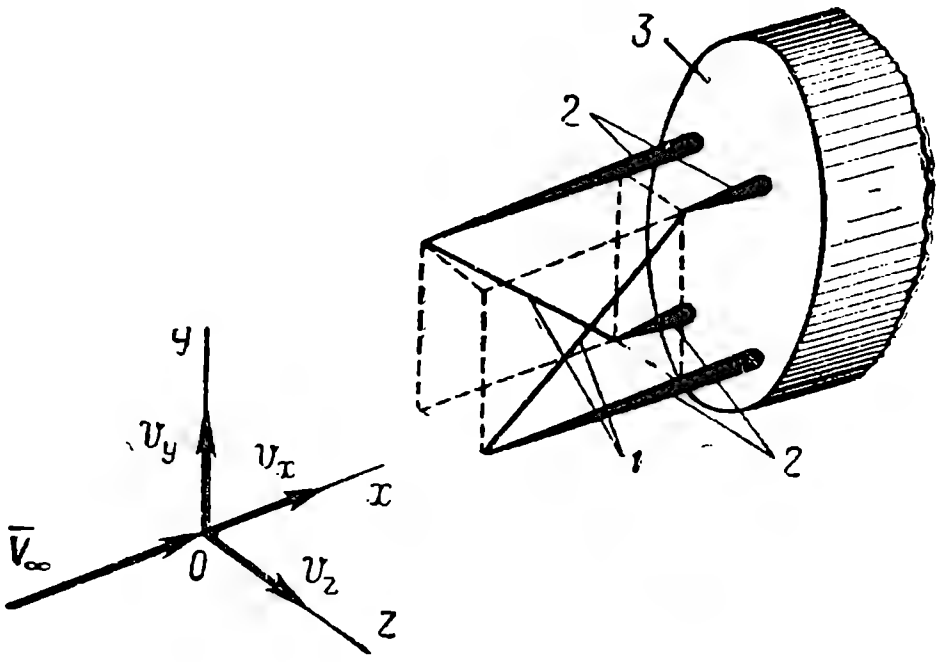


Рис. 2.2.9. Схема датчика термоанемометра для измерения поперечной составляющей скорости:

1 — нагреваемые нити; *2* — стойки; *3*—основание

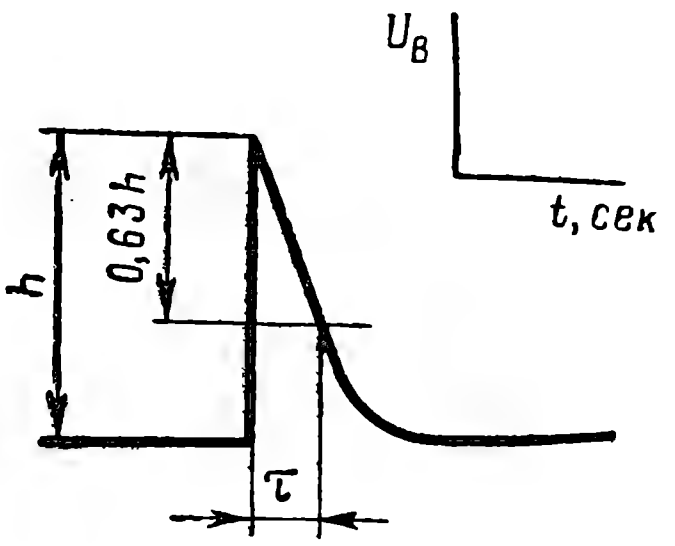


Рис. 2.2.10. Осциллограмма реакции датчика на прямоугольный импульс электрического тока

термоанемометра. Исследования показывают, что такой частотой обладает датчик; ее величину можно оценить по формуле

$$f = 1/\tau, \qquad (2.2.3)$$

где τ — постоянная времени датчика. Значение этой постоянной, зависящее от материала и размеров датчика, обычно определяется опытным путем. Это определение ведется по осциллограмме выходного сигнала с датчика при условии, что на его входе импульс тока имеет прямоугольную форму.

На рис. 2.2.10 в качестве иллюстрации показана такая осциллограмма. Принимается, что постоянная τ равна времени уменьшения амплитуды сигнала на 0,63 h (h — первоначальная амплитуда). Согласно этим экспериментам, в частности для датчика с проволочкой диаметром 2,5 мкм, постоянная времени $\tau \approx 10^{-3}$ *сек* и, следовательно, частота собственных колебаний равна 1 *кгц*. В соответствии с этим возможная частота изменения измеряемой пульсационной скорости должна быть меньше 1 *кгц*.

Определение направления потока. Датчики и электрическая схема термоанемометра, применяющегося для определения направления скорости, показаны на рис. 2.2.11. К трем стойкам, расположенным на жестком основании датчика, прикреплены две одинаковые

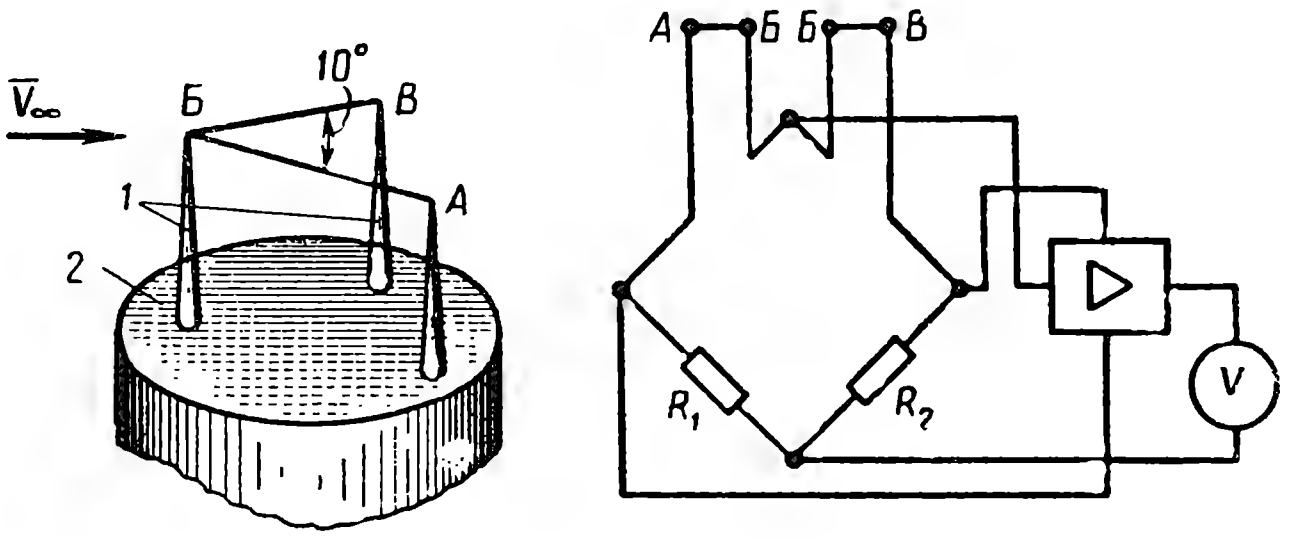


Рис. 2.2.11. Схема датчика термоанемометра для измерения направления скорости:

1 — стойки; *2* — основание.

проволочки *АБ* и *БВ*, образующие между собой угол 10°. Эти проволочки, имеющие обычно длину от 1 до 5 *мм*, включаются, как показано на рис. 2.2.11, в разные плечи моста Уитстона.

В другом случае каждую из проволочек можно соединить с отдельным усилителем. При этом сопротивления проволочек (или сигналы на выходе усилителей) будут одинаковыми, если датчик расположен в потоке газа так, что углы, образуемые проволочками и вектором скорости, также одинаковы. В этом случае направление скорости совпадает с биссектрисой угла между проволочками. Таким образом, направление скорости в рассматриваемой точке потока фиксируется при достижении равновесия моста Уитстона (или равенстве сигналов на выходе усилителей).

2. Другие приборы для измерения скорости

Наряду с термоанемометром для исследования газовых течений могут использоваться другие приборы, различные по конструкции и назначению. Обычно каждая такая конструкция предназначена для решения какой-либо конкретной задачи, связанной с определением либо величины, либо направления скорости потока.

Для определения скорости дозвукового потока можно использовать комбинированный насадок, изображенный на рис. 2.1.35. Измерения в сверхзвуковых потоках целесообразно вести с помощью насадка, показанного на рис. 2.1.36. Заметим, что этими насадками скорость не может быть измерена непосредственно; ее величина определяется при помощи соответствующих теоретических зависимостей по известному давлению воздушного потока, измеряемому насадком. Для несжимаемого потока эта скорость подсчитывается по формуле

$$V_\infty = \sqrt{2\Delta p_0/\rho}, \qquad (2.2.4)$$

где $\Delta p_0 = p_0 - p_\infty$ — разность давлений в насадке, регистрируемая дифференциальным манометром; ρ — плотность жидкости.

Принимая для воздуха плотность $\rho = 0{,}125$ *кГ·сек²/м⁴*, получим расчетную зависимость для этой скорости в следующем виде:

$$V_\infty = 4\sqrt{\Delta p_0}. \qquad (2.2.5)$$

Для более точного определения скорости необходимо учитывать изменение плотности воздуха в зависимости от барометрического давления, температуры и влажности, используя выражение

$$\rho = \frac{p_{\text{атм}}}{21{,}1\,(273 + t)}\left(1 - 0{,}378x\,\frac{p_{\text{н.п}}}{p_{\text{атм}}}\right), \qquad (2.2.6)$$

где $p_{\text{атм}}$ — атмосферное давление, *мм рт. ст.*; x — относительная влажность; t — температура воздуха, °С; $p_{\text{н.п}}$ — давление насыщенных водяных паров, *мм рт. ст.*

Относительная влажность воздуха x находится из табл. 2.2.1 по разности показаний сухого и влажного термометров аспирационного психрометра.

Давление насыщенного водяного пара $p_{\text{н.п}}$ зависит от температуры воздуха и определяется из табл. 2.2.2.

После подстановки значения плотности из (2.2.6) в (2.2.4) получим

$$V_\infty = \sqrt{42{,}2\,\frac{273 + t}{p_{\text{атм}}}\left(1 - 0{,}378x\,\frac{p_{\text{н.п}}}{p_{\text{атм}}}\right)^{-1}\Delta p_0}. \qquad (2.2.7)$$

В результате экспериментальных исследований сжимаемых газовых течений по измеренным давлениям в некоторой области потока находят соответствующее распределение чисел $\mathbf{M}_\infty$:

Таблица 2.2.1

Показания сухого термометра, °С	Разность показаний термометров, °С										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	100	81	63	45	28	11	—	—	—	—	—
2	100	84	68	51	35	20	—	—	—	—	—
4	100	85	70	56	42	28	14	—	—	—	—
6	100	86	73	60	47	35	23	10	—	—	—
8	100	87	75	63	51	40	28	18	7	—	—
10	100	88	76	65	54	44	34	24	14	4	—
12	100	89	78	68	57	48	38	29	20	11	—
14	100	90	79	70	60	51	42	33	25	17	9
16	100	90	81	71	62	54	45	37	30	22	15
18	100	91	82	73	64	56	48	41	34	26	20
20	100	91	83	74	66	59	51	44	37	30	24
22	100	92	83	76	68	61	54	47	40	34	28
24	100	92	84	77	69	62	56	49	43	37	31
26	100	92	85	78	71	64	58	50	45	40	34
28	100	93	85	78	72	65	59	53	48	42	37
30	100	93	86	79	73	67	61	55	50	44	39

Таблица 2.2.2

°С	—10	0	10	15	30	50
$p_{н.п}$, *мм рт. ст.*	2,159	4,579	9,210	12,79	31,80	92,50

$$M_\infty = \sqrt{\frac{2}{k-1}\left[\left(\frac{p_0}{p_\infty}\right)^{(k-1)/k} - 1\right]}. \qquad (2.2.8)$$

В сверхзвуковом потоке манометр измеряет давление торможения p_0' за прямым скачком уплотнения, образующимся перед насадком. Число Маха определяется по величине этого давления, а также по статическому давлению p_∞ из уравнения

$$\frac{p_0'}{p_\infty} = \left(\frac{2k}{k+1}M_\infty^2 - \frac{k-1}{k+1}\right)\left[\frac{4k}{(k+1)^2} - \frac{2(k-1)}{(k+1)^2}\cdot\frac{1}{M_\infty^2}\right]^{-\frac{k}{(k-1)}}. \qquad (2.2.9)$$

По найденным числам Маха дозвуковых или сверхзвуковых потоков можно вычислить соответствующие скорости

$$V_\infty = \sqrt{kRT_0\left(1 + \frac{k-1}{2}M_\infty^2\right)^{-1}}, \qquad (2.2.10)$$

где T_0 — температура торможения газового потока, которая может быть измерена в форкамере аэродинамической трубы.

3. Приборы для измерения направления скорости потока

Простейшим прибором для определения направления потока является флюгарка — флажковый угломер (рис. 2.2.12). Этот прибор состоит из флажка, который поворачивается под давлением воздушного потока. На корпусе флюгарки нанесена шкала углов, по которой определяют угол поворота флажка и тем самым находят направление потока в рассматриваемой области. Точность этого определения невелика и составляет примерно 1÷1,5°.

Наиболее широкое распространение в экспериментальных исследованиях, связанных с определением направления потока, получили пневмометрические насадки. У этих насадков приемная часть с отверстиями выполнена так, что малое отклонение насадка от направления набегающего потока вызывает большие изменения показаний манометров. Иными словами, пневмометрические насадки обладают повышенной чувствительностью к изменению угла их установки в потоке.

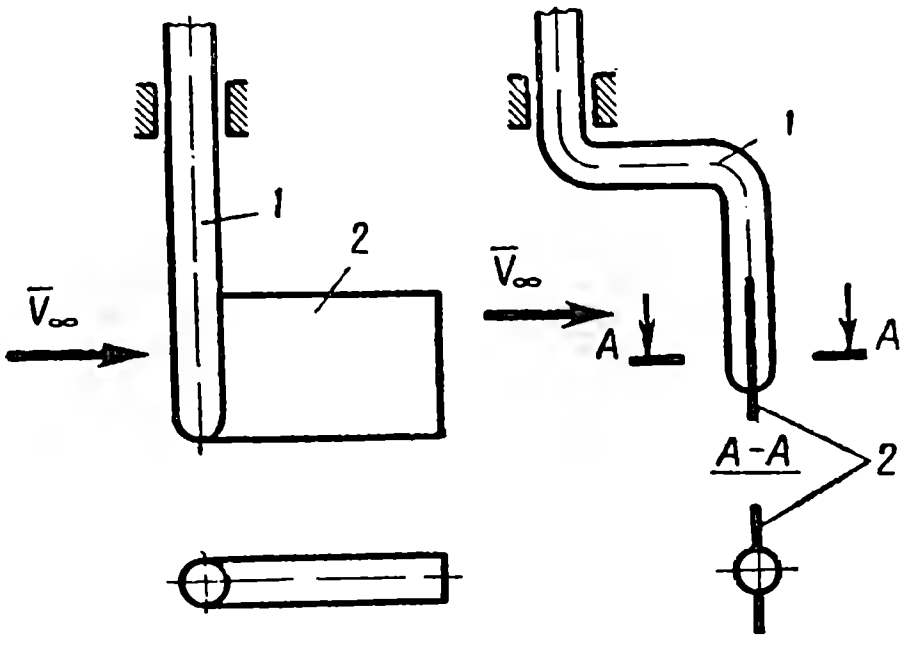


Рис. 2.2.12. Приемная часть флюгарок:
1 — ось; *2* — флажок

На рис. 2.2.13 и 2.2.14 показаны схемы насадков для определения направления скорости двухмерного плоского потока. Конструкция этих насадков характерна тем, что два приемных отверстия располагаются в плоскости, совпадающей с той плоскостью, в которой проводится измерение направления скорости потока. Для измерений газовых течений в ограниченных областях, в частности пограничном слое, должны использоваться насадки малых размеров. Такими малыми размерами отличается w-образный насадок, показанный на рис. 2.2.14.

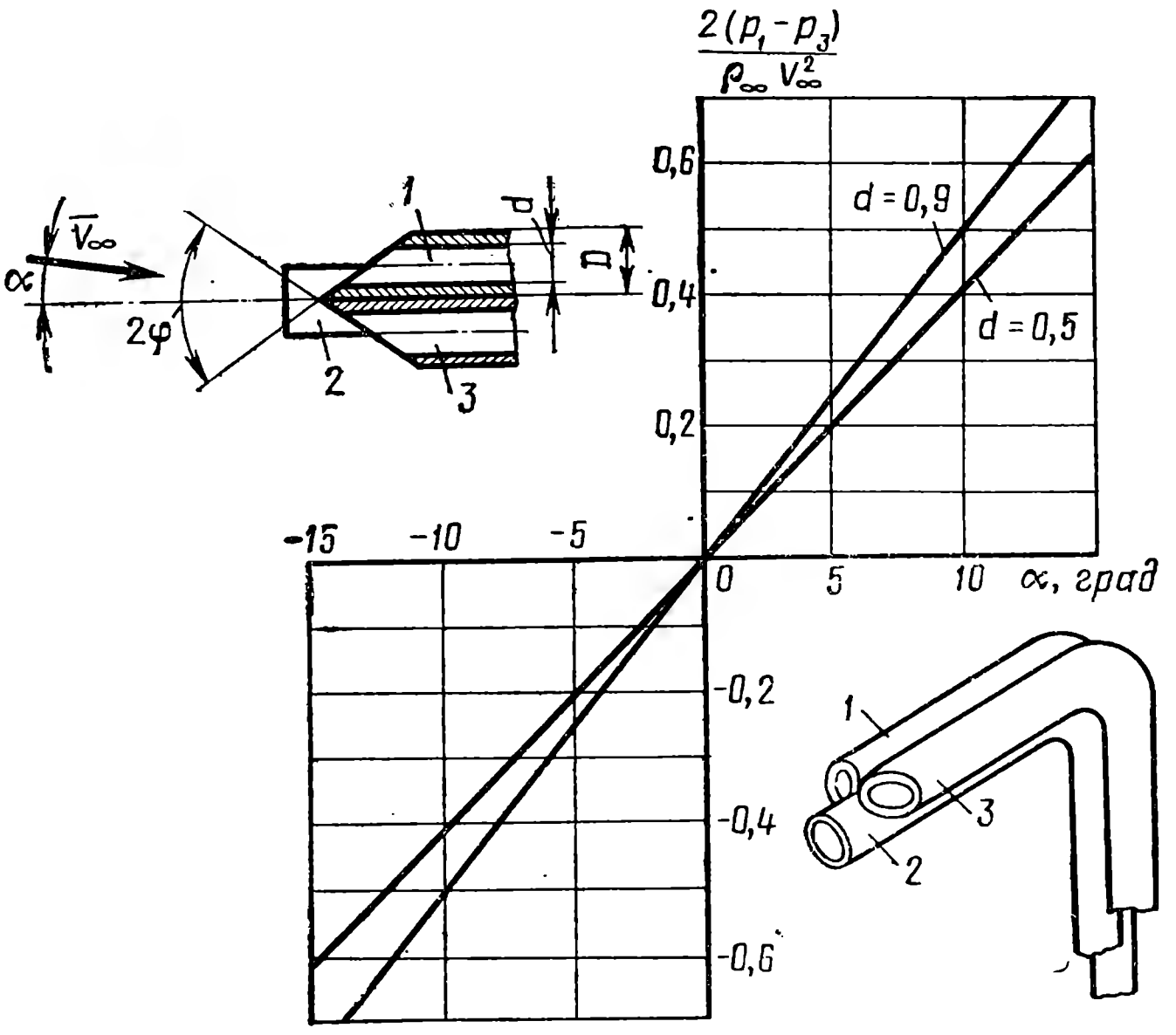


Рис. 2.2.13. Насадок для измерения направления потока и его тарировочные графики:

1 и *2* — приемные отверстия для измерения направления потока; *3* — приемное отверстие для измерения полного давления (тарировочные графики построены для насадка с $D=1{,}5$ *мм* и $2\varphi=70°$ при $V_\infty=33$ *м/сек*)

В трехмерных пространственных дозвуковых потоках определение направления скорости осуществляется насадком, показанным на рис. 2.2.15. Конструкция этого насадка предусматривает расположение приемных отверстий на поверхности сферического носка в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

Измерения в сверхзвуковых плоских потоках осуществляются с помощью конических или клиновидных насадков (рис. 2.2.16). Приемные отверстия располагаются по обе стороны клиновидной поверхности или на противоположных образующих конуса в плоскости изменения скорости.

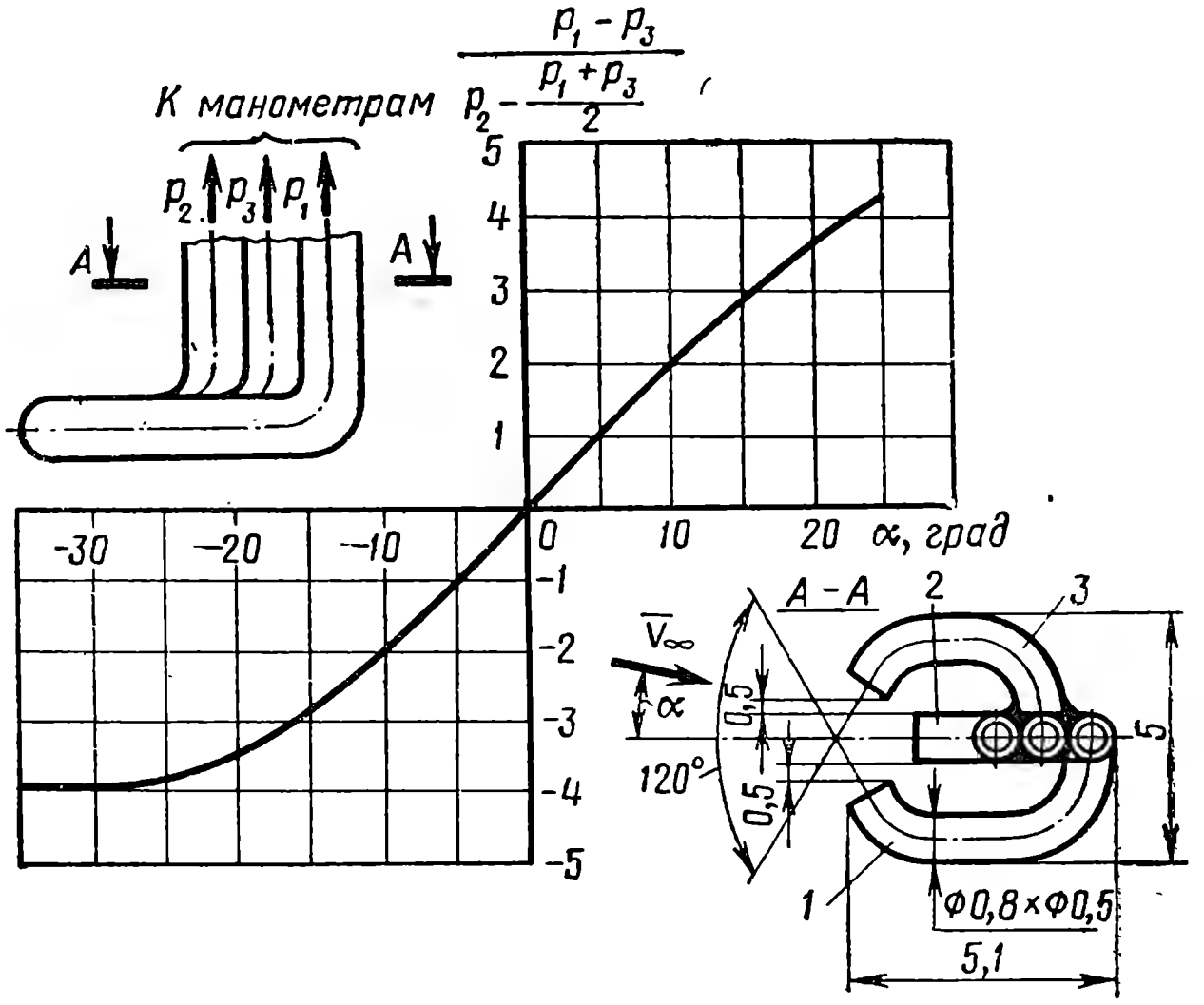


Рис. 2.2.14. Трехточечный насадок и его тарировочный график:

1, 3 — приемные отверстия для измерения направления потока; *2* — насадок полного напора

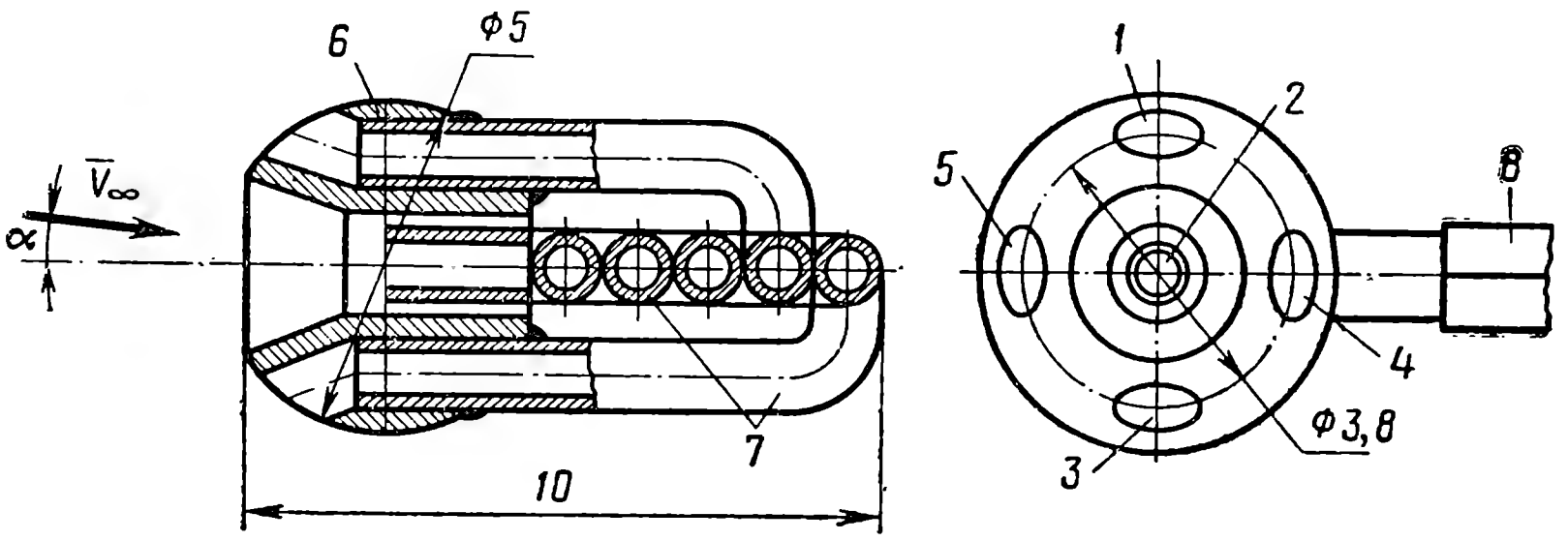


Рис. 2.2.15. Пятиточечный насадок:

1, 3, 4, 5 — приемные отверстия для определения направления потока; *2* — приемное отверстие полного напора; *6* — сферический корпус; *7* — дренажные выводные трубки; *8* — державка с обтекателем

Для всех пневмометрических насадков характерно симметричное расположение приемных отверстий относительно продольной оси насадка. Если эта ось совпадает с направлением потока, то давления в симметричных отверстиях будут равными. Ее отклонение вызовет различие в показаниях манометров, соединенных с приемными отверстиями. На измерении этой разницы и основано определение направления газового потока. Точность измерения пневмометрическими насадками составляет примерно 0,5÷1°. Существует два метода таких измерений.

Первый из этих методов основан на выравнивании давлений в симметричных отверстиях и непосредственном определении направления скорости. Для этой цели используется державка-координатник, по-

зволяющий изменять ориентировку насадка в потоке. При этом добиваются такого положения насадка, при котором показания манометров выравниваются. Тогда ось насадка будет совпадать с направлением скорости набегающего потока. По шкале отсчета на лимбе координатника может быть измерен соответствующий угол поворота насадка, определяющий отклонение потока от какого-либо заданного направления.

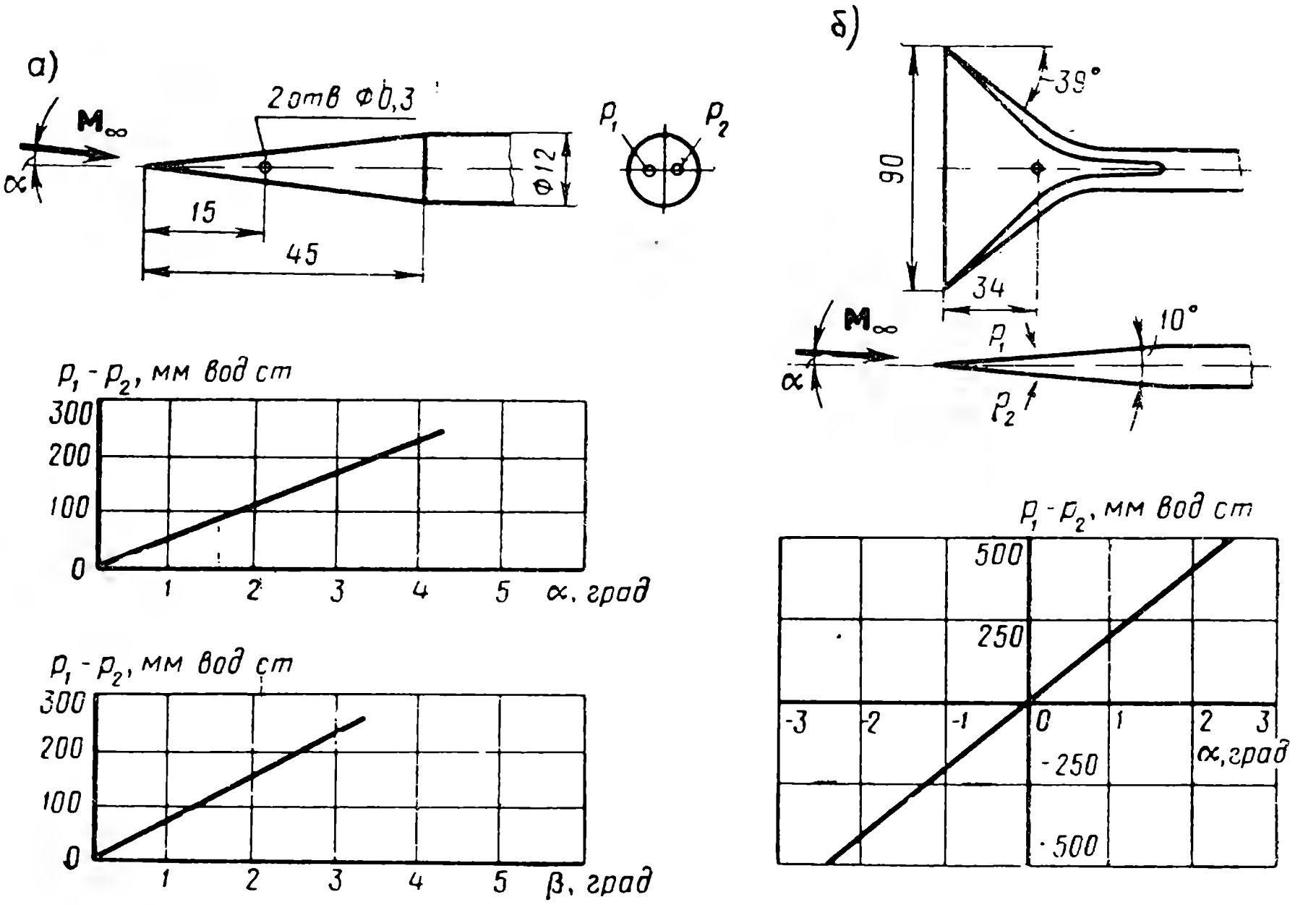


Рис. 2.2.16. Насадки для измерения направления потока при сверхзвуковых скоростях и их тарировочные графики:

а — конический; *б* — клиновидный (для конуса характеристика получена при $M_\infty = 2$, а для клина при $M_\infty = 1{,}4$)

В аэродинамических исследованиях такое отклонение может быть найдено относительно продольной оси рабочей части аэродинамической трубы.

Второй метод состоит в косвенном определении направления потока. По этому методу насадок устанавливается в потоке так, чтобы ось совпадала, например, с продольной осью аэродинамической трубы. Затем во время работы трубы записываются показания манометров, используя которые, при помощи тарировочных графиков определяют соответствующий угол отклонения потока в рассматриваемой области. В качестве иллюстраций на рис. 2.2.13, 2.2.14 и 2.2.16 приведены тарировочные графики, полученые для насадков, изображенных на этих рисунках.

Как видно, первый метод позволяет непосредственно определять направление потока, в то время как второй предполагает осуществление дополнительных вычислений. При этом, однако, следует принимать во внимание, что реализация первого метода требует большего времени работы аэродинамической установки. Если это время невелико (как, например, при работе аэродинамической трубы кратковременного действия), то предпочтительнее второй метод, дающий возможность определения отклонения потока по тарировочным кривым без затраты времени на поворот насадка, предусмотренный в первом методе.

1. Температура

Коэффициент восстановления. Для измерения температуры газового потока применяются разнообразные по устройству приборы, действие которых основано на различных физических эффектах. Если чувствительный элемент такого прибора помещен в покоящуюся среду, то через некоторое время он принимает температуру этой среды, которая и регистрируется соответствующим измерительным устройством.

В потоке газа характер его теплового воздействия на температурный датчик будет иным. Обтекание неподвижного чувствительного элемента вызовет его нагревание до некоторой температуры T_e. В общем случае эта равновесная температура отличается от температуры торможения газового потока T_0 вследствие относительно слабого конвективного теплообмена между датчиком и движущимся газом, излучения и теплопроводности датчика. Величина этой равновесной температуры несколько меньше температуры торможения газового потока T_0. Для заданных условий обтекания имеется однозначная зависимость между T_e и T_0, устанавливаемая в результате тарировки измерительного прибора. По соответствующему тарировочному графику и измеренной температуре T_e можно определить температуру торможения T_0.

Конструкцию датчика температуры можно охарактеризовать коэффициентом восстановления r:

$$r = (T_e - T_\infty)/(T_0 - T_\infty), \tag{2.3.1}$$

где T_∞ — статическая температура газового потока, определяемая как функция соответствующего числа Маха из соотношения

$$T_\infty = T_0\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\infty^2\right)^{-1}. \tag{2.3.2}$$

Коэффициент восстановления, определяемый обычно путем тарировки измерительного прибора, зависит для данной конструкции датчика от чисел $\mathbf{M}_\infty$ и $\mathbf{Re}_\infty$, характеризующих его обтекание вязким потоком сжимаемого газа. Если известно значение этого коэффициента, соответствующее заданным условиям обтекания, то температуру торможения можно рассчитать по измеренной равновесной температуре T_e. В соответствии с (2.3.1) этот расчет ведется по формуле

$$T_0 = \frac{T_e}{r + (1-r)\,(T_\infty/T_0)}, \tag{2.3.3}$$

или с учетом (2.3.2) по выражению

$$T_0 = \frac{T_e}{r + (1-r)\left(1 + \dfrac{k-1}{2}\mathbf{M}_\infty^2\right)^{-1}}. \tag{2.3.3'}$$

Для различных конструкций датчиков коэффициент r изменяется от 0,6 до значения, близкого к единице. Для $r \approx 1$ температура T_e, как следует из (2.3.3), равна T_0. Если же $r \neq 1$, то, чтобы рассчитать величину T_0 на основе результатов опыта, необходимо дополнительно определить такие параметры обтекающего потока, как числа $\mathbf{M}_\infty$ и $\mathbf{Re}_\infty$, что позволит правильно выбрать коэффициент восстановления.

Так как значительно проще использовать опытные данные для определения температуры в случае, если коэффициент восстановления $r \approx 1$, то при конструировании датчиков температуры торможения стремятся достигнуть величины r, практически равной единице. Если этого

не удается достичь, то принимают меры, обеспечивающие такой коэффициент r, который хотя и отличался бы от единицы, но сохранялся постоянным при различных условиях эксперимента. Это также способствует повышению точности измерения.

Рассмотрим некоторые образцы электронных термометров, наиболее широко применяемых в аэродинамических исследованиях.

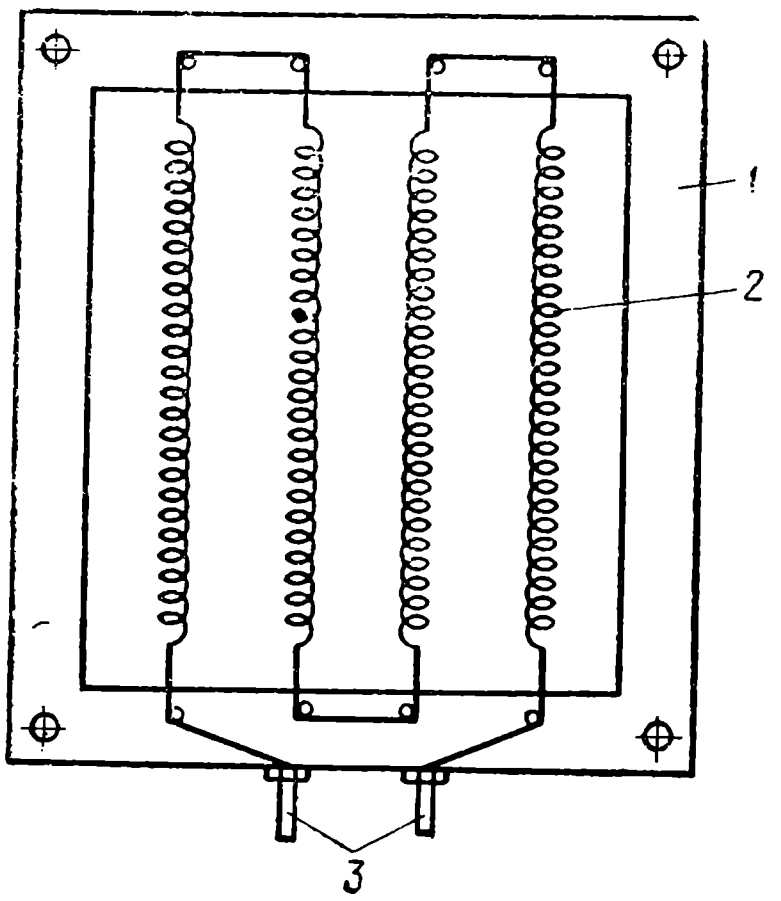


Рис. 2.3.1. Схема датчика термометра сопротивления:

1 — рамка из изоляционного материала; *2* — спираль из платиновой проволоки; *3* — выводы

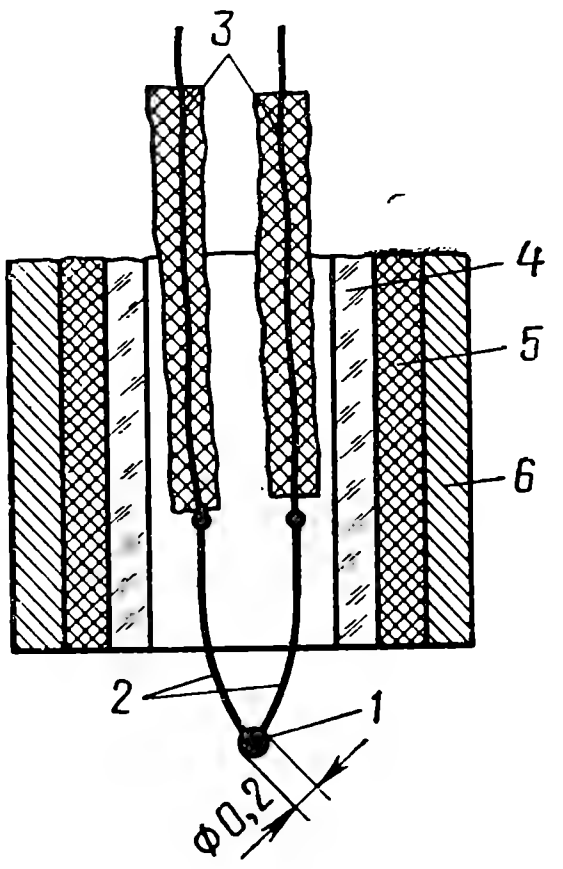


Рис. 2.3.2. Датчик температуры с термистором:

1 — термистор; *2* — платиновые выводы; *3* — манганиновые провода с изоляцией; *4* — стеклянная трубка; *5* — текстолитовая втулка; *6* — металлический корпус

Основным элементом термометра сопротивления является проволочный датчик, соединенный с электронным усилителем. Этот усилитель регистрирует изменение сопротивления датчика в зависимости от его температуры, значение которой находится по шкале измерительного прибора, подключенного к выходу усилителя.

Конструктивно датчик (рис. 2.3.1) представляет собой рамку из изоляционного материала *1* с намотанной тонкой проволокой *2*. В качестве изоляционного материала обычно используется фарфор, а проволока диаметром от 0,05 до 0,3 *мм* чаще всего изготовляется из платины. Такие платиновые датчики сопротивления обеспечивают высокую стабильность измерений и надежную работу термометра. К их недостаткам можно отнести сравнительно большую инерционность, что не позволяет с необходимой точностью вести измерения быстро меняющейся температуры. Кроме того, такие датчики обычно имеют значительные размеры, что позволяет определять ими только среднюю температуру в некоторой области потока.

Эти свойства датчиков определяют их применение в качестве эталонных при измерении температуры неподвижной среды. Их также используют для измерения температуры газа в форкамере аэродинамической трубы, где скорости движения газа пренебрежимо малы. Для таких условий коэффициент восстановления датчика принимаем равным единице; в соответствии с этим температура T_e, показанная датчиком, будет равна температуре T_0 в форкамере.

Одной из наиболее совершенных конструкций датчиков температуры является термистор, устройство которого основано на использо-

вании полупроводников (рис. 2.3.2). В этом приборе использован известный физический эффект изменения сопротивления полупроводника при изменении его температуры. Это изменение сопротивления регистрируется при помощи усилителя, к выходу которого присоединяется прибор со шкалой для снятия показаний температуры.

Чувствительность термометра определяется как отношение изменения сопротивления датчика к соответствующему изменению температуры. Эта чувствительность значительно выше у термистора, что делает его пригодным для измерения весьма малых перепадов температур. К тому же термистор имеет небольшие размеры, а высокая чувствительность позволяет подключать его к измерительному прибору без усилителя. При измерении термистором температуры торможения газового потока с числами $M_\infty = 0{,}35 \div 0{,}75$ коэффициент восстановления можно принять равным $r = 0{,}75$.

Термистор обладает еще одним преимуществом, обусловленным большим начальным электрическим сопротивлением. При таком сопротивлении потребляемая сила тока будет мала, что делает воз-

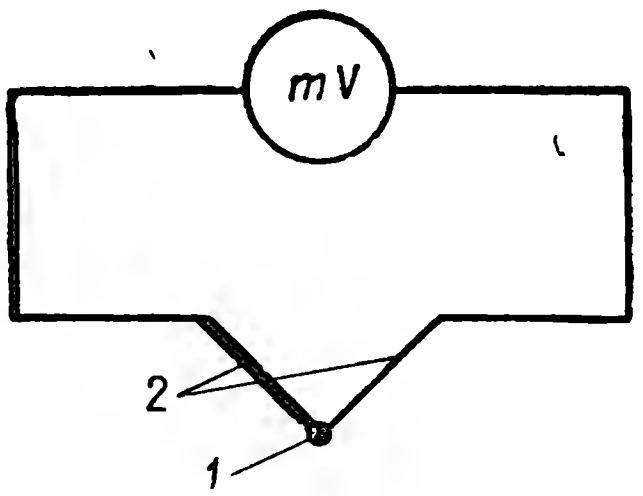


Рис. 2.3.3. Схема измерения величины термоэлектродвижущей силы, развиваемой спаем термопары:

1 — спай; *2* — проволочки спая

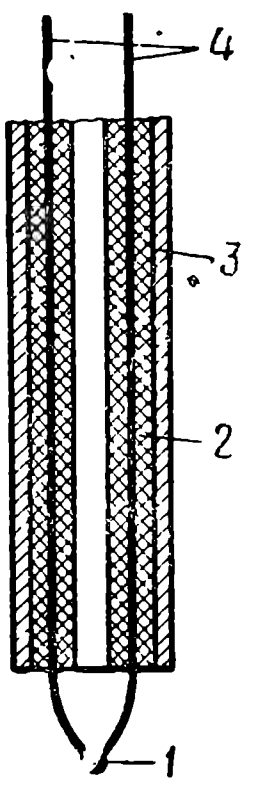


Рис. 2.3.4. Термопарный датчик с открытым спаем:

1 — спай термопары; *2* — изоляция; *3* — корпус; *4* — выводы

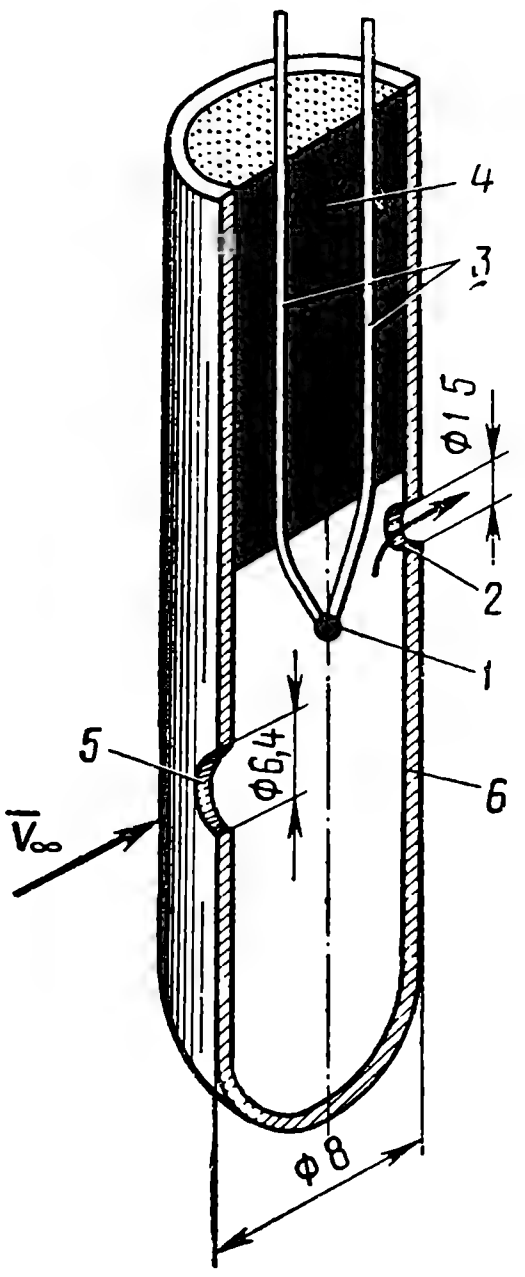


Рис. 2.3.5. Термопарный датчик с экранированным спаем:

1 — спай термопары; *2* — вентиляционное отверстие; *3* — выводы; *4* — изоляция; *5* — входное отверстие; *6*—корпус (экран)

можным использование автономного источника питания небольших размеров и применение соответствующей портативной переносной аппаратуры. Кроме того, малая сила тока обусловливает значительное время работы всей измерительной установки. К недостаткам термистора следует отнести его не вполне надежную работу при сравнительно больших температурах. Допустимая температура, при которой датчик дает удовлетворительные показания, равна примерно 70÷75° С.

Рассмотрим термометр, основным элементом которого является датчик температуры в виде термопары, представляющей собой спай разнородных проводников. Такой спай при изменении температуры создает термоэлектродвижущую силу, измерив которую, можно определить это изменение температуры. Соответствующая схема измерения показана на рис. 2.3.3. В этой схеме регистрация термоэлектродвижущей силы производится милливольтметром. Если же напряжение, развивае-

мое спаем, мало, то необходимо использовать электронный усилитель, к выходу которого присоединяется измерительный прибор со шкалой, градуированной в °С или К.

При измерении температуры торможения таким датчиком следует иметь в виду, что коэффициент восстановления r зависит от его конструкции. Для датчиков, выполненных с открытым спаем термопары и установленных так, как это показано на рис. 2.3.4, коэффициент $r=0{,}68\pm0{,}07$. Такая сравнительно небольшая величина объясняется значительными потерями тепла спаем датчика вследствие излучения и теплопроводности.

С целью увеличения коэффициента восстановления спай термопары экранируют (рис. 2.3.5). На рисунке экран представляет собой металлическую стенку корпуса *6*, внутри которого размещается спай. Газовый поток, попадая внутрь корпуса через приемное отверстие *5*, пре-

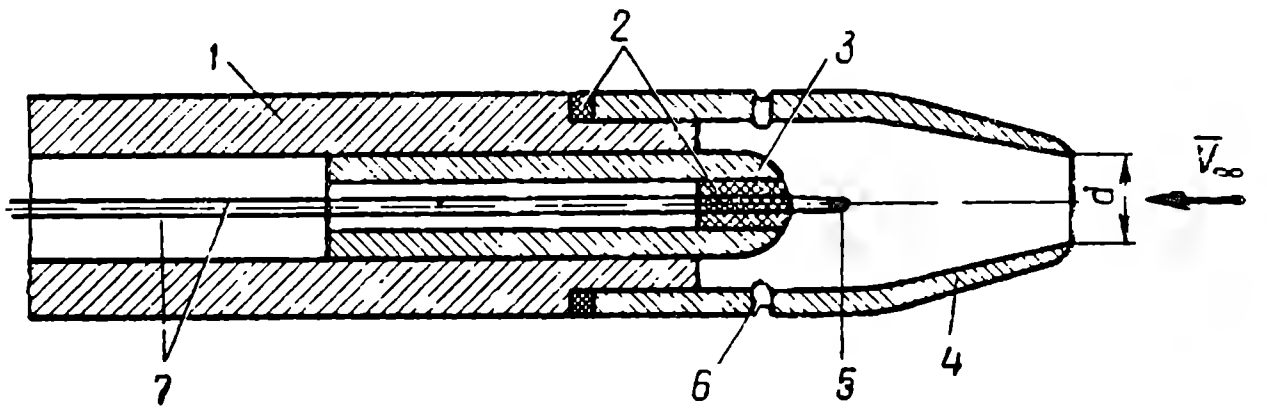


Рис. 2.3.6. Насадок для измерения температуры торможения:

1 — корпус насадка; *2* — уплотнение; *3* — державка; *4* — экран (насадок); *5* — термопара; *6* — вентиляционное отверстие; *7* — выводы

терпевает торможение. Истечение газа происходит через вентиляционное отверстие *2*, которое выбирается так, чтобы обеспечить в нем звуковую скорость. Это позволяет резко уменьшить скорость обтекания спая термопары, снизить за счет этого потери тепла и тем самым увеличить коэффициент восстановления. Для датчика, показанного на рис. 2.3.5, коэффициент r может достигать величины 0,98.

На рис. 2.3.6 показана другая конструкция экранированного датчика. В этой конструкции экран представляет собой насадок *4*, выполненный из двуокиси кремния, являющейся термоизоляционным материалом, и позволяющий поэтому значительно уменьшить потери тепла. У такого датчика коэффициент восстановления достигает значений $r=0{,}94\div0{,}998$. Это наибольшие значения из тех, которые имеют современные температурные датчики.

При больших сверхзвуковых скоростях разница между температурами спая и экрана может быть значительной, поэтому будут велики потери тепла и малы значения r. Чтобы избежать этого, применяют датчики с экранами, образуемыми несколькими цилиндрами (рис. 2.3.7). Для этой цели используется также датчик с подогреваемым экраном (рис. 2.3.8). Электрический подогрев такого экрана продолжается во время эксперимента до тех пор, пока температура установленной на нем вспомогательной термопары *4* не окажется равной температуре основной термопары *3* внутри экрана *2*. Ее значение и регистрируется измерительной аппаратурой. Такая конструкция датчика позволяет достичь значения коэффициента восстановления, почти равного единице. Измеренная им температура будет соответствовать условиям полного торможения.

Важным преимуществом всех рассмотренных термопарных датчиков является то, что они позволяют измерять температуру в широком диапазоне ее значений. К тому же весьма малые размеры спая, помещенного в поток, обеспечивают измерение температуры практически в точке. При этом, однако, следует учитывать, что точность измерений такими датчиками сравнительно невелика.

Для измерения температуры торможения может быть использован термоанемометр, который включается по схеме с постоянным током (см. рис. 2.2.1). Величина этого тока выбирается возможно меньшей, чтобы не вызвать изменения нагрева датчика, но достаточной, чтобы измерить его начальное сопротивление $R_н$. Во время опыта измеряется

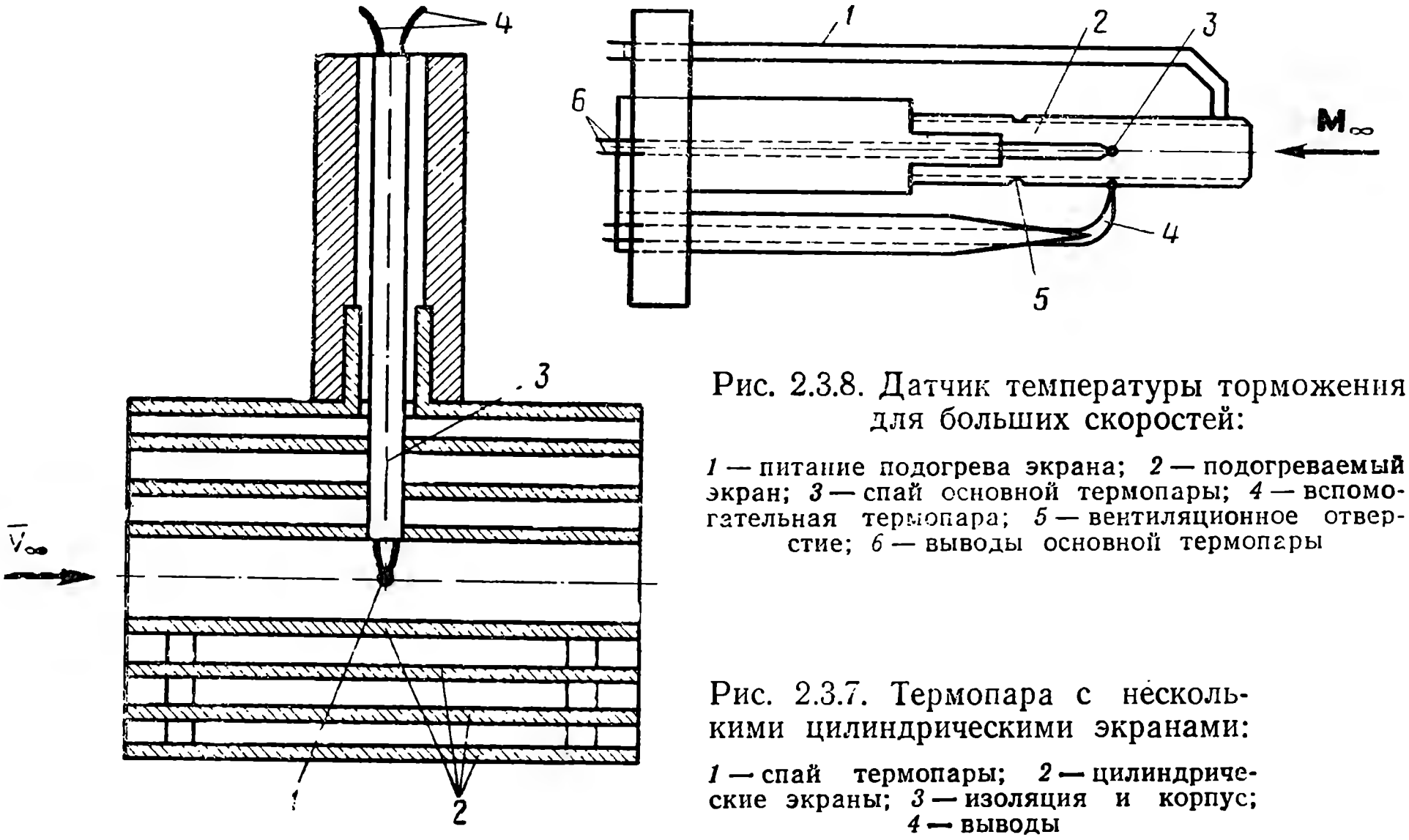


Рис. 2.3.8. Датчик температуры торможения для больших скоростей:

1 — питание подогрева экрана; *2* — подогреваемый экран; *3* — спай основной термопары; *4* — вспомогательная термопара; *5* — вентиляционное отверстие; *6* — выводы основной термопары

Рис. 2.3.7. Термопара с несколькими цилиндрическими экранами:

1 — спай термопары; *2* — цилиндрические экраны; *3* — изоляция и корпус; *4* — выводы

сопротивление R_w датчика, обтекаемого потоком. Соответствующую температуру этого датчика, нагреваемого в основном за счет торможения газового потока, можно рассматривать как равновесную температуру. Ее значение $T_w = T_e$ определяется при помощи зависимости (2.2.2) по измеренным сопротивлениям R_w и $R_н$. Зная величину T_e и коэффициент восстановления датчика, определяемый экспериментально, можно по формуле (2.3.3) найти температуру торможения потока T_0.

2. Теплопередача

Для измерения теплопередачи в высокотемпературных газовых потоках обычно применяется калориметрический датчик (рис. 2.3.9). Основным элементом этого датчика является медный калориметрический диск *8*, закрепляемый с помощью теплоизолирующей втулки в корпусе *10*. С внутренней стороны к диску присоединяется спай термопары *7*, подключаемый к осциллографу, который регистрирует электродвижущую силу, вызванную нагреванием спая.

На рис. 2. 3. 10 приведена форма записи осциллографом соответствующего сигнала. По этой записи можно определить крутизну нарастания сигнала — отношение величины, характеризующей возрастание вы-

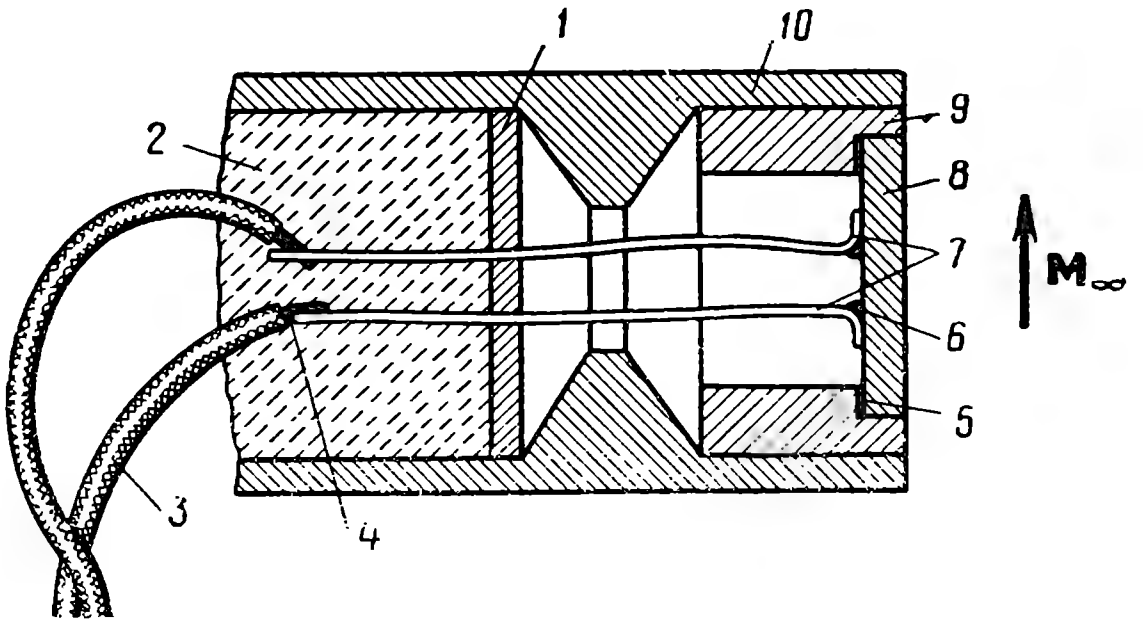


Рис. 2.3.9. Калориметрический датчик:

1 — тефлоновый диск; *2* — эпоксидная смола; *3* — гибкие выводы; *4* — мягкий припой; *5* — цемент; *6* — серебряный припой; *7* — термоэлементы (Cu—Zn диаметром 0,025 *мм*); *8* — медный диск (диаметр 4,57 *мм*, толщина 0,254 *мм*); *9* — асбест; *10* — корпус

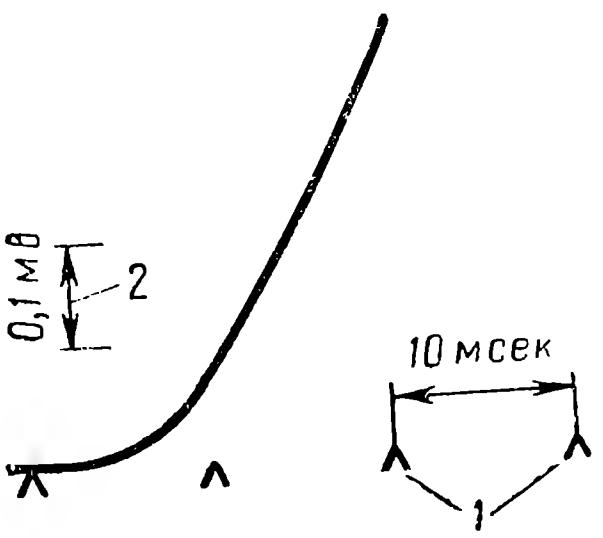


Рис. 2.3.10. Осциллограмма сигнала калориметрического датчика:

1 — метки времени через 10 *мсек*; *2* — эталонное напряжение в 0,1 *мв*

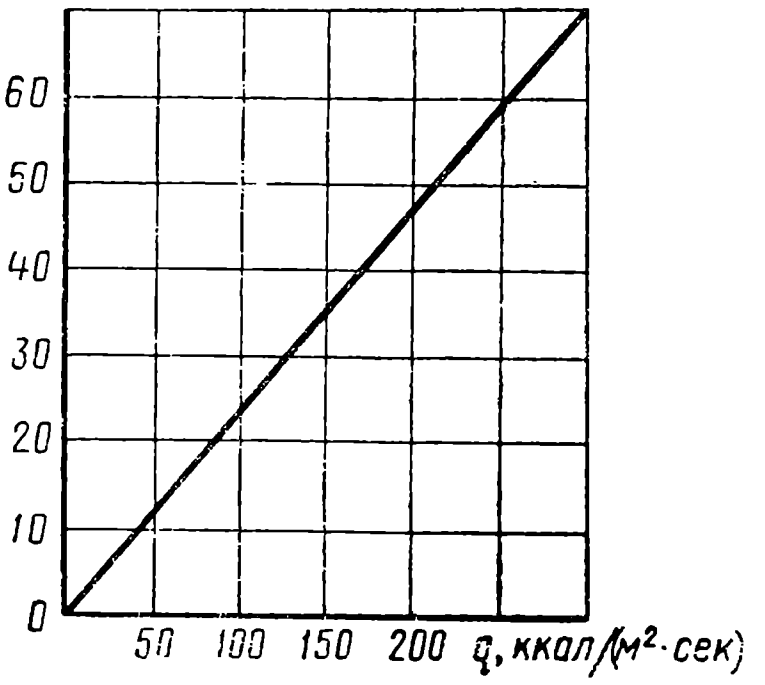


Рис. 2.3.11. Тарировочная зависимость для калориметрического датчика

ходного напряжения, к соответствующему промежутку времени. Затем из тарировочного графика (рис. 2.3.11) по значению крутизны H находится удельный тепловой поток q от обтекающего газа к калориметрическому диску.

§ 2.4. АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ВЕСЫ

1. Общие понятия

Устройства, предназначенные для непосредственного измерения сил и моментов, действующих на летательный аппарат или его модель, которые установлены в аэродинамической трубе, называются аэродинамическими весами. По числу измеряемых составляющих аэродинамической силы или момента в какой-либо системе координат они подразделяются на однокомпонентные весы, двухкомпонентные и т. д.

В пространственной декартовой системе координат, в частности скоростной, главный вектор аэродинамической силы, действующей на летательный аппарат, можно разложить на три составляющие — лобовое сопротивление, подъемную и боковую силы, а главный момент — также на три составляющие, а именно: моменты крена, рысканья и тангажа. В связанных осях соответствующие составляющие будут представлять собой осевую (продольную), нормальную и поперечную силы, а также моменты с аналогичными названиями. Все эти составляющие

могут быть одновременно измерены шестикомпонентными весами. Для измерения меньшего числа составляющих применяются весы с соответствующим числом измерительных каналов. Особо следует подчеркнуть, что важнейшим условием правильного конструирования многокомпонентных аэродинамических весов является независимость измерений по различным каналам, т. е. чтобы каждый весовой элемент измерял только соответствующую силу или момент и не реагировал бы на действие других составляющих.

В зависимости от условий эксперимента могут применяться внешние весы с измерительными элементами вне модели летательного аппарата и внутренние весы с расположением этих элементов внутри исследуемой модели летательного аппарата или же внутри какого-либо устройства, поддерживающего эту модель в рабочей части аэродинамической трубы. Рассмотрим конструкцию и принцип действия весов, наиболее широко используемых для измерения аэродинамических сил и моментов.

2. Внешние аэродинамические весы

На рис. 2.4.1 показана схема часто применяемых в аэродинамических исследованиях трехкомпонентных внешних весов. *Модель 1* летательного аппарата с помощью опорной стойки *2* устанавливается на поворотном круге *6*, перемещая который относительно плавающей ра

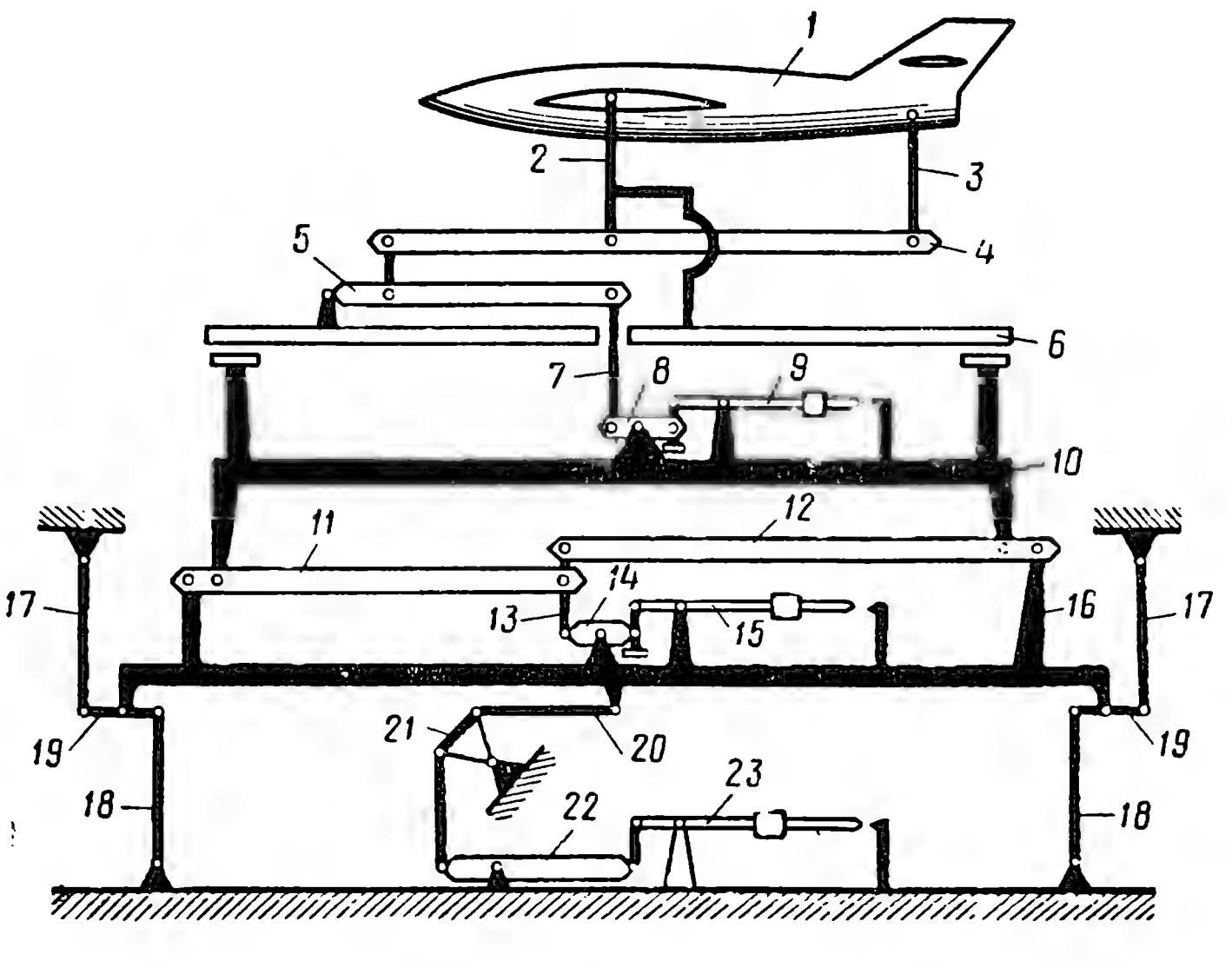


Рис. 2.4.1. Схема трехкомпонентных внешних аэродинамических весов:

1 — модель; *2* — опорная стойка; *3* — тяга; *4* — рычаг продольного момента; *5* — промежуточный рычаг; *6* — поворотный круг; *7* — тяга; *8* — промежуточный рычаг; *9* — весовой элемент продольного момента M_z; *10* — плавающая рама; *11*, *12* — суммирующие рычаги; *13* — тяга; *14* — промежуточный рычаг; *15* — весовой элемент подъемной силы Y; *16* — плавающая рама; *17*, *18* — стержни; *19* — серьга; *20* — тяга; *21* — угловой рычаг; *22* — промежуточный рычаг; *23* — весовой элемент силы сопротивления X

мы *10*, задают углы скольжения β. Одновременно через тягу *3*, рычаг *4* и промежуточные рычаги *5* и *8* хвостовая часть модели соединяется с весовым элементом *9*, изменяющим момент тангажа M_z в вертикальной плоскости. Угол атаки модели изменяется при повороте рычага *4* продольного момента вокруг его оси вращения. Плавающая рама *10* покоится на суммирующих рычагах *11*, *12*, связанных через тягу *13* и рычаг *14* с весовым элементом *15*, регистрирующим величину подъемной

силы *Y*. Суммирующие рычаги установлены на плавающей раме *16* измерительного устройства лобового сопротивления *X* так, что позволяют раме *10* перемещаться только в вертикальном направлении. Последняя рама покоится на комбинированных маятниковых подвесах, обеспечивающих ей перемещение только в горизонтальной плоскости. Эти подвесы состоят из стержней *17* и *18*, работающих соответственно на растяжение и на сжатие, и серег *19*. Через тягу *20*, угловой рычаг *21* и промежуточный рычаг *22* усилие от рамы *16* передается к весовому измерительному элементу *23* лобового сопротивления.

В качестве весовых элементов могут использоваться рычажные измерительные устройства. Такой весовой элемент (рис. 2.4.2) состоит

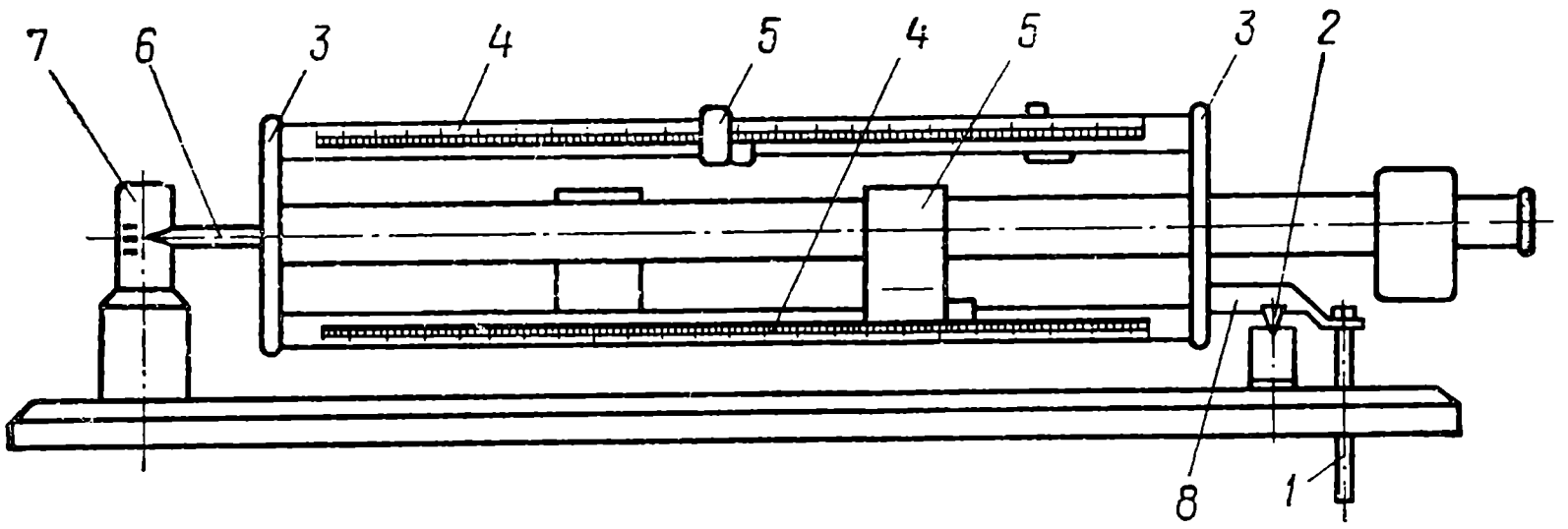


Рис. 2.4.2. Рычажный весовой элемент:

1 — тяга; *2* — опорный нож; *3* — траверсы: *4* — направляющие трубы; *5*—уравновешивающие грузы; *6* — стрелка; *7* — стойка с индексами; *8* — рычаг

из рычага *8* с опорным ножом *2*. С одной стороны к рычагу подходит тяга *1*, передающая усилие, которое складывается из веса модели и деталей конструкции весов, а также действующей аэродинамической силы, а с другой стороны с этим рычагом соединены при помощи траверс *3* направляющие трубы *4* и стрелка *6*. На верхней трубе обычно наносится шкала в граммах, а на нижней — в килограммах. Изменяя положение грузов *5* на направляющих, можно добиться до начала опыта уравновешивания весов, которому соответствует совмещение стрелок с начальным индексом на стойке *7*. Причем для такого уравновешивания могут устанавливаться дополнительные грузы.

При продувке в аэродинамической трубе измеряется сумма двух аэродинамических сил, одна из которых действует на модель, а другая — на поддерживающие эту модель устройства, размещенные в потоке (на рис. 2.4.1 стойка *2* и тяга *13*). Для нахождения силы, действующей только на модель, из суммарного усилия вычитается составляющая, приходящаяся на поддерживающие устройства. Эта составляющая определяется в результате продувки поддерживающих устройств без модели или с удобообтекаемой моделью, для которой известны соответствующие аэродинамические силы.

В отличие от рассмотренной конструкции весов с жесткими поддерживающими устройствами в аэродинамических весах с гибкой подвеской модель летательного аппарата в рабочей части аэродинамической трубы устанавливается с помощью проволочек, тросов или металлических лент, натяжение которых обеспечивается специальными грузами или пружинами. На рис. 2.4.3, *а* показана схема такой подвески, которая должна обеспечивать растяжение проволочек, идущих к весовым элементам, при действии на модель аэродинамической силы. Обычно для этой цели модель летательного аппарата устанавливается в перевернутом положении.

Лобовое сопротивление измеряется весовым элементом *1*, связанным с натянутой проволочкой, проходящей через узел крепления *A*, а подъемная сила *Y* находится по показаниям двух весовых элементов *2* и *3*,

к которым подходят проволочки соответственно из узлов B и C. Соответствующие схемы действия сил в узлах A, B и C, определяемые по известным правилам механики, приведены на рис. 2.4.3, *б*. Из этих схем видно, что при действии на модель аэродинамических сил натяжения

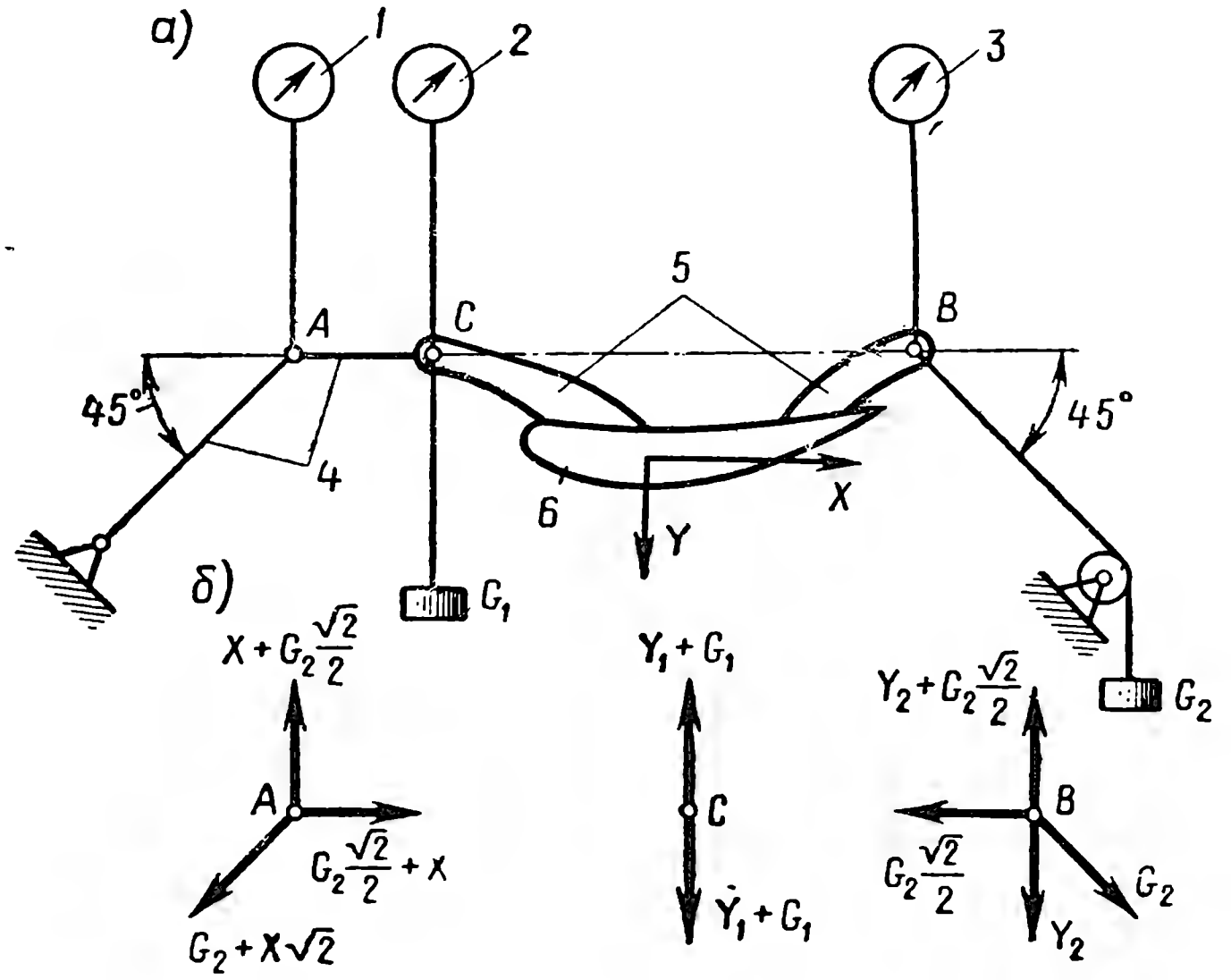


Рис. 2.4.3. Схема установки модели на гибкой подвеске (*а*):

1 — весовой элемент для измерения силы сопротивления; *2*, *3* — весовые элементы для измерения соответственно составляющих Y_1 и Y_2 подъемной силы; *4* — нити подвески; *5* — кронштейны; *6* — модель; G_1 и G_2 — грузы для натяжения нитей подвески и схемы действия сил в узлах A, B, C (*б*)

проволочек, подходящих к весовым элементам *1*, *2* и *3*, будут соответственно равны

$$X + G_2\sqrt{2}/2, \quad Y_1 + G_1, \quad Y_2 + G_2\sqrt{2}/2, \tag{2.4.1}$$

где G_1 и G_2 — грузы для натяжения проволочек; Y_1 и Y_2 — компоненты подъемной силы.

Перед началом измерения весовые элементы балансируются, поэтому при продувке их показания непосредственно будут соответствовать значениям X, Y_1 и Y_2. С учетом этого подъемная сила определится в виде суммы показаний весовых элементов *2* и *3*, т. е. $Y = Y_1 + Y_2$.

Гибкая подвеска по сравнению с жестким поддерживающим устройством вносит значительно меньшие возмущения в поток, обтекающий модель, что позволяет осуществлять более точные измерения действующих сил и моментов. При этом следует иметь в виду, что для установки больших моделей в аэродинамических трубах применяют только жесткое крепление, обеспечивающее необходимую механическую прочность.

При использовании весьма значительных по размерам моделей летательных аппаратов или их натурных образцов уже становится нецелесообразным по соображениям прочности применение конструкций весов с верхней подвеской. В этом случае обычно используются аэродинамические весы с жестким поддерживающим устройством и нижним расположением рамы. Общий вид таких весов, применяемых в Центральном аэрогидродинамическом институте (ЦАГИ) им. проф. Н. Е. Жуковского, показан на рис. 2.4.4.

Аэродинамические весы с механическими элементами позволяют определять аэродинамические усилия с точностью до 0,1%. Такие весы,

требующие значительного времени для уравновешивания и снятия показаний с весовых элементов, нельзя применять на аэродинамических установках кратковременного действия, т. е. с малой длительностью обтекания исследуемой модели.

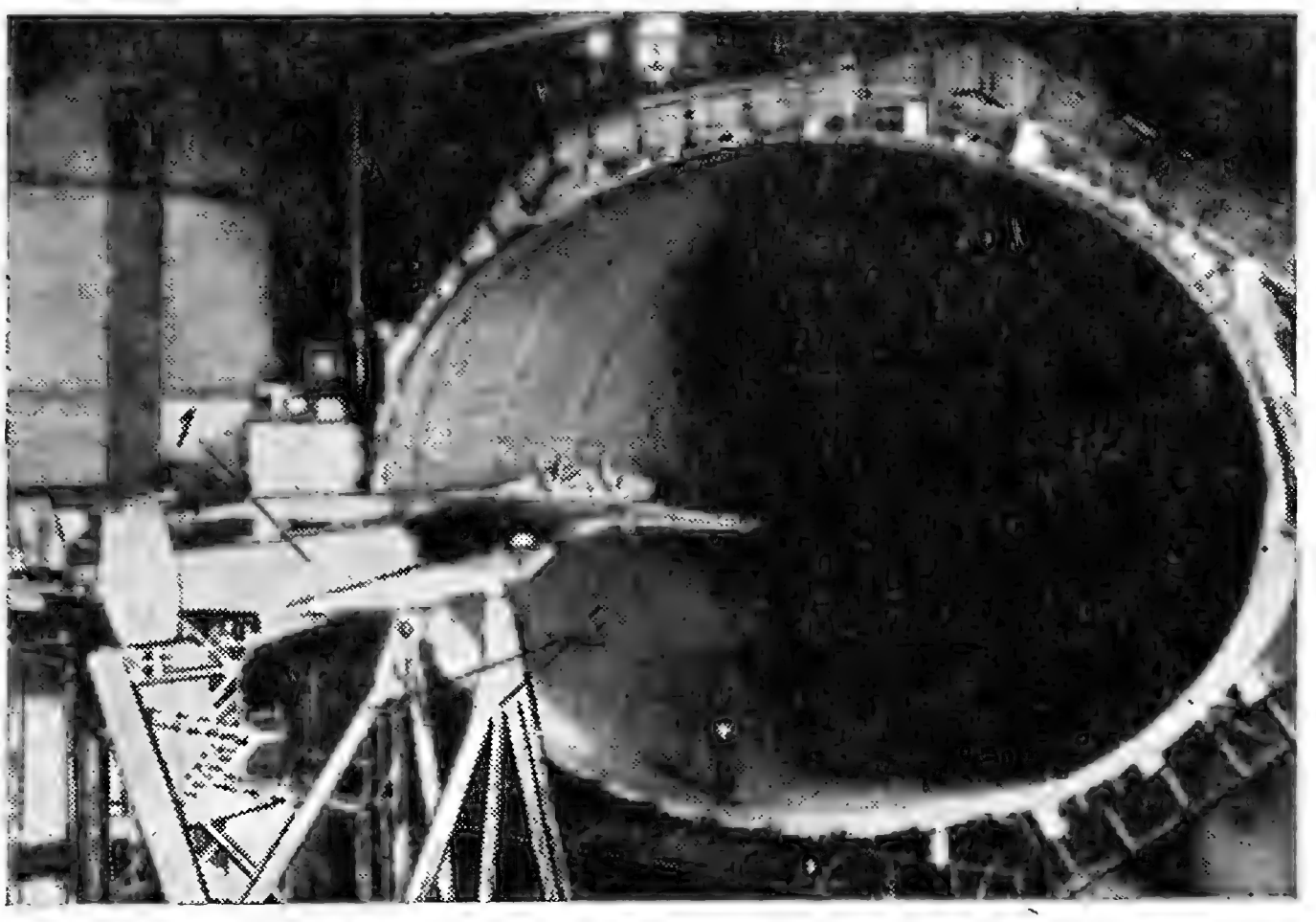


Рис. 2.4.4. Установка модели самолета на внешних аэродинамических весах:

1 — модель; *2* — поддерживающее устройство

Рассмотрим электромеханические измерительные устройства аэродинамических весов. От механических они отличаются тем, что для перемещения уравновешивающих грузов применяется электрический привод. Схема такого электромеханического рычажного весового эле-

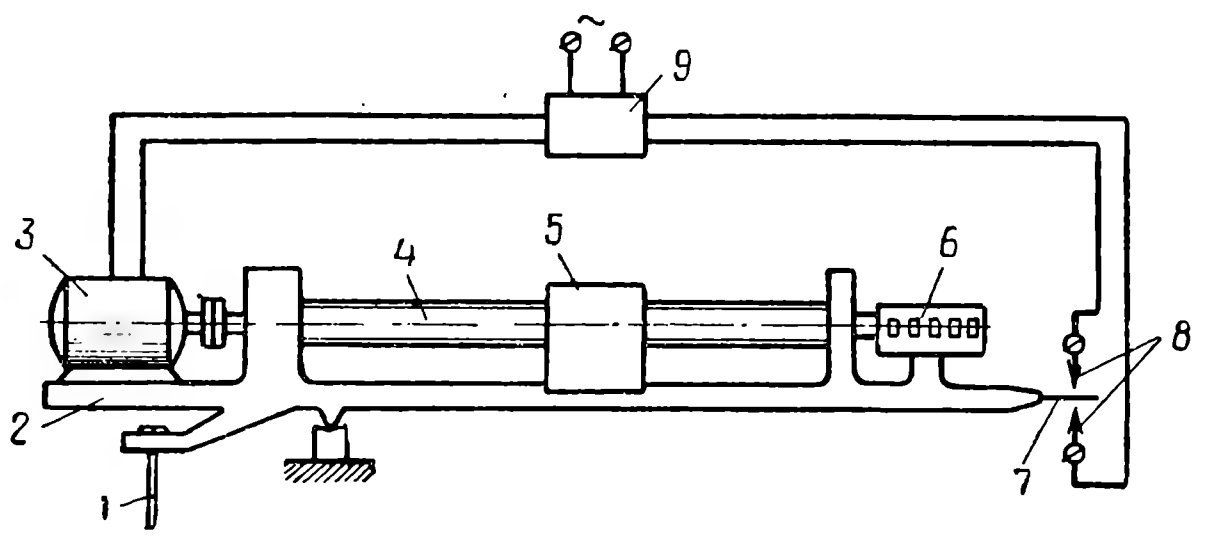


Рис. 2.4.5. Рычажный электромеханический весовой элемент:

1 — тяга; *2* — корпус; *3* — реверсивный электродвигатель; *4* — ходовой винт; *5* — уравновешивающий груз; *6* — отсчетное устройство; *7* — подвижный контакт; *8* — неподвижные контакты; *9* — переключающее устройство

мента показана на рис. 2.4.5. Перемещение уравновешивающего груза *5* осуществляется при помощи ходового винта *4*, связанного с реверсивным электродвигателем *3*. Электродвигатель включается при выходе весов из равновесия в результате замыкания одного из неподвижных контактов *8*. При этом изменение направления вращения электродвигателя осуществляется с помощью переключающего устройства *9* и зависит от того, какой из неподвижных контактов *8* замкнется. Работа электродвигателя прекращается, когда подвижный контакт *7* займет нейтраль-

ное положение. В этот момент с отсчетного устройства снимаются показания весового элемента, измеряющего соответствующую составляющую аэродинамической силы.

Применение электрического привода позволяет уменьшить время, необходимое для уравновешивания весовых элементов, и тем самым ускорить и повысить точность измерений. Это позволяет также использовать вычислительные машины и проводить обработку опытных данных в ходе эксперимента.

Принцип работы электрических весовых элементов аэродинамических весов основан на применении электрических датчиков усилий. Наиболее распространенными среди них являются тензометрические датчики. У таких датчиков аэродинамическая сила вызывает деформацию упругого тензоэлемента, что приводит к изменению его электрического сопротивления. По измеренной величине этого изменения сопротивления можно определить соответствующую аэродинамическую силу.

Конструктивно упругие элементы выполняются так, что они имеют наименьшую жесткость относительно одной из осей. При приложении нагрузки вдоль этой оси возникает наибольшая деформация этого элемента. В других направлениях жесткость упругого элемента значительно больше, и если действуют усилия в направлении других осей, то деформация упругого элемента практически отсутствует.

На рис. 2.4.6, *а* показана схема аэродинамических весов с внешними тензодатчиками усилий. Все упругие элементы (*1*, *2*, *3*) имеют одинаковое устройство и выполнены в виде прямоугольника. Две стойки *4* изготовлены более тонкими и на них наклеиваются тензодатчики. Утолщенные перекладины *5* и *5′* упругих элементов соединены соответственно с обтекателем *9* и тягами *6*, передающими аэродинамические силы. Конструкция упругих элементов такова, что ось наименьшей жесткости перпендикулярна к тонким стойкам, а приложенное усилие совпадает с направлением этой оси и вызывает деформацию изгиба стоек, которая и измеряется тензоэлементами.

Согласно рис. 2.4.6 модель летательного аппарата *7* закрепляется на дугообразной стойке *8*, закрытой обтекателем *9*. Аэродинамическая сила, действующая на модель, передается через стойку и тяги *6* к весовым элементам *1*, *2*, *3*. При этом они установлены таким образом, что элемент *1* измеряет только нормальную силу N, а элементы *2* и *3* воспринимают соответственно осевую силу R и момент тангажа M_z. При изменении углов атаки модели обтекатель поворачивается относительно начала координат (см. рис. 2.4.6) вместе со стойкой, упругими элементами и моделью.

На рис. 2.4.6, *б* приведена электрическая схема соединения тензодатчиков.

Рассмотрим порядок определения действующих сил. На упругий элемент *1* наклеены тензодатчики *12÷13′*, которые соединены в соответствующую мостовую схему. Так как этот элемент деформируется только под действием нормальной силы N, то его деформация и, следовательно, выходное напряжение ΔU_N моста будут пропорциональны этой силе, т. е. $\Delta U_N = k_1 N$, где k_1 — тарировочный коэффициент. Во время эксперимента измеряется выходное напряжение, а затем рассчитывается нормальная сила $N = \Delta U_N / k_1$.

Упругие элементы *2* и *3* воспринимают одновременно осевую силу R и момент тангажа M_z. Для того чтобы получить выходные сигналы, пропорциональные только одной составляющей, т. е. $\Delta U_R = k_2 R$ и $\Delta U_{M_z} = k_3 M_z$, где k_2 и k_3 — соответствующие тарировочные коэффициенты, определяемые опытным путем, применяются специальные мостовые схемы соединения тензодатчиков. Так как упругий элемент *2* деформи-

руется под действием осевой силы R и момента M_z, то очевидно, что выходной сигнал ΔU_2 с мостов, собранных из датчиков $14 \div 15'$ и $16 \div 17'$, наклеенных на него, можно представить в виде суммы двух сигналов, пропорциональных силе R и моменту M_z:

$$\Delta U_2 = \Delta U_2^R + \Delta U_2^M.$$

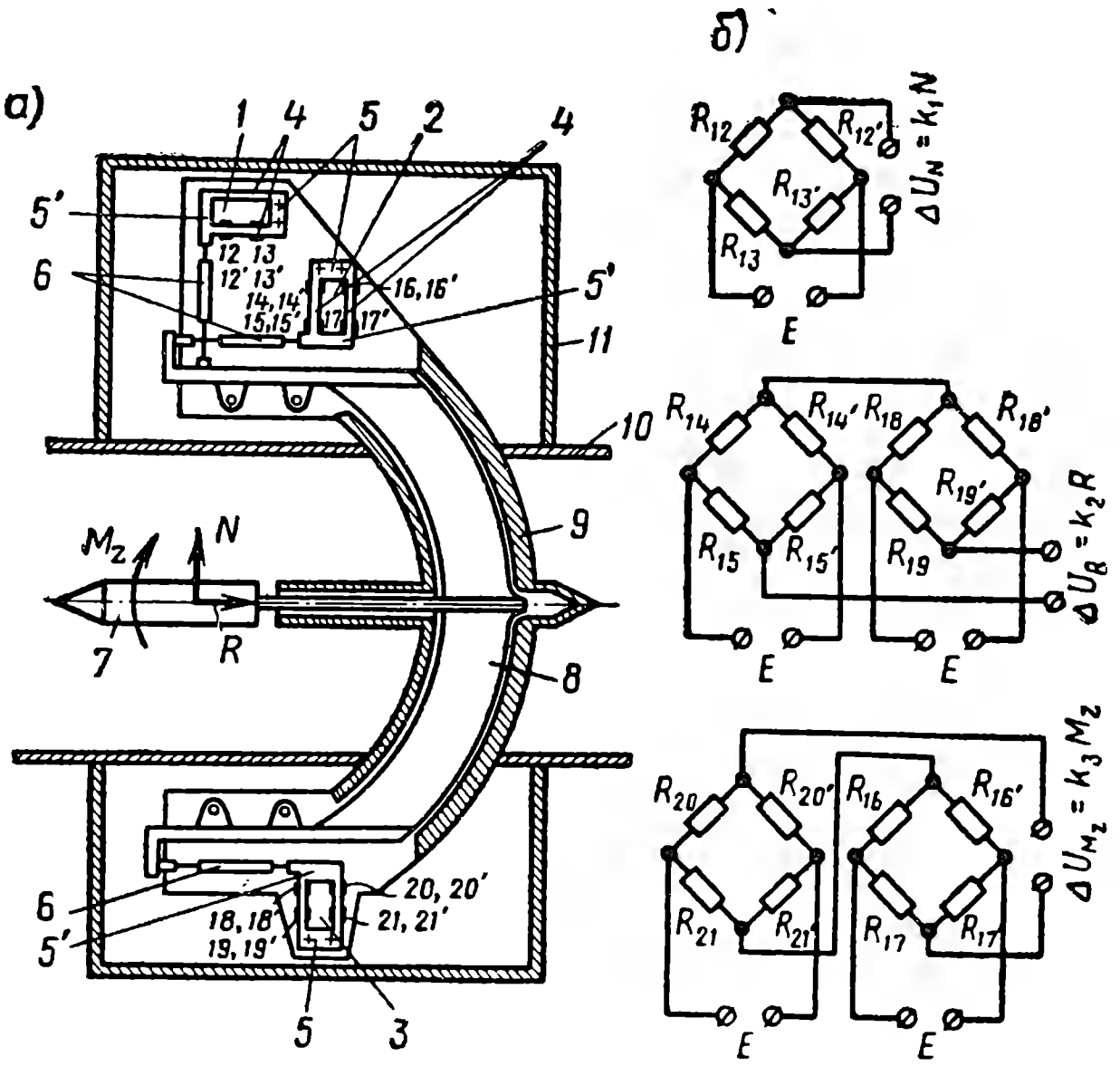


Рис. 2.4.6. Внешние трехкомпонентные тензометрические весы:

а — схема устройства: *1, 2, 3* — упругие элементы; *4* — тонкие стойки; *5, 5'* — перекладины; *6* — тяги; *7* — модель на державке; *8* — дугообразная стойка; *9* — обтекатель; *10* — стенки аэродинамической трубы; *11* — кожух весов; *12÷21* — тензодатчики; *б* — электрические схемы соединения тензодатчиков

Для мостов, собранных из датчиков $18 \div 19'$ и $20 \div 21'$, наклеенных на упругий элемент *3*, можно записать

$$\Delta U_3 = \Delta U_3^R + \Delta U_3^M.$$

При установке одинаковых упругих элементов *2* и *3* так, как это показано на рис. 2.4.6, *а*, под действием силы R оба элемента будут претерпевать деформации одного знака, и, следовательно, выходные напряжения мостов, пропорциональные осевой силе, будут равны, т. е. $\Delta U_2^R = \Delta U_3^R$. Под действием момента M_z в упругих элементах *2* и *3* возникают деформации противоположных знаков, поэтому напряжения, пропорциональные моментам, будут одинаковы по величине, но противоположны по знаку, т. е. $\Delta U_2^M = -\Delta U_3^M$.

Если мостовые схемы $R_{14} \div R_{15'}$ и $R_{18} \div R_{19'}$, составленные из датчиков, наклеенных соответственно на упругие элементы *2* и *3*, соединить так, чтобы выходной сигнал ΔU всей схемы был равен сумме сигналов с указанных мостов, то полученное напряжение будет пропорционально только осевой силе R. В соответствии с этим

$$\Delta U = \Delta U_2 + \Delta U_3 = \Delta U_2^R + \Delta U_2^M + \Delta U_3^R + \Delta U_3^M.$$

При этом, учитывая, что

$$\Delta U_2^R = \Delta U_3^R \text{ и } \Delta U_2^M = -\Delta U_3^M,$$

получим

$$\Delta U = 2\Delta U_2^R.$$

Величина этого сигнала $\Delta U = \Delta U_R$ и определяет осевую силу в соответствии с зависимостью $\Delta U_R = k_2 R$.

Если мостовые схемы из датчиков *16÷17′* и *20÷21′* соединены так, что сигналы с этих мостовых схем вычитаются, то выходной сигнал ΔU_{M_z} будет пропорционален только моменту M_z и можно написать соотношение $\Delta U_{M_z} = k_3 M_z$.

Во время эксперимента измеряют ΔU_R и ΔU_{M_z}, а соответствующие сила и момент находятся из выражений:

$$R = \Delta U_R / k_2, \quad M_z = \Delta U_{M_z} / k_3. \tag{2.4.2}$$

Аэродинамические весы с тензометрическими элементами позволяют измерять силы и моменты с точностью до 1%. Причем для таких измерений требуется сравнительно небольшое время. Одновременно применение электрических весов позволяет автоматизировать измерения, что особенно важно при кратковременных продувках в аэродинамических трубах. Следует также учитывать, что такие весы предусматривают использование специальных высокочувствительных электронных усилителей.

3. Внутренние аэродинамические весы

Рассмотрим конструкцию простейших внутренних аэродинамических весов для измерения осевой силы (рис. 2.4.7). Их электрический весовой элемент, располагающийся внутри модели, соединен с этой моделью и одновременно с державкой.

Под действием осевой силы R изгибаются тонкие вертикальные стойки *4* с наклеенными на них тензодатчиками *5÷8*. При таком закреплении упругого элемента другие составляющие аэродинамической силы и

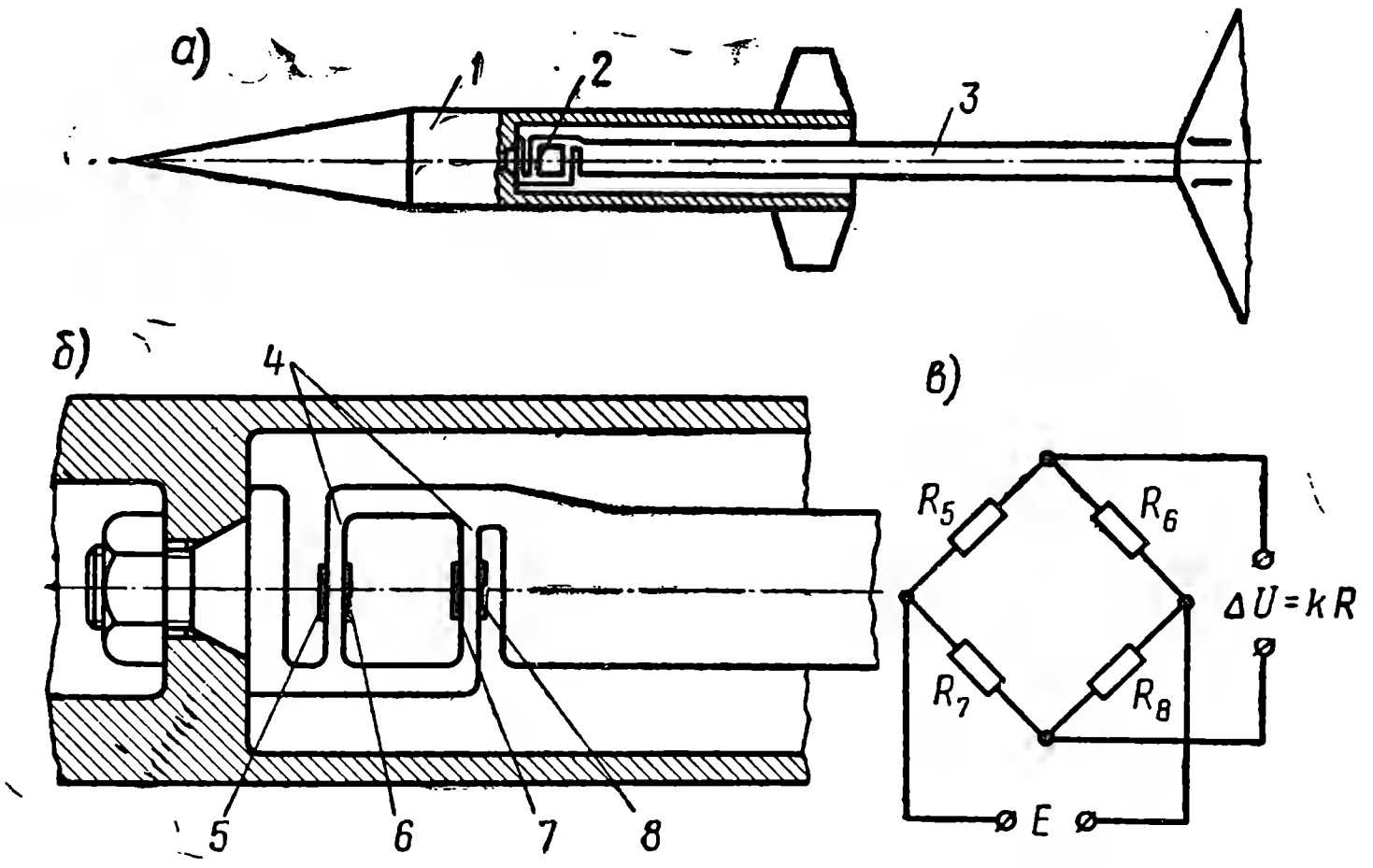


Рис. 2.4.7. Внутренние аэродинамические весы для измерения осевой (продольной) силы:

а — схема установки модели на весах: *1* — модель; *2* — весовой элемент; *3* — державка;

б — устройство весового элемента: *4* — вертикальные упругие стойки; *5—8* — тензодатчики;

в — электрическая схема соединения тензодатчиков

моменты вызывают пренебрежимо малые деформации, которые практически не воспринимаются датчиками.

Для регистрации изменения тензосопротивления применяется электронная аппаратура (усилитель и осциллограф), по показаниям кото-

рой определяется действующая аэродинамическая сила. В соответствии с рис. 2.4.7 это показание определяется разностью потенциалов моста ΔU. С учетом этого значения осевая сила $R=\Delta U/k$ (где k — тарировочный коэффициент установки).

В исследованиях применяются одновременно несколько весов или же одни весы используются для измерения ряда параметров. В этих слу-

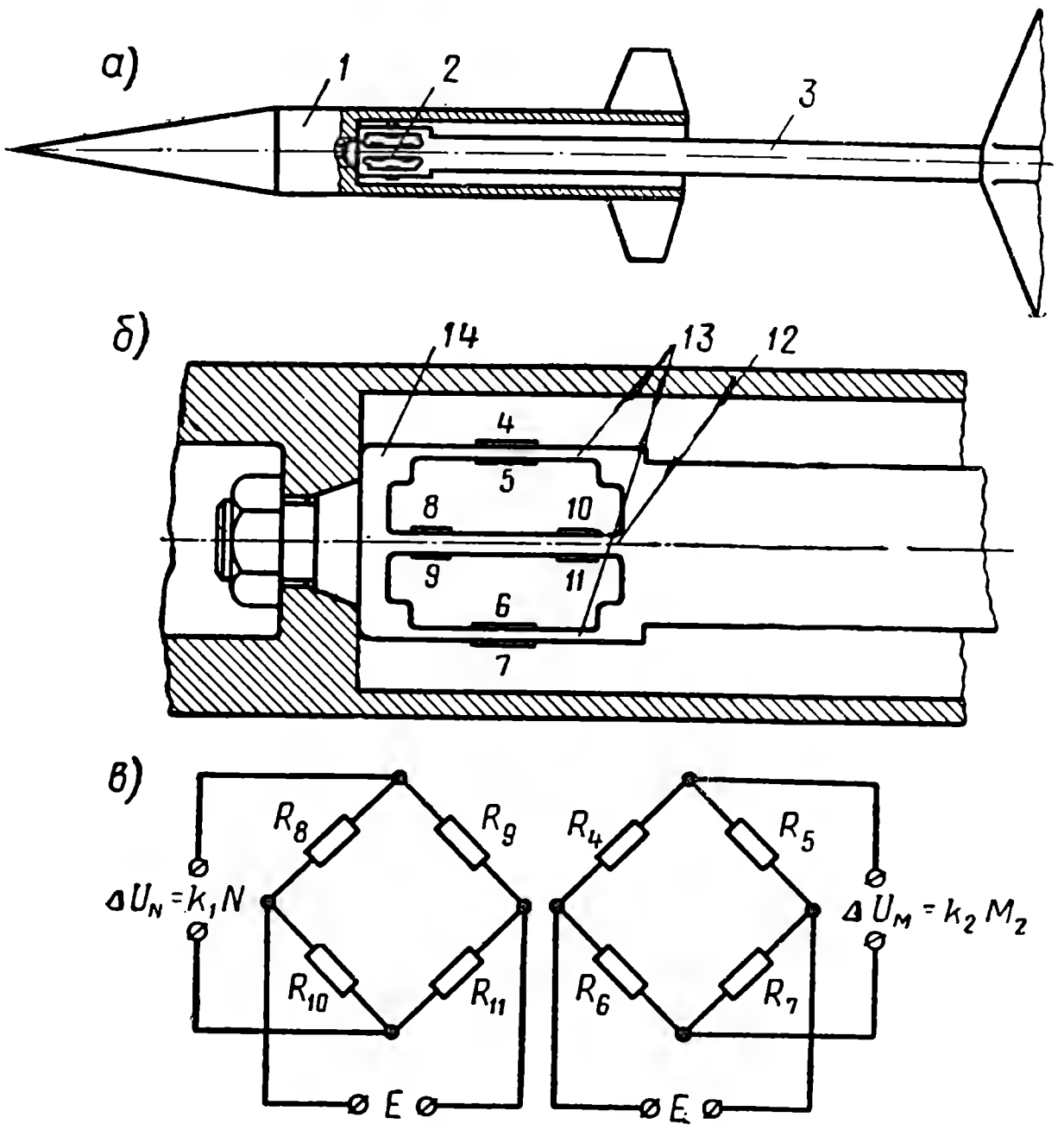


Рис. 2.4.8. Двухкомпонентные внутренние аэродинамические весы:

а — схема установки модели на весах: *1* — модель; *2* — весовой элемент; *3* — державка;
б — устройство весового элемента; *4÷11* — тензодатчики; *12* — центральный стержень; *13*—наружные стержни; *14*—соединительное звено;
в — электрические схемы соединения тензодатчиков

чаях для регистрации измеряемых величин применяются многоканальные тензостанции (см. рис. 2.1.12).

На рис. 2.4.8 показана схема двухкомпонентных внутренних аэродинамических весов для измерения нормальной силы N и момента тангажа M_z. Упругий элемент весов представляет собой стержень, соединенный одним концом с моделью, а другим с державкой. Средний элемент стержня с наклеенными датчиками выполнен утолщенным и воспринимает основную часть нормальной силы. Наружные элементы *13* с датчиками посередине изготовляются более тонкими и деформируются под действием силы N и момента тангажа M_z. Причем эти элементы, претерпевая растяжение (сжатие), воспринимают небольшую часть силы N, а изгибаясь — почти целиком момент тангажа. Центральный стержень *12* при нагружении моментом M_z играет роль упругого шарнира, вокруг которого поворачиваются толстые соединительные звенья *14*.

Порядок соединения тензодатчиков в мосты выбран таким, чтобы обеспечить на выходе схемы напряжения, пропорциональные только одной составляющей. Рассмотрим схему моста для измерения нормальной силы N. Соединение датчиков *8÷11*, наклеенных на средний элемент

12, показано на рис. 2.4.8, *в*. Датчики *8* и *9* включены в разные плечи моста. Если на упругий элемент действует нормальная сила, то эти датчики регистрируют деформации разных знаков и на выходе появляется сигнал $\Delta U_N = k_1 N$. Так как при действии момента центральный элемент играет роль упругого шарнира, то датчики *8* и *9* представляют деформации одного знака (это относится и к датчикам *10*, *11*) и, следовательно, не нарушится начальная балансировка моста.

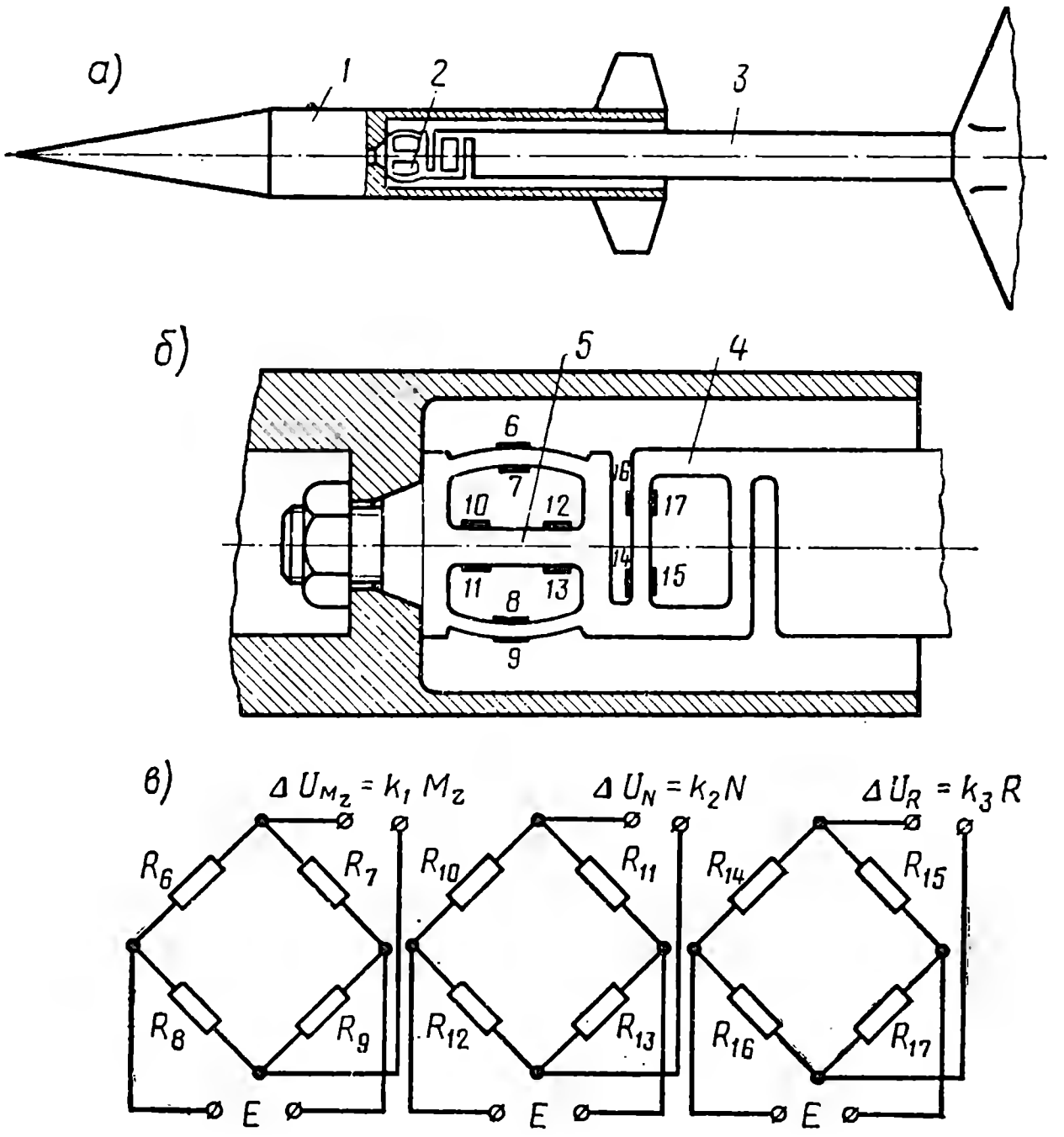


Рис. 2.4.9. Трехкомпонентные аэродинамические весы:

а — схема установки модели на весах: *1* — модель; *2* — весовой элемент; *3* — державка;
б — устройство весового элемента: *4* — упругий элемент для измерения осевой силы; *5* — упругий элемент для измерения нормальной силы и момента тангажа; *6÷17* — тензодатчики;
в — электрические схемы соединения тензодатчиков

Теперь рассмотрим схему моста для измерения момента тангажа M_z (см. рис. 2.4.8, *в*). По этой схеме датчики *4* и *5*, наклеенные на верхний наружный элемент *13*, включены в разные плечи моста. Если на упругий элемент действует только нормальная сила, то эти датчики регистрируют деформации одного знака, так как наружная часть *13* упругого элемента подвергается только растяжению (сжатию). Следовательно, в разных плечах моста сопротивления изменяются на одинаковую величину. Такое изменение сопротивлений не нарушит балансировки моста и не вызовет сигнала на выходе. Сказанное относится и к датчикам *6*, *7*, наклеенным на нижний элемент *13*.

Воздействие момента на элементы *13* вызывает их изгиб, и датчики *4*, *5* зарегистрируют деформации разных знаков. В этом случае на выходе моста появится сигнал, пропорциональный моменту, т. е. $\Delta U_{M_z} = k_2 M_z$. Этот момент M_z определяется относительно электрической оси. Если линия действия аэродинамической силы пересекает электрическую ось, то это не вызывает сигнала на выходе моста, регистрирующего момент.

Рассмотрим устройство и принцип действия трехкомпонентных аэродинамических весов для измерения осевой R и нормальной N сил, а также момента тангажа M_z (рис. 2.4.9).

Упругий элемент *4* для измерения осевой силы выполнен в виде прямоугольника. На левый тонкий стержень этого элемента, изгибающийся только под действием осевого усилия, наклеены тензодатчики *14÷17*. Упругий элемент *5* предназначен для измерения нормальной силы N и момента M_z. На нем попарно наклеены датчики *6÷13*.

Электрические схемы соединения датчиков приведены на рис. 2.4.9, *в*. Каждый мост подключается к отдельному каналу тензостанции, выходы которых связаны со шлейфовым осциллографом.

Внутримодельные тензометрические весы позволяют измерять аэродинамические силы и моменты с точностью до 1%. При этом отсутствие сложных поддерживающих устройств, таких как у механических или электромеханических весов, позволяет значительно уменьшить влияние державок на обтекание исследуемой модели и тем самым повысить точность измерений.

4. Аэродинамические весы с пьезоэлектрическими датчиками усилий

На рис. 2.4.10 представлена схема внутренних аэродинамических весов с трехкомпонентным пьезоэлектрическим датчиком усилий. Корпус датчика закрепляется на державке *3*. Усилия, действующие на исследуемую модель летательного аппарата, передаются через втулку на внутреннее кольцо *8* датчика. Внутри кольца помещаются три пары кольцевых пьезоэлементов (*4, 5, 6*) толщиной примерно 1 *мм*. При этом

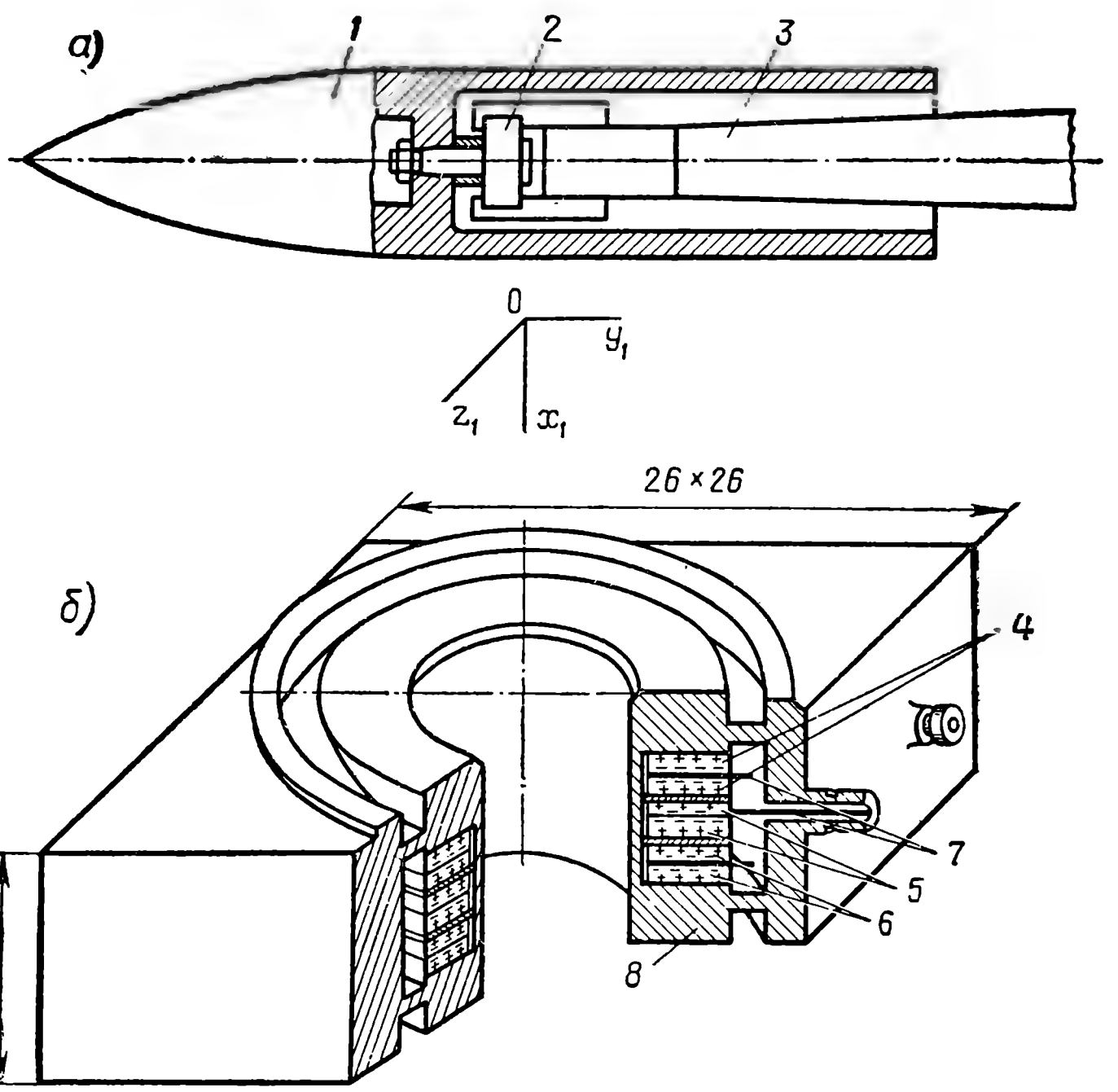


Рис. 2.4.10. Трехкомпонентные внутренние аэродинамические весы:

а — схема установки модели на весах: *1* — модель; *2* — трехкомпонентный пьезоэлектрический датчик усилий; *3* — державка;
б — устройство пьезоэлектрического датчика: *4* — пьезокристаллические пластины для измерения осевой силы; *5* — пластины для измерения боковой силы; *6* — пластины для измерения нормальной силы; *7* — выводы; *8* — внутреннее кольцо

расположение пьезоэлементов таково, что они имеют взаимно перпендикулярные оси чувствительности, а предельно допустимое давление на кольцо составляет около 15 *кГ/мм*^{2}. В соответствии с этим возможное усилие, измеряемое датчиком, не превышает 500 *кГ*.

Первая пара пьезоэлементов *4* (см. рис. 2.4.10) работает на сжатие и измеряет усилие R, направленное вдоль оси x_1. Две другие пары (5, 6), измеряющие соответственно усилия N и Z вдоль осей y_1 и z_1, работают на сдвиг. Следует отметить, что чувствительность пьезоэлементов, работающих на сдвиг, вдвое выше работающих на сжатие и достигает 45÷46 *пк/кГ*.

Во время эксперимента измеряется заряд q, образовавшийся на гранях кристалла. Соответствующее усилие, вызвавшее этот заряд, равно $F=q/k$ (где k — тарировочный коэффициент весов). Например, если усилитель позволяет измерить заряд в 0,03 *пк*, а тарировочный коэффициент $k=22$ *пк/кГ*, то минимальное определяемое усилие равно 0,0015 *кГ*.

Применение таких датчиков вызывает необходимость весьма тщательной их установки относительно модели, с тем чтобы уменьшить взаимное влияние измерительных каналов и тем самым устранить возможные ошибки измерений, которые могут быть у пьезоэлектрических весов значительными. Например, ошибка при измерении усилий в поперечном направлении, обусловленная влиянием других измерительных каналов, может достигать 1÷2% и более. Для снижения этого эффекта наряду с точной установкой весов применяют специальные электронные схемы, ограничивающие воздействие других каналов и позволяющие получать на выходе каждого из них сигнал, практически зависящий только от одной соответствующей составляющей аэродинамического усилия.

5. Аэродинамические весы для измерения сил и моментов летательных аппаратов, совершающих колебательные движения

Рассмотрим весы, предназначенные для измерения момента демпфирования, возникающего при колебаниях летательного аппарата. На рис. 2.4.11 показаны такие весы, получившие название упругого шарнира. Упругий элемент, расположенный на державке *4* и соединенный с моделью *1*, представляет собой три перекрещивающиеся балочки (*7*, *7*, *8*), причем на средней *8* наклеены тензодатчики *3*. Такая конструкция упругого элемента допускает угловые перемещения модели, т. е. этот элемент играет роль шарнира.

Спусковое устройство отклоняет модель от нейтрального положения и удерживает ее в этом состоянии, жестко связывая между собой модель, упругий элемент и державку. При помощи этого устройства можно устранить такую жесткую связь и тем вызвать колебательное движение модели. Ось *9*, относительно которой совершаются колебания, проходит через середины балочек. При этом отклонение модели вызывает деформацию балочки *8* с наклеенными тензодатчиками.

В потоке трубы характер колебаний определяется наряду с упругими силами, возникающими в балочках, также демпфирующим моментом и моментом тангажа и описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$J_z \frac{d^2\alpha}{dt^2} - \left(M_z^{\dot{\alpha}} + M_z^{\omega_z}\right)\frac{d\alpha}{dt} - \left(M_z^{\alpha} + M_{ш}^{\alpha}\right)\alpha = 0, \qquad (2.4.3)$$

где J_z — момент инерции колеблющейся массы; α — угол отклонения модели (угол атаки); ω_z — угловая скорость; $M_z^{\dot{\alpha}}$, $M_z^{\omega_z}$ — производные от момента демпфирования соответственно по $\dot{\alpha}=d\alpha/dt$ и по ω_z; M_z^{α}, $M_{ш}^{\alpha}$ —

производные по α соответственно от момента тангажа и момента, создаваемого упругим шарниром.

Во время эксперимента записывается характер изменения по времени t выходного сигнала ΔU с моста (см. рис. 2.4.11, *б*), определяющего в соответствии с формулой $\Delta U = k\alpha$ угол атаки (k — тарировочный коэффициент). После обработки соответсвующей осциллограммы получают зависимость $\alpha = \alpha(t)$. Подставив опытные данные в уравнение (2.4.3) и проинтегрировав его, находят сумму $(M_z^{\dot{\alpha}} + M_z^{\omega_z})$.

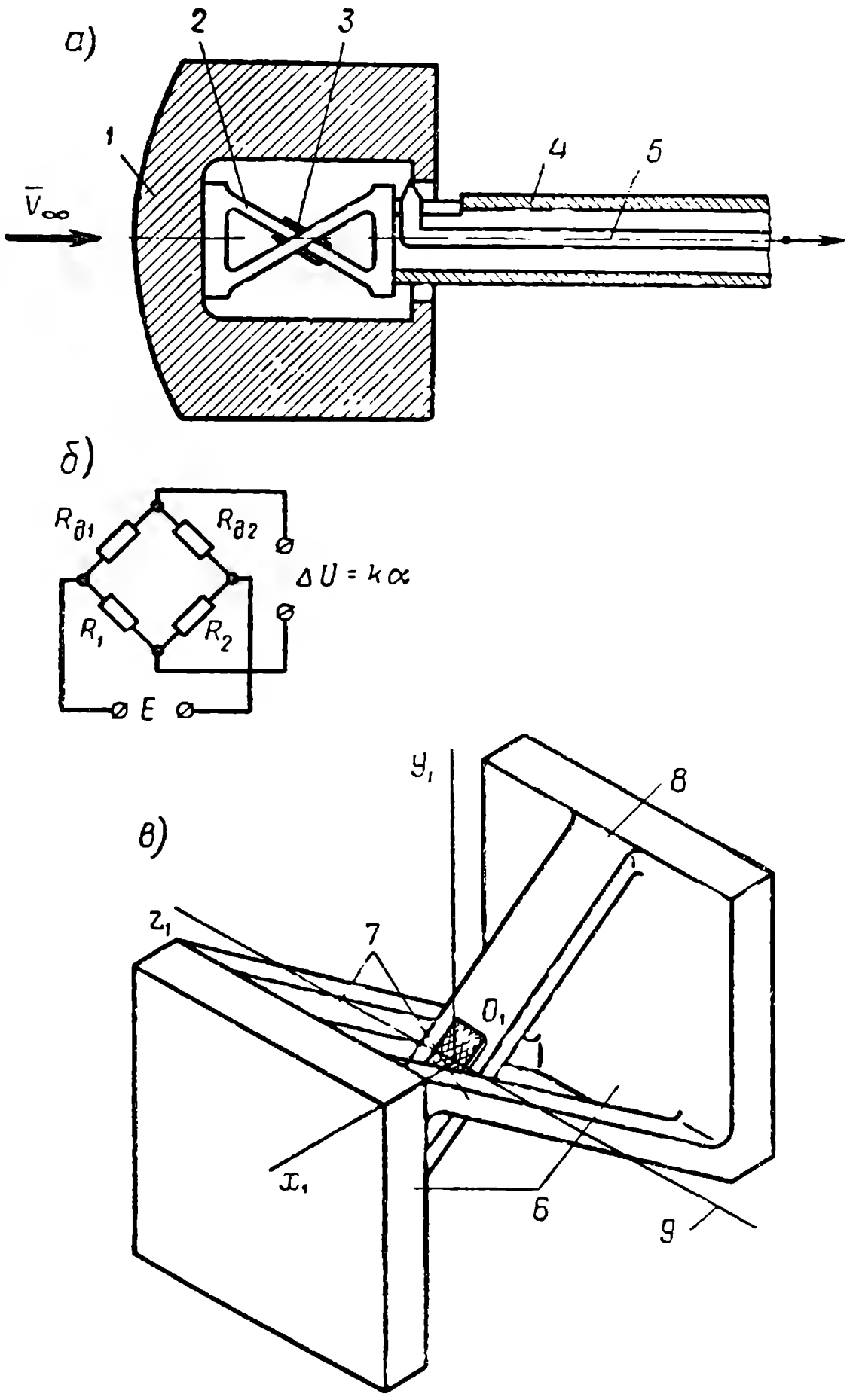


Рис. 2.4.11. Весы для определения момента демпфирования:

а — устройство весов: *1* — модель; *2* — упругий элемент (шарнир); *3* — тензодатчики; *4* — державка; *5* — спусковое устройство;

б — электрическая схема соединения тензодатчиков; $R_{д1}$, $R_{д2}$ — электрические сопротивления датчиков; R_1, R_2 — резисторы плеч моста;

в — внешний вид упругого элемента: *6* — основания; *7* — крайние балочки; *8* — центральная балочка с тензодатчиками; *9* — ось, относительно которой происходят колебания

Как известно, для обеспечения подобия между движением летательного аппарата, совершающего колебания, и колебанием модели в аэродинамической трубе должно быть соблюдено равенство чисел Струхаля натурного и модельного процессов. Этому требованию должна отвечать и конструкция весов. В соответствии с этим требованием у таких весов частота собственных колебаний будет достаточно большой и может достигать 120÷150 *гц*. Однако при этих частотах амплитуды колебаний модели получаются сравнительно небольшими (порядка нескольких градусов), в то время как у натурных образцов они часто значительно больше. Этот недостаток весов ограничивает их применение теми случаями, когда амплитуды колебаний, соответствующие реальным условиям полета, невелики и близки к экспериментальным значениям.

§ 2.5. ОПТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

Широкое применение в аэродинамике получил оптический метод исследования газовых течений, основанный на известном оптическом эффекте зависимости скорости света в газе от его плотности.

Изменение скорости света определяет соответствующее изменение коэффициента преломления газовой среды согласно зависимости $n = c/c_0$ (c и c_0 — скорости света соответственно в газе и пустоте). Связь между коэффициентом преломления n и плотностью газа ρ определяется

формулой

$$n = 1 + (n_0 - 1)\,\rho/\rho_0, \qquad (2.5.1)$$

в которой n_0 и ρ_0 — соответственно начальные значения коэффициента преломления и плотности газа.

Эффект изменения скорости света и коэффициента преломления в оптически неоднородном потоке газа, которым является возмущенное течение, используется при конструировании оптических приборов для визуализации обтекания моделей летательных аппаратов.

1. Зеркально-менисковый прибор конструкции Д. Д. Максутова

Зеркально-менисковый прибор, широко используемый в аэродинамических исследованиях, относится к типу теневых оптических приборов. Схема такого прибора (модель ИАБ-451) показана на рис. 2.5.1.

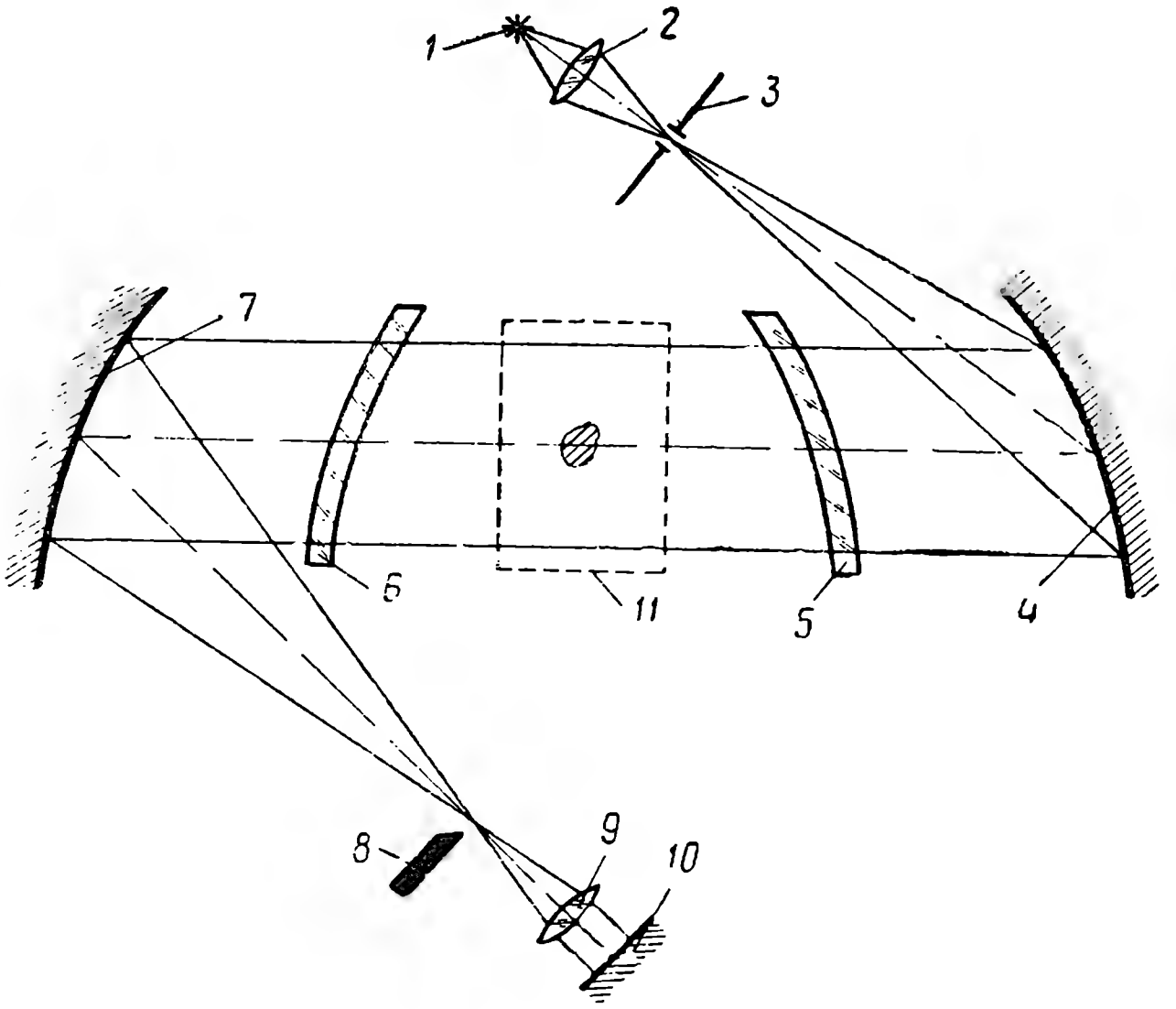


Рис. 2.5.1. Оптическая схема прибора ИАБ-451:

1 — источник света; *2* — конденсор; *3* — щель; *4* — диагональное зеркало осветительной части; *5* — объектив осветительной части; *6* — объектив приемной части; *7* — диагональное зеркало приемной части; *8* — нож Фуко; *9* — фокусирующий объектив; *10* — экран; *11* — исследуемая газовая среда

Его осветительная часть включает источник света *1*, конденсор *2*, входную щель *3*, диагональное зеркало *4* и объектив *5*. В приемную часть прибора входят объектив *6*, диагональное зеркало *7*, непрозрачная пластина (нож Фуко) *8*, фокусирующий объектив *9* и экран *10*. При этом объективы *5*, *6* и диагональные зеркала *4*, *7* выбраны одинаковыми. С помощью фокусирующего объектива *9* добиваются четкого изображения газового потока на экране *10*. Непрозрачная пластина установлена в фокусе объектива приемной части так, что ее кромка параллельна длинной стороне входной щели *3*.

Теневой прибор работает следующим образом. Изображение светящейся нити источника *1* проецируется с помощью конденсора *2* на входную щель. Отраженный от диагонального зеркала свет, пройдя через объектив вдоль оптической оси осветительной части, выходит равномерным параллельным пучком к участку исследуемого газового по-

тока. Лучи света затем попадают в приемную часть и собираются в фокусе объектива *6*. В результате получается четкое изображение участка газового потока на экране *10*.

Перед началом эксперимента лезвие ножа Фуко в фокальной плоскости объектива *6* устанавливается так, чтобы перекрыть часть изображения щели *3* (см. рис. 2.5.1). В таком положении (рис. 2.5.2) нож Фуко отсекает часть лучей и вызывает равномерное затемнение изображения, наблюдаемого на экране.

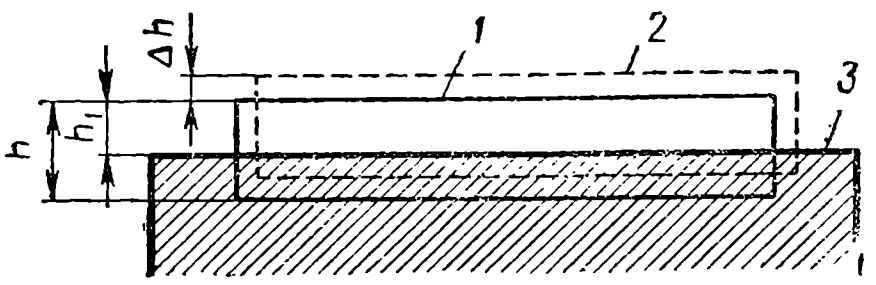


Рис. 2.5.2. Кромка ножа Фуко в теневом приборе:

1 — начальное изображение щели; *2* — смещенное изображение щели; *3* — кромка ножа Фуко

При прохождении лучей света через возмущенную газовую среду с переменной плотностью изменяется их первоначальное направление на угол отклонения ε, что вызывает смещение изображения щели в фокальной плоскости на величину Δh. Если смещение увеличивает высоту части щели над кромкой ножа, то освещенность изображения возрастает. И, наоборот, при смещении изображения к кромке ножа Фуко освещенность уменьшается.

В исследуемом газовом потоке с неравномерным распределением плотностей углы отклонения ε будут не одинаковы для различных участков этого потока. Поэтому будут отличаться соответствующие смещения Δh, а следовательно, неоднородной будет и освещенность изображения. На экране возникает теневая картина этого изображения — отсюда и название измерительного устройства конструкции Д. Д. Максутова — теневой оптический прибор.

Относительное изменение освещенности, или степень контрастности изображения характеризуется отношением изменения количества падающего света к полному световому потоку и определяется зависимостью

$$e = \Delta h/h_1, \qquad (2.5.2)$$

где Δh — смещение изображения щели; h_1 — начальная высота открытой части щели (см. рис. 2.5.2), так как световой поток прямо пропорционально зависит от величины открытой части щели.

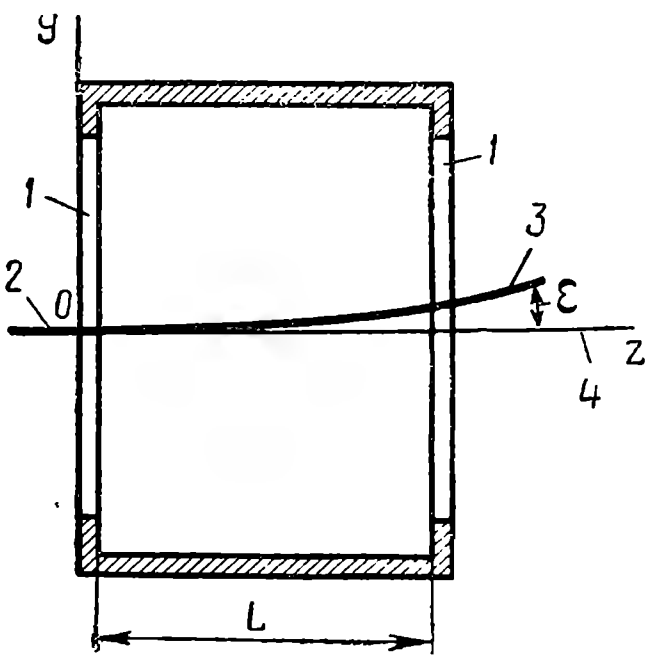


Рис. 2.5.3. Схема преломления светового луча, проходящего через рабочую часть аэродинамической трубы:

1 — смотровое окно; *2* — входящий луч; *3* — выходящий луч; *4* — первоначальное направление луча

Смещение, вызываемое отклонением луча на угол ε,

$$\Delta h = f_2\varepsilon, \qquad (2.5.3)$$

где f_2 — фокусное расстояние объектива приемной части.

С учетом (2.5.2) и (2.5.3) степень контрастности

$$e = f_2\varepsilon/h_1. \qquad (2.5.4)$$

Угол отклонения, зависящий от изменения коэффициента преломления,

$$d\varepsilon = [\mathrm{grad}n \cdot d\bar{s}]/n, \qquad (2.5.5)$$

где $\mathrm{grad}\, n \cdot d\bar{s}$ — скалярное произведение векторов:

$$\mathrm{grad}\, n = i\frac{\partial n}{\partial x} + j\frac{\partial n}{\partial y} + k\frac{\partial n}{\partial z}$$

и $d\bar{s} = idx + jdy + kdz$.

Вектор $d\bar{s}$ определяет элементарную величину и направление пути распространения света в возмущенном потоке газа.

Из решения уравнения (2.5.5) можно определить суммарный угол отклонения при прохождении лучом пути длиной $s=L$ вдоль оси z (рис. 2.5.3):

$$\varepsilon_y = \int_0^L \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{\partial n}{\partial y}\right) dz. \tag{2.5.6}$$

Эту зависимость можно использовать для нахождения угла ε в двухмерном (плоском) потоке, для которого $\partial\rho/\partial z=0$ и, следовательно, $\partial n/\partial z=0$. В соответствии с этим и с учетом (2.5.1) находим

$$\varepsilon = \frac{n_0 - 1}{n_0} \cdot \frac{L}{\rho_0}\left(-\frac{\partial \rho}{\partial y}\right). \tag{2.5.7}$$

Используя это выражение, определим в соответствии с (2.5.4) степень контрастности:

$$e = \frac{f_2}{h_1} \cdot \frac{n_0 - 1}{n_0} \cdot \frac{L}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right). \tag{2.5.8}$$

Формула (2.5.8) характеризует влияние на степень контрастности изменения плотности в направлении, перпендикулярном кромке ножа Фуко. При этом освещенность экрана сохранится одинаковой, если

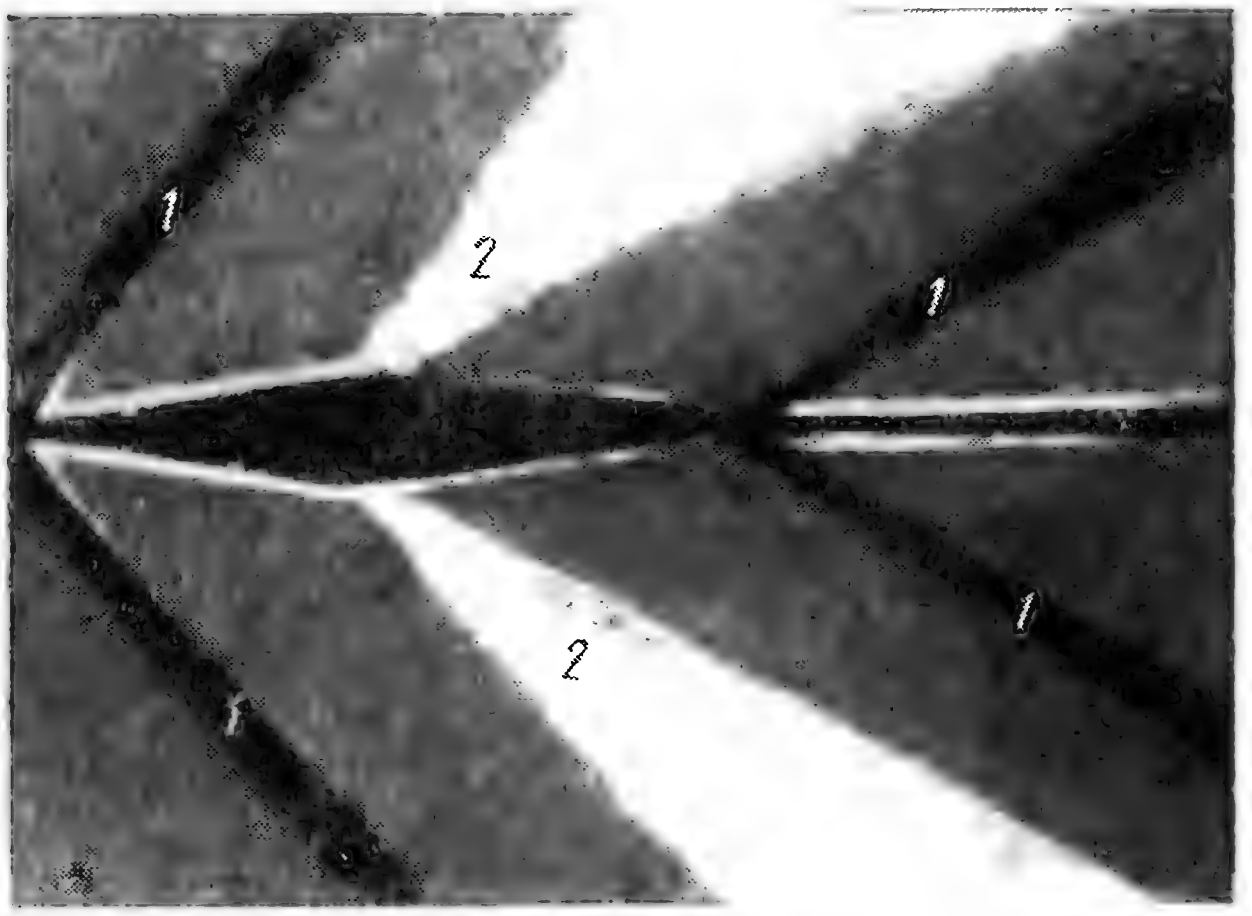


Рис. 2.5.4. Теневая фотография обтекания крыла при установке кромки ножа Фуко перпендикулярно направлению вектора скорости:

1 — скачок уплотнения; *2* — зона разрежения

плотность газа будет изменяться вдоль оси, параллельной кромке ножа. Тогда отклонение света вызовет смещение изображения щели параллельно кромке ножа Фуко.

Сравнением фотографии обтекания модели летательного аппарата и ее начального изображения («нулевой» фотографии) можно опреде-

лить для каждой точки исследуемого участка потока изменение освещенности, затем по формуле (2.5.8) вычислить относительное изменение плотности и, наконец, найти ее абсолютную величину.

Следует сказать, что на практике сравнительно редко используется метод теневых фотографий для количественной оценки плотности и других параметров газовых течений. Наиболее широкое применение этот метод нашел при исследовании аэродинамического спектра, характеризующего качественную картину обтекания. Такие спектры обтекания изображены на теневых фотографиях профиля крыла, расположенного в сверхзвуковом потоке (рис. 2.5.4 и 2.5.5). Одна из них получена при условии, что кромка ножа Фуко устанавливалась перпендикулярно направлению набегающего потока, а вторая — параллельно этому на-

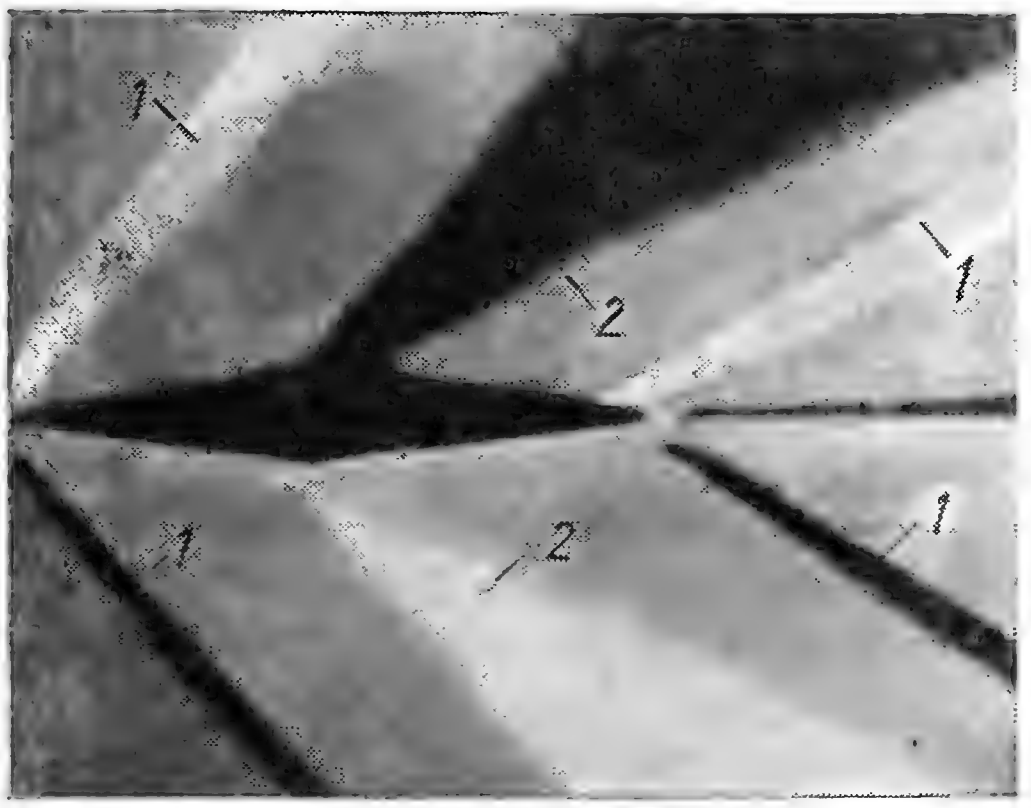


Рис. 2.5.5. Теневая фотография обтекания крыла при установке кромки ножа Фуко параллельно направлению вектора скорости:

1 — скачок уплотнения; *2* — зона разрежения

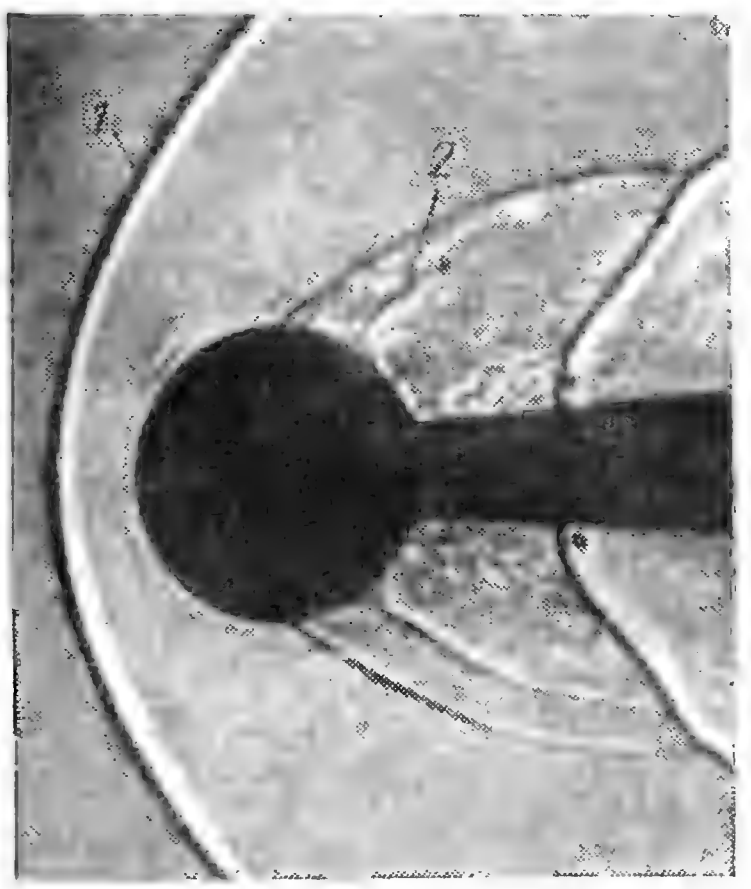


Рис. 2.5.6. Теневая фотография обтекания сферы сверхзвуковым потоком:

1 — отошедший скачок уплотнения; *2* — область отрыва пограничного слоя

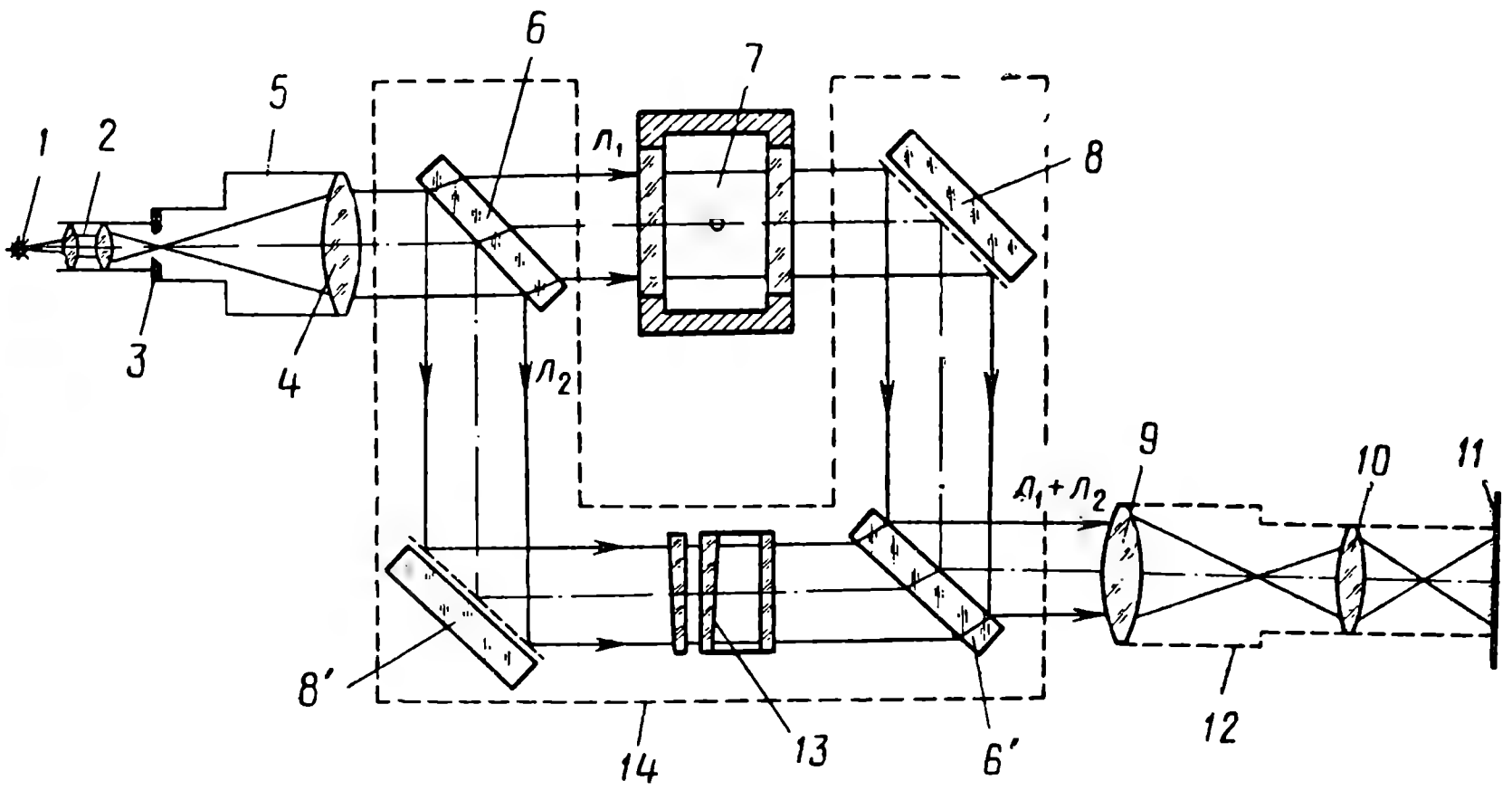


Рис. 2.5.7. Оптическая схема интерферометра:

1 — источник света; *2* — конденсор; *3* — щель; *4* — объектив осветительной части; *5* — осветительная часть (коллиматор); *6*, *6′* — полупрозрачные пластины; *7* — исследуемая газовая среда; *8*, *8′* — зеркала; *9* — объектив приемной части; *10* — фокусирующая линза (объектив); *11* — экран; *12* — приемная часть; *13* — оптический компенсатор; *14* — интерферометр

правлению. Качественно картина обтекания на этих фотографиях характеризуется ясно видными скачками уплотнения и зонами разрежения.

Теневой снимок на рис. 2.5.6 изображает аэродинамический спектр сверхзвукового обтекания сферы. На фотографии хорошо видны отошедший скачок уплотнения и область отрыва потока.

2. Интерферометр системы Маха — Цендера

Работа интерферометров, как и теневых приборов, основана на использовании свойства света изменять свою скорость при прохождении через участки газа с различной плотностью.

Схема интерферометра системы Маха—Цендера изображена на рис. 2.5.7. Этот прибор состоит из осветительного *5* и приемного *12* устройств и собственно интерферометра *14*. В осветительное устройство входят монохроматический источник света *1*, конденсор *2*, щель *3* и объектив *4*.

Свет источника после конденсора, щели и объектива направляется параллельным пучком в собственно интерферометр *14*, который содержит полупрозрачные пластины *6*, *6′*, зеркала *8*, *8′* и оптический компенсатор *13*. Пластина *6* предназначена для разложения света на два взаимноперпендикулярных пучка $л_1$ и $л_2$. Один из этих пучков ($л_1$) после прохождения через область газового течения, последующего отражения от зеркала *8* и пластины *6′* поступает в приемное устройство *12*. Одновременно в него поступает и поток света $л_2$, отраженный от зеркала *8′* и прошедший оптический компенсатор *13* и пластину *6′*. В приемном устройстве *12*, состоящем из объектива *9*, фокусирующей линзы *10* и экрана *11*, происходит интерференция потоков $л_1$ и $л_2$ и формирование изображения исследуемой газовой среды.

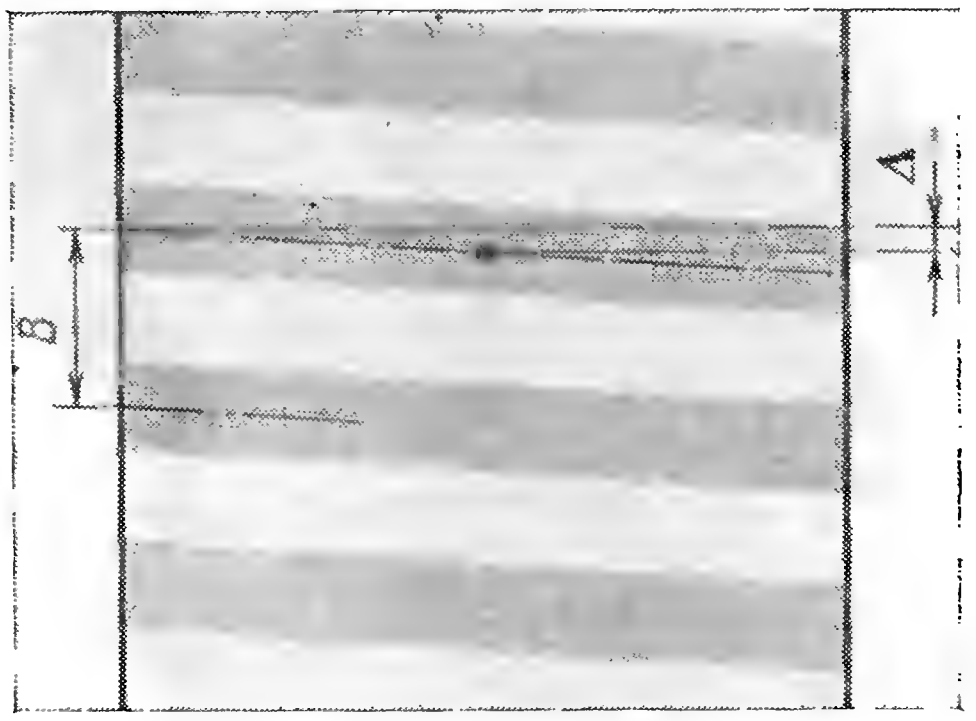


Рис. 2.5.8. Схема расшифровки интерферограмм

Так как лучи $л_1$ и $л_2$ от источника *5* являются когерентными, имея лишь различные фазы световых волн, то изображение на экране будет представлять собой картину из светлых и темных полос. Такое изображение будет четким, если разность фаз равна $\pm 2\pi n$ (где $n=0, 1, 2, \ldots$). Для обеспечения идентичности световых потоков $л_1$ и $л_2$ служит оптический компенсатор.

Будем называть шириной полосы B расстояние между серединами двух соседних полос (рис. 2.5.8):

$$B = \lambda/\alpha, \qquad (2.5.9)$$

где λ — длина волны монохроматического источника света; α — угол между лучами $л_1$ и $л_2$ после прохождения ими пластины *6′*.

Обычно во время эксперимента длина волны $\lambda = \text{const}$, а величина α изменяется при повороте полупрозрачной пластины *6′* (см. рис. 2.5.7). Если $\alpha = 0$ и лучи света $л_1$, $л_2$ параллельны друг другу, то экран имеет равномерную освещенность и на нем будет интерференционное изображение, характеризующееся полосой бесконечной ширины. Если лучи света $л_1$ проходят через невозмущенный газовый поток, то на экране наблюдается картина из равномерно распределенных полос конеч-

ной ширины. В возмущенном течении характер этого распределения изменится. В таком течении с переменной плотностью вследствие изменения скорости света время его прохождения через исследуемую часть потока будет отличаться на величину.

$$\Delta t = L\,(1/c - 1/c_{\text{н}}), \tag{2.5.10}$$

где L — длина пути света в газовом потоке; c и $c_{\text{н}}$ — скорости света соответственно в возмущенном и невозмущенном потоках.

Разность времени, определяемая по выражению (2.5.10), вызовет смещение интерференционных полос на некоторую величину Δ (см. рис. 2.5.8), определяемую из соотношения

$$\bar{\Delta} = \Delta/B = f\Delta t, \tag{2.5.11}$$

в котором f — частота монохроматического света. Учитывая, что согласно (2.5.11)

$$\Delta t = \bar{\Delta}/f,$$

можно из (2.5.10) получить

$$\bar{\Delta}/f = L\,(1/c - 1/c_{\text{н}}). \tag{2.5.12}$$

Умножив обе части этого равенства на скорость света в пустоте, найдем выражение

$$\bar{\Delta}c_0/f = L\,(n - n_0) = L\cdot\Delta n. \tag{2.5.13}$$

Введем обозначение $\lambda_0 = c_0/f$ для длины волны монохроматического света, в соответствии с которым

$$\bar{\Delta}\lambda_0 = L\cdot\Delta n. \tag{2.5.14}$$

Изменение коэффициента преломления найдем, продифференцировав (2.5.1):

$$dn = (n_0 - 1)\,d\rho/\rho_0. \tag{2.5.15}$$

Так как для воздуха при $T_0 = 288$ К значение $\rho_0 = 0{,}125$ $кГ\cdot сек^2/м^4$ и $n_0 = 1{,}000294$, то

$$dn = 0{,}00235 d\rho. \tag{2.5.16}$$

Из (2.5.14) с учетом (2.5.16) можно найти изменение плотности воздуха:

$$\Delta\rho = \lambda_0\bar{\Delta}/(0{,}00235L). \tag{2.5.17}$$

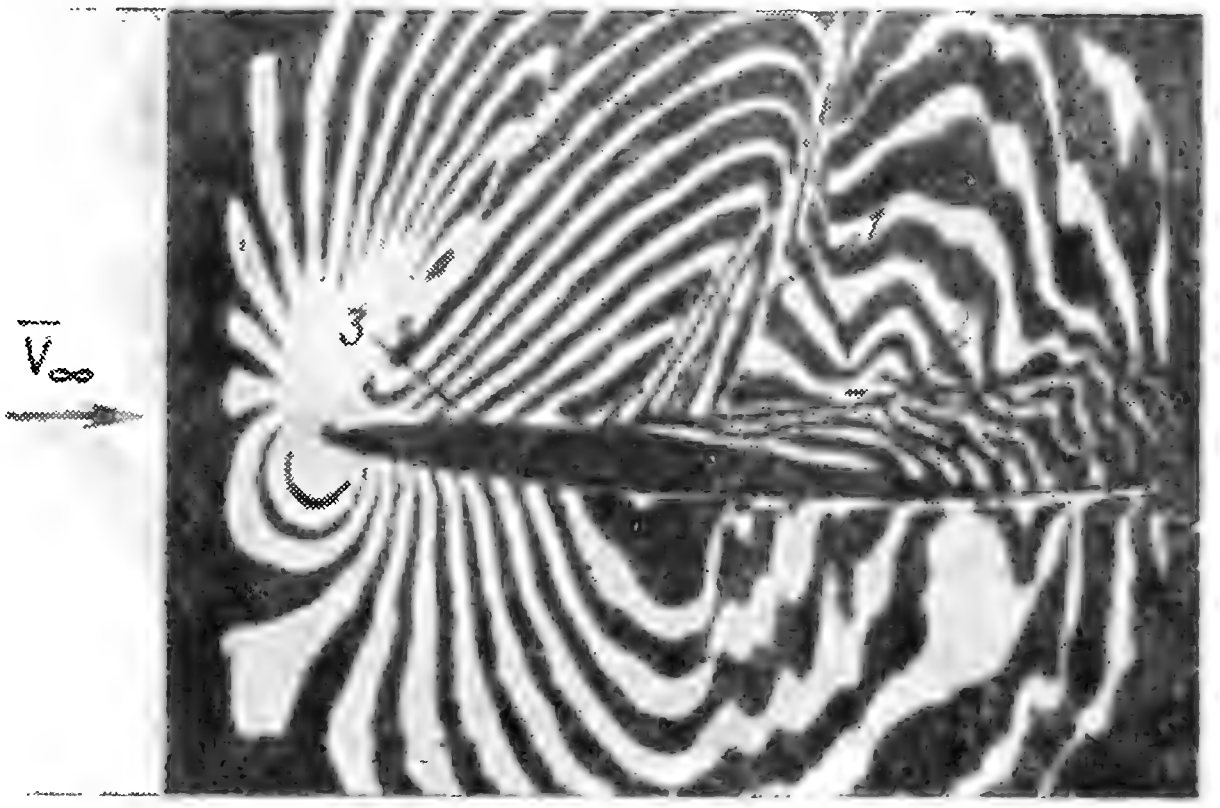


Рис. 2.5.9. Интерферограмма обтекания профиля:
1 — λ-образный скачок уплотнения; *2* — зона отрыва пограничного слоя; *3* — исследуемый профиль

Если, в частности, исследуется воздушный поток в аэродинамической трубе с поперечным размером $L=400$ *мм* и в интерферометре используется монохроматический источник зеленого света с длиной волны $\lambda_0=5{,}5\cdot10^{-4}$ *мм*, то относительному смещению полосы $\bar{\Delta}=1$ будет соответствовать изменение плотности

$$\Delta\rho=\frac{5{,}5\cdot10^{-4}\cdot1}{0{,}00235\cdot400}=5{,}85\cdot10^{-4}\ \frac{кГ\cdot сек^2}{м^4}.$$

При расшифровке интерферограмм относительное смещение полос может быть определено с точностью до $10\div15\%$, что соответствует возможной ошибке при нахождении плотности.

На рис. 2.5.9 показана интерферограмма обтекания профиля газовым потоком при использовании монохроматического источника света. По этой интерферограмме можно судить о качественных особенностях потока. На ней, в частности, виден λ-образный скачок уплотнения, за которым происходит срыв пограничного слоя.

Интерферограмма позволяет также получить представление о характере изменения плотности в исследуемой области потока и наряду с этим найти по смещению полос при помощи (2.5.17) величину изменения этой плотности. Затем по уравнению состояния могут быть рассчитаны остальные параметры потока.

При исследовании газодинамических процессов, характеризующихся скачкообразным изменением параметров и относительным сдвигом полос, превышающим величину $\bar{\Delta}=1$, применяется источник белого света. Так как такой свет слагается из световых лучей с различными длинами волн λ, то на экране наблюдается многоцветная интерференционная картина, которая симметрична относительно центральной полосы. При этом различие в полосах хорошо видно и на черно-белой фотографии (рис. 2.5.10).

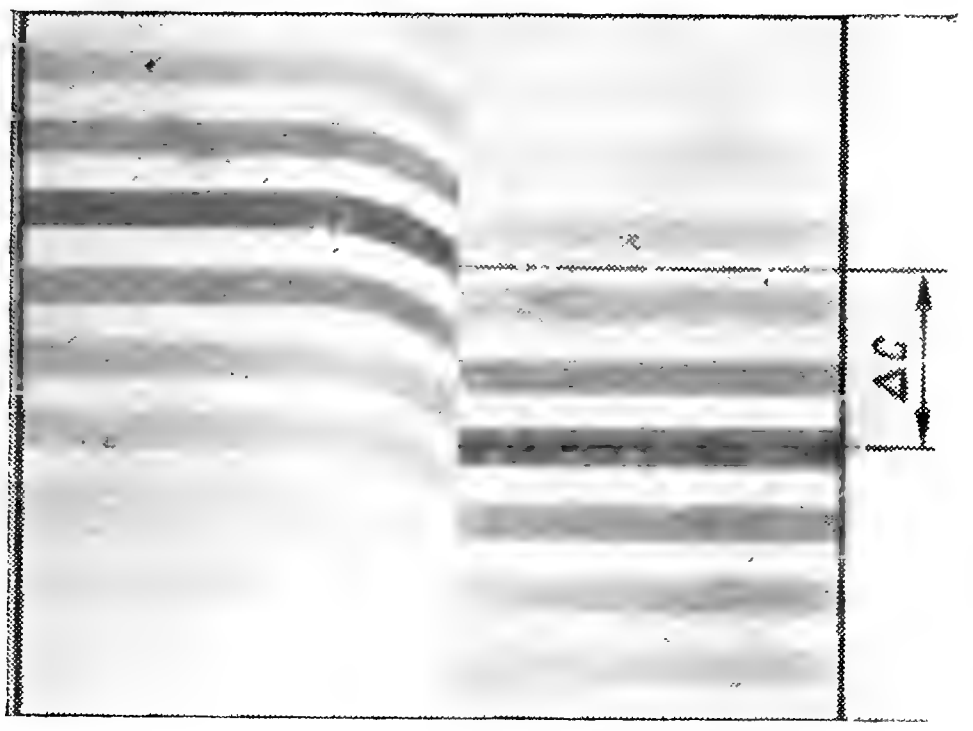


Рис. 2.5.10. Интерферограмма скачка уплотнения, сделанная с источником белого света (Δ_c — смещение центральной полосы на скачке)

Скачок уплотнения вызовет смещение интерференционной картины, на которой можно отыскать центральную полосу, измерить ее смещение Δ_c относительно первоначального положения, а затем по величине этого изменения определить соответствующее изменение плотности за скачком.

При проведении расчетов следует иметь в виду, что зависимости (2.5.11)÷(2.5.17) справедливы для двухмерных плоских потоков. В принципе рассмотренная методика определения плотности по интерферограмме пригодна и для двухмерных пространственных (осесимметричных) течений. С этой методикой можно познакомиться по специальной литературе [3], [47].

Достаточно трудоемкие вычислительные операции, предусматриваемые интерференционным методом, целесообразно осуществлять на электронно-вычислительных машинах, а расшифровку интерферограмм (измерение смещения полос) вести с применением специальных технических средств.

ГЛАВА III

ТЕХНИКА И МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ГАЗОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

В основе экспериментальных исследований в аэродинамике лежит использование воздушного (газового) потока аэродинамических труб для целей измерения параметров обтекания моделей летательных аппаратов. В связи с этим особое значение имеют подбор наиболее совершенных измерительных приборов и устройств, правильная их эксплуатация, разработка и реализация правил проведения эксперимента, т. е. все то, что объединяют под общим понятием техники и методики измерений.

К числу мероприятий, связанных с проведением аэродинамического эксперимента, относится подготовка необходимой измерительной аппаратуры: проверка ее технической готовности, наладка и тарировка. Одновременно разрабатывается последовательность операций при работе с этой аппаратурой, которая должна быть реализована при осуществлении измерений. Важным элементом подготовки к такому эксперименту является измерение параметров потока в рабочей части аэродинамической трубы, который рассматривается как набегающий (невозмущенный) при исследовании обтекания моделей. На основании данных такого измерения могут осуществляться меры по улучшению свойств потока, а именно обеспечению параллельности и равномерности течения, снижения степени турбулентности, достижения заданных величин чисел Маха и Рейнольдса и др.

§ 3.1. ТАРИРОВКА ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ И УСТРОЙСТВ

Тарировка измерительного прибора позволяет установить степень соответствия его показаний действительным значениям измеряемых физических величин, причем такие значения могут определяться различными способами, в частности, измерениями при помощи эталонных приборов.

При тарировке измерительного прибора одновременно определяется его чувствительность, которая также может сравниваться с аналогичной характеристикой эталонного прибора.

Работа 3.1.1

Тарировка жидкостного микроманометра

Цель работы — установить зависимость показаний микроманометра от величины измеряемого давления и осуществить его тарировку. По результатам работы составляются таблицы опытных данных, строится тарировочный график и определяется тарировочный коэффициент.

Общие сведения

Наиболее распространенной в практике применения манометров является их тарировка способом доливания жидкости или по методу сравнения показаний этих манометров с эталонным.

По первому способу в чашку микроманометра (см. рис. 2.1.2) доливают некоторое количество жидкости. Если площадь чашки F, то уровень в ней изменится на величину

$$\Delta l = W/(\gamma F), \tag{3.1.1}$$

где W — объем долитой жидкости; γ — ее удельный вес.

Повышение уровня жидкости эквивалентно увеличению давления в узкой трубке, равному

$$\Delta p = \Delta l \gamma, \tag{3.1.2}$$

но с учетом (2.1.10)

$$\Delta p = K_э \Delta h_э,$$

где индексом «э» обозначены рассчитываемые показания отсчетной трубки микроманометра, которые рассматриваются как эталонные. Тогда в соответствии с (3.1.1) и (3.1.2)

$$\Delta h_э = \Delta l \gamma / K_э = W/(K_э F). \qquad (3.1.3)$$

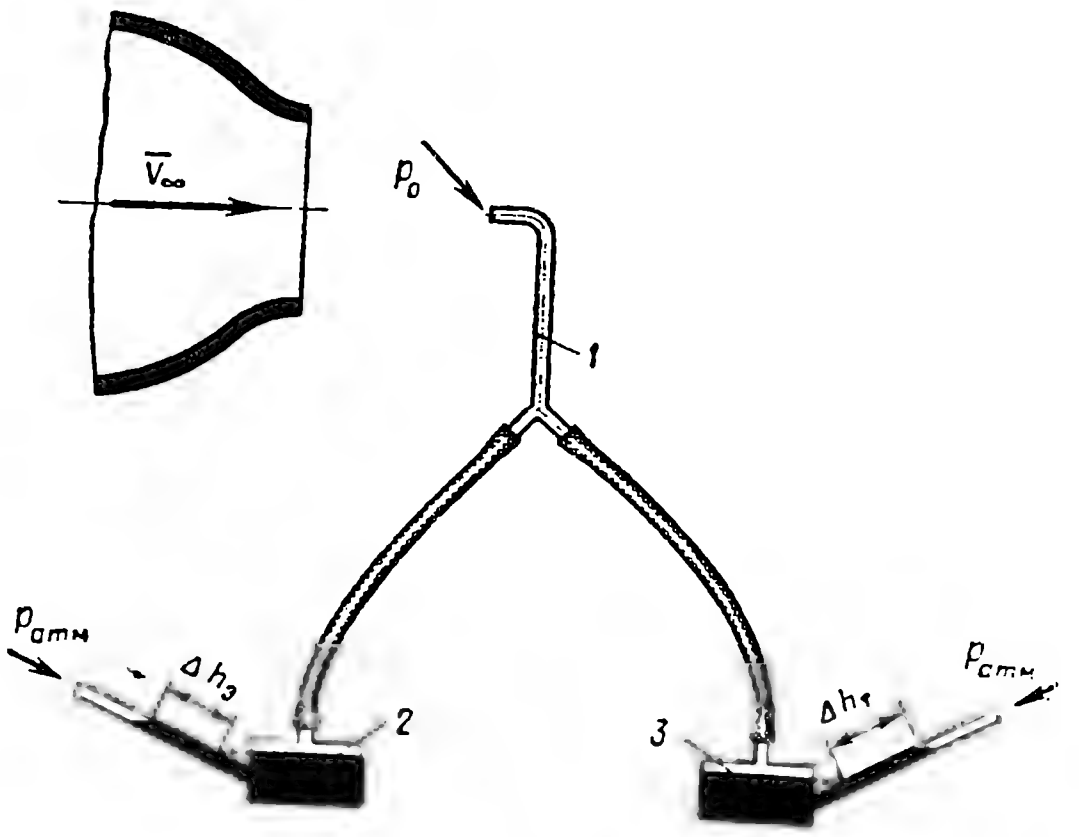


Рис. 3.1.1. Схема тарировки микроманометра:
1 — насадок полного напора; *2* — эталонный микроманометр; *3* — тарируемый микроманометр

Во время тарировки после доливания фиксированных объемов жидкости в чашку микроманометра записывают соответствующие экспериментальные показания $h_т$ и затем по начальному показанию h_0 вычисляют разность $\Delta h_т = h_т - h_0$. Эту разность сравнивают с расчетными значениями $\Delta h_э$, определяемыми из выражения (3.1.3).

Отношение эталонной величины $\Delta h_э$ к значению $\Delta h_т$ определяет тарировочный коэффициент микроманометра.

$$k_т = \Delta h_э / \Delta h_т. \qquad (3.1.4)$$

Более широкое применение в практике получила тарировка по методу сравнения показаний исследуемого микроманометра с эталонным при измерении ими одного и того же давления. На рис. 3.1.1 приведена схема соединения приборов для проведения такой тарировки. Согласно этой схеме перепад давлений, измеряемый эталонным манометром и равный

$$p_0 - p_{атм} = K_э \cdot \Delta h_э, \qquad (3.1.5)$$

сравнивается с показаниями тарируемого манометра

$$p_0 - p_{атм} = k_т K_т \cdot \Delta h_т, \qquad (3.1.6))$$

где коэффициенты $K_э$ и $K_т$ соответственно для эталонного и тарируемого манометров определяются по (2.1.9). В результате этого сравнения находим

$$K_э \cdot \Delta h_э = k_т K_т \cdot \Delta h_т, \qquad (3.1.7)$$

откуда тарировочный коэффициент

$$k_т = K_э \cdot \Delta h_э / (K_т \cdot \Delta h_т). \qquad (3.1.8)$$

Вводя обозначение

$$\operatorname{tg} \varphi = \Delta h_э / (\Delta h_т), \qquad (3.1.9)$$

получим

$$k_т = (K_э / K_т) \operatorname{tg} \varphi. \qquad (3.1.10)$$

Во время эксперимента снимают показания микроманометров при различных давлениях и определяют зависимость $\Delta h_э = f(\Delta h_т)$, по которой строят тарировочный график.

Выражение (3.1.10), определяющее постоянное значение коэффициента $k_т$ для всего диапазона измеряемых давлений, будет соответствовать тарировочному графику в виде прямой линии, наклоненной под углом φ к оси, на которой откладывается $\Delta h_т$. Тарировочный коэффициент $k_т$ может быть вычислен по экспериментальным данным при помощи выражения

$$k_т = \frac{\sum_{i=1}^{n} K_э^2 \cdot \Delta h_{эi}^2}{\sum_{i=1}^{n} K_э K_т \cdot \Delta h_{эi} \cdot \Delta h_{тi}}. \qquad (3.1.11)$$

Все тарировочные данные необходимо дополнить поправками, учитывающими изменение удельного веса жидкости за счет температуры, по формуле

$$\gamma = \gamma_н / [1 + \beta (t - t_н)], \qquad (3.1.12)$$

где $\gamma_н$ и γ — удельные веса жидкости соответственно при некоторой начальной температуре $t_н$ и температуре эксперимента t; β — коэффициент объемного расширения жидкости.

Если измерение производится при температуре t, то в соответствии с показаниями манометра

$$p_0 - p_{атм} = k_т K_т^t \cdot \Delta h_т, \qquad (3.1.13)$$

где величина $K_т^t$ находится из (2.1.9) по удельному весу γ, определяемому согласно (3.1.12). Эту величину можно представить в виде

$$K_т^t = K_т \gamma / \gamma_н, \qquad (3.1.14)$$

где $K_т$ — коэффициент (2.1.9), вычисляемый для температуры $t_н$, при которой осуществлялась тарировка. Введя обозначение

$$k_t = \frac{\gamma}{\gamma_н} = \frac{1}{1 + \beta (t - t_н)}, \qquad (3.1.15)$$

получим зависимость для расчета перепада давлений в виде

$$p_0 - p_{атм} = k K_т \cdot \Delta h_т, \qquad (3.1.16)$$

где поправочный коэффициент

$$k = k_т k_t. \qquad (3.1.17)$$

Порядок проведения работы

Тарировка по способу доливания.

1. Ознакомиться с устройством микроманометра и проверить его готовность к работе.
2. Снять крышку чашки микроманометра и штангенциркулем измерить ее размеры.
3. Измерить температуру в лаборатории $t_н$. Зафиксировать начальный уровень в отсчетном колене микроманометра h_0.
4. Доливая в чашку фиксированные объемы жидкости, записать соответствующие показания микроманометра $h_т$.
5. Определить перепады уровней $\Delta h_т = h_т - h_0$ и вычислить $\Delta h_э$ из (3.1.3); по этим данным построить график $\Delta h_э = f(\Delta h_т)$ и рассчитать тарировочный коэффициент.

Тарировка по методу сравнения с эталонным манометром.

1. Ознакомиться с устройством аэродинамической трубы, насадка полного давления и манометров; проверить их готовность к работе.
2. Закрепить насадок полного давления в рабочей части аэродинамической трубы.

3. Установить эталонный и тарируемый микроманометры; подсоединить их при помощи резиновых шлангов к насадку и проверить герметичность соединений.

4. Измерить температуру в лаборатории $t_н$; зафиксировать начальные уровни в отсчетных коленах манометров ($h_{0э}$ и $h_{0т}$) и включить аэродинамическую трубу.

5. После выхода трубы на режим установившегося течения в рабочей части записать соответствующие показания микроманометров ($h_э$ и $h_т$), а затем выключить трубу.

6. Изменить условия работы аэродинамической трубы, при которых возросло бы (или, наоборот, уменьшилось) измеряемое давление, и осуществить аналогичные замеры обоими манометрами.

7. По экспериментальным данным $\Delta h_э$ и $\Delta h_т$ построить график $\Delta h_э = f(\Delta h_т)$ и рассчитать тарировочный коэффициент.

Пример. Рассмотрим тарировку по способу доливания чашечного микроманометра, показанного на рис. 2.1.3. Тарировка проводилась в помещении с температурой $t_н = 19°$ С. В качестве манометрической жидкости использовался спирт с $\gamma = 0{,}8095$ *кГ/дм*^{3}, который доливался в чашку из мензурки с ценой деления 1 *см*^{3}. Внутренний диаметр чашки микроманометра равен 100 *мм*, а ее площадь 78,5 *см*^{2}. Результаты измерений уровней $h_т$ и расчетов $\Delta h_э$, $\Delta h_т$ для значения $K_т = K_э = 0{,}1$ приведены в табл. А.

Таблица А

Номера замеров	1	2	3	4
h_0	3	3	3	3
$h_т$	26	54	81	106
$\Delta h_т$, *мм*	23	51	78	103
W, *см*^{3}	18	40	61	80
$\Delta h_э$, *мм*	22,9	51,0	77,7	102

Используя данные табл. А, по формуле (3.1.11) определяем тарировочный коэффициент:

$$k_т = \frac{\sum_1^4 \Delta h_э^2}{\sum_1^4 \Delta h_т \cdot \Delta h_э} = \frac{22{,}9^2 + 51^2 + 77{,}7^2 + 102^2}{23 \cdot 22{,}9 + 51 \cdot 51 + 77{,}7 \cdot 78 + 102 \cdot 103} = 0{,}996.$$

Проведем тарировку того же чашечного микроманометра (см. рис. 2.1.3) по методу сравнения с эталонным прибором для измерения давления. Причем в качестве такого прибора выберем аналогичный чашечный микроманометр, показания которого рассматриваются как точные.

Тарировка осуществлялась в вентиляторной малоскоростной аэродинамической трубе с открытой рабочей частью. Изменение скорости потока в этой трубе осуществлялось путем регулирования числа оборотов электродвигателя вентилятора с помощью реостата. В качестве приемника давления использовался насадок полного напора (см рис. 2.1.31). Общее число проведенных замеров давления манометрами составило пять. При этом каждому последующему замеру соответствовало включение двигателя вентилятора на большее число оборотов, при которых увеличивался перепад уровней в отсчетных трубках. Максимальное число оборотов выбиралось таким, чтобы возникающий полный напор потока не вызывал подъема уровня жидкости в этих трубках за пределы отсчетной шкалы.

Данные отсчета показаний уровней эталонного $h_э$ и тарируемого $h_т$ манометров, их начальных значений $h_{0э}$ и $h_{0т}$, а также результаты вычисления соответствующей разности уровней $\Delta h_э$ и $\Delta h_т$ приведены в табл. Б.

Таблица Б

Номера замеров	1	2	3	4	5
$h_{0э}$	10	10	10	10	10
$h_э$	20	30	61	111	195
$\Delta h_э$, *мм*	10	20	51	101	185
$h_{0т}$	11	11	11	11	11
$h_т$	19	26	49	86	148
$\Delta h_т$, *мм*	8	15	38	75	137

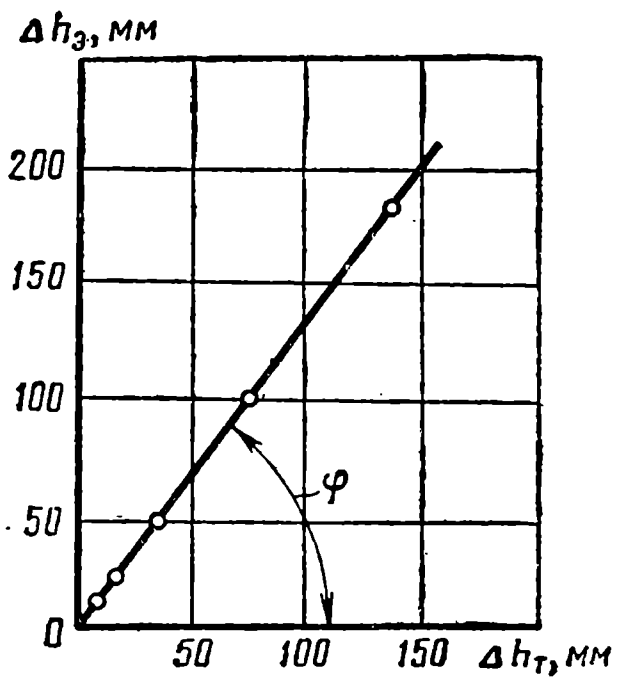


Рис. 3.1.2. Тарировочный график чашечного микроманометра

По результатам табл. Б на рис. 3.1.2 построен тарировочный график, из которого находим $\operatorname{tg}\varphi = 1{,}35$. По этой величине, а также значениям $K_э = 0{,}3$ и $K_т = 0{,}4$, которые известны для манометров и соответствуют выбранным углам наклона их отсчетных трубок, определяем по (3.1.10) тарировочный коэффициент:

$$k_т = (K_э/K_т)\operatorname{tg}\varphi = (0{,}3/0{,}4)\,1{,}35 = 1{,}01.$$

Это значение $k_т$ соответствует температуре $t_н = 15°$ С, при которой проводилось тарирование. Для этой же температуры были вычислены коэффициенты $K_э$ и $K_т$.

По данным измерений $\Delta h_э$ и $\Delta h_т$ тарировочный коэффициент может быть определен также при помощи формулы (3.1.11). Внося в нее соответствующие данные, получим

$$k_т = \frac{K_э \sum\limits_1^5 \Delta h_э^2}{K_т \sum\limits_1^5 \Delta h_э \cdot \Delta h_т} = \frac{0{,}3\,(10^2 + 20^2 + 51^2 + 101^2 + 185^2)}{0{,}4\,(10 \cdot 8 + 20 \cdot 15 + 51 \cdot 38 + 101 \cdot 75 + 185 \cdot 137)} = 1{,}012.$$

Как видим, с точностью до второго десятичного знака получен такой же результат, что и по тарировочному графику.

Предположим, что измерения тарируемым манометром осуществлены в лаборатории при температуре $t = 25°$ С. В этом случае отношения удельных весов жидкости (этилового спирта)

$$\frac{\gamma}{\gamma_н} = \frac{1}{1 + \beta\,(t - t_н)} = \frac{1}{1 + 0{,}0011\,(25° - 15°)} = 0{,}99.$$

Тогда, согласно (3.1.17), тарировочный коэффициент с учетом температурной поправки будет

$$k = k_т\, k_t = 1{,}01 \cdot 0{,}99 = 1{,}0.$$

Работа 3.1.2
Тарировка насадков

Цель работы — установить соответствие показаний тарируемого и эталонного насадков и найти степень влияния отклонения оси насадка от направления скорости набегающего потока на показания манометра, соединенного с этим насадком. Результаты работы должны быть представлены в виде соответствующих таблиц экспериментальных данных, а также тарировочных графиков.

Общие сведения

Тарировка насадка заключается в сравнении давления, измеренного при помощи этого насадка, с соответствующим значением, показанным манометром, подсоединенным к эталонному насадку. Во время тарировки оба насадка (приемника давления) устанавливаются в рабочей части аэродинамической трубы строго параллельно друг другу. Схема расположения этих насадков и соединения их с манометрами показана на рис. 3.1.3.

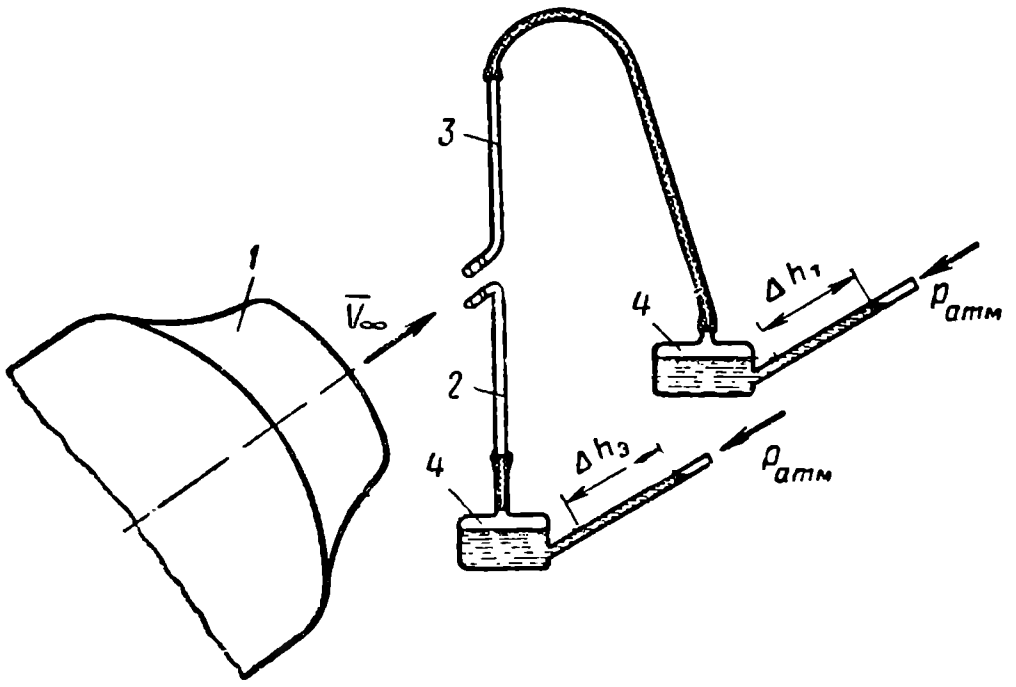


Рис. 3.1.3. Схема расположения насадков при тарировке:

1 — аэродинамическая труба; *2* — эталонный насадок; *3* — тарируемый насадок; *4* — микроманометры

Если $\Delta p_э = p_э - p_{атм}$ — действительное избыточное давление, измеренное манометром, соединенным с эталонным насадком, а разность $\Delta p_т = p_т - p_{атм}$ соответствует показаниям манометра, соединенного с

тарируемым насадком, то тарировочный коэффициент этого насадка определяется в виде отношения

$$\zeta_т = \Delta p_э / \Delta p_т. \tag{3.1.18}$$

Используемые манометры, соединенные с соответствующими эталонным и тарируемым насадками, должны быть предварительно протарированы, т. е. для них должны быть известны тарировочные коэффициенты $k_т^э$ и $k_т^т$. Кроме того, в частности для чашечных микроманометров, должны быть известны также значения коэффициентов $K_э$ и $K_т$, найденные по формуле (2.1.9). С учетом этого избыточные давления, измеренные обоими манометрами, будут определяться по выражениям:

$$p_э - p_{атм} = k_т^э K_э \cdot \Delta h_э; \tag{3.1.19}$$

$$p_т - p_{атм} = k_т^т K_т \cdot \Delta h_т. \tag{3.1.20}$$

С учетом этих выражений тарировочный коэффициент (3.1.18)

$$\zeta_т = \frac{k_т^э K_э}{k_т^т K_т} \operatorname{tg} \varphi, \tag{3.1.21}$$

где

$$\operatorname{tg} \varphi = \Delta h_э / \Delta h_т.$$

Обычно тарировка осуществляется по результатам нескольких замеров уровней в отсчетных коленах манометров. По этим результатам можно определить соответствующий тарировочный коэффициент насадка при помощи зависимости, аналогичной (3.1.11),

$$\zeta_т = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(k_т^э K_э\right)^2 \Delta h_{эi}^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} k_т^э k_т^т K_э K_т \cdot \Delta h_{эi} \cdot \Delta h_{тi}}. \tag{3.1.22}$$

Угловую характеристику насадка, которая определяет зависимость измеряемого им давления от его отклонения относительно направления скорости набегающего потока, можно представить в виде некоторой функции от угла α этого отклонения:

$$f(\alpha) = \left(\Delta p_\alpha - \Delta p_{\alpha=0}\right) / \Delta p_{\alpha=0}, \tag{3.1.23}$$

где $\Delta p_{\alpha=0} = p_{\alpha=0} - p_{атм}$ и $\Delta p_\alpha = p_\alpha - p_{атм}$ — избыточные давления, измеряемые насадками соответственно при $\alpha = 0$ и $\alpha \neq 0$.

При экспериментальном определении угловой характеристики насадок (приемник давления) закрепляется на координатнике — специальном устройстве, позволяющем изменять наклон этого насадка в рабочей части аэродинамической трубы. Если при некотором угле α этого наклона избыточное давление, измеренное микроманометром,

$$\Delta p_\alpha = p_\alpha - p_{атм} = k_т^т K_т \cdot \Delta h_\alpha,$$

а при $\alpha = 0$

$$\Delta p_{\alpha=0} = p_{\alpha=0} - p_{атм} = k_т^т K_т \cdot \Delta h_{\alpha=0},$$

то выражение (3.1.23) примет вид

$$f(\alpha) = \left(\Delta h_\alpha - \Delta h_{\alpha=0}\right) / \Delta h_{\alpha=0}, \tag{3.1.24}$$

где $\Delta h_\alpha = h_\alpha - h_0$; $\Delta h_{\alpha=0} = h_{\alpha=0} - h_0$.

По данным измерений строится график функции $f(\alpha)$, представляющий собой угловую характеристику. При помощи этого графика можно определить экспериментальную «зону нечувствительности», т. е. интер-

вал углов α, в котором ошибка измерений не превышает заданной величины (ее величина равна примерно $\pm 1 \div 1{,}5\%$).

Обычно определение такой угловой характеристики, как и тарировка насадка, осуществляются для различных чисел Маха потока в рабочей части аэродинамической трубы.

Порядок проведения работы

1. Ознакомиться со схемой тарировочной установки, устройством микроманометров и насадков и проверить их готовность к работе.

2. Закрепить на координатниках оба насадка и установить их в середине рабочей части аэродинамической трубы параллельно друг другу.

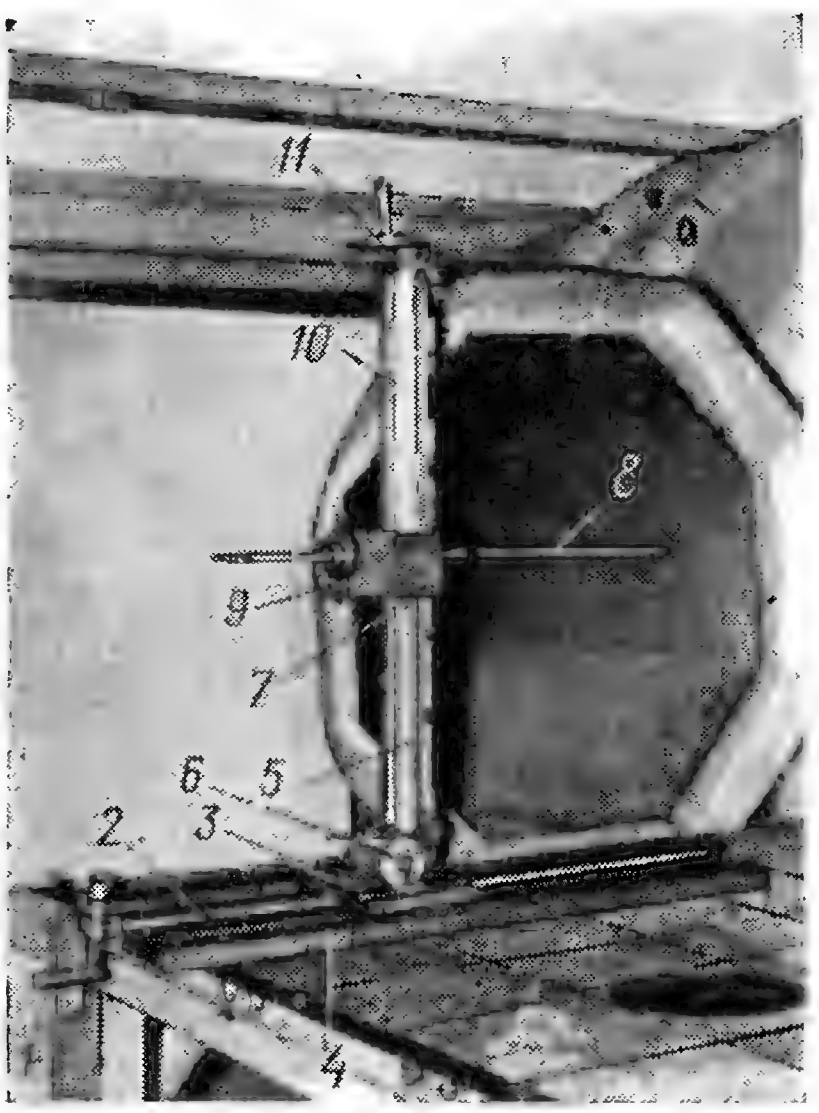


Рис. 3.1.4. Координатник:

1 — рукоятка горизонтального перемещения; *2* — горизонтальный ходовой винт; *3*—каретка; *4*—основание; *5*—стойка; *6* — маховик; *7* — корпус; *8* — насадок; *9* — маховик задания углов атаки; *10* — вертикальный ходовой винт; *11* — рукоятка вертикального перемещения

3. Соединить с помощью резиновых шлангов насадки и микроманометры и проверить герметичность этого соединения; снять начальные показания микроманометров $h_{0э}$ и $h_{0т}$.

4. Включить аэродинамическую трубу и произвести замеры показаний обоих манометров $h_э$ и $h_т$ при различных скоростях воздушного потока в рабочей части; выключить трубу.

5. Оставив в рабочей части только один насадок, включить трубу и осуществить замеры показаний манометра h_α при одной и той же скорости, но для нескольких значений углов наклона насадка (углов атаки α), устанавливаемых с помощью координатника. Аналогичные измерения провести при других скоростях воздушного потока.

6. По результатам замеров вычислить разности $\Delta h_э = h_э - h_{0э}$ и $\Delta h_т = h_т - h_{0т}$, построить график зависимости $\Delta h_э = f(\Delta h_т)$, определить угол φ наклона тарировочной прямой и по формуле (3.1.21) найти соответствующий тарировочный коэффициент насадка. Этот же коэффициент рассчитать по выражению (3.1.22).

7. По опытным данным определить разности уровней $\Delta h_{\alpha=0} = h_{\alpha=0} - h_0$, $\Delta h_\alpha = h_\alpha - h_0$ (где h_0 — начальный уровень манометра, равный $h_{0т}$) и вычислить значения функции $f(\alpha)$ (3.1.24).

8. Для каждой скорости построить по этим значениям $f(\alpha)$ угловые характеристики насадка.

Пример. Рассмотрим тарировку насадка (см. рис. 2.1.33) в малоскоростной аэродинамической трубе с открытой рабочей частью. В качестве эталонного был взят аналогичный насадок, подключенный к чашечному микроманометру с тарировочным коэффициентом $k_т^э = 1{,}0$ и величиной $K_э$ (2.1.9), равной 0,8. Соответствующие значения для манометра, соединенного с тарируемым насадком, равны $k_т^т = 1{,}0$ и $K_т = 0{,}8$.

Эталонный и тарируемый насадки устанавливались в рабочей части трубы при помощи двух координатников. Одна из возможных конструкций координатника показана на рис. 3.1.4. Основание *4* этого координатника закреплялось на горизонтальном столе, расположенном под рабочей частью. Вращением рукоятки *1* приводился в действие горизонтальный ходовой винт *2*, который перемещал каретку *3* и связанный с ней насадок

8 в горизонтальном направлении в поперечной плоскости потока. Насадок закреплялся в корпусе *7*, который двигался в вертикальном направлении по стойке *5*, как по направляющей, при вращении рукояткой *11* ходового винта *10*.

Наклон насадка в вертикальной плоскости потока (на угол атаки α) изменялся при помощи поворотного устройства, смонтированного в корпусе. Вращением маховика *9* приводилась в движение червячная пара, которая поворачивала на нужный угол связанный с ней насадок. Отсчет углов производился по шкале на втулке червячного колеса при помощи неподвижного указателя, закрепленного на корпусе. Поворотом маховика *6* осуществлялся поворот насадка в горизонтальной плоскости потока (на угол скольжения β).

Схема установки насадков в рабочей части трубы и соединения их с манометрами, показанная на рис. 3.1.3, сохранялась при проведении замеров обоими манометрами, изменялось лишь число оборотов вентилятора трубы, что позволяло регулировать скорость потока. Данные замеров, т. е. показания отсчетных трубок тарируемого $h_т$ и эталонного $h_э$ манометров, их начальные уровни $h_{0т}$ и $h_{0э}$, а также результаты расчета разностей $\Delta h_т$ и $\Delta h_э$ приведены в табл. А.

Таблица А

Номера замеров	1	2	3	4
$h_{0э}$	11	11	11	11
$h_э$	33	75	134	183
$\Delta h_э$, *мм*	22	64	123	172
$h_{0т}$	12	12	12	12
$h_т$	34	76	135	184
$\Delta h_т$, *мм*	22	64	123	172

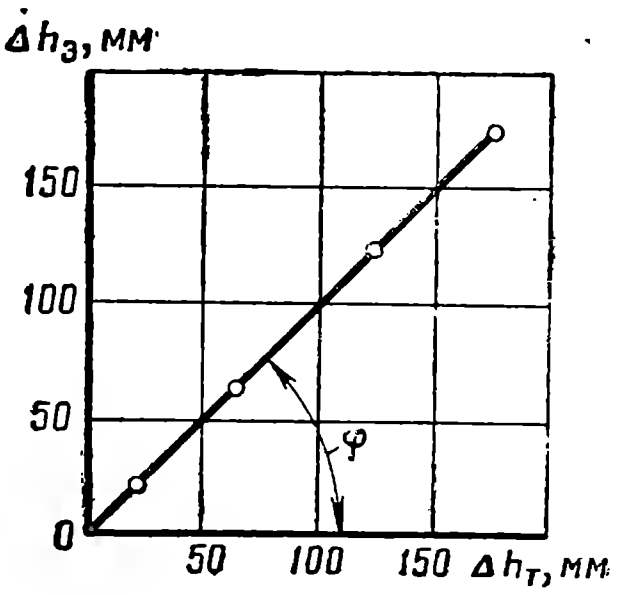


Рис. 3.1.5. Тарировочный график насадка

По данным табл. А построен тарировочный график (рис. 3.1.5). Угол наклона тарировочной прямой $\varphi=45°$, следовательно, тарировочный коэффициент насадка согласно (3.1.21)

$$\zeta_т = \frac{1{,}0\cdot 0{,}8}{1{,}0\cdot 0{,}8}\,\mathrm{tg}\,45° = 1{,}0.$$

Соответствующая величина тарировочного коэффициента, рассчитанная непосредственно по измеренным значениям $\Delta h_э$ и $\Delta h_т$ при помощи (3.1.22), также равна единице, так как измеренные значения $\Delta h_э$ и $\Delta h_т$ оказались одинаковыми.

Для нахождения угловой характеристики эксперимент осуществлялся с одним насадком, установленным на координатнике (см. рис. 3.1.4). Отсчет показаний манометра производился при одной и той же скорости потока и при различных углах α наклона насадка: эти углы менялись от 0 до $\pm 40°$. Соответствующие значения уровней $h_{\alpha=0}$ и h_α, начальная величина уровня h_0, а также результаты вычисления разностей $\Delta h_\alpha = h_\alpha - h_0$, $\Delta h_{\alpha=0} = h_{\alpha=0} - h_0$ и функции $f(\alpha)$ (3.1.24) приведены в табл. Б.

На основе данных табл. Б построена угловая характеристика насадка (рис. 3.1.6).

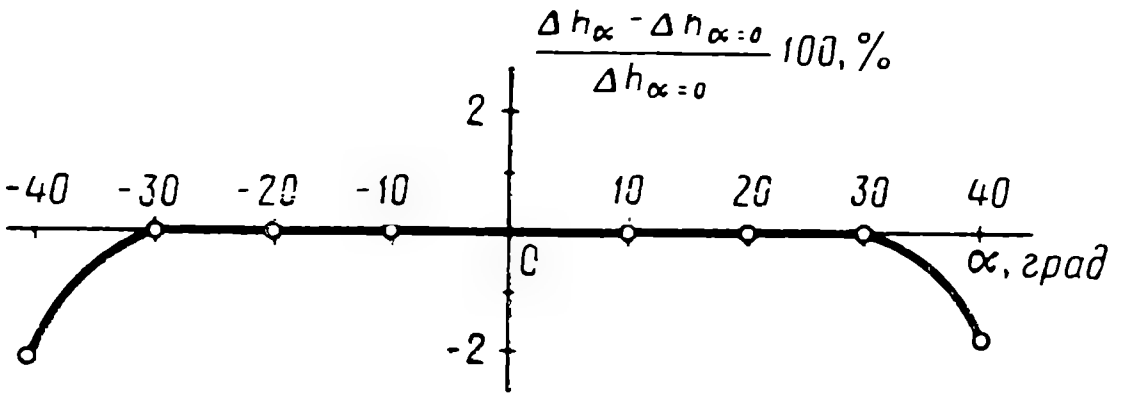


Рис. 3.1.6. Угловая характеристика насадка полного давления

Таблица Б

α, *град*	—40	—30	—20	—10	0	10	20	30	40
h_0	12	12	12	12	12	12	12	12	12
h_α	180	184	184	184	184	184	184	184	181
$\Delta h_\alpha = h_\alpha - h_0$, *мм*	168	172	172	172	172	172	172	172	169
$\Delta h_{\alpha=0}$, *мм* . . .	172	172	172	172	172	172	172	172	172
$\Delta h_\alpha - \Delta h_{\alpha=0}$, *мм*	—4	0	0	0	0	0	0	0	—3
$f(\alpha) = \dfrac{\Delta h_\alpha - \Delta h_{\alpha=0}}{\Delta h_{\alpha=0}}$	—0,023	0	0	0	0	0	0	0	—0,017

Работа 3.1.3

Тарировка пятиточечного насадка, предназначенного для определения направления скорости потока

Цель работы — получить тарировочный график, определяющий зависимость измеряемой разности давлений в симметричных приемных отверстиях насадка от угла отклонения его оси относительно направления скорости набегающего потока.

Общие сведения

Тарировка насадков, предназначенных для определения направления скорости набегающего потока, заключается, во-первых, в определении угловой характеристики приемника полного давления и, во-вторых, нахождении зависимости давлений в симметричных точках *1* и *3* от угла атаки α, а в точках *4* и *5* — от угла скольжения β (см. рис. 2.2.15).

Если обозначить через p_{20} давление в приемном отверстии *2* в случае, когда ось насадка совпадает с направлением скорости ($\alpha=\beta=0$), а через $p_{2\alpha}$ и $p_{2\beta}$ — давления, соответствующие углам $\alpha\neq0$, $\beta=0$ и $\beta\neq0$, $\alpha=0$, то функции $f_1(\alpha)$ и $\varphi_1(\beta)$ для угловых характеристик можно представить в следующем общем виде:

$$f_1(\alpha) = (p_{2\alpha} - p_{20})/p_{20}; \tag{3.1.25}$$

$$\varphi_1(\beta) = (p_{2\beta} - p_{20})/p_{20}. \tag{3.1.26}$$

Обозначив давления в других приемных отверстиях через p_n ($n=1$, 3, 4, 5), напишем общие выражения, характеризующие измерение указанных разностей давления от α и β, в виде функций $f_2(\alpha)$ и $\varphi_2(\beta)$:

$$f_2(\alpha) = (p_1 - p_3)/(p_1 + p_3); \tag{3.1.27}$$

$$\varphi_2(\beta) = (p_4 - p_5)/(p_4 + p_5). \tag{3.1.28}$$

Если во время эксперимента используются чашечные микроманометры, то измеряемые ими разности давлений

$$p_n - p_{\text{атм}} = k_{\text{т}n} K_n \cdot \Delta h_n \quad (n = 1, 2, 3, 4, 5), \tag{3.1.29}$$

где $\Delta h_n = h_n - h_{0n}$ (h_{0n} — начальный уровень манометра).

Примем для удобства, что тарировочные коэффициенты $k_{\text{т}n}$ микроманометров равны и, кроме того, одинаковы соответствующие значения

K_n (2.1.9). Тогда равенства (3.1.25)÷(3.1.28) можно записать в таком виде:

$$f_1(\alpha) = (\Delta h_{2\alpha} - \Delta h_{2\alpha=0})/\Delta h_{2\alpha=0}; \qquad (3.1.25')$$

$$\varphi_1(\beta) = (\Delta h_{2\beta} - \Delta h_{2\beta=0})/\Delta h_{2\beta=0}; \qquad (3.1.26')$$

$$f_2(\alpha) = (\Delta h_{1\alpha} - \Delta h_{3\alpha})/(\Delta h_{1\alpha} + \Delta h_{3\alpha}); \qquad (3.1.27')$$

$$\varphi_2(\beta) = (\Delta h_{4\beta} - \Delta h_{5\beta})/(\Delta h_{4\beta} + \Delta h_{5\beta}), \qquad (3.1.28')$$

где $\Delta h_{2\alpha} = h_{2\alpha} - h_{02}$; $\Delta h_{2\beta} = h_{2\beta} - h_{02}$.

Графики функций (3.1.25), (3.1.26) позволяют определить «зону нечувствительности» для углов α и β, т. е. такие их значения, при которых ошибка измерения полного давления не превышает некоторой заданной величины. Кривые, соответствующие зависимостям (3.1.27), (3.1.28), используются в экспериментальных исследованиях при определении по измеренным для симметричных отверстий значениям $\Delta h_{\alpha n}$ и $\Delta h_{\beta n}$ углов α и β, характеризующих наклон насадка, или, что то же самое, направление скорости потока относительно оси насадка (рис. 3.1.7).

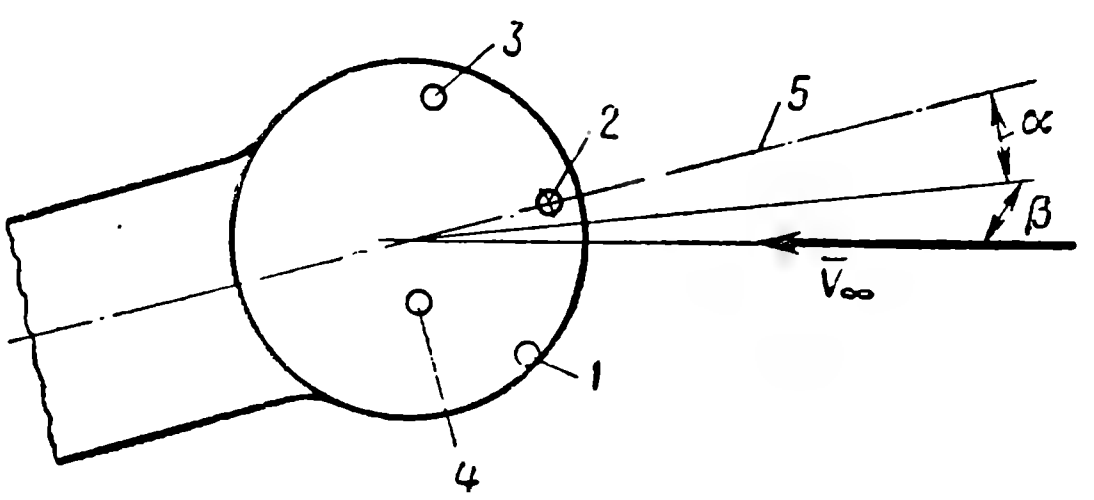


Рис. 3.1.7. Схема определения углов отклонения насадка:

1, 2, 3, 4 — приемные отверстия; *5* — геометрическая ось насадка

В случае исследования сжимаемых газовых течений все зависимости (3.1.25)÷(3.1.28), характеризующие насадок, определяются для различных чисел M_∞ набегающего потока.

Порядок проведения работы

1. Ознакомиться с устройством аэродинамической трубы, насадка и микроманометров и проверить готовность их к работе.

2. Закрепить на координатнике насадок и установить его в рабочей части трубы.

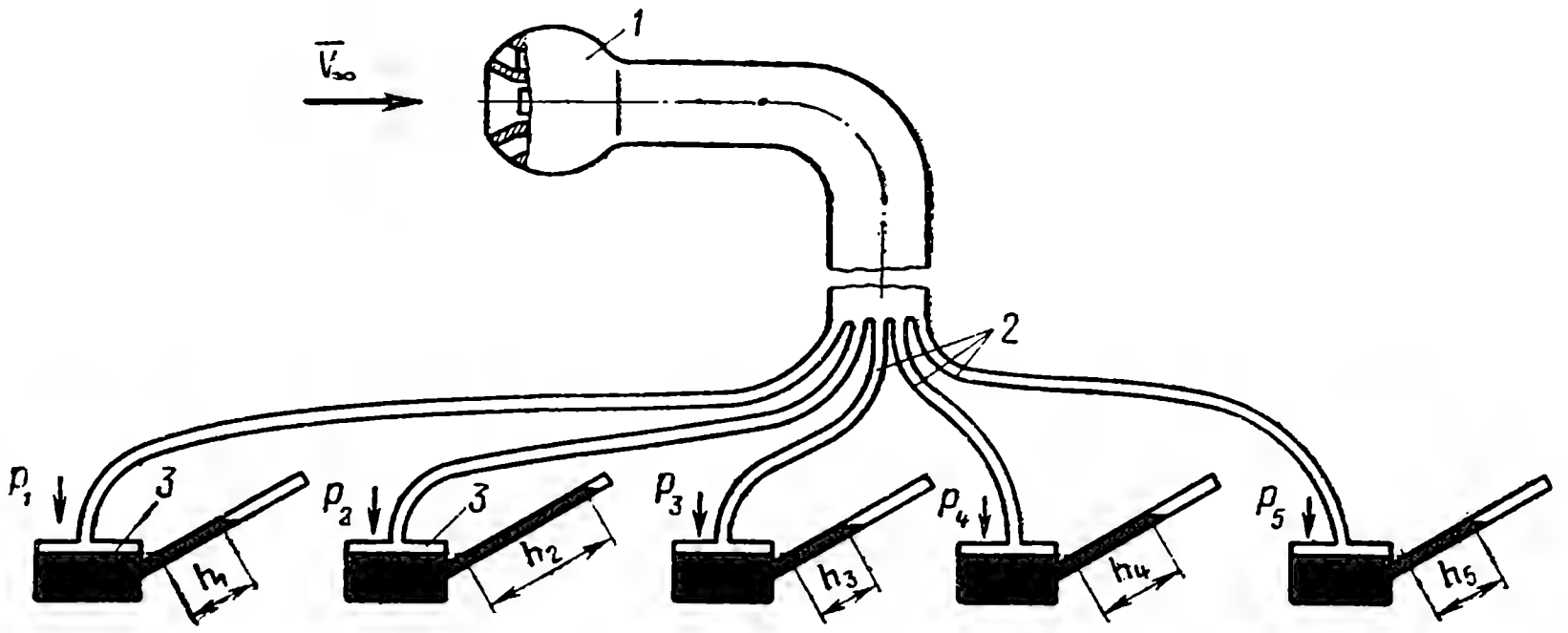
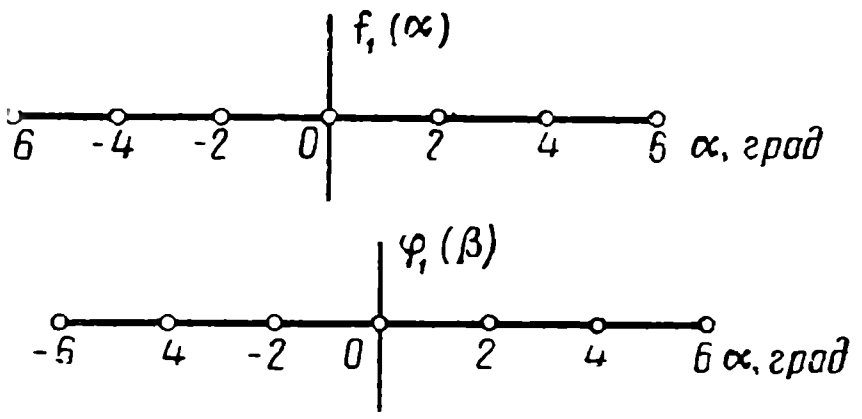


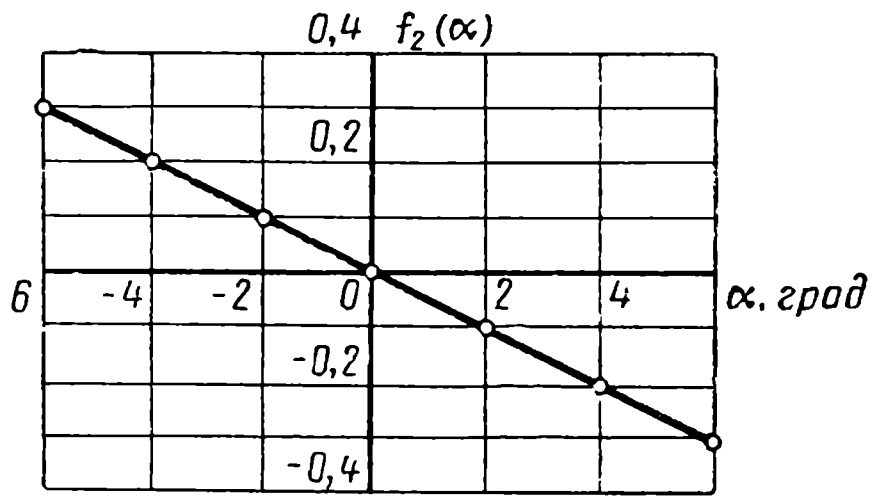
Рис. 3.1.8. Схема установки для тарировки пятиточечного насадка:

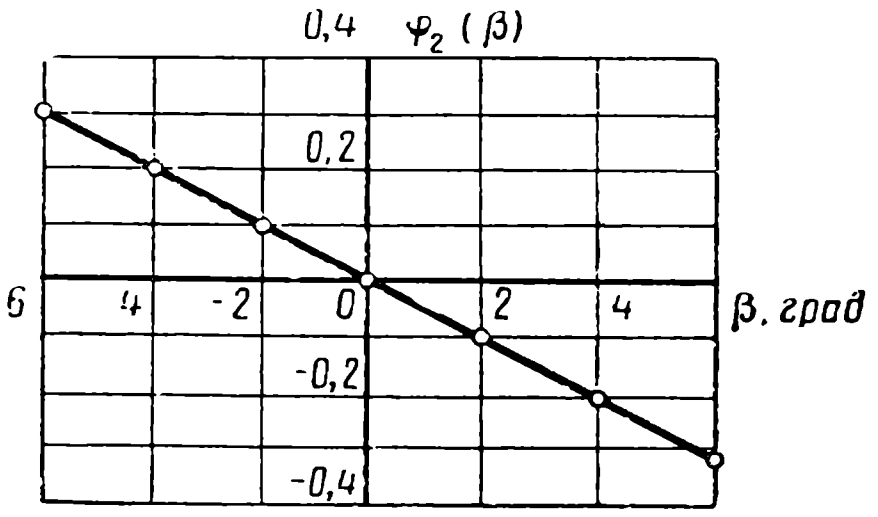
1 — насадок; *2* — соединительные шланги; *3* — микроманометры

3. При помощи резиновых шлангов соединить выводы приемных отверстий насадка с микроманометрами, проверить герметичность соединений и записать начальные уровни h_{0n} жидкости в отсчетных коленах.

4. Включить трубу и выверить положение насадка в рабочей части трубы, ориентировав его ось по направлению скорости набегающего потока (при этом разности уровней в манометрах, соединенных с четырьмя периферийными приемными отверстиями, должны быть одинаковы).







5. Для этого положения насадка, соответствующего значениям углов $\alpha=\beta=0$, записать показания микроманометров $h_n\{{\alpha=0 \atop \beta=0}$.

6. Изменив углы атаки α, записать для соответствующих их значений новые показания микроманометров $h_{n\alpha}$ $(n=1, 2, 3)$.

7. Возвратить насадок в первоначальное положение, осуществить поворот на угол β в горизонтальной плоскости и записать показания микроманометров $h_{n\beta}$ $(n=2, 4, 5)$, соответствующие нескольким фиксированным значениям этого угла, после чего выключить трубу. Аналогичные измерения провести для ряда значений чисел $\mathbf{M}_\infty$ потока.

8. По результатам этих измерений вычислить соответствующие разности уровней и построить графики функций $f_1(\alpha)$, $\varphi_1(\beta)$, $f_2(\alpha)$, $\varphi_2(\beta)$.

Рис. 3.1.9. Тарировочные графики пятиточечного насадка

Пример. Рассмотрим результаты тарировки пятиточечного насадка (см. рис. 2.2.15) в малоскоростной аэродинамической трубе с открытой рабочей частью.

Насадок закрепляется на координатнике (см. рис. 3.1.4), с помощью которого изменялись углы α и β. Давления измерялись чашечными микроманометрами (см. рис. 2.1.3), для которых были приняты значения $K=0{,}6$ (2.1.9), а тарировочные коэффициенты равнялись $k_т=1{,}0$.

Схема экспериментальной установки показана на рис. 3.1.8. Измерения на ней проводились в пределах углов α и β, равных $\pm 6°$, с интервалом $\pm 2°$. Все данные измерений, начальные уровни, а также результаты расчетов функций (3.1.25′)÷(3.1.28′) приведены в табл. А.

По данным табл. А построены графики, показанные на рис. 3.1.9.

Таблица А

α, *град*	Номера отверстий									$f_1(\alpha)$ по (3.1.25′)	$f_2(\alpha)$ по (3.1.27′)
	1			3			2				
	h_{01}	h_1	Δh_1 (*мм*)	h_{03}	h_3	Δh_3 (*мм*)	h_{02}	h_2	Δh_2 (*мм*)		
6	11	47	36	12	81	69	10	135	125	0	—0,314
4	11	52	41	12	75	63	10	135	125	0	—0,212
2	11	58	47	12	70	58	10	135	125	0	—0,105
0	11	63	52	12	64	52	10	135	125	0	0
—2	11	68	57	12	61	49	10	135	125	0	0,09
—4	11	73	62	12	54	42	10	135	125	0	0,192
—6	11	79	68	12	49	37	10	135	125	0	0,295

Продолжение табл. А

β, *град*	Номера отверстий									$\varphi_1(\beta)$ по (3.1.26′)	$\varphi_2(\beta)$ по (3.1.28′)
	4			5			2				
	h_{04}	h_4	Δh_4 (*мм*)	h_{05}	h_5	Δh_5 (*мм*)	h_{02}	h_2	Δh_2 (*мм*)		
6	13	48	35	15	82	67	10	135	125	0	—0,314
4	13	53	40	15	76	61	10	135	125	0	—0,208
2	13	58	45	15	70	55	10	135	125	0	—0,105
0	13	62	49	15	64	49	10	135	125	0	0
—2	13	68	55	15	60	45	10	135	125	0	0,1
—4	13	73	60	15	54	39	10	135	125	0	0,212
—6	13	78	65	15	49	34	10	135	125	0	0,314

Работа 3.1.4

Статическая тарировка приборов для измерения температуры

Цель работы — получить зависимость показаний регистрирующего устройства от температуры жидкой или газообразной среды, в которой расположен датчик. Результаты работы должны быть представлены в виде тарировочного графика.

Общие сведения

Датчик прибора для измерения температуры, помещенный в неподвижную жидкую или газообразную среду, через некоторое время принимает температуру этой среды. При статической тарировке датчика такая температура поддерживается постоянной и измеряется образцовыми термометрами. В результате тарировки устанавливается соответствие между этой температурой и показаниями регистрирующей аппаратуры, связанной с датчиком.

В случае тарировки в диапазоне температур от 0 до —30÷—35° датчики помещают в ванну со смесью этилового спирта и твердой углекислоты. Тарировку, соответствующую температуре 0° С, можно осуществить в ванне с тающим льдом.

При температурах до 280° С тарировка ведется в подогреваемом масляном резервуаре, в котором благодаря перемешиванию устанавливается равномерная температура, измеряемая образцовым ртутным термометром. Показания такого термометра вблизи отметки 100° С дополнительно контролируются при измерении им температуры кипящей воды, которая зависит от барометрического давления $p_{атм}$ и определяется по формуле

$$t_{кип} = 100° + 3{,}67 \cdot 10^{-2}(p_{атм} - 760) - 2{,}3 \cdot 10^{-5}(p_{атм} - 760)^2. \quad (3.1.30)$$

Эта формула справедлива для давлений $p_{атм}$ от 680 до 780 *мм рт. ст.* Ошибка измерения ртутным термометром невелика и составляет примерно $\pm 0{,}1$, $\pm 0{,}2$ и $\pm 0{,}3$° С соответственно для диапазонов температур 0÷56, 50÷100 и 250÷350° С.

Тарировка датчиков при температуре выше 280° С проводится обычно в электрических печах в атмосфере разогретого газа, причем действительная (эталонная) температура измеряется образцовыми платиновыми электротермометрами сопротивления.

В результате тарировки определяется зависимость показаний N прибора от температуры среды t, в которой находится датчик. По этим показаниям строится график $N = f(t)$ статической тарировки датчика температуры.

Порядок проведения работы

1. Ознакомиться с устройством прибора для измерения температуры и электрической схемой соединения датчика с регистрирующей аппаратурой.

2. Установить датчик и образцовый термометр в ванне, включить мешалку и электропитание измерительного устройства и записать начальные показания термометра, а также регистрирующего устройства, связанного с датчиком.

3. Включить электроподогрев масла и через 5÷7 *мин* после достижения заданной температуры зафиксировать показания термометра и регистрирующего устройства. Осуществить подобные измерения при разных температурах масла.

4. **Выключить мешалку, электроподогрев** масла и питание измерительного устройства, а затем извлечь датчик из ванны и промыть.

5. Для тарировки датчика при температуре выше 280° С установить его в электрической печи в непосредственной близости от датчика образцового платинового электротермометра сопротивления.

6. Включить питание электропечи и усилителей датчиков температуры.

7. По достижении требуемой температуры записать показания тарируемого прибора и образцового термометра, повторив эти измерения при различных температурах.

8. Выключить электропитание и после охлаждения печи извлечь из нее датчики.

9. По результатам показаний регистрирующего устройства и образцового термометра построить график статической тарировки датчика температуры.

Пример. Рассмотрим статическую тарировку экранированного термопарного датчика температуры (см. рис. 2.3.6). Спай термопары этого датчика состоит из двух проволочек, одна из которых изготовлена из хромеля, а другая из алюмеля. Датчик подключен к электронному милливольтметру со стрелочным индикатором на выходе. Шкала этого индикатора имеет деления от 0 до 100, а полное отклонение его стрелки соответствует напряжению 50 *мв*.

Для тарировки в диапазоне температур от 20 до 250° С датчик размещается в ванне с подогреваемым маслом, температура которого измерялась образцовым ртутным термометром. При заданной температуре датчик выдерживался в ванне около 5 *мин*. Начальная температура спая термопары принималась равной 20° С (температура ненагретого масла). При каждом переключении подогревательного устройства температура масла повышалась примерно на 40° С и для нагретого масла фиксировалось показание милливольтметра.

В диапазоне от 250 до 950° С тарировка датчика проводилась в электропечи. В ней было осуществлено с помощью образцового платинового электротермометра сопротивления (см. рис. 2.3.1) семь замеров температуры, а также зафиксированы соответствующие показания регистрирующего прибора.

Все результаты замеров температуры t и показаний N милливольтметра тарируемого прибора приведены в табл. А.

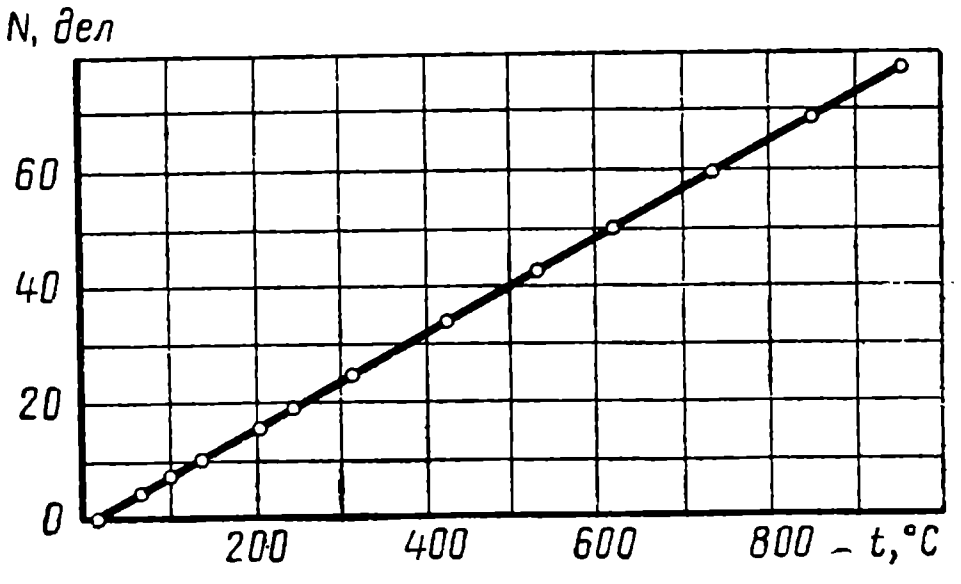


Рис. 3.1.10. График статической тарировки датчика температуры

Таблица А

Номера замеров	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
t, °С	20	60	100	149	204	250	316	427	538	621	732	843	954
N, дел	0	4,0	6,2	9,7	15,1	19,0	24,2	33,5	43,0	50,1	59,5	68,6	77,6

По данным табл. А построен график статической тарировки датчика температуры (рис. 3.1.10).

Работа 3.1.5

Динамическая тарировка датчиков температуры торможения

Цель работы — определение коэффициента восстановления r датчика в зависимости от параметров газового потока. В результате работы находится функция $r=f(\mathbf{Re})$ при $\mathbf{M}_\infty=\text{const}$ и строится соответствующий график.

Общие сведения

Динамическая тарировка датчиков температуры торможения проводится в аэродинамической трубе с известными параметрами потока в рабочей части. В такой трубе для уменьшения потерь тепла газом стенки форкамеры, сопла и рабочей части покрываются теплозащитным

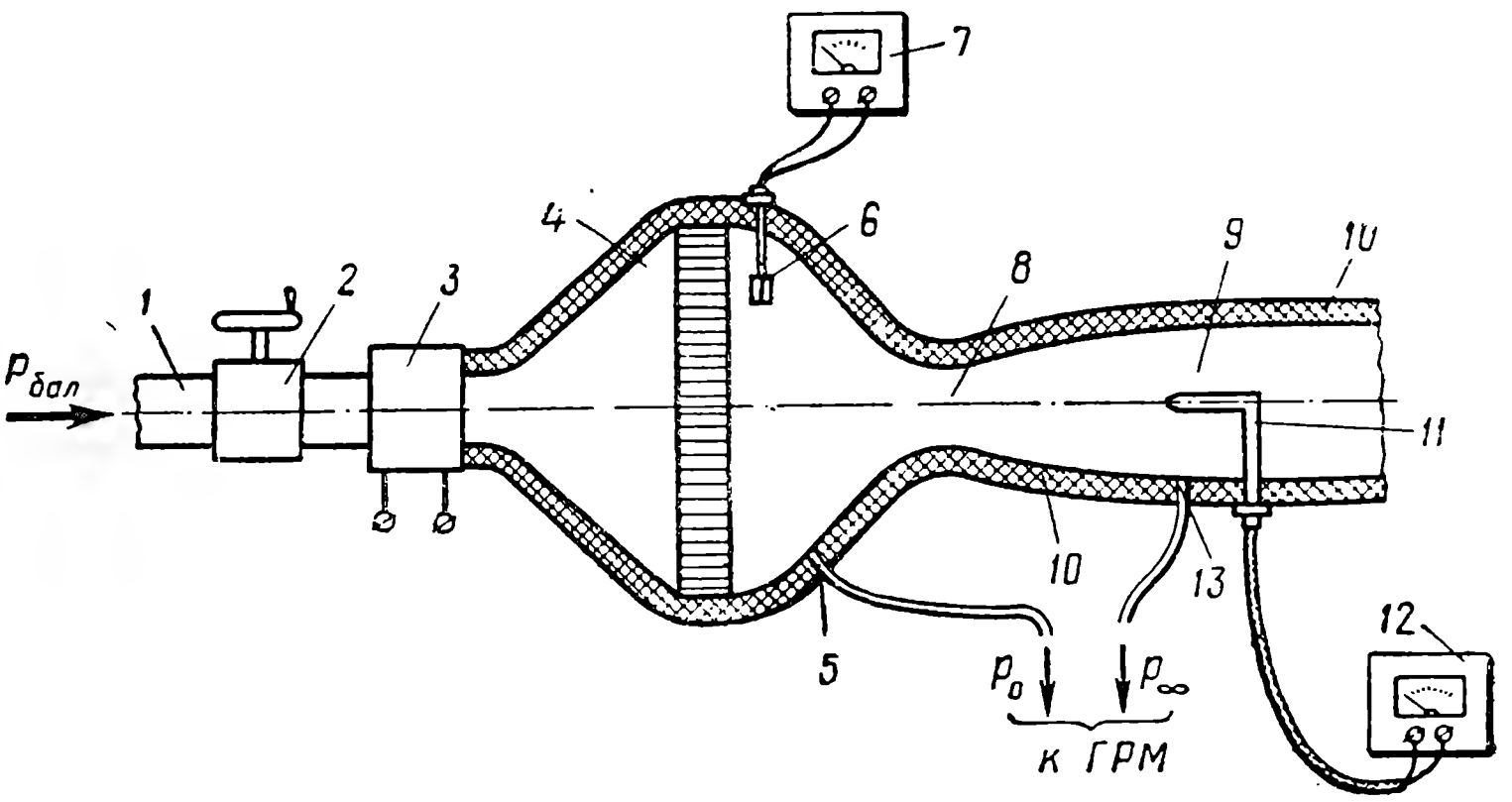


Рис. 3.1.11. Схема установки для динамической тарировки датчиков температуры:

1 — подвод воздуха из баллонов высокого давления; *2* — регулирующий вентиль; *3* — электроподогреватель; *4* — форкамера; *5* — приемник давления торможения; *6* — датчик температуры торможения; *7* — прибор, регистрирующий эту температуру; *8* — сопло; *9* — рабочая часть; *10* — теплозащитный материал; *11* — тарируемый датчик; *12* — милливольтметр; *13* — приемник статического давления в рабочей части

материалом. В этом случае температуру торможения газа по длине трубы можно не измерять, а считать равной ее величине T_0 в форкамере.

Схема тарировочной установки показана на рис. 3.1.11. Согласно этой схеме тарируемый датчик помещается в рабочей части аэродинамической трубы, а в форкамере расположен платиновый электротермометр сопротивления. Оба датчика соединены с соответствующей аппаратурой, регистрирующей во время продувки температуру, измеряемую датчиком. При этом для тарируемого датчика такой температурой будет равновесная температура T_e, которая находится по показаниям соот-

ветствующего регистрирующего устройства из графика статической тарировки. Одновременно с температурой T_0 измеряется давление торможения p_0 газа в форкамере, а также статическое давление p_∞ в рабочей части, зная которые, можно определить число $\mathbf{M}_\infty$ и статическую температуру потока из (2.2.8) и (2.3.2).

По температуре T_∞ можно найти коэффициент восстановления:

$$r = (T_e - T_\infty)/(T_0 - T_\infty). \tag{3.1.31}$$

Эта величина r соответствует числу Рейнольдса

$$\mathbf{Re} = \rho_\infty V_\infty d/\mu_\infty, \tag{3.1.32}$$

где d — диаметр входного отверстия датчика температуры торможения (см. рис. 2.3.6); V_∞, ρ_∞, μ_∞ — соответственно скорость, плотность и коэффициент динамической вязкости газа в рабочей части трубы, определяемые из соотношений:

$$V_\infty = \mathbf{M}_\infty \sqrt{kRT_\infty}; \tag{3.1.33}$$

$$\rho_\infty = p_\infty/(RT_\infty); \tag{3.1.34}$$

$$\mu_\infty = \mu_н (T_\infty/T_н)^{0,76}, \tag{3.1.35}$$

причем $\mu_н = 1{,}82 \cdot 10^{-6}$ *кГ·сек/м²* для $T_н = 288$К.

Для нахождения значений коэффициента восстановления r при различных числах Рейнольдса проводят продувки, изменяя давление p_0 газа в форкамере трубы. При этом число $\mathbf{M}_\infty$ и температура торможения T_0 остаются неизменными.

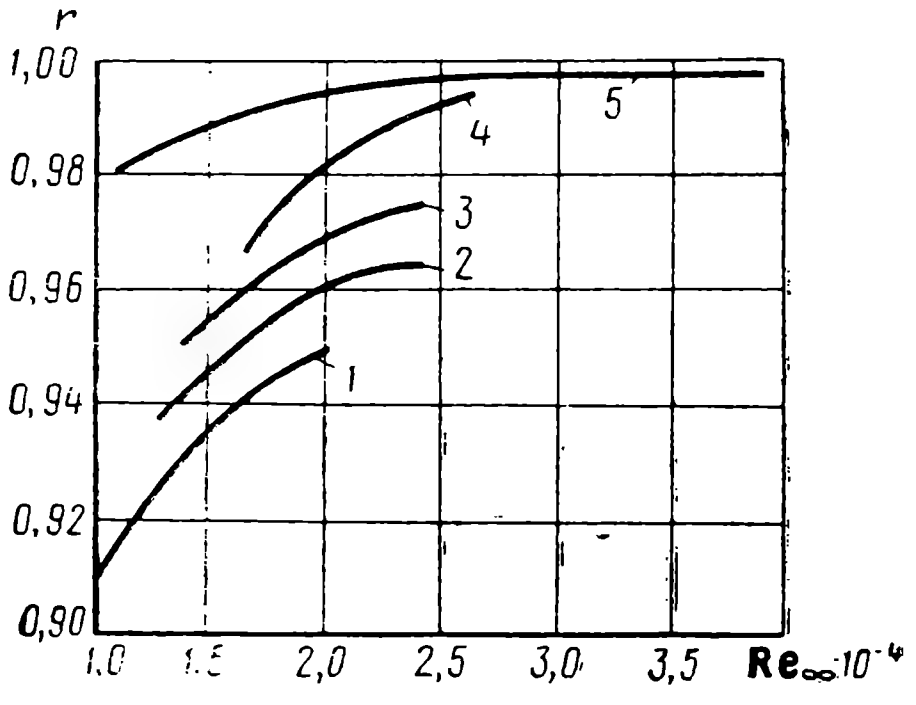


Рис. 3.1.12. Изменение коэффициента восстановления датчика:

1 — $\mathbf{M}_\infty = 7{,}6$, $T_з = 908$ К; *2* — $\mathbf{M}_\infty = 6{,}95$, $T_0 = 883$ К; *3* — $\mathbf{M}_\infty = 6{,}6$, $T_0 = 863$ К; *4* — $\mathbf{M}_\infty = 5{,}75$, $T_0 = 843$ К; *5* — $\mathbf{M}_\infty = 4{,}9$, $T_0 = 604$ К

Заменяя сопловые вставки, можно получить соответствующие числа $\mathbf{M}_\infty$ газового потока и таким образом найти более полную зависимость коэффициента r от чисел $\mathbf{Re}_\infty$ и $\mathbf{M}_\infty$ (рис. 3.1.12).

Порядок проведения работы

1. Рассмотреть схему тарировочной установки; ознакомиться с устройством аэродинамической трубы, датчиков температуры, манометров и проверить готовность их к работе.

2. Смонтировать в рабочей части трубы сопловые вкладыши, обеспечивающие получение в ней газового потока с требуемым числом $\mathbf{M}_\infty$.

3. Установить тарируемый датчик в рабочей части, а платиновый электротермометр сопротивления — в форкамере трубы.

4. Закрепить на стенке форкамеры манометр для измерения давления торможения p_0, одновременно подключив к манометру ГРМ приемник статического давления в рабочей части.

5. Соединить датчики температуры с регистрирующими приборами и включить питание электронных усилителей.

6. Записать начальные показания манометров и регистрирующих устройств; измерить давление и температуру в лаборатории; включить аэродинамическую трубу и подогревательное устройство.

7. После выхода трубы на режим установившегося обтекания и до-

стижения заданной температуры T_0 записать показания манометров и термометров.

8. Изменить давление торможения в форкамере и повторить все измерения.

9. После прекращения работы аэродинамической трубы осуществить, используя результаты опыта, необходимые расчеты, связанные с определением коэффициента восстановления, и построить график $r=f(\mathbf{Re})$ при $\mathbf{M}_\infty=\text{const}$.

Пример. Рассмотрим результаты динамической тарировки датчика температуры торможения с диаметром входного отверстия $d=2$ *мм* (см. рис. 2.3.6). Такая тарировка проводилась в сверхзвуковой аэродинамической трубе с закрытой рабочей частью и с дуговым электроподогревателем, обеспечивавшим постоянную температуру в форкамере трубы $T_0=825$ К. Барометрическое давление и температура в лаборатории были соответственно равны $p_{атм}=750$ *мм рт. ст.*, $T_{атм}=292$ К.

После включения трубы измерялись давления в рабочей части и снимались показания N регистрирующего устройства, связанного с тарируемым датчиком температуры. Причем такие измерения проводились для нескольких заданных значений давления в форкамере p_0 — от 13 до 35,8 *кГ/см²*.

Все экспериментальные данные, результаты расчета по ним параметров набегающего потока ($\mathbf{M}_\infty$, V_∞, T_∞, ρ_∞, μ_∞, $\mathbf{Re}_\infty$), а также определение равновесной температуры T_e (по графику статической тарировки на рис. 3.1.10) и вычисление коэффициента r приведены в табл. А.

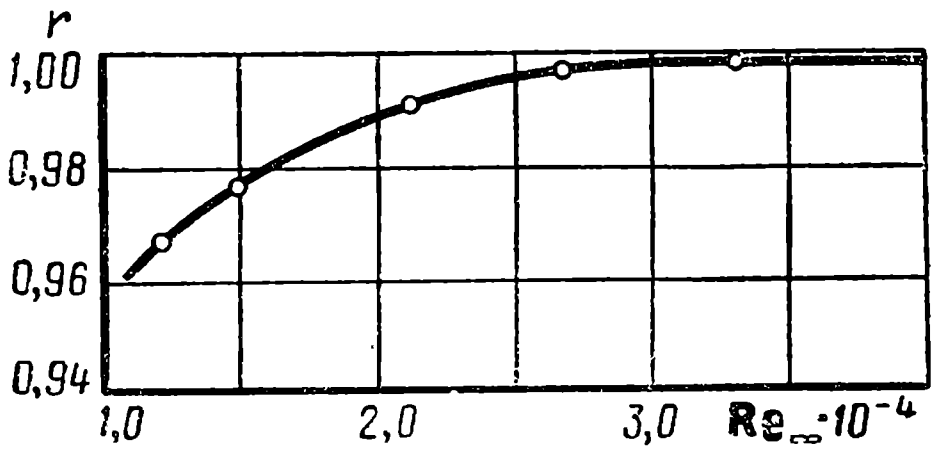


Рис. 3.1.13. График динамической тарировки датчика температуры торможения

Таблица А

$\mathbf{M}_\infty=5{,}3$; $T_\infty=124{,}6$ К; $\mu_\infty=9{,}65\cdot10^{-6}$ *кГ·сек/м²*; $V_\infty=1185$ *м/сек*

p_0, *кГ/см²*	$p_\infty\cdot10^4$, *кГ/см²*	$\rho_\infty\cdot10^3$, *кГ·сек²/м⁴*	$\mathrm{Re}_\infty\cdot10^{-1}$	N, дел	T_e, К	r
13,0	173	4,86	1,2	64,7	800	0,965
16,2	216	6,07	1,5	65,3	807	0,975
22,8	303	8,50	2,1	66,4	819	0,991
29,2	389	10,9	2,7	66,7	822	0,996
35,8	476	13,4	3,3	66,7	822	0,996

График динамической тарировки $r=f(\mathbf{Re}_\infty)$, построенный по данным табл. А, показан на рис. 3.1.13.

Работа 3.1.6

Тарировка термоанемометра

Цель работы — получение тарировочной зависимости для напряжения, измеряемого вольтметром, от скорости потока, обтекающего датчик термоанемометра. Результаты работы должны быть представлены в виде соответствующих тарировочных графиков.

Общие сведения

Степень охлаждения нагретой проволочки датчика термоанемометра зависит от скорости обтекающего ее газового потока. При таком охлаждении тепловой поток от проволочки к газу

$$Q=A+BV_\infty^n, \qquad (3.1.36)$$

где A и B — некоторые константы, определяемые опытным путем; показатель степени $n=0{,}4\div0{,}5$ (для чисел $\mathbf{Re}=\rho_\infty V_\infty d/\mu_\infty$ от 0,1 до 10^5).

При установившемся обтекании тепловой поток к газу от проволочки равен соответствующему количеству тепла, выделяющемуся при прохождении через проволочку электрического тока. Это количество тепла определяется по закону Джоуля — Ленца:

$$Q = U_B^2/R_w, \tag{3.1.37}$$

где R_w — сопротивление датчика; $U_в$ — соответствующее напряжение на датчике, измеряемое вольтметром.

В соответствии с (3.1.36) и (3.1.37)

$$U_в^2/R_w = A + BV_\infty^n. \tag{3.1.38}$$

Из этого соотношения следует, что если применяется схема включения термоанемометра с постоянным сопротивлением датчика (R_w=const), то экспериментально можно получить однозначную зависимость

$$U_в = f(V_\infty). \tag{3.1.39}$$

Для этого следует поступить следующим образом: включить электропитание измерительного прибора, замкнуть перемычкой вход термоанемометра и осуществить балансировку измерительного моста так, чтобы показание вольтметра постоянного тока на выходе моста равнялось нулю. Затем следует снять перемычку и подключить к этому мосту датчик с кабелем, который применяется во время эксперимента; сопротивление датчика, соответствующее температуре T_∞, измерить с помощью потенциометрического моста и включить нагрев проволочки. При этом температура T_w проволочки выбирается по известной величине T_∞ из условия, чтобы степень нагрева

$$a = (T_w - T_\infty)/T_\infty \tag{3.1.40}$$

не превышала значения a=0,7÷0,8. Далее надо вновь измерить сопротивление датчика R_w и одновременно записать начальное показание вольтметра U_0.

Затем датчик помещают в аэродинамическую трубу, включают ее и при различных скоростях V_∞ газового потока в рабочей части фиксируют показания вольтметра $U_в$. Таким образом в результате измерений будет известна зависимость $U_в = f(V_\infty)$, по которой строится соответствующий тарировочный график.

Порядок проведения работы

1. Ознакомиться с устройством и работой термоанемометра и аэродинамической трубы, а также с электрической схемой измерительной установки.
2. Включить трубу; осуществить измерения скорости потока в рабочей части, соответствующие различным фиксированным числам оборотов вентилятора.
3. Установить датчик термоанемометра в рабочей части трубы.
4. Провести балансировку моста термоанемометра, нагреть проволочку датчика до температуры T_w в соответствии с выбранной степенью перегрева (3.1.40), а затем переключить термоанемометр на режим регистрации.
5. Зафиксировать по шкале вольтметра постоянного тока начальное напряжение U_0 и включить аэродинамическую трубу.
6. При различных скоростях газового потока в рабочей части трубы (см. п. 2) записать показания вольтметра и выключить аэродинамическую трубу.
7. Используя результаты опыта, провести необходимые расчеты и построить тарировочный график $U_в = f(V_\infty)$.

Пример. Рассмотрим тарировку проволочного датчика термоанемометра (см. рис. 2.2.6). Эта тарировка осуществлялась в малоскоростной аэродинамической трубе с закрытой рабочей частью для условий в лаборатории, которые характеризуются барометрическим давлением $p_{атм}=750$ *мм рт. ст.* и температурой $T_{атм}=292$ К.

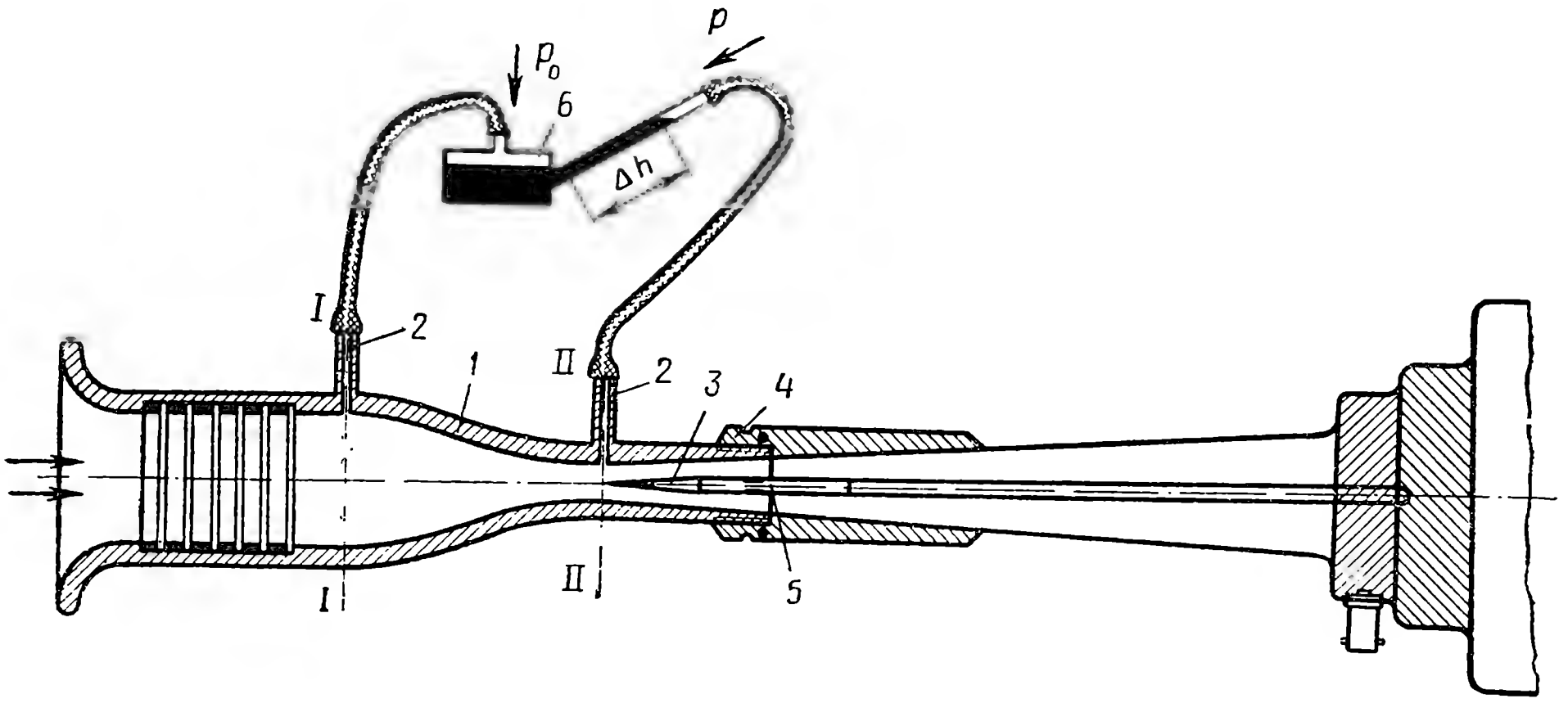


Рис. 3.1.14. Схема установки датчиков термоанемометра при тарировке:

1 — аэродинамическая труба; *2* — приемные отверстия для замера перепада давлений; *3* — тарируемый датчик; *4* — съемный корпус; *5* — державка; *6* — микроманометр

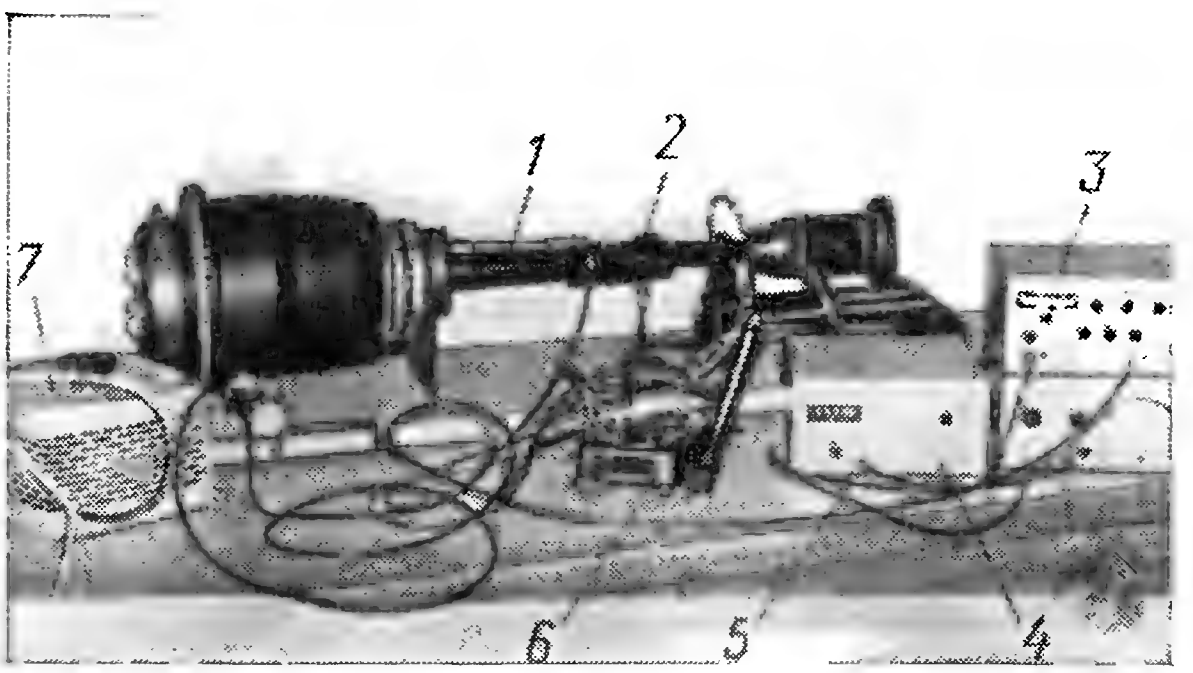


Рис. 3.1.15. Установка с измерительными приборами для тарировки датчика термоанемометра:

1 — аэродинамическая труба; *2* — тарируемый датчик; *3* — термоанемометр; *4* — вольтметр постоянного тока; *5* — соединительные кабели; *6* — микроманометр; *7* — регулировочный реостат

Общая схема измерительной установки показана на рис. 3.1.14, а фотография этой установки вместе с измерительными приборами — на рис. 3.1.15.

Для определения скорости воздуха в рабочей части измерялась разность статических давлений в сечениях *I—I* и *II—II*. При этом использовался чашечный микроманометр с $k_т=1{,}0$ и $K=0{,}8$. Измеренная разность статических давлений

$$\Delta p=p_{I}-p_{II}=k_т K\cdot\Delta h,$$

где $\Delta h=h-h_0$ (см. рис. 3.1.14).

Эти разности показаний микроманометра соответствуют различным скоростям воздушного потока в трубе, которые достигались изменением числа оборотов электродвигателя с помощью реостата.

При помощи психрометра определена относительная влажность $x=66\%$, а также давление насыщенных паров $p_{н.п}=17{,}9$ *мм рт. ст.* В соответствии с этими данными скорость V_∞ определялась по зависимости (2.2.7) при $p_{атм}=750$ *мм рт. ст.* и $t=19°$ С.

Нагрев тарируемого датчика производился с учетом степени перегрева $a=0{,}8$. Если принять при этом, что температура потока $T_\infty=292$ К, то температура проволочки

$$T_w=(1+a)\,T_\infty=(1+0{,}8)\,292=527\text{ К}.$$

Соответствующее сопротивление датчика (при начальном сопротивлении $R_0 = 3{,}22$ *ом*)

$$R_w = R_0 (1 + a) = 3{,}22 \cdot 1{,}8 = 5{,}79 \text{ ом}.$$

При этом сопротивлении показание вольтметра постоянного тока $U_0 = 3{,}0$ *в*. Во время работы трубы при разных скоростях потока в ней вольтметр измеряет соответствующие напряжения U_B. Результаты замеров и расчетов приведены в табл. А.

Таблица А

Номера замеров	0	1	2	3
h_0	13	13	13	13
h	13	43	130	279
Δh, *мм*	0	30	117	266
V_∞, *м/сек*	0	20,1	39,8	60,1
U_B, *в*	3	4,7	5,3	5,8

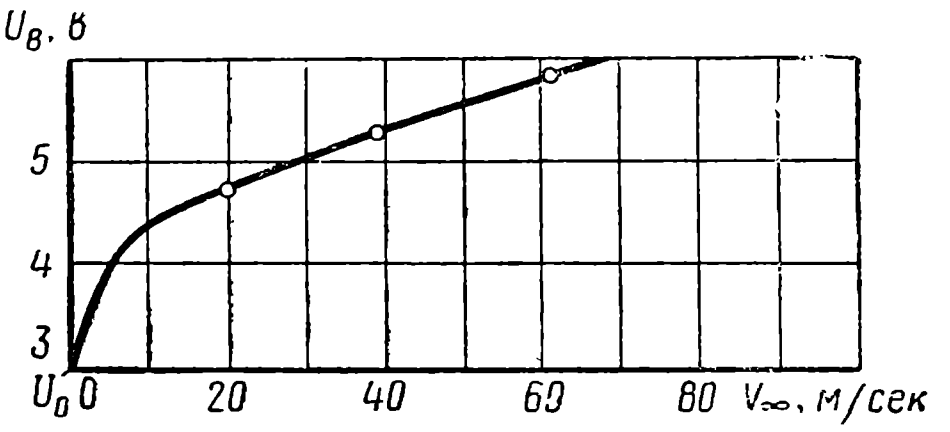


Рис. 3.1.16. Тарировочный график датчика термоанемометра

По данным табл. А на рис. 3.1.16 построен тарировочный график $U_B = f(V_\infty)$.

Работа 3.1.7

Тарировка трехкомпонентных тензометрических весов

Цель работы — определение зависимости величины выходного сигнала с тензостанции от приложенной к тензометрическим весам нагрузки.

В результате работы строятся соответствующие тарировочные графики.

Общие сведения

Тарировку тензометрических весов обычно осуществляют, устанавливая их в рабочей части аэродинамической трубы. Если это не представляется возможным, то тарировка ведется при помощи специального тарировочного приспособления. Так как выходной сигнал, поступающий на усилитель тензостанции с тензоэлементов, мал, то для устранения неблагоприятного влияния соединительных кабелей на показания измерительных устройств во время эксперимента тарировку необходимо проводить, используя те же кабели и усилители. Количество тарируемых каналов усилителя выбирается по числу компонентов аэродинамической нагрузки, измеряемых весами.

При тарировке место приложения и направление действия нагрузки соответствуют тарируемому каналу. Например, если тарируется канал, измеряющий осевую силу R, то известная по величине нагрузка должна быть приложена вдоль продольной оси Ox_1 модели, внутри которой расположены весы.

Для уменьшения затрат времени на эксперимент выходной сигнал с усилителя тензостанции регистрируется шлейфовым осциллографом и записывается на фотобумаге. Величина такого сигнала характеризуется отклонением луча шлейфа (в *мм*) от начального положения. После опыта фотобумага проявляется, а запись соответствующим образом расшифровывается. В результате находится зависимость

$$h_p = f(P), \qquad (3.1.41)$$

в которой $h_р$ — отклонение луча шлейфа; P — приложенная нагрузка (вес тарировочного груза).

При тарировке каналов нормальной силы и момента внутримодельные весы размещаются в специальном цилиндре с шипами на внешней поверхности. Средний ряд этих шипов расположен в поперечной плоскости, совпадающей с электрической осью аэродинамических весов. При подвешивании груза на такие шипы выходной сигнал будет возникать только в канале для измерения силы N. Если грузы подвешиваются на шипы в других рядах, то выходной сигнал появится одновременно в двух каналах — для измерения силы и момента тангажа M_z.

Отклонение луча $h_м$ шлейфового осциллографа для канала M_z пропорционально моменту $M_z=Pl$, где l — расстояние между электрической осью весов (средний ряд шипов) и шипом, на который подвешивается этот груз. По результатам измерения величины $h_м$, соответствующей заданному моменту M_z, определяется тарировочная зависимость

$$h_м = f(M_z). \tag{3.1.42}$$

Так как обычно время эксперимента ограничено, то начальное положение лучей шлейфового осциллографа записывается только один раз — при каком-либо угле атаки модели (чаще всего при $\alpha=0$). При этом поскольку на весы действует вес модели, то могут появиться сигналы на выходе усилителей, вызывающие дополнительные отклонения лучей осциллографа. В целях компенсации воздействия веса до начала эксперимента записывают показания всех каналов $h^в$, соответствующие экспериментальным углам атаки. Эти показания учитываются затем при продувках как п о п р а в к и н а в е с.

Отклонение луча осциллографа, зависящее только от аэродинамической силы, будет

$$h = h^\Sigma - h^в, \tag{3.1.43}$$

где h^Σ и $h^в$ — отклонение лучей соответственно во время продувки и при воздействии только веса (поправка на вес) при заданном угле атаки.

Если начальное положение луча записывается для каждого угла атаки отдельно, то поправка на вес уже не вводится, и при помощи осциллографа непосредственно находится отклонение h.

При применении внутренних аэродинамических весов с донной державкой необходимо учитывать влияние поддерживающего устройства на правильность определения лобового сопротивления модели летательного аппарата. С этой целью проводят серию методических продувок одной и той же модели с донными державками различных диаметров. По опытным данным строится график функции $c_R=f(\bar{d}_{дер})$, где $\bar{d}_{дер}=d_{дер}/d_{мид}$ — относительный диаметр донной державки (рис. 3.1.17). Путем экстраполяции полученной кривой находят значение, соответствующее величине $\bar{d}_{дер}=0$, которое принимается за истинный коэффициент продольной силы $c_{R\,ист}$ для заданной формы модели тела вращения.

Порядок проведения работы

1. Ознакомиться с устройством тензометрических весов и электрической схемой измерительного устройства.
2. Установить аэродинамические весы в приспособлении для тарировки и закрепить на них цилиндр с шипами так, чтобы плоскость средних шипов совпадала с электрической осью весов.

3. Подключить тензодатчики к входам усилителей тензостанций, а их выходы соединить со шлейфовым осциллографом.

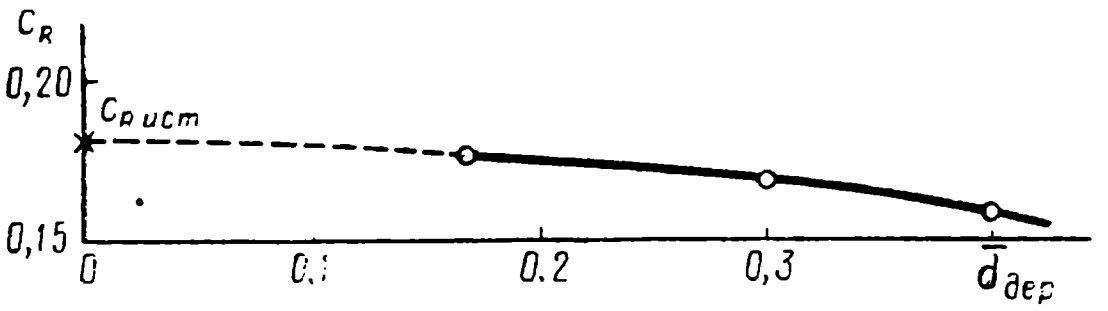


Рис. 3.1.17. Тарировочный график для определения поправки на влияние донной державки при измерении продольной силы

4. Провести балансировку каналов тензостанции и записать показания, характеризующие начальное положение лучей шлейфового осциллографа.

5. Подвешивая последовательно различные грузы на шипы в среднем ряду, зафиксировать отклонение луча канала регистрации нормальной силы, затем снять нагрузку и снова зафиксировать соответствующее отклонение луча.

6. Осуществить подвешивание различных грузов на шипах, расположенных в других рядах, и записать соответствующие показания осциллографа для каналов регистрации нормальной силы и момента.

7. Закрепить аэродинамические весы вертикально и, сначала нагружая их, а затем снимая нагрузку, записать соответствующие показания осциллографа для канала осевой силы.

8. Закрепить аэродинамические весы в дозаторе углов атаки.

9. Провести балансировку усилителей, а затем, установив модель под углами атаки, при которых предполагается продувка в аэродинамической трубе, записать отклонение лучей осциллографа для всех каналов (R, N, M_z), которые будут определять поправку на вес.

10. Проявить фотобумагу с записью измерений на осциллографе, расшифровать их и по полученным результатам построить тарировочные зависимости $h_р = f_1(P)$, $h_м = f_2(M_z)$, а также кривую, характеризующую поправку на вес.

Пример. Рассмотрим тарировку трехкомпонентных аэродинамических весов, схема которых показана на рис. 2.4.9. Для тарировки использовалось приспособление, позволяющее устанавливать их горизонтально. Вместо модели во время тарировки на весах закреплялся цилиндр с пятью рядами шипов, расстояние между которыми равнялось 50 *мм*.

Для работы использовались тензометрическая станция (типа 8АНЧ-7М), а также шлейфовый осциллограф Н-700. Приборы и приспособления для тарировки аэродинамических весов показаны на рис. 3.1.18.

При закреплении на весах цилиндра было выполнено условие, чтобы электрическая ось совпадала с поперечной плоскостью, в которой расположены шипы среднего ряда. При этом подвешивание груза на эти шипы не вызывало отклонения луча осциллографа, связанного с измерительным каналом момента M_z. При тарировке подвешивание грузов производилось начиная с первого ряда шипов, расположенного ближе к зажимному устройству (см. рис. 3.1.18).

Для определения отклонения луча вместо кассеты с фотобумагой использовался экран из матового стекла со шкалой. При этом начальное положение «зайчика» фиксировалось с помощью луча свободного канала, направленного на экран до нагружения. При нагружении весов на этом экране измерялось расстояние между начальным и отклоненным «зайчиками» (рис. 3.1.19).

Для подвешивания выбирались грузы весом 2,4 и 6 *кГ*. Соответствующие результаты измерений отклонения лучей осциллографа (h_N, h_M), значения момента $M_z = Pl$ для первого ряда шипов ($l = 10$ *см*) показаны в табл. А.

Затем измерения повторялись с весами, повернутыми относительно продольной оси на 180°. Результаты измерений, полученные для этого положения весов, соответствуют

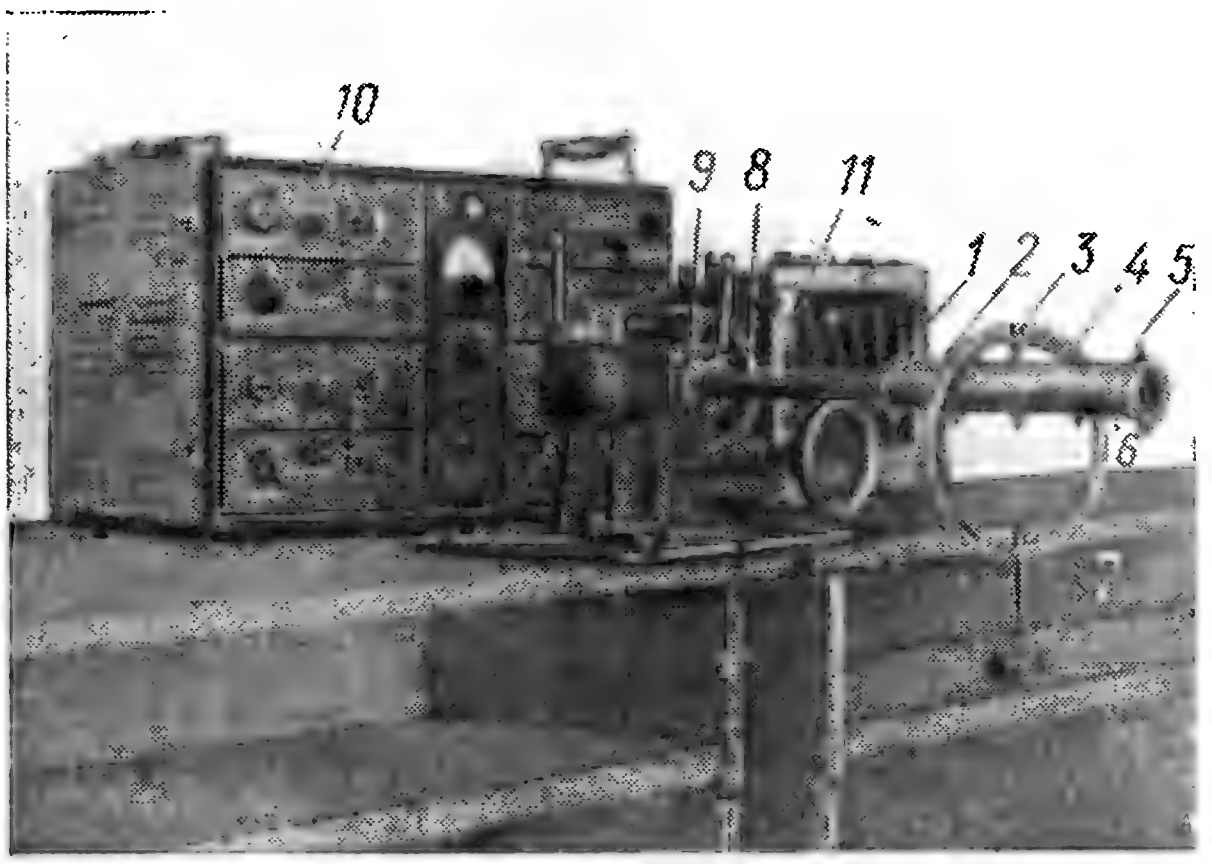


Рис. 3.1.18. Приборы и приспособления для тарировки тензовесов:

1, 2, 3, 4, 5 — номера рядов шипов; *6* — тарировочный цилиндр с шипами; *7* — подвешиваемый груз; *8* — державка с тензометрическими весами; *9* — зажимное приспособление; *10* — тензостанция; *11* — шлейфовый осциллограф

Таблица А

N, кГ	M_z, кГ·см	h_N, мм	$h_м$, мм
0	0	0	0
2	20	19	22
4	40	38	44
6	60	57	66

Таблица Б

R, кГ	0	0,5	1,0	1,5
h_R, мм	0	15	30	45

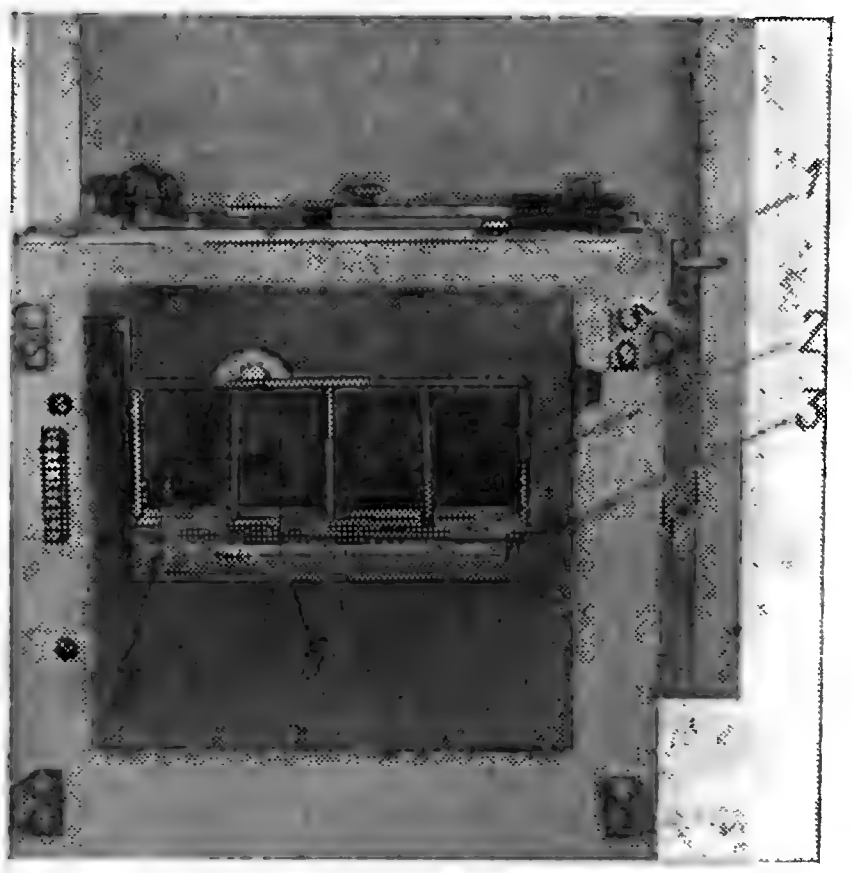


Рис. 3.1.19. Внешний вид экрана шлейфового осциллографа при тарировке:

1 — корпус; *2* — сменная рамка с экраном; *3* — матовое стекло; *4* — начальное положение зайчика; *5* — отклоненное положение зайчика; *6* — смещение луча

отрицательному по знаку нагружению. Полученные при этом отклонения лучей осциллографа оказались такими, как и для первоначального положения весов.

На рис. 3.1.20 и 3.1.21 показаны тарировочные графики $h_N = f_1(N)$ и $h_м = f_2(M_z)$, построенные по данным измерений отклонения луча шлейфового осциллографа.

При тарировке канала осевой силы R аэродинамические весы закреплялись в зажимном приспособлении вертикально, а грузы размещались на торце цилиндра. Вес этих грузов принимался равным 0,5; 1 и 1,5 *кГ*. Измеренные отклонения луча h_R осциллографа приведены в табл. Б.

Тарировочный график $h_R = f_3(R)$, построенный по данным этой таблицы, показан на рис. 3.1.22.

Для определения поправки на вес вместо цилиндра использовалась модель летательного аппарата, внутри которой размещались весы на державке, закрепленной при

помощи механизма изменения углов атаки (рис. 3.1.23). После балансировки измерительных каналов на матовом экране шлейфового осциллографа были определены на-

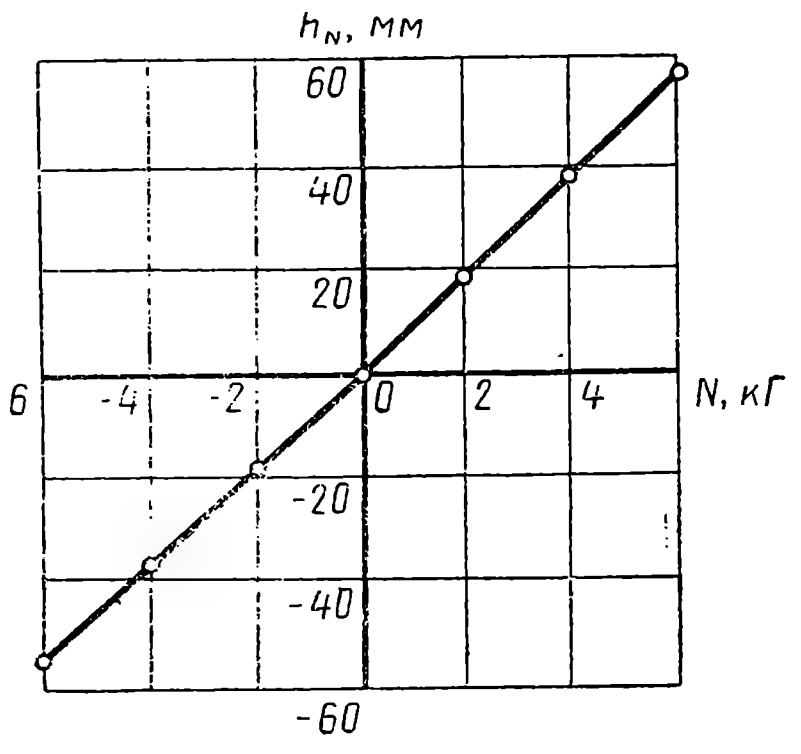


Рис. 3.1.20. График тарировки канала нормальной силы

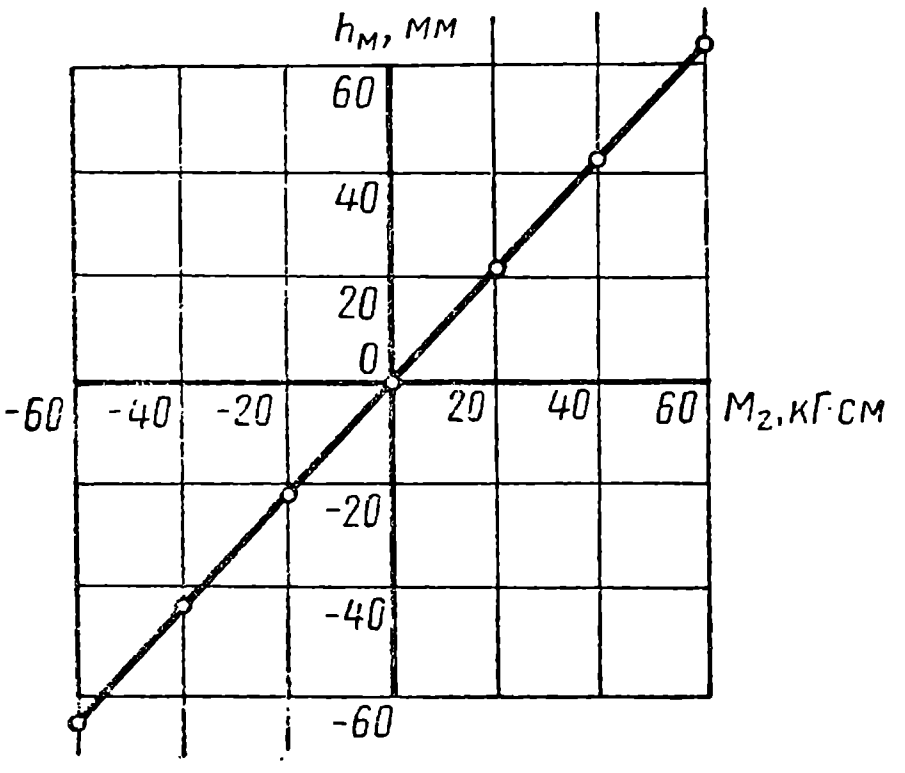


Рис. 3.1.21. График тарировки канала момента тангажа

чальные положения луча при нулевом угле атаки; причем с каждым таким начальным положением совмещались световые «зайчики» свободных каналов.

Для заданных углов атаки $\alpha=4$, 8 и 12° определялись расстояния $h_R^в$, $h_N^в$, $h_M^в$ между начальным и отклоненным лучами, обусловленные воздействием веса и соответствующие каналам для измерения осевой и нормальной оси, а также момента (табл. В).

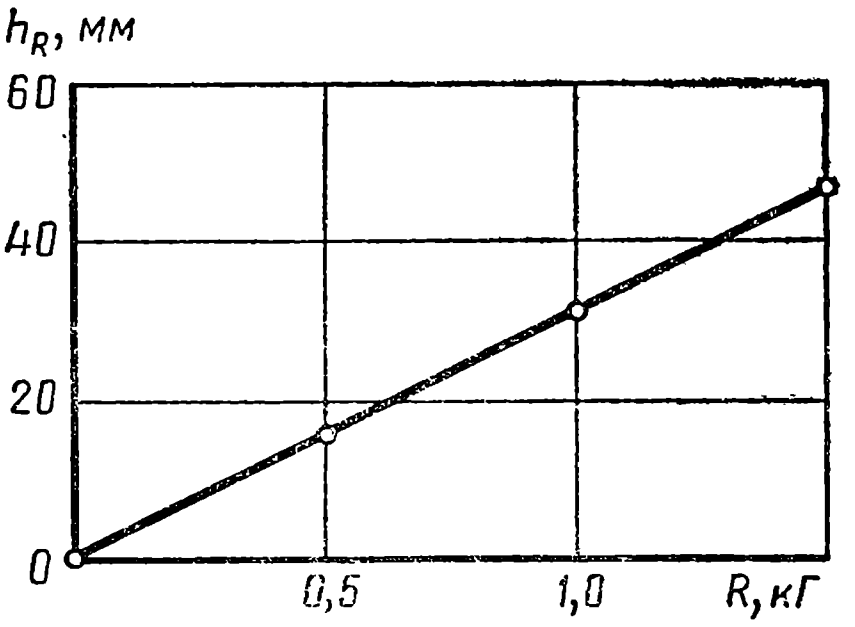


Рис. 3.1.22. График тарировки канала осевой (продольной) силы

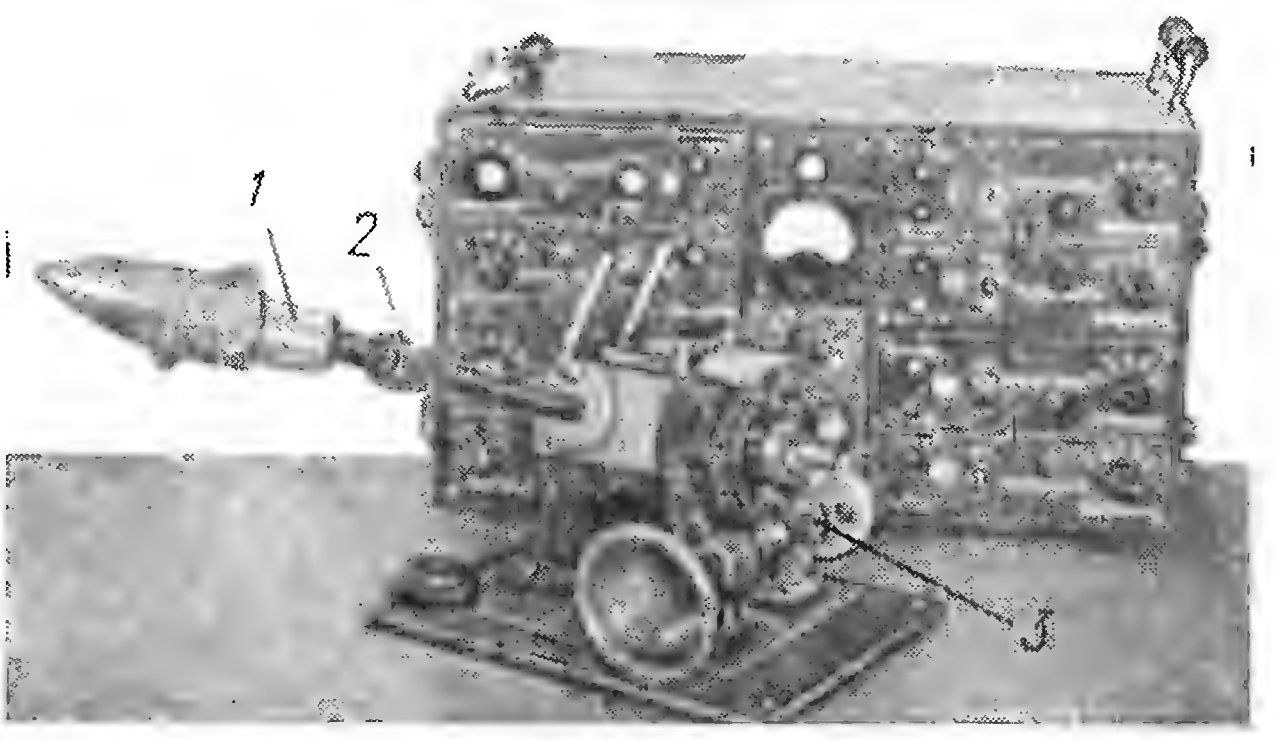


Рис. 3.1.23. Схема тарировки при определении поправки на вес:

1 — модель; *2* — державка с тензометрическими весами; *3*—устройство для установки углов атаки

В соответствии с данными табл. В поправку на вес следует вводить только в результаты измерения осевой силы. Это обусловлено следующим. Из рис. 3.1.24 видно, что вдоль оси Ox_1 на весы действует усилие от веса модели $G_м$

$$R^в = G_м \sin\alpha,$$

Таблица В

α, *град*	$h_R^в$, *мм*	$h_N^в$, *мм*	$h_M^в$, *мм*
0	0	0	0
4	1	0	0
8	2	0	0
12	3	0	0

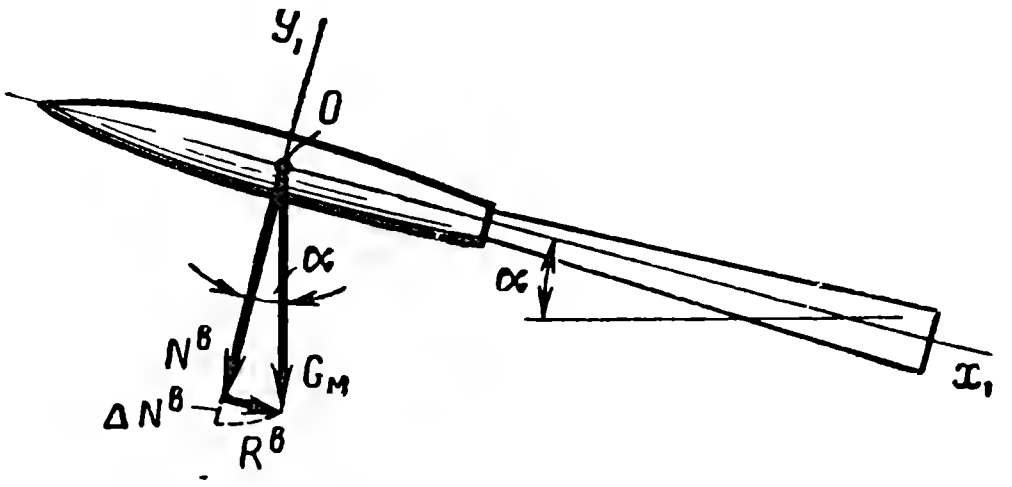


Рис. 3.1.24. Силовое воздействие модели на упругие элементы аэродинамических весов

а дополнительная нагрузка на упругие элементы каналов N и M_z будет соответственно равна

$$N^в = G_м(1-\cos\alpha),\ M_z^в = G_м(1-\cos\alpha)\,x_{ц.м},$$

где $x_{ц.м}$ — расстояние от центра массы модели до электрической оси весов.

Для модели весом 0,6 *кГ*, у которой $x_{ц.м}=2{,}0$ *см*, в случае $\alpha=12°$ значения $R^в=0{,}125$ *кГ*, $N^в=0{,}013$ *кГ*, $M_z^в=0{,}026$ *кГ·см*. Если чувствительность весов характеризуется графиками на рис. 3.1.20÷3.1.22, то под действием полученных нагрузок отклонения соответствующих лучей возможны лишь для канала измерения R, а для каналов N и M_z эти отклонения пренебрежимо малы и не могут быть зарегистрированы.

§ 3.2. ИЗМЕРЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ГАЗОВОГО ПОТОКА

Эксплуатация аэродинамических труб непосредственно связана с необходимостью измерения параметров газового потока в рабочей части. Данные этих измерений используются для улучшения конструкции отдельных элементов аэродинамической трубы (форкамера, сопло, диффузор и др.) с целью получения расчетных (заданных) параметров потока. Одновременно такие измерения составляют неотъемлемую часть исследований обтекания моделей летательных аппаратов, связанных с изучением параметров набегающего (невозмущенного) потока.

В настоящем параграфе рассматриваются основные лабораторные работы, знакомящие с методами измерения и расчета параметров газового потока в рабочей части аэродинамической трубы.

Работа 3.2.1

Измерение скорости потока при помощи насадка

Цель работы — определить скорость газового потока по результатам измерения давлений комбинированным насадком.

Общие сведения

Комбинированный насадок (см. рис. 2.1.35), помещенный в воздушный поток с малой скоростью (несжимаемое течение), позволяет измерить разность полного и статического давлений [см. (3.1.19)]. По этой разности давлений, используя (2.2.4), можно определить соответствующую скорость набегающего потока. Для воздуха получим расчетную зависимость для этой скорости в следующем виде:

$$V_\infty = 4\sqrt{\zeta_т k_т K\cdot\Delta h}, \qquad (3.2.1)$$

где $k_т$ и K — соответственно тарировочный коэффициент и коэффициент шкалы чашечного микроманометра; $\zeta_т$ — тарировочный коэффициент

насадка; Δh — перепад уровней в отсчетной трубке микроманометра, *мм*.

Для более точного определения скорости необходимо учитывать изменение плотности воздуха в зависимости от барометрического давления, температуры и влажности. В этом случае вместо (3.2.1) следует воспользоваться формулой (2.2.7):

$$V_\infty = \sqrt{42{,}2\frac{273+t}{p_{\text{атм}}}\left(1-0{,}378x\frac{p_{\text{н.п}}}{p_{\text{атм}}}\right)^{-1}\zeta_{\text{т}}\,k_{\text{т}}\,K\Delta h}. \qquad (3.2.2)$$

Для определения скорости (числа Маха) сверхзвукового потока можно применить комбинированный насадок, схема которого изображена на рис. 2.1.36. При измерении давлений с помощью этого насадка целесообразно использовать групповой регистрирующий манометр ГРМ. По результатам измерения из соотношения (2.2.9) определяется число $\mathbf{M}_\infty$ потока в рабочей части аэродинамической трубы. Одно из таких измерений связано с определением разности давления торможения p_0' за прямым скачком и атмосферным давлением:

$$p_0' - p_{\text{атм}} = \Delta N_0' k, \qquad (3.2.3)$$

где k — коэффициент группового регистрирующего манометра; $\Delta N_0' = N' - N_0'$ — разность конечного и начального показаний манометра по шкале отпечатков.

Аналогичное выражение запишем для определения разности статического и атмосферного давлений:

$$p_\infty - p_{\text{атм}} = \Delta N_\infty k, \qquad (3.2.4)$$

где $\Delta N_\infty = N_\infty - N_{0\infty}$ — разность показаний по шкале ГРМ.

По опытным данным находим величину $\mathbf{M}_\infty$, используя соотношение

$$\frac{\Delta N_0' k + p_{\text{атм}}}{\Delta N_\infty k + p_{\text{атм}}} = \frac{\dfrac{2k}{k+1}\mathbf{M}_\infty^2 - \dfrac{k-1}{k+1}}{\left[\dfrac{4k}{(k+1)^2} - \dfrac{2(k-1)}{(k+1)^2}\cdot\dfrac{1}{\mathbf{M}_\infty^2}\right]^{k/(k-1)}}. \qquad (3.2.5)$$

Для определения скорости потока по известному из опыта числу $\mathbf{M}_\infty$ необходимо в соответствии с (2.2.10) знать температуру T_0 в форкамере (температуру торможения). Для ее измерения можно использовать платиновый электротермометр сопротивления (см. рис. 2.3.1). По показанию N на шкале регистрирующей части этого прибора, датчик которого помещен в форкамеру, из тарировочного графика находится соответствующая температура $T_0 = f(N)$. Используя теперь формулу (2.2.10), в которой принимаем $kR = 401{,}9$ *м²/сек²·град*, напишем

$$V_\infty = \mathbf{M}_\infty\left(1 + 0{,}2\mathbf{M}_\infty^2\right)^{-1/2}\cdot 20{,}1\sqrt{T_0}. \qquad (3.2.6)$$

Порядок проведения работы

Измерения в дозвуковой аэродинамической трубе малых скоростей.

1. Ознакомиться с устройством аэродинамической трубы, насадка, микроманометров и проверить готовность их к работе.

2. Установить на координатнике насадок и выверить его положение относительно направления вектора скорости.

3. Соединить резиновыми шлангами штуцеры насадка с микроманометром и проверить герметичность соединений.

4. Определить барометрическое давление, температуру и влажность воздуха.

5. Включить аэродинамическую трубу и после выхода ее на режим

установившегося движения воздуха зафиксировать соответствующие показания микроманометра.

6. По полученным результатам измерений рассчитать скорость потока.

Измерения в сверхзвуковой трубе.

1. Ознакомиться с устройством аэродинамической трубы, насадка, координатника, манометра (ГРМ), электротермометра и проверить их готовность к работе.

2. Установить комбинированный насадок в рабочей части трубы и соединить приемники давления (дренажные отверстия) с ГРМ.

3. Измерить атмосферное давление и температуру в лаборатории и записать начальные показания ГРМ.

4. Установить в форкамере платиновый датчик температуры и проверить электрическую схему электротермометра.

5. Включить аэродинамическую трубу и после выхода ее на режим установившегося движения воздуха записать показания манометров и регистрирующего прибора термометра сопротивления.

6. По показаниям манометра определить давления p_∞, p_0', а также найти температуру торможения T_0. По этим значениям рассчитать число $\mathbf{M}_\infty$ и скорость газового потока V_∞.

Пример. Приведем результаты измерения скорости воздушного потока с помощью комбинированного насадка Пито — Прандтля. Измерения осуществлялись в открытой рабочей части малоскоростной аэродинамической трубы. Общий вид измерительной установки приведен на рис. 3.2.1.

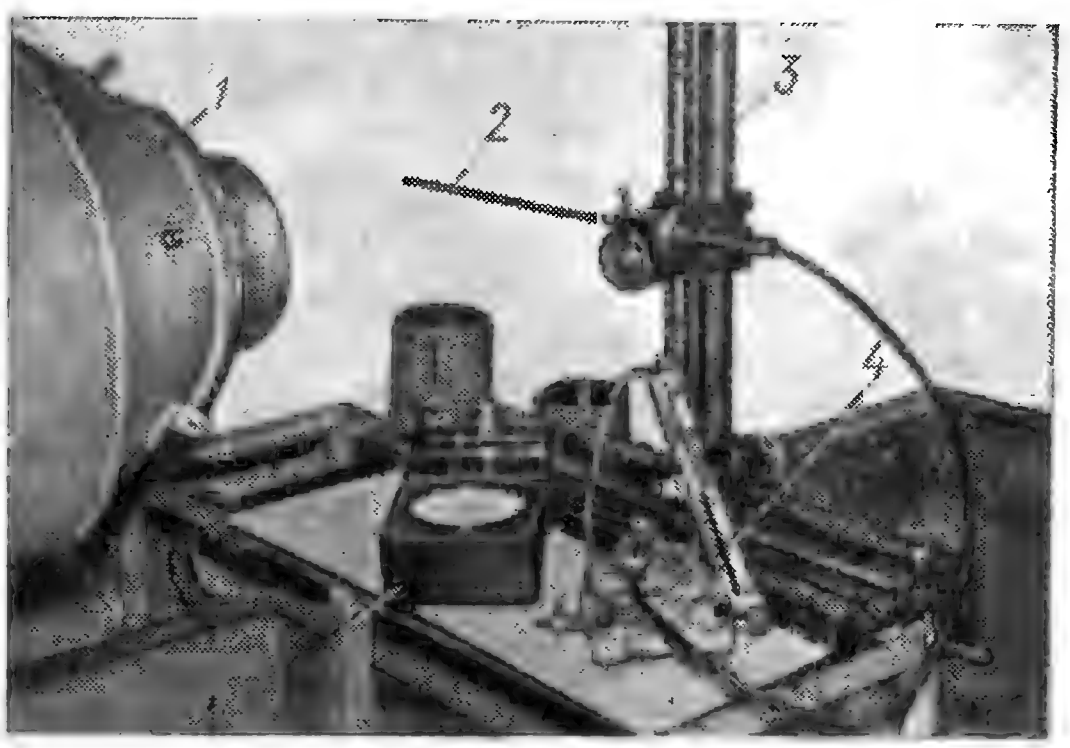


Рис. 3.2.1. Установка для определения скорости дозвукового потока с помощью комбинированного насадка:

1 — аэродинамическая труба; *2* — комбинированный насадок; *3* — координатник; *4*—микроманометр; *5*—лабораторный барометр и термометр

Давление регистрировалось чашечным микроманометром с коэффициентами $K=0{,}4$ и $k_т=1{,}0$; тарировочный коэффициент насадка $\zeta_т=1{,}0$. Начальный уровень жидкости в микроманометре $h_0=12$ *мм*. В результате продувки произошел подъем жидкости в отсчетном колене до отметки $h=132$ *мм*. Соответствующий перепад уровней составил $\Delta h=h-h_0=120$ *мм*.

По измерениям в атмосферном воздухе $t=22°$ С ($T=295$ К) и $p_{атм}=740$ *мм рт. ст.*, а по данным психрометра разность показаний сухого и влажного термометров была равна 4° С. По этой разности температур из табл. 2.2.1 при $t=22°$ С найдена относительная влажность $x=68\%$, а по величине $t=22°$ С из табл. 2.2.2 определено давление насыщенных водяных паров $p_{н.п}=21{,}6$ *мм рт. ст.*

Подставляя все эти данные в (3.2.2), получаем

$$V_\infty=\sqrt{42{,}2\frac{273+22}{740}\left(1-0{,}378\cdot 0{,}68\frac{21{,}6}{740}\right)^{-1}1{,}0\cdot 1{,}0\cdot 0{,}4\cdot 120}=28{,}4\ м/сек.$$

Теперь рассмотрим результаты проведения лабораторной работы по определению скорости сверхзвукового потока. Для этой цели использовался комбинированный насадок (см. рис. 2.1.36). Измерения проводились в сверхзвуковой аэродинамической трубе с закрытой рабочей частью. Общий вид трубы с установленным в ней насадком показан на рис. 3.2.2.

Температура в форкамере трубы, найденная при помощи платинового термометра сопротивления, равнялась $T_0=275$ К. Барометрическое давление и температура в лаборатории были равны соответственно $p_{атм}=738$ *мм рт. ст.* и $T=298$ К.

Сменный сопловый вкладыш трубы был рассчитан на получение в рабочей части $\mathbf{M}_\infty=3{,}0$. Это число и уточнялось в результате проведения измерений. Во время экспе-

римента использовался групповой регистрирующий манометр типа ГРМ-2, коэффициент шкалы которого $k=0{,}05$ *атм/дел*.

Начальные показания, соответствующие каналам для измерения статического давления и давления торможения: $N_{0\infty}=20{,}1$; $N_0'=19{,}8$. Во время продувки на шкале манометра зафиксированы показания: $N_\infty=2{,}0$; $N'=25{,}0$.

В соответствии с этими показаниями

$$p_\infty = p_{атм} + k\Delta N_\infty = 1{,}003 - 0{,}05 \cdot 18{,}1 = 0{,}098\ кГ/см^2;$$

$$p_0' = p_{атм} + k\Delta N_0' = 1{,}003 + 0{,}05 \cdot 5{,}2 = 1{,}263\ кГ/см^2.$$

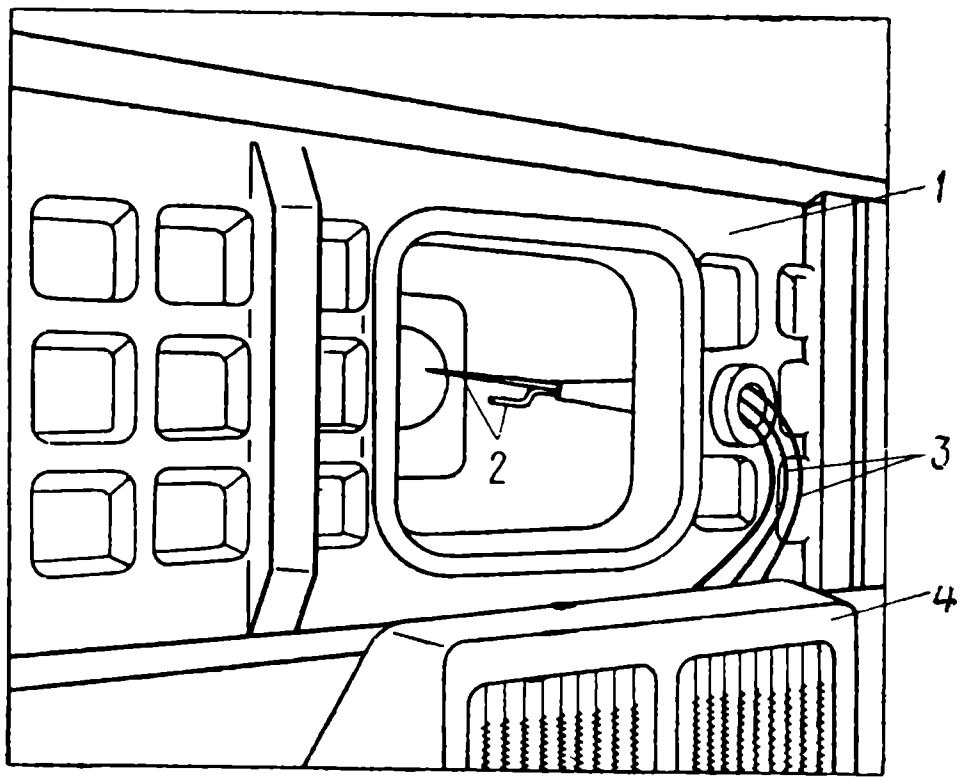


Рис. 3.2.2. Общий вид рабочей части аэродинамической трубы с комбинированным насадком:

1 — рабочая часть аэродинамической трубы; *2* — комбинированный насадок; *3* — соединительные шланги; *4* — групповой регистрирующий манометр

Из таблиц газодинамических функций воздуха [13] по отношению $p_\infty/p_0' = 0{,}098/1{,}263 = 0{,}0775$ для $k=1{,}4$ находим число Маха в рабочей части трубы $\mathbf{M}_\infty = 3{,}11$. По формуле (3.2.6), зная $T_0=275$ К и $\mathbf{M}_\infty=3{,}11$, находим соответствующую скорость потока:

$$V_\infty = 3{,}11 \cdot 20{,}1 \sqrt{275}\left(1 + 0{,}2 \cdot 3{,}11^2\right)^{-1/2} = 614\ м/сек.$$

Работа 3.2.2

Определение скорости воздушного потока по методу измерения перепада давлений

Цель работы — определить скорость потока по измеренным статическим давлениям в двух поперечных сечениях аэродинамической трубы.

Общие сведения

Рассмотрим воздушный поток в диффузоре сверхзвуковой аэродинамической трубы (см. рис. 1.4.1). Скорости такого потока будут дозвуковыми. При этом то обстоятельство, что движение воздуха происходит в канале с небольшим расширением и, следовательно, параметры потока в различных точках какого-либо поперечного сечения можно принять с достаточным приближением одинаковыми, позволяет определить скорость этого движения по измеренной разности статических давлений для двух таких сечений. Если для одного сечения параметры газа обозначить индексом «1», а для другого—индексом «2» (рис. 3.2.3), то уравнение Бернулли для этих сечений будет иметь вид

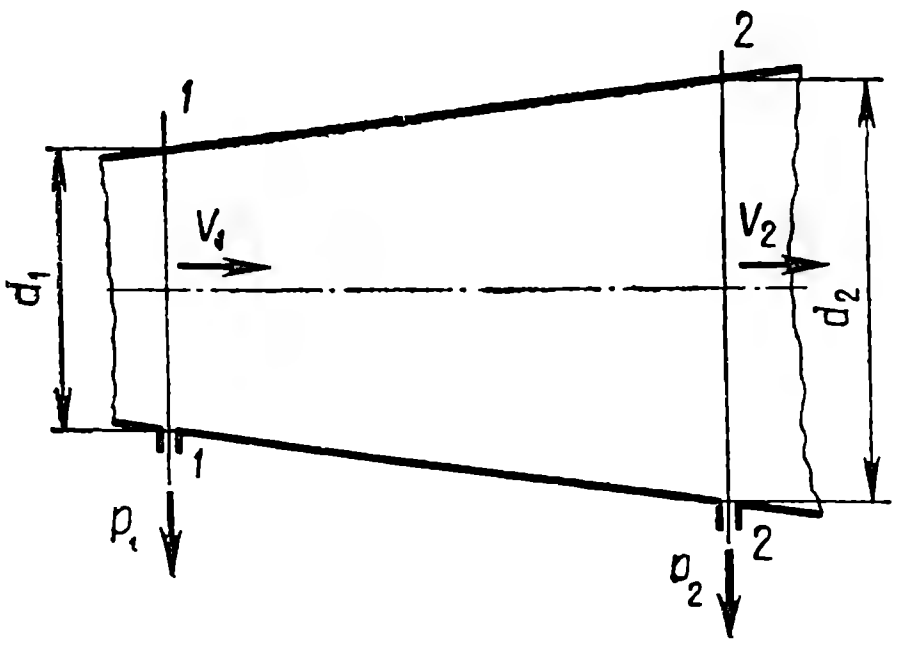


Рис. 3.2.3. Схема измерения давлений в трубопроводе для определения скорости потока

$$\frac{k}{k-1}\cdot\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{k}{k-1}\cdot\frac{p_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2}. \qquad (3.2.7)$$

Полагая в этом выражении скорость V_1 равной в соответствии с уравнением расхода $\rho_1 V_1 S_1 = \rho_2 V_2 S_2$ (S_1 и S_2 — соответственно площади поперечных сечений *1—1* и *2—2*) величине

$$V_1 = V_2 \rho_2 S_2 / (\rho_1 S_1),$$

найдем следующую зависимость для скорости в сечении *2—2*:

$$V_2 = \left\{ \frac{2k}{k-1} \cdot \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p_2 \rho_1}{p_1 \rho_2} \right) \left[1 - \left(\frac{\rho_2 S_2}{\rho_1 S_1} \right)^2 \right]^{-1} \right] \right\}^{1/2}.$$

Так как отношение плотностей можно заменить по уравнению адиабаты $\rho_2/\rho_1 = (p_2/p_1)^{1/k}$, то

$$V_2 = \left\{ \frac{2k}{k-1} \cdot \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{\rho_1} \right)^{(k-1)/k} \right] \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{2/k} \frac{S_2^2}{S_1^2} \right]^{-1} \right\}^{1/2}.$$

Имея в виду, что $kp_1/\rho_1 = a_1^2$, и переходя к разности давлений $\Delta p = p_1 - p_2$, получим

$$V_2 = \left\{ \frac{2a_1^2}{k-1} \left[1 - \left(1 - \frac{\Delta p}{p_1} \right)^{(k-1)/k} \right] \left[1 - \left(1 - \frac{\Delta p}{p_1} \right)^{2/k} \frac{S_2^2}{S_1^2} \right]^{-1} \right\}^{1/2} \qquad (3.2.8)$$

Здесь в свою очередь квадрат скорости звука

$$a_1^2 = kRT_1 = kRT_0 - \frac{k-1}{2} \left[V_2^2 \frac{S_2^2}{S_1^2} \left(1 - \frac{\Delta p}{p_1} \right)^{2/k} \right]. \qquad (3.2.9)$$

Полагая, что параметры в сечении *1—1*, а также температура T_0 известны, можно из уравнений (3.2.8) и (3.2.9) определить по измеренной разности статических давлений Δp скорость во втором сечении.

Рассмотрим случай, когда сечение *1—1* проходит через форкамеру и его площадь значительно превышает величину S_2. Тогда можно принять $T_1 \approx T_0$, $p_1 \approx p_0$ и, учитывая, что $S_2 \ll S_1$, написать вместо (3.2.8) соотношение

$$V_2 = \left\{ \frac{2k\,RT_0}{k-1} \left[1 - \left(1 - \frac{\Delta p}{p_0} \right)^{(k-1)/k} \right] \right\}^{1/2}, \qquad (3.2.10)$$

в котором $\Delta p = p_0 - p_2$.

Наиболее точными значения скорости, получаемые по методу измерения перепада статических давлений, будут, если этот перепад невелик и относительная величина $\Delta p/p_0$ не превышает 0,15÷0,2. В частности, если $p_0 = 1$ *кГ/см*^{2} (10^4 *мм вод. ст.*), то при выполнении этого условия $\Delta p < 2000$ *мм вод. ст.* Для $\Delta p/p_0 < 0{,}15 \div 0{,}2$ формулу (3.2.10) можно упростить, представив в виде

$$V_\infty = \left[2RT_0 \frac{\Delta p}{p_0} \left(1 + \frac{1}{2k} \cdot \frac{\Delta p}{p_0} \right) \right]^{1/2}. \qquad (3.2.11)$$

Для еще меньших перепадов давлений ($\Delta p/p_0 < 0{,}02 \div 0{,}03$) в круглых скобках (3.2.11) можно ограничиться одним членом в разложении и, приняв $RT_0 = p_0/\rho_0$, написать

$$V_\infty = \sqrt{2\Delta p/\rho}. \qquad (3.2.12)$$

Эта формула совпадает с соответствующим выражением (2.2.4) для несжимаемого потока.

В рассматриваемом случае движения воздуха с малой скоростью определение ее величины по измеренному перепаду статических давлений возможно также, если первое сечение не проходит через форкамеру и, следовательно, параметры воздуха в нем отличаются от их значений для условий торможения (см. рис. 3.2.3).

Чтобы получить для этого случая расчетную зависимость, напишем уравнение Бернулли для несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$):

$$p_1/\rho + V_1^2/2 = p_2/\rho + V_2^2/2. \qquad (3.2.13)$$

Из условия постоянства расхода $V_1 S_1 = V_2 S_2$ можно найти скорость $V_1 = V_2 (S_2/S_1)$. Внося это значение в (3.2.13) и определяя скорость V_2, получим

$$V_2 = \sqrt{\frac{2}{\rho} \Delta p \left(1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}\right)^{-1}}. \qquad (3.2.14)$$

Подставляя сюда вместо $\Delta p = p_1 - p_2$ значение, полученное в результате измерения давления чашечным микроманометром, и определяя плотность ρ с учетом барометрического давления, температуры и влажности, найдем расчетную зависимость в следующем виде:

$$V_2 = \sqrt{42{,}2 \frac{273 + t}{p_{\text{атм}}} \left(1 - 0{,}378 x \frac{p_{\text{н.п}}}{p_{\text{атм}}}\right)^{-1} k_{\text{т}} \zeta_{\text{т}} K \Delta h \left(1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}\right)^{-1}}. \qquad (3.2.15)$$

Порядок проведения работы

Измерения в аэродинамической трубе малых скоростей (см. рис. 3.1.14).

1. Ознакомиться с устройством аэродинамической трубы, манометров и термометров; проверить их готовность к работе.

2. Соединить приемник статического давления (дренажное отверстие в стенке трубки) резиновыми шлангами с чашечным микроманометром и проверить герметичность соединения.

3. Измерить барометрическое давление и температуру в лаборатории.

4. Включить аэродинамическую трубу и после выхода ее на режим установившегося потока в рабочей части записать показания микроманометра.

5. По измеренной разности уровней жидкости в манометре вычислить соответствующий перепад давлений, а затем, используя формулу (3.2.15), рассчитать скорость газа в рассматриваемом сечении аэродинамической трубы.

Измерения в диффузоре сверхзвуковой аэродинамической трубы.

1. Ознакомиться с устройством сверхзвуковой аэродинамической трубы, насадками, манометрами, электротермометром, а также схемой измерительной установки.

2. Установить в форкамере платиновый датчик температуры и проверить электрическую схему термометра.

3. Резиновыми шлангами соединить штуцеры приемников статического давления в сечениях *1—1* и *2—2* диффузора с групповым регистрирующим манометром.

4. Измерить барометрическое давление и температуру атмосферного воздуха.

5. Определить площади S_1 и S_2 поперечных сечений *1—1* и *2—2* диффузора.

6. Включить аэродинамическую трубу и измерить при помощи ГРМ разности давлений $\Delta p_1 = p_1 - p_{\text{атм}}$ и $\Delta p_2 = p_2 - p_{\text{атм}}$.

7. По этим значениям найти разность статических давлений $\Delta p = p_1 - p_2$, определить в сечении *1—1* давление $p_1 = \Delta p_1 + p_{\text{атм}}$, а затем, зная T_0, вычислить, используя (3.2.8) и (3.2.9), скорость в сечении *2—2* диффузора.

Пример. Определим скорость воздушного потока в рабочем сечении малоскоростной аэродинамической трубы (см. рис. 3.1.14). В выбранном сечении *II—II* в стенке трубы просверлено дренажное отверстие, которое через штуцер соединено резиновым шлангом с отсчетной трубкой чашечного микроманометра ($k_т=1{,}0$, $K=0{,}8$). Начальный уровень жидкости в его отсчетном колене $h_0=10$ *мм*.

Так как воздух поступает в трубу из атмосферы и его скорость в форкамере пренебрежимо мала, то принимаем для сечения *1—1*, проходящего через форкамеру, $V_1\approx 0$. Давление здесь будет атмосферным и равным, согласно показанию барометра, $p_0=p_{атм}=750$ *мм рт. ст.* Соответствующая температура $T_0=T_{атм}=295$ К. Относительная влажность $x=68\%$. Давление насыщенных паров $p_{н:п}=21{,}6$ *мм рт. ст.*

Статическое давление в сечении *1—1* равно атмосферному, следовательно, резервуар чашечного микроманометра сообщался с атмосферой. После включения трубы уровень жидкости в отсчетной трубке этого манометра переместился до отметки $h=142$ *мм*. В соответствии с этим разность уровней

$$\Delta h = h - h_0 = 142 - 10 = 132 \text{ мм},$$

а перепад давлений

$$\Delta p = p_1 - p_2 = k_т K \cdot \Delta h = 1{,}0 \cdot 0{,}8 \cdot 132 = 106 \text{ мм вод. ст.}$$

По этому значению перепада давлений определяем из (3.2.15) скорость

$$V_2 = \sqrt{42{,}2\frac{295}{750}\left(1-0{,}378\cdot 0{,}68\frac{21{,}6}{750}\right)^{-1}106} = 41{,}8 \text{ м/сек}.$$

Рассмотрим теперь результаты измерения скорости в диффузоре сверхзвуковой трубы. В сечениях *1—1* и *2—2* (см. рис. 3.2.3) в стенке диффузора просверлены дренажные отверстия, которые через штуцера соединены резиновыми шлангами с ГРМ. Измеренное барометрическое давление и температура в лаборатории были равны соответственно $p_{атм}=738$ *мм рт. ст.*, $T_{атм}=298$ К. Температура в форкамере, найденная с помощью платинового электротермометра сопротивления, равнялась $T_0=275$ К.

Во время работы трубы измеренные при помощи группового регистрирующего манометра (ГРМ-2 с коэффициентом $k=0{,}01$) перепады давлений были следующими:

$$\Delta p_1 = p_1 - p_{атм} = k(N_1 - N_{01}) = 0{,}01\cdot 12 \text{ кГ/см}^2;$$

$$\Delta p_2 = p_2 - p_{атм} = k(N_2 - N_{02}) = 0{,}01\cdot 22 \text{ кГ/см}^2,$$

где $N_{01(02)}$, $N_{1(2)}$ — соответственно начальные и конечные показания по шкале ГРМ. С учетом полученного перепада давлений статическое давление в сечении *1—1*

$$p_1 = \Delta p_1 + p_{атм} = 0{,}12 + 1{,}00 = 1{,}12 \text{ кГ/см}^2.$$

Площади поперечных сечений *1—1* и *2—2* соответственно равны: $S_1=0{,}282$ *м*^{2} и $S_2=0{,}406$ *м*^{2}, отношение этих площадей $S_2/S_1=0{,}406/0{,}282=1{,}44$. Имея в виду, что $kR=1{,}4\cdot 287=401{,}9$ *м*^{2}/*сек*$^2\cdot$*град*, $T_0=275$ К и $\Delta p=\Delta p_1-\Delta p_2=-0{,}1$ *кГ/см*^{2}, после подстановки соответствующих данных в (3.2.8) и (3.2.9) найдем:

$$V_2 = \left\{\frac{2a_1^2}{1{,}4-1}\left[1-\left(1-\frac{-0{,}1}{1{,}12}\right)^{(1{,}4-1)/1{,}4}\right]\left[1-\left(1-\frac{-0{,}1}{1{,}12}\right)^{2/1{,}4}1{,}44^2\right]^{-1}\right\}^{1/2};$$

$$a_1^2 = 401{,}9\cdot 275 - \frac{1{,}4-1}{2}\left[V_2^2\cdot 1{,}44^2\left(1-\frac{-0{,}1}{1{,}12}\right)^{2/1{,}4}\right].$$

Решая эти уравнения относительно скорости V_2, найдем ее величину $V_2=33{,}1$ *м/сек*.

Работа 3.2.3

Определение числа Маха невозмущенного сверхзвукового потока

Цель работы — определение числа Маха потока в рабочей части сверхзвуковой трубы по теневой фотографии обтекания поверхности и по методу измерения давлений.

Общие сведения

Оптический метод. Рассмотрим обтекание равномерным и параллельным сверхзвуковым потоком плоской клиновидной поверхности с половиной угла при вершине $\beta_{кл}$ (рис. 3.2.4). Если этот угол не превышает некоторого предельного (критического) значения β^*, то обтекание характеризуется возникновением перед клином прямолинейного

присоединенного скачка уплотнения, наклоненного под углом θ_c к вектору скорости $\bar{V}_\infty$. Если угол клина $\beta_{кл}$ и число $\mathbf{M}_\infty$ заданы, то можно определить величину θ_c. Может быть решена и обратная задача, связанная с отысканием числа Маха набегающего сверхзвукового потока по известным значениям θ_c и $\beta_{кл}$.

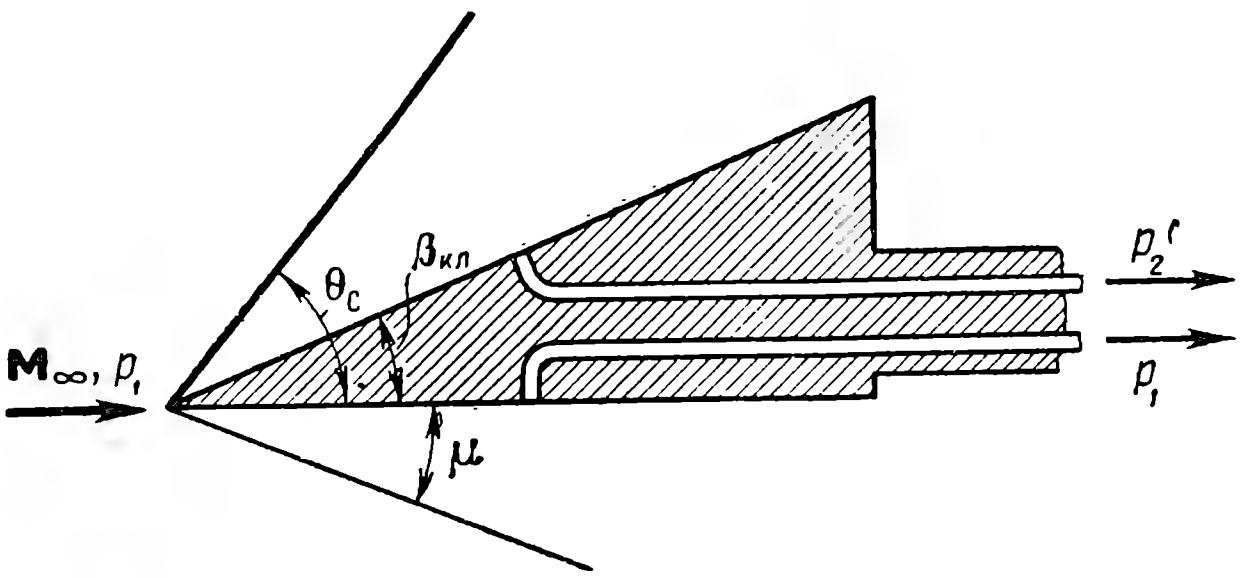


Рис. 3.2.4. Схема измерения давлений на клиновидном насадке для определения числа $\mathbf{M}_\infty$ потока

При помощи оптических методов исследования сверхзвукового обтекания в аэродинамической трубе можно сфотографировать поток около клина и получить теневой снимок, на котором будет изображена линия скачка уплотнения. Зная направление набегающего потока, можно измерить угол θ_c между скачком и вектором $\bar{V}_\infty$, а затем вычислить соответствующее число Маха, пользуясь следующей формулой из теории косого скачка уплотнения:

$$\mathbf{M}_\infty = \left[\sin^2\theta_c - \frac{k+1}{2}\cdot\frac{\sin\theta_c\cdot\sin\beta_{кл}}{\cos(\theta_c-\beta_{кл})}\right]^{-1/2}. \qquad (3.2.16)$$

Измерение давлений на клиновидной поверхности. Наряду с оптическим методом определение числа $\mathbf{M}_\infty$ можно вести также путем измерения давления p_2 на обтекаемой поверхности клина, а также статического давления p_1 набегающего потока. По этим значениям p_2 и p_1, а также заданному углу клина $\beta_{кл}$ число Маха находится из решений уравнений (3.2.16) и

$$\mathbf{M}_\infty = \frac{1}{\sin\theta_c}\left[\frac{k+1}{2k}\left(\frac{p_2}{p_1}+\frac{k-1}{k+1}\right)\right]^{1/2}. \qquad (3.2.17)$$

Измерение давлений ведется на модели клина (см. рис. 3.2.4), установленной в рабочей части сверхзвуковой трубы так, чтобы одна сторона (нижняя) была параллельна вектору $\bar{V}_\infty$ ($\mathbf{M}_\infty$), а другая (верхняя) образовывала с ним некоторый угол $\beta_{кл}$ (угол клина), меньший критической величины β^*.

Дренажное отверстие на нижней поверхности будет воспринимать статическое давление потока p_1, а на верхней — давление p_2 за косым скачком уплотнения, или, что то же самое, давление на клине. Эти дренажные отверстия (приемники давления) соединяются специальными металлическими трубками и резиновыми шлангами с манометрами. Если используется групповой регистрирующий манометр (ГРМ), то измеренные давления:

$$p_1 = p_{атм} + \zeta_{т1}\, k\cdot\Delta N_1;$$
$$p_2 = p_{атм} + \zeta_{т2}\, k\cdot\Delta N_2,$$

где k — коэффициент шкалы прибора ГРМ; $\zeta_{т2}$ и $\zeta_{т1}$ — тарировочные коэффициенты соответствующих приемников давления на клине; ΔN_2, ΔN_1 — разность конечных и начальных показаний на шкалах манометра.

Внося значения p_1 и p_2 в уравнение (3.2.17), получим

$$\mathbf{M}_\infty = \frac{1}{\sin\theta_c}\left[\frac{k+1}{2k}\left(\frac{p_{атм}+k\zeta_{т2}\cdot\Delta N_2}{p_{атм}+k\zeta_{т1}\cdot\Delta N_1}+\frac{k-1}{k+1}\right)\right]^{1/2}. \qquad (3.2.18)$$

Решая это уравнение совместно с уравнением (3.2.16), найдем соответствующее число $\mathbf{M}_\infty$.

Измерение давлений торможения. При экспериментальном определении числа $\mathbf{M}_\infty$ в рабочей части сверхзвуковой трубы часто используют насадок Пито (см. рис. 2.1.31).

При помощи такого насадка, соединенного с ГРМ, измеряется давление торможения p_0' за прямым скачком уплотнения

$$p_0' = p_{\text{атм}} + k\zeta_{\text{т}} \cdot \Delta N, \tag{3.2.19}$$

где k, $\zeta_{\text{т}}$ — соответственно коэффициент шкалы ГРМ и тарировочный коэффициент насадка; $\Delta N = N - N_0$ — разность конечного и начального показаний ГРМ.

Одновременно измеряется давление p_0 в форкамере трубы. По этим значениям давлений торможения можно определить число $\mathbf{M}_\infty$, пользуясь выражением

$$\frac{p_{\text{атм}} + k\zeta_{\text{т}}\,\Delta N}{p_0} = \left[\frac{2k}{k+1}\mathbf{M}_\infty^2 - \frac{k-1}{k+1}\right]^{-\frac{1}{k-1}} \cdot \left[\frac{2+(k-1)\,\mathbf{M}_\infty^2}{(k+1)\,\mathbf{M}_\infty^2}\right]^{-\frac{k}{k-1}} \cdot \tag{3.2.20}$$

Для $k=1{,}4$ это число $\mathbf{M}_\infty$ можно найти по вычисленному отношению p_0'/p_0 из таблицы, приведенной в книге [17].

Порядок проведения работы

1. Ознакомиться с устройством аэродинамической трубы, оптического прибора, насадков и манометров и проверить готовность их к работе.
2. Установить клиновидный насадок и трубку Пито в рабочей части сверхзвуковой аэродинамической трубы и соединить приемники давления (дренажные отверстия) с групповым регистрирующим манометром.
3. Закрепить манометр в форкамере трубы.
4. Настроить теневой прибор и установить фотоаппарат.
5. Измерить атмосферное давление и температуру в лаборатории и записать начальные показания ГРМ.
6. Включить аэродинамическую трубу и после выхода ее на режим установившегося движения воздуха записать показания манометров и сфотографировать возмущенный поток около клиновидного насадка.
7. По показаниям манометров определить давления p_2, p_1, p_0, p_0', а на фотографии измерить угол скачка. Используя значения p_2 и p_1, давлений торможения p_0 и p_0' и угла θ_c, вычислить соответствующие числа $\mathbf{M}_\infty$ и сравнить их между собой.

Пример. Определим число $\mathbf{M}_\infty$ в рабочей части сверхзвуковой аэродинамической трубы, осуществив одновременное измерение угла наклона скачка уплотнения перед клиновидным насадком, давлений p_2 и p_1 на нем, а также давлений торможения p_0' за прямым скачком и p_0 в форкамере. Схема измерительной установки показана на рис. 3.2.5, а ее внешний вид — на рис. 3.2.6.

Экспериментальная модель представляет собой «односторонний» клин (см. рис. 3.2.4) с углом при вершине $\beta_{\text{кл}}=15°$. На его верхней и нижней сторонах просверлены дренажные отверстия диаметром 0,3 *мм*, к которым припаяны тонкие медные дренажные трубки.

Для измерения давления p_0' торможения за прямым скачком уплотнения использовалась трубка Пито, закрепленная на одной державке вместе с клином (см. рис. 3.2.5). При этом трубка Пито размещалась так, чтобы возникающий скачок располагался за дренажным отверстием на нижней стороне клина.

Для измерения давлений p_2, p_1 и p_0' использовался групповой регистрирующий манометр типа ГРМ-2 с коэффициентом шкалы $k=0{,}05$. Барометрическое давление в лаборатории во время опыта $p_{\text{атм}}=750$ *мм рт. ст.* $=1{,}022$ *кГ/см*^{2}, а давление в форкамере, измеренное во время работы трубы, $p_0=4{,}22$ *кГ/см*^{2}.

Конечные N и начальные N_0 показания ГРМ при измерении давлений p_2, p_1 и p_0', а также результаты вычисления представлены в табл. А.

Давления в этой таблице вычислены при условии, что тарировочные коэффициенты $\zeta_т$ приемников давления равны единице. Найденные значения $p_2=0{,}282$ *кГ/см²*, $p_1=0{,}097$ *кГ/см²* вносим в (3.2.18):

$$M_\infty = \frac{1}{\sin\theta_c}\left[\frac{1{,}4+1}{2\cdot 1{,}4}\left(\frac{0{,}282}{0{,}097}+\frac{1{,}4-1}{1{,}4+1}\right)\right]^{1/2}.$$

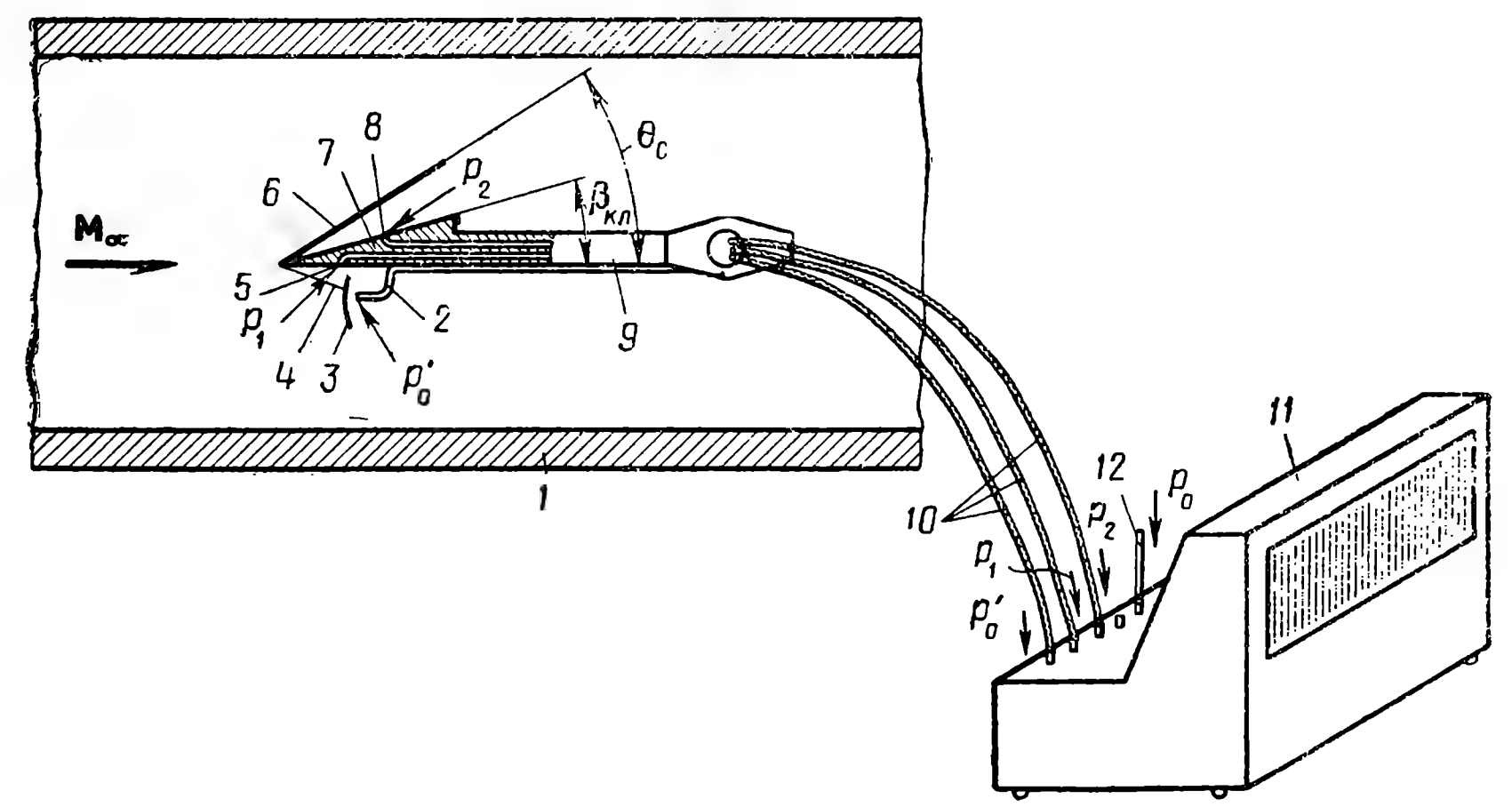


Рис. 3.2.5. Схема установки для определения числа M_∞:

1 — аэродинамическая труба; *2* — насадок Пито; *3* — скачок уплотнения; *4* — волна возмущения (линия Маха); *5*, *8* — приемники давления; *6* — косой скачок уплотнения; *7* — односторонний клин; *9* — державка; *10* — дренажные трубки; *11* — групповой регистрирующий манометр; *12*—дренажная трубка для давления торможения

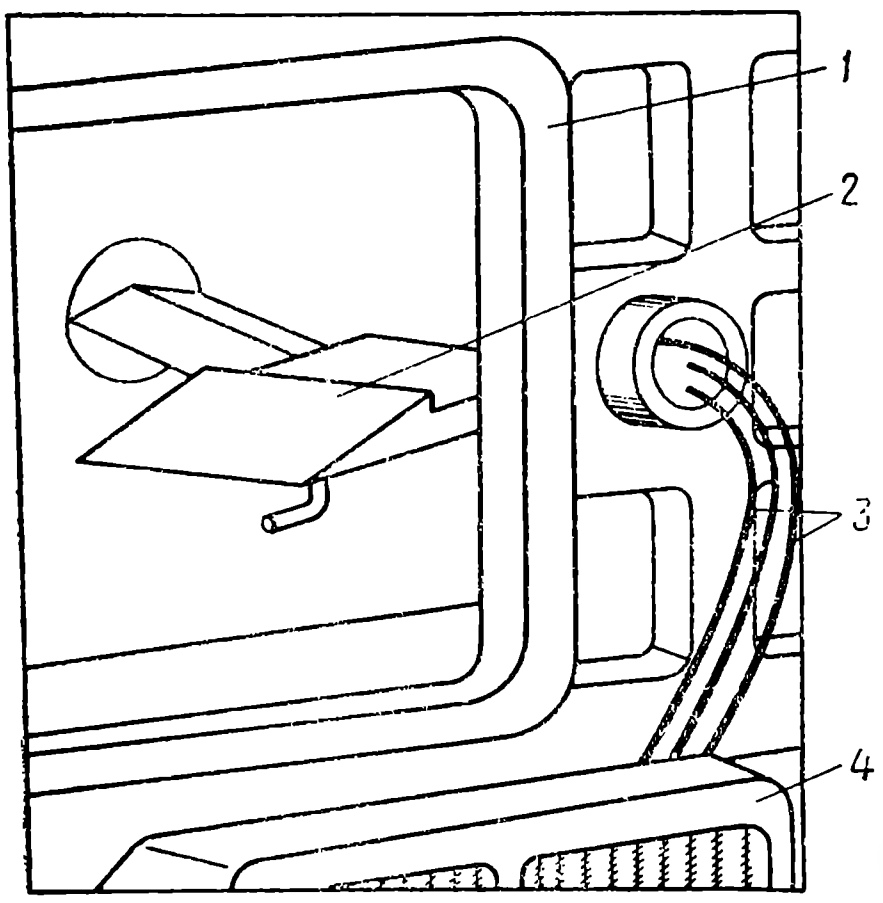


Рис. 3.2.6. Установка для определения числа M_∞:

1 — аэродинамическая труба; *2* — клиновидный насадок с трубкой Пито; *3* — дренажные трубки; *4* — групповой регистрирующий манометр

Таблица А

	p_2	p_1	p_0'
N_0	19,8	20,2	19,6
N	5,0	1,7	24,4
$\Delta N=N-N_0$	—14,8	—18,5	4,8
$k\cdot\Delta N$	—0,74	—0,925	0,24
$p=p_{атм}+k\zeta_т\cdot\Delta N$, *кГ/см²*	0,282	0,097	1,26

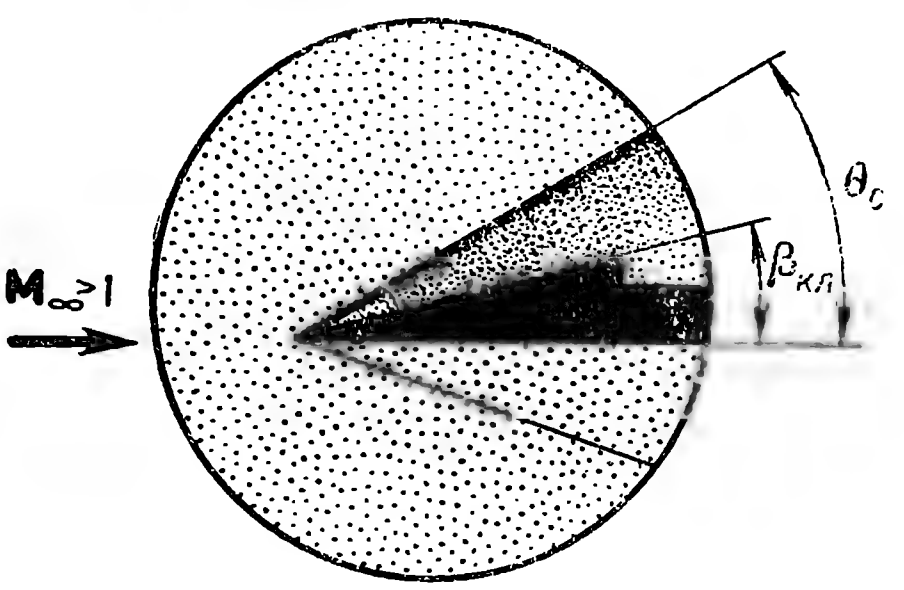


Рис. 3.2.7. Теневая фотография обтекания одностороннего клина

Решая это уравнение совместно с зависимостью (3.2.16)

$$M_\infty = \left[\sin^2\theta_c - \frac{1{,}4+1}{2}\cdot\frac{\sin\theta_c\sin 15^\circ}{\cos(\theta_c-15^\circ)}\right]^{-1/2},$$

находим $M_\infty=3{,}10$.

Определим число Маха по давлениям $p_0'=1{,}26$ *кГ/см²* и $p_0=4{,}22$ *кГ/см²*. Отношение этих давлений $p_0'/p_0=1{,}26/4{,}22=0{,}299$. Зная это отношение, из таблицы [17] находим $M_\infty=3{,}11$. Теперь используем для определения M_∞ полученную теневую фотографию скачка уплотнения перед клином (рис. 3.2.7) и измерим на ней угол наклона скачка $\theta_c=31°20'$. Подставляя это значение в (3.2.16) и принимая $k=1{,}4$, найдем

$$M_\infty=\left(\sin^2 31°\,20'-\frac{1{,}4+1}{2}\cdot\frac{\sin 31°\,20'\cdot\sin 15°}{\cos 16°\,20'}\right)^{-1/2}=3{,}13.$$

Как видим, найденные числа M_∞ отличаются друг от друга незначительно и для последующих аэродинамических расчетов можно выбрать среднее значение $M_\infty=3{,}11$.

Работа 3.2.4

Определение поля давлений и скоростей в аэродинамической трубе

Цель работы — найти распределение статических давлений и скоростей (скоростных напоров) в поперечных сечениях потока в рабочей части аэродинамической трубы. Результаты работы должны быть представлены в виде графиков, характеризующих изменение этих параметров от координат точек рассматриваемого сечения.

Общие сведения

Дозвуковые скорости (несжимаемый поток). Для измерения статического давления p_∞, а также полного напора p_0 воздушного потока в некоторой точке M с координатами y, z рассматриваемого поперечного сечения ($x=\text{const}$) рабочей части трубы (рис. 3.2.8) может быть использован комбинированный насадок (см. рис. 2.1.35). Перемещая такой насадок, можно измерить соответствующие давления в различных точках этого и другого сечений и тем самым найти поле давлений в воздушном потоке трубы. По измеренным давлениям можно рассчитать скорости V_∞ и скоростные напоры $\rho_\infty V_\infty^2/2$ и тем самым получить их распределение в рабочей части.

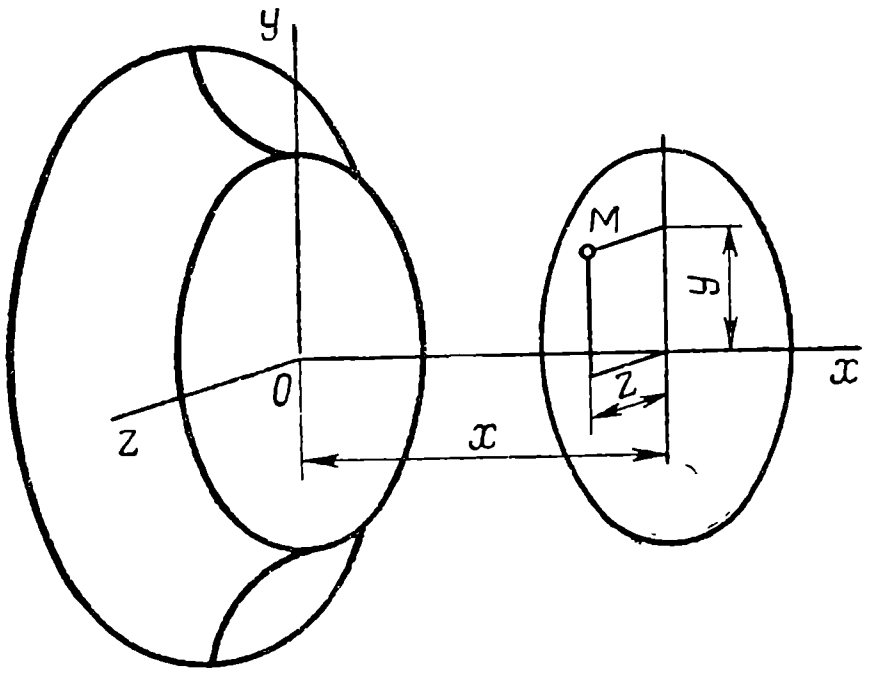


Рис. 3.2.8. Система координат для определения положения насадка в рабочей части аэродинамической трубы

Обычно для измерений используются чашечные микроманометры. Статическое давление, измеренное таким манометром,

$$p_\infty=p_{\text{атм}}+\zeta_{т1}\,k_{т1}K_1\cdot\Delta h_1,$$

полное давление

$$p_0=p_{\text{атм}}+\zeta_{т2}\,k_{т2}\,K_2\cdot\Delta h_2,$$

где Δh_1 и Δh_2 — разности показаний соответственно первого и второго манометров ($\Delta h_1=h_1-h_{01}$; $\Delta h_2=h_2-h_{02}$).
Согласно уравнению Бернулли местная скорость

$$V_\infty=\sqrt{(2/\rho)\,(p_0-p_\infty)}=\sqrt{(2/\rho)\,(\zeta_{т2}\,k_{т2}\,K_2\cdot\Delta h_2-\zeta_{т1}\,k_{т1}\,K_1\cdot\Delta h_1)},\quad(3.2.21)$$

а скоростной напор

$$q_\infty=\rho V_\infty^2/2=p_0-p_\infty=\zeta_{т2}\,k_{т2}\,K_2\cdot\Delta h_2-\zeta_{т1}\,k_{т1}\,K_1\cdot\Delta h_1.\quad(3.2.22)$$

Обычно вместо этой размерной величины q_∞ для характеристики пото-

ка используют безразмерный коэффициент поля скоростных напоров, определяемый отношением

$$\mu = q_{\infty тч}/q_{\infty\ ср}, \tag{3.2.23}$$

где $q_{\infty тч} = (\rho V_\infty^2/2)_{тч}$ и $q_{\infty ср} = (\rho V_\infty^2/2)_{ср}$ — соответственно скоростной напор в данной точке и его среднее значение для рассматриваемого сечения. При этом величина $q_{\infty ср}$ определяется по измеренным значениям скоростного напора в различных точках сечения из выражения

$$q_{\infty\ ср} = (\rho V_\infty^2/2)_{ср} = \sum_{i=1}^{n} q_{\infty\ тч}/n. \tag{3.2.24}$$

В выражении (3.2.23) вместо $q_{\infty ср}$ можно использовать скоростной напор $q_{\infty к.н} = (\rho V_\infty^2/2)_{к.н}$, измеренный в средней точке сечения контрольным насадком. В этом случае

$$\mu = q_{\infty\ тч}/q_{\infty\ к.н}. \tag{3.2.25}$$

Аналогично для характеристики поля скоростей можно использовать безразмерные коэффициенты скорости:

$$\mu_V = V_{\infty тч}/V_{\infty\ ср}, \tag{3.2.26}$$

или

$$\mu_V = V_{\infty\ тч}/V_{\infty\ к.н}. \tag{3.2.27}$$

Комбинированный насадок, используемый для измерений, закрепляется на координатнике и устанавливается в рабочей части трубы на таком удалении от выбранного сечения потока, чтобы возмущения от координатника и насадка не достигали этого сечения.

Измерения обычно начинают в средней точке сечения трубы, а затем, перемещая насадок в вертикальном направлении (вдоль оси Oy) с некоторым шагом, равным примерно 0,05÷0,1 поперечного сечения, определяют для соответствующих точек с координатами $y \neq 0$, $z = 0$, $x = \text{const}$ давления p_∞ и p_0. Аналогичные измерения осуществляют, перемещая насадок в горизонтальном направлении (вдоль оси Oz) и определяя давление для точек с координатами $y = 0$, $z \neq 0$, $x = \text{const}$.

Если необходимо, измерения ведут для точек с координатами $y \neq 0$, $z \neq 0$, $x = \text{const}$, а также для других поперечных сечений. Таким образом можно получить экспериментальную зависимость для давлений $p_\infty = f_1(x, y, z)$ и $p_0 = f_2(x, y, z)$, по которым определяются функции $V_\infty = f_3(x, y, z)$, $q_\infty = f_4(x, y, z)$; $\mu = f_5(x, y, z)$ и $\mu_V = f_6(x, y, z)$.

При построении соответствующих зависимостей обычно имеют дело с безразмерными координатами $\bar{x} = x/L$, $\bar{y} = y/H$, $\bar{z} = z/B$, где L, H, B — соответственно длина, высота и ширина рабочей части. Для круглого сечения трубы вместо H и B используют диаметр сечения D.

Обычно экспериментальные исследования ограничивают измерением давлений и скоростей в точках на взаимно перпендикулярных осях симметрии какого-либо сечения, что бывает достаточным для оценки равномерности потока. В таком случае для данного сечения функциональные зависимости, в частности для коэффициента скорости, принимают вид

$$\mu_V = \varphi_1(\bar{y}) \text{ и } \mu_V = \varphi_2(\bar{z}).$$

При построении графика этих функций следует учитывать, что вследствие действия сил вязкости частицы жидкости прилипают к стенкам трубы и скорость на них равна нулю. Общий вид одного из таких графиков показан на рис. 3.2.9.

Сверхзвуковые скорости. Экспериментальное исследование распределения скорости (чисел Маха) и давления в сверхзвуковой аэродинамической трубе можно осуществлять, как и в дозвуковой трубе; «зондированием» потока насадком (приемником давления) в рабочей части. Однако специфические свойства сверхзвукового течения, заключающиеся в том, что возмущения в нем распространяются вниз по потоку и только в пределах конуса Маха (или в зоне за скачком уплотнения), позволяют использовать специальную конструкцию измерительного устройства, состоящего из нескольких клиновидных или конических приемников статического давления,— так называемую гребенку (рис. 3.2.10).

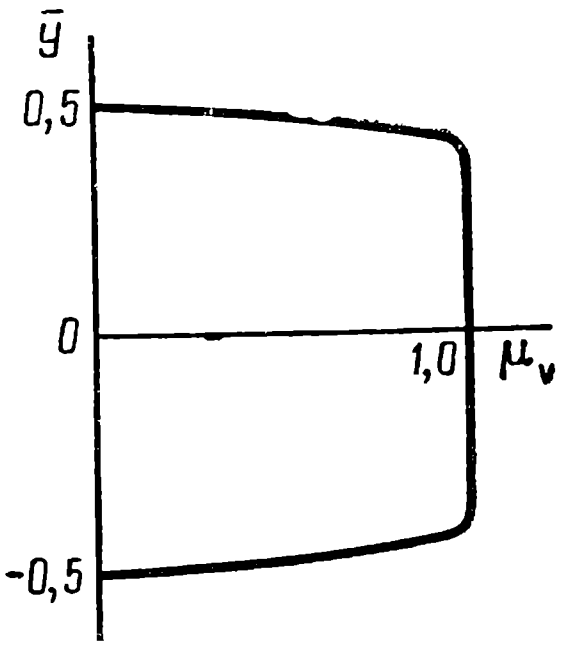


Рис. 3.2.9. График изменения коэффициента скоростей по поперечному сечению рабочей части

Расположение насадков на корпусе, который закрепляется в рабочей части трубы, должно быть таким, чтобы получить наиболее полную картину распределения параметров газового потока по поперечному сечению. При этом расстояние между ними, а также их расположение относительно стенок выбирается из условия, чтобы скачки уплотнения (линии Маха), которые могут возникнуть в рабочей части, не попадали на участки поверхности насадков, где находятся дренажные отверстия для измерения статического давления.

Одновременно с измерением статического давления и углов наклона линий Маха перед заостренными конусами (клиньями) определяется давление p_0 в форкамере трубы.

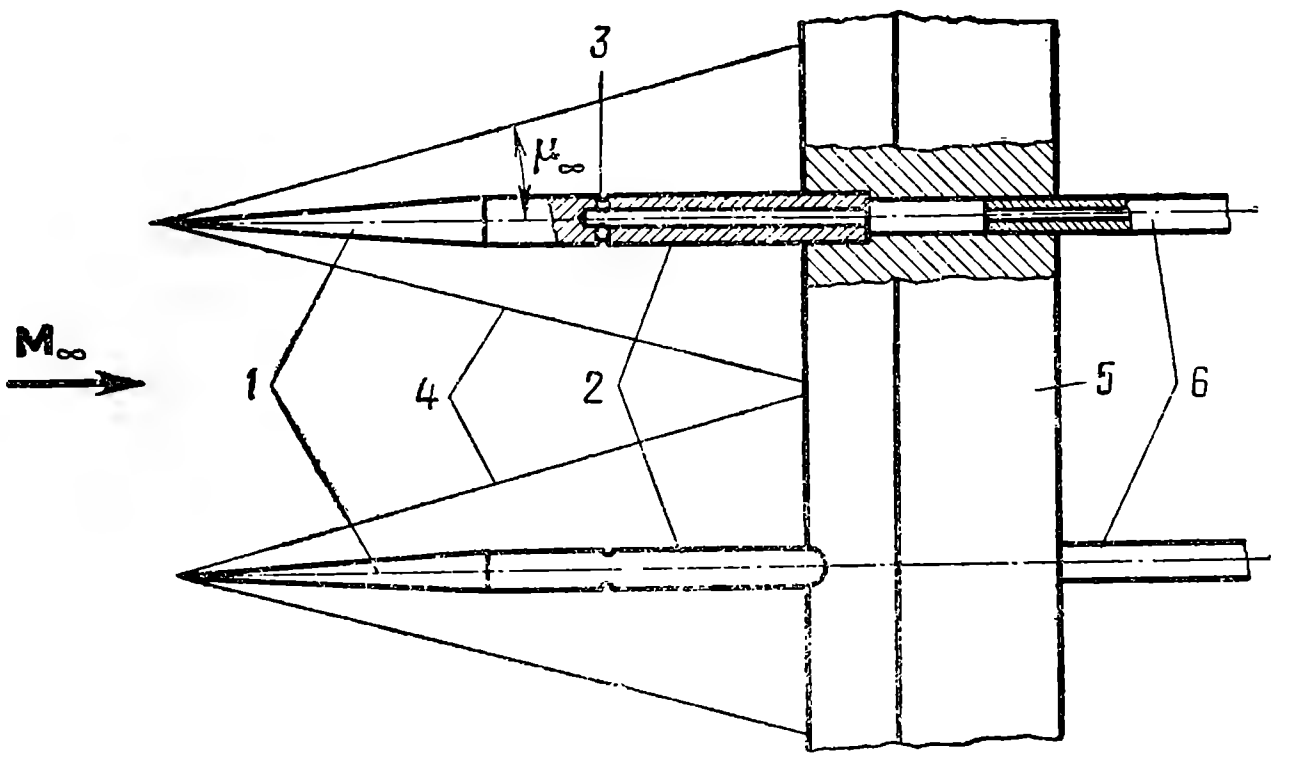


Рис. 3.2.10. Схема устройства гребенки:

1 — головной конус; *2* — цилиндрический корпус; *3* — приемные отверстия; *4* — волна возмущения; *5* — корпус; *6* — дренажные трубки

При экспериментальном исследовании распределения чисел Маха можно ограничиться теневой фотографией картины обтекания гребенки. Значение M_∞ вычисляется по измеренному углу μ_∞ наклона линии Маха перед конусом или клином (см. рис. 3.2.10) по формуле

$$M_\infty = 1/\sin\mu_\infty. \qquad (3.2.28)$$

Если необходимо найти также и распределение статических давлений, то следует осуществить дополнительное измерение давления p_0 в форкамере и затем найти по нему в соответствующей точке потока p_∞ из (2.1.16):

$$p_\infty = p_0\left(1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2\right)^{-k/(k-1)}.$$

Одновременное измерение давлений p_∞ и p_0 позволяет рассчитать распределение чисел Маха по зависимости (2.2.8). Это же значение числа Маха можно найти по отношению p_0/p_∞, используя таблицы газодинамических функций воздуха [13].

В рассматриваемом случае нет особой необходимости в оптическом исследовании сверхзвукового потока, хотя представляется целесообразным для получения полной информации об исследуемом течении осуществлять такие исследования одновременно с непосредственным измерением статического и полного давлений.

Порядок проведения работы

Дозвуковые скорости.

1. Укрепить насадок на координатнике; установить его в середине рабочей части трубы так, чтобы ось насадка совпадала с продольной осью трубы. Проверить работу механизма перемещения насадка в вертикальном и горизонтальном направлениях.

2. Соединить резиновыми шлангами приемники давления (отверстия) насадка с микроманометрами и проверить герметичность соединений.

3. Включить аэродинамическую трубу и, перемещая насадок сначала в вертикальном, а затем в горизонтальном направлении, измерить для фиксированных положений этого насадка статические и полные давления p_∞ и p_0.

4. По измеренным значениям этих давлений определить в соответствующих точках выбранного сечения скорости V_∞ и скоростные напоры q_∞, затем вычислить средние их значения $V_{\infty ср}$ и $q_{\infty ср}$, найти коэффициенты скоростей μ_V и скоростных напоров μ и построить графические зависимости $\mu_V(\bar{y})$, $\mu_V(\bar{z})$, $\mu(\bar{y})$ и $\mu(\bar{z})$.

Сверхзвуковой поток.

1. Закрепить гребенку в рабочей части сверхзвуковой трубы, соединить штуцеры насадков с групповым регистрирующим манометром и проверить герметичность соединений.

2. Установить манометр для измерения давления в форкамере.

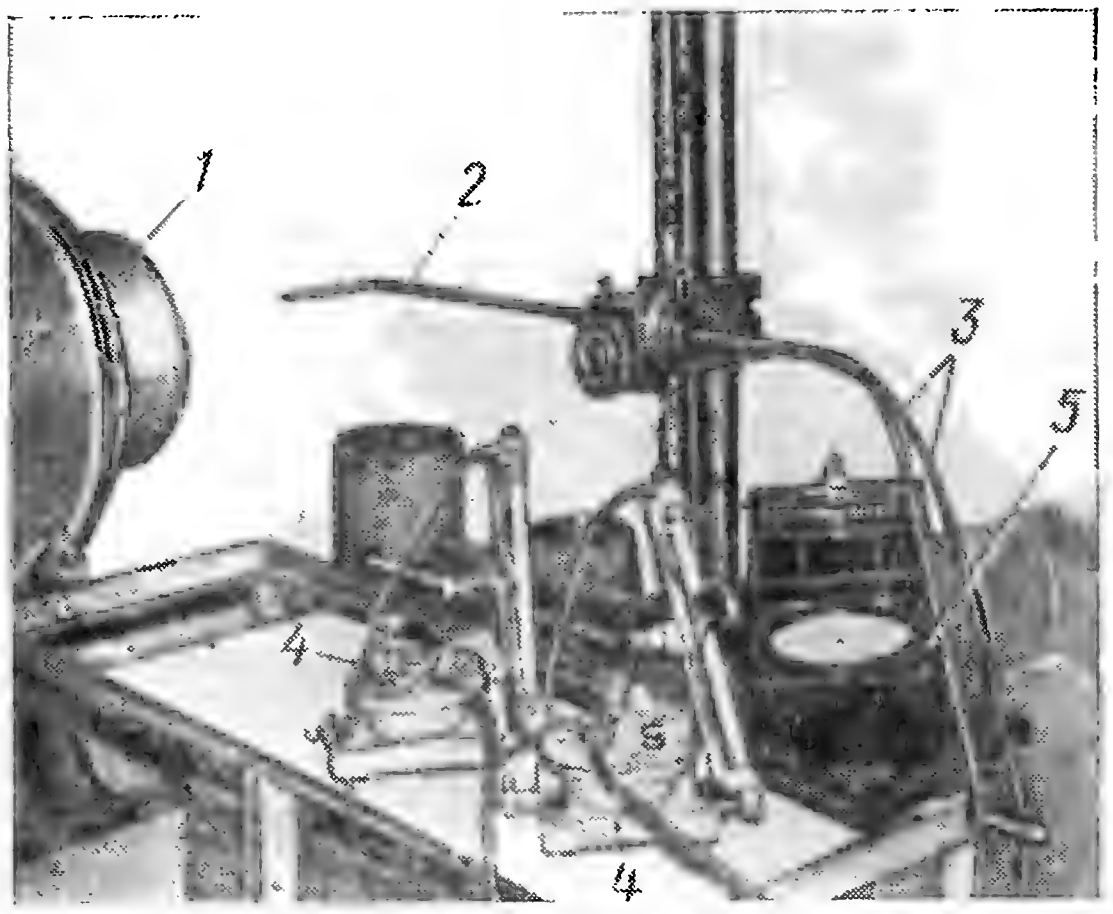


Рис. 3.2.11. Установка для определения поля давлений и скоростей в рабочей части дозвуковой аэродинамической трубы:

1 — аэродинамическая труба; *2* — комбинированный насадок; *3* — соединительные шланги; *4* — микроманометры; *5* — лабораторный барометр и термометр

3. Осуществить настройку оптического прибора и установить в нем фотоаппарат.

4. Измерить атмосферное давление в лаборатории и записать начальные показания измерительных каналов ГРМ.

5. Включить трубу и после выхода ее на режим установившегося обтекания записать показания манометров и сфотографировать поток около гребенки.

6. По измеренным давлениям p_∞ и p_0, а также углам μ_∞ рассчитать соответствующие числа M_∞ и построить графики, характеризующие распределение этих чисел и статических давлений в рассматриваемом сечении.

Пример. В качестве примера определим поле скоростей и скоростных напоров в выходном сечении диаметром $D=300$ *мм* малоскоростной аэродинамической трубы с открытой рабочей частью. Общий вид измерительной установки показан на рис. 3.2.11.

Для измерений использовался комбинированный насадок Пито — Прандтля, который устанавливался с помощью координатника на расстоянии 200 *мм* от выходного сечения. На таком расстоянии (превышающем 10 диаметров насадка) возмущения от него в виде повышенного давления не достигали этого сечения.

Шаг перемещения насадка при помощи координатника был выбран равным $\Delta h = 0{,}1\ D = 30$ *мм*. Измерение давлений осуществлялось двумя чашечными микроманометрами с тарировочными коэффициентами $k_{т1}=k_{т2}=1{,}0$ и коэффициентами шкал $K_1=K_2=0{,}4$. Тарировочные коэффициенты насадка были приняты равными $\zeta_{т1}=\zeta_{т2}=1{,}0$.

Во время эксперимента атмосферное давление $p_{атм}=744$ *мм рт. ст*, а температура $T_{атм}=288$ К. Так как для этих условий плотность воздуха $\rho=0{,}125$ *кГ·сек²/м⁴*, то, принимая во внимание приведенные значения тарировочных коэффициентов и коэффициентов шкал, а также равенство $p_\infty = p_{атм}$, расчетная формула для скорости примет вид

$$V_{\infty тч} = 2{,}53\sqrt{\Delta h_2},$$

а для скоростного напора

$$q_{\infty тч} = \rho V^2_{\infty тч}/2 = 0{,}4\cdot\Delta h_2.$$

Значения $\Delta h_2 = h_2 - h_{02}$ для точек на оси y, а также вычисленные по ним скорости $V_{\infty тч}$ и скоростные напоры $q_{\infty тч}$ приведены в табл. А.

Таблица А

$\bar{y}$	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0	—0,1	—0,2	—0,3	—0,4	—0,5
h_{02}, *мм*	←					10					→
h_2, *мм*	0	129	129	130	131	132	132	130	130	129	0
Δh_2, *мм*	0	119	119	120	121	122	122	120	120	119	0
$V_{\infty тч}$, *м/сек*	0	27,6	27,6	27,8	27,8	27,9	27,9	27,8	27,8	27,6	0
$V_{\infty ср}$, *м/сек*	←					27,76					→
μ_V	0	0,995	0,995	1,001	1,002	1,003	1,003	1,001	1,001	0,995	0
$q_{\infty тч}$, *мм вод.ст.*	0	47,6	47,6	48	48,4	48,8	48,8	48	48	47,6	0
$q_{\infty ср}$, *мм вод. ст*	←					48,1					→
μ	0	0,99	0,99	0,998	1,004	1,018	1,018	0,998	0,998	0,99	0

В табл. А скорости на стенке, как и скоростные напоры (для точек с относительными координатами $\bar{y}=\pm 0{,}5$), приняты (согласно предположению о прилипании частиц жидкости к стенке) равными нулю. Среднее значение $q_{\infty ср}$ определялось по формуле

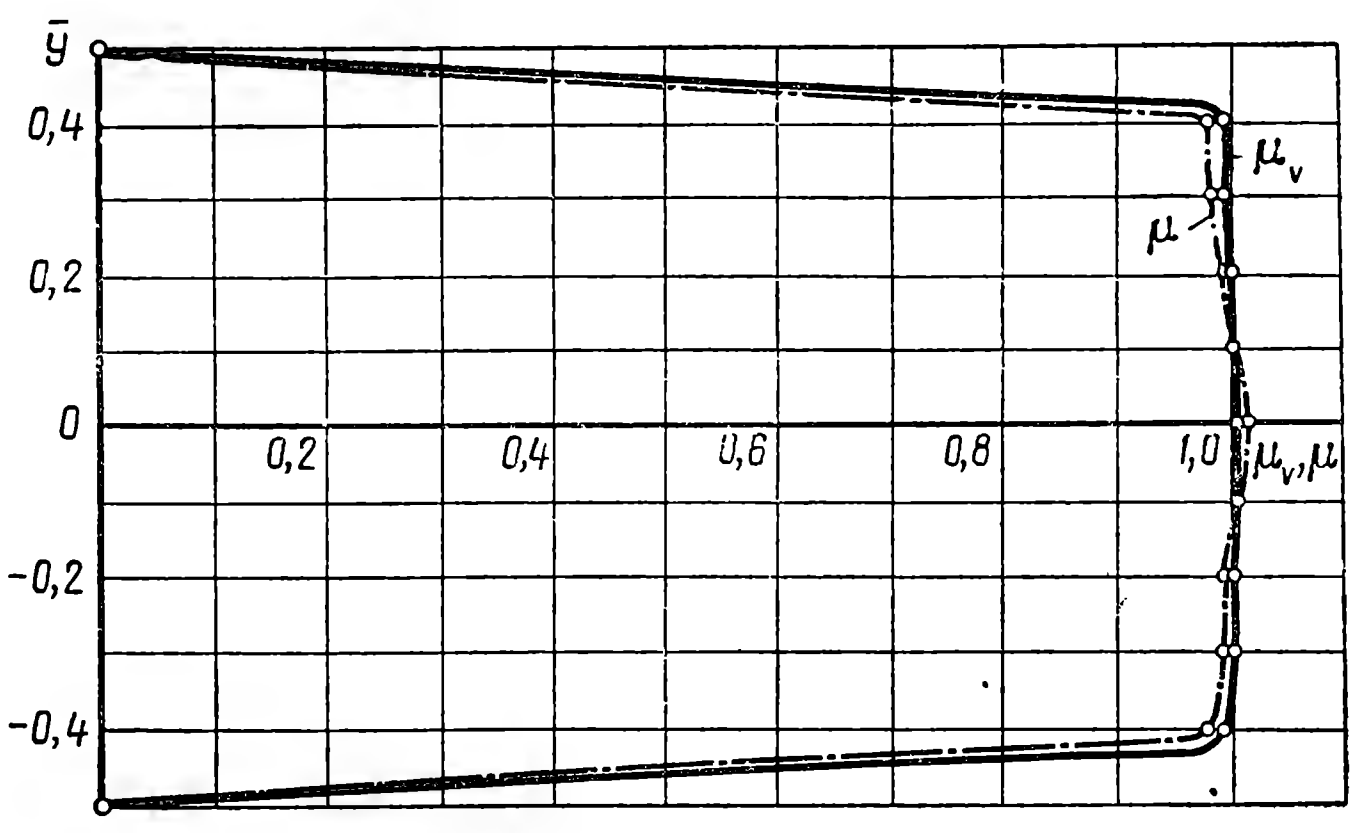


Рис. 3.2.12. Распределение коэффициентов скорости и скоростного напора по поперечному сечению рабочей части аэродинамической трубы

(3.2.24) с учетом скоростных напоров в точках с координатами $-0{,}4 \leqslant y \leqslant 0{,}4$. Соответствующая средняя скорость вычислялась из выражения $V_{\infty ср} = \sqrt{(2/\rho) q_{\infty ср}}$.

По найденным значениям функции $\mu_V(\bar{y}) = V_{\infty тч}/V_{\infty ср}$ и $\mu(\bar{y}) = q_{\infty тч}/q_{\infty ср}$, приведенным в таблице, построены соответствующие графики (рис. 3.2.12). По данным графикам можно установить зону относительно небольших изменений скорости — ядро потока. Из рис. 3.2.12 видно, что площадь ядра $S_я \approx \pi\ (0{,}8\ D)^2/4$ составляет 64% от площади выходного сечения трубы. С учетом этого максимальная площадь поперечного сечения опытной модели, если принять допустимое загромождение равным 5%, будет составлять $0{,}05 \times 0{,}64 \times 100 = 3{,}2\%$ площади выходного сечения трубы.

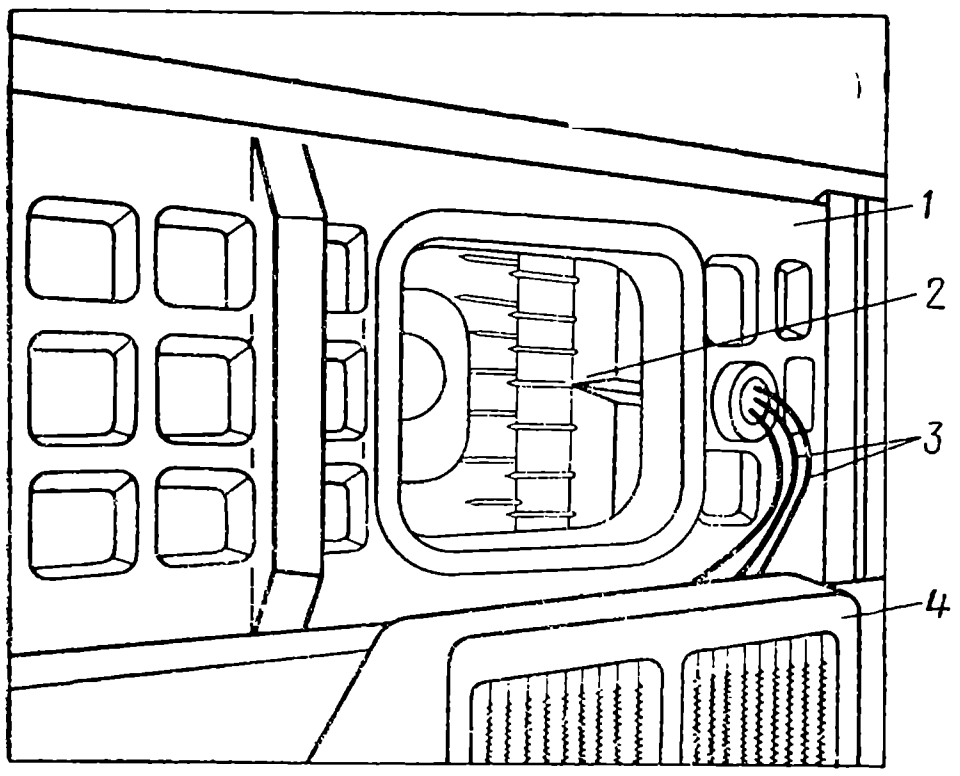


Рис. 3.2.13. Схема установки для определения чисел M_∞ в сверхзвуковой аэродинамической трубе:

1 — рабочая часть трубы; *2* — гребенка с насадками статического давления; *3* — дренажные трубки; *4* — ГРМ

Рассмотрим результаты измерения скоростей и давлений в сверхзвуковой аэродинамической трубе. Схема измерительной установки показана на рис. 3.2.13.

В рабочей части этой трубы сечением 400×400 *мм* закрепляется с помощью двух фланцев гребенка (рис. 3.2.14), состоящая из 21 насадка, каждый из которых представляет собой цилиндр с тонким коническим носком с половиной угла при вершине 4°.

Эти насадки с дренажными отверстиями, выполненными на цилиндрической поверхности, закреплены на общем каркасе крестообразной формы. На рис. 3.2.15 показана схема расположения таких отверстий и расстояние между ними.

Атмосферное давление во время продувки было равно $p_{атм} = 750$ *мм рт. ст.* $= 1{,}022$ *кГ/см²*. Измерение статических давлений осуществлялось приборами ГРМ-2, рассчитанными для регистрации значений $p - p_{атм}$ в пределах от —1 до 9 *кГ/см²* с коэффициентом шкалы $k = 0{,}05$. Давление торможения, измеренное в форкамере, $p_0 = 4{,}22$ *кГ/см²*.

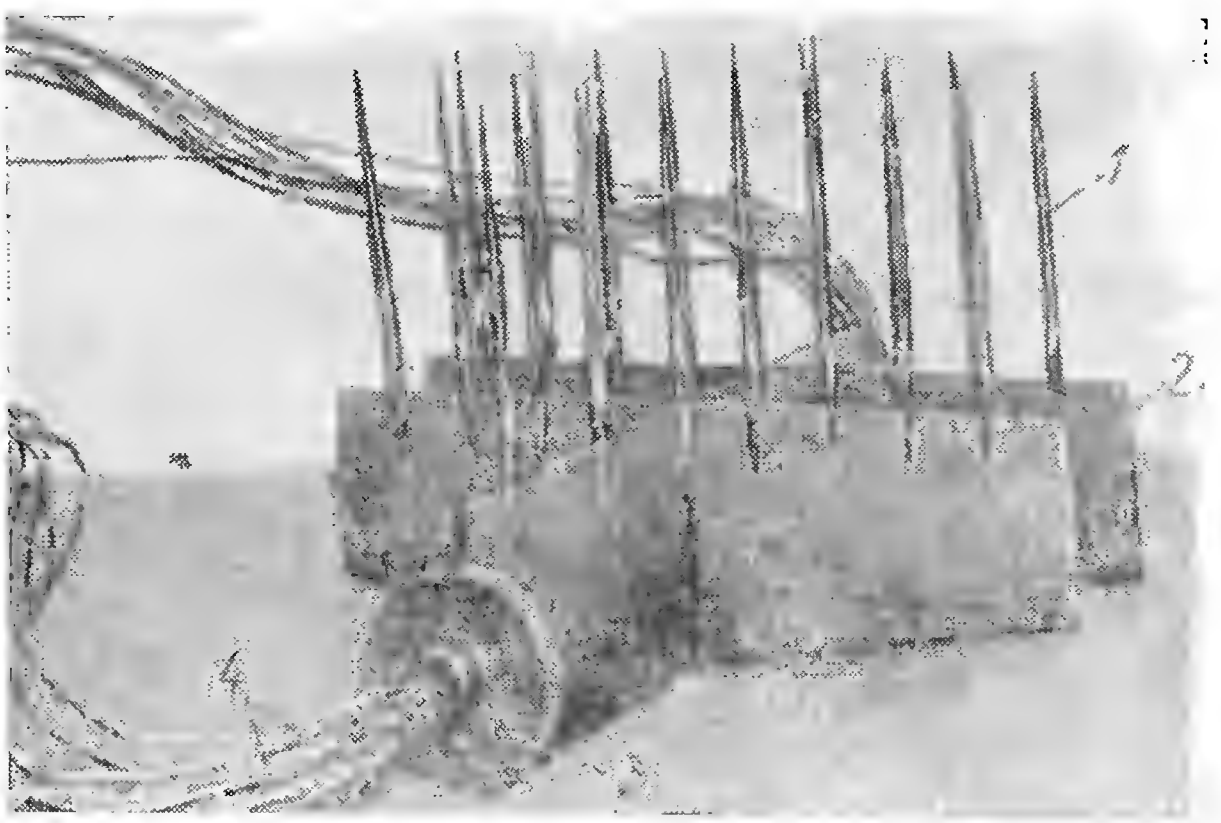


Рис. 3.2.14. Гребенка с насадками статического давления:

1 — насадок статического давления; *2* — каркас; *3* — фланец; *4* — дренажные трубки

На бумажной ленте ГРМ регистрировались начальные N_0 и конечные N показания манометра, по которым определялись разности давлений:

$$\Delta p_\infty = p_\infty - p_{атм} = k\,(N_\infty - N_{0\infty}) = k \cdot \Delta N_\infty,$$

а затем подсчитывались значения:

$$p_\infty = (0{,}05 \Delta N + 1{,}022)\ кГ/см^2.$$

Таблица Б

Номера насадков (по схеме рис. 3.2.15)	Показания ГРМ			Δp_∞, $кГ/см^2$	p_∞, $кГ/см^2$	M_∞
	N_0	N	ΔN			
1	20,1	1,8	—18,3	—0,915	0,107	3,01
2	20,2	1,7	—18,5	—0,925	0,097	3,11
3	20,0	1,5	—18,5	—0,925	0,097	3,11
4	20,4	1,9	—18,5	—0,925	0,097	3,11
5	20,2	1,7	—18,5	—0,925	0,097	3,11
6	20,3	1,8	—18,5	—0,925	0,097	3,11
7	19,8	1,3	—18,5	—0,925	0,097	3,11
8	20,1	1,6	—18,5	—0,925	0,097	3,11
9	20,1	1,7	—18,4	—0,920	0,102	3,05
10	19,9	1,6	—18,3	—0,915	0,107	3,01
11	20,3	1,8	—18,5	—0,925	0,097	3,11
12	20,2	1,7	—18,5	0,925	0,097	3,11
13	20,4	1,9	—18,5	—0,925	0,097	3,11
14	20,5	2,0	—18,5	—0,925	0,097	3,11
15	20,0	1,5	—18,5	—0,925	0,097	3,11
16	20,1	1,6	—18,5	—0,925	0,097	3,11
17	19,9	1,4	—18,5	—0,925	0,097	3,11
18	20,0	1,6	—18,4	—0,920	0,102	3,05
19	20,1	1,8	—18,3	—0,915	0,107	3,01
20	20,4	1,9	—18,5	0,925	0,097	3,11
21	19,9	1,7	—18,2	0,910	0,110	3,00

По этим значениям p_∞ и давлению $p_0=4{,}22$ $кГ/см^2$ из таблиц [13] находились соответствующие числа Маха.

Показания манометра для каждого насадка, а также вычисленные по ним статические давления p_∞ и соответствующие числа Маха приведены в табл. Б

Работа 3.2.5

Исследование турбулентности воздушного потока

Цель работы — измерение термоанемометром начальной турбулентности воздушного потока в рабочей части дозвуковой аэродинамической трубы.

Общие сведения

Экспериментальное исследование турбулентности воздушного потока является важной составной частью методических испытаний аэродинамических труб. В результате этих исследований определяется начальная турбулентность (см. рис. 2.2.8), которую можно рассматривать в качестве критерия пригодности трубы для получения достоверных экспериментальных данных, в частности о пограничном слое и теплопередаче.

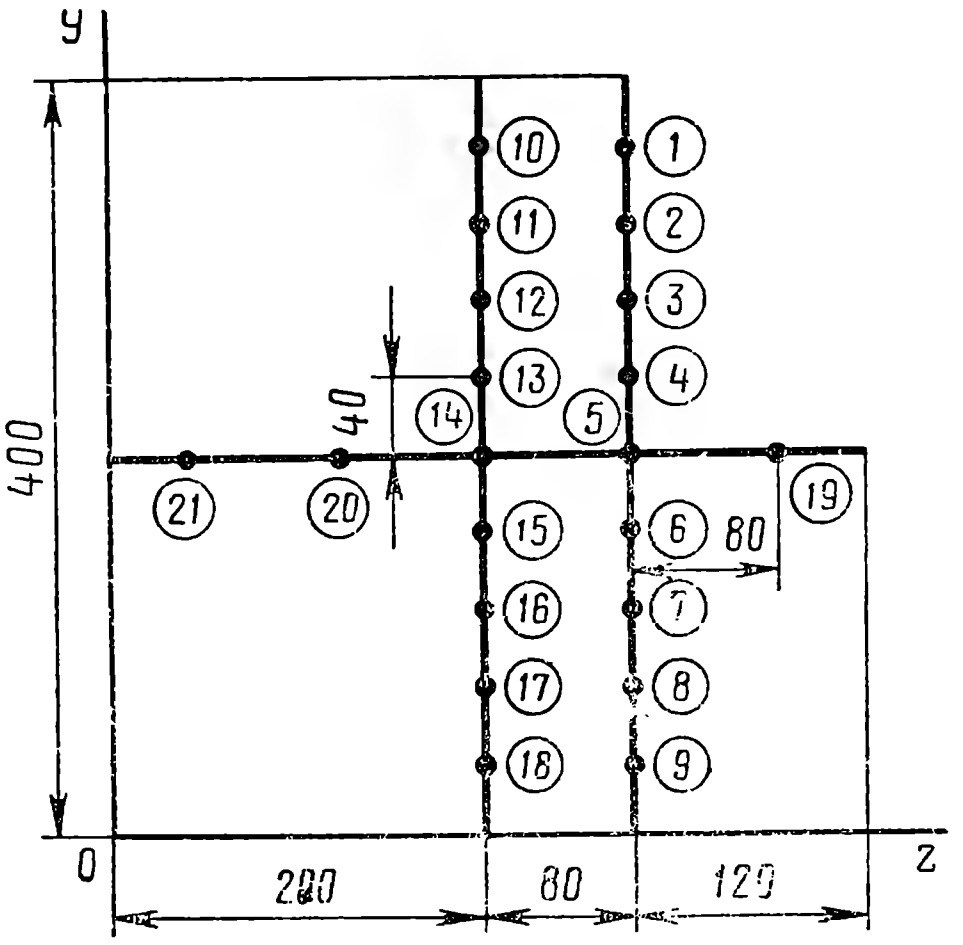


Рис. 3.2.15. Гребенка для измерения распределения давления (указаны порядковые номера насадков)

Для измерения начальной турбулентности наиболее широко применяется термоанемометр, датчик которого размещается в рабочей части аэродинамической трубы. Электрическая схема измерительной установки показана на рис. 2.2.5.

При исследовании турбулентности потока можно производить измерения пульсационных составляющих скорости в одном каком-либо направлении, в частности в направлении осредненной скорости $\overline{V}_\infty$ набегающего потока. Приняв, что течение обладает свойством изотропности, пульсационные составляющие по другим направлениям можно принять такими же, как измеренное в направлении вектора $\overline{V}_\infty$. Вольтметр переменного тока, предусмотренный в схеме измерительной установки, при включении трубы покажет напряжение, пропорциональное пульсационной составляющей. При этом вольтметр постоянного тока изменит свое показание на величину $U_B - U_0$ (где U_0 и U_B — показания этого вольтметра соответственно при $V_\infty = 0$ и $V_\infty \neq 0$), причем показание U_B однозначно определяет осредненную скорость V_∞.

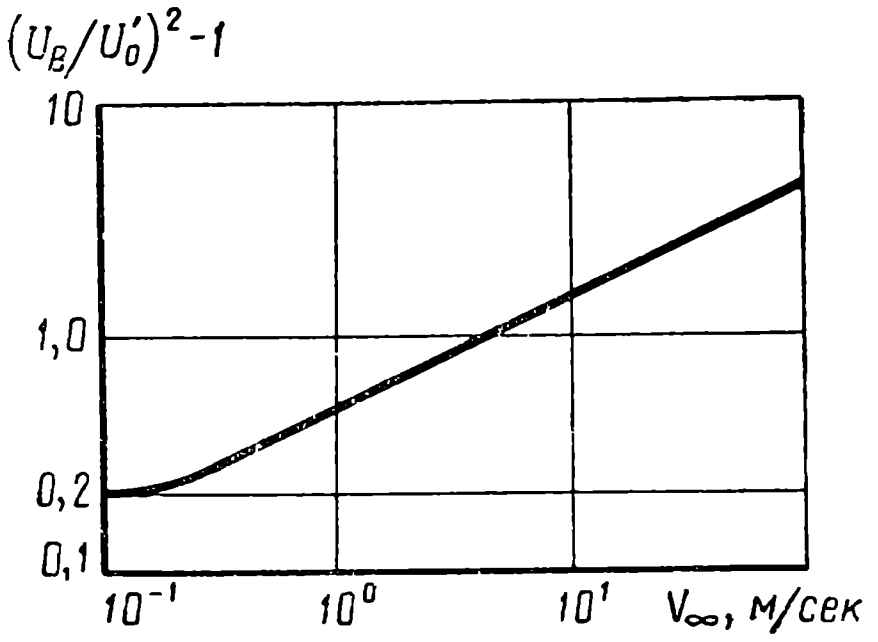


Рис. 3.2.16. Тарировочная кривая проволочного датчика термоанемометра

Покажем, как можно по измеренным значениям U_0, $U_\text{В}$ и $dU_\text{В}$ найти начальную турбулентность:

$$\varepsilon = dV_\infty/V_\infty = \sqrt{\overline{v^2}}/V_\infty. \tag{3.2.29}$$

В этой формуле осредненная скорость потока V_∞, набегающего на датчик термоанемометра, находится из тарировочного графика функции $V_\infty = f_1(U_\text{В})$. Эту функцию удобнее заменить зависимостью (рис. 3.2.16)

$$z = f_2(V_\infty), \tag{3.2.30}$$

в которой

$$z = (U_\text{В}/U_0')^2 - 1, \tag{3.2.31}$$

а величина $U_0' = 0{,}925\ U_0$. Как показывают исследования, если кривую на рис. 3.1.16 перестроить в логарифмических координатах:

$$y = \lg z; \quad x = \lg V_\infty, \tag{3.2.32}$$

то тарировочный график будет представлять собой прямую, уравнение которой

$$y = a + nx, \tag{3.2.33}$$

где a, n — некоторые постоянные коэффициенты, определяемые опытным путем.

Из (3.2.33) следует, что $dy/dx = n = \text{const}$. Покажем, что от этой величины зависит начальная турбулентность $\varepsilon = dV_\infty/V_\infty$. Действительно, продифференцировав (3.2.32) соответственно по U и V_∞, получим

$$\frac{dy}{dU_\text{В}} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dU_\text{В}} = \frac{1}{z \ln 10} \cdot \frac{dz}{dU_\text{В}} \tag{3.2.34}$$

и

$$\frac{dx}{dV_\infty} = \frac{1}{V_\infty \ln 10}. \tag{3.2.35}$$

Из этих выражений находим

$$\varepsilon = \frac{dV_\infty}{V_\infty} = \frac{dU_\text{В}}{U_\text{В}} \cdot \frac{dx}{dy} \cdot \frac{U_\text{В}}{z} \cdot \frac{dz}{dU_\text{В}}. \tag{3.2.36}$$

Вычисляя здесь производную $dz/dU_{\text{в}}$ в соответствии с (3.2.34), найдем

$$\varepsilon = 2\frac{dU_B}{U_B} \cdot \frac{dx}{dy} \cdot \frac{z+1}{z}. \qquad (3.2.37)$$

Внося сюда вместо z значение (3.2.31) и учитывая, что $dy/dx=n$, получим

$$\varepsilon = \frac{dU_{\text{в}}}{U_{\text{в}}} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{U_{\text{в}}^2}{U_{\text{в}}^2 - \left(U_0'\right)^2}. \qquad (3.2.38)$$

По экспериментальным данным при скоростях потока $V_\infty < 80$ *м/сек* величину n можно принять равной 0,46. В соответствии с этим значением

$$\varepsilon = 4{,}35\frac{dU_B}{U_B} \cdot \frac{U_{\text{в}}^2}{U_{\text{в}}^2 - \left(U_0'\right)^2}. \qquad (3.2.39)$$

Порядок проведения работы

1. **Ознакомиться** с устройством аэродинамической трубы и термоанемометра; проверить готовность их к работе.
2. При помощи координатника установить датчик термоанемометра в рабочей части трубы и соединить его электрическим кабелем с измерительной аппаратурой.
3. Провести балансировку измерительных мостов термоанемометра и записать начальное показание U_0 вольтметра постоянного тока.
4. Включить аэродинамическую трубу и после выхода ее на режим установившегося движения воздуха записать показания вольтметров постоянного тока $U^{\text{в}}$ и переменного тока $dU_{\text{в}}$.
5. По измеренным значениям U_0, $U_{\text{в}}$ и $dU_{\text{в}}$ при помощи формулы (3.2.39) вычислить соответствующую начальную турбулентность.

Пример. Рассмотрим результаты измерения термоанемометром начальной турбулентности воздушного потока в рабочей части дозвуковой аэродинамической трубы с открытой рабочей частью (рис. 3.2.17).

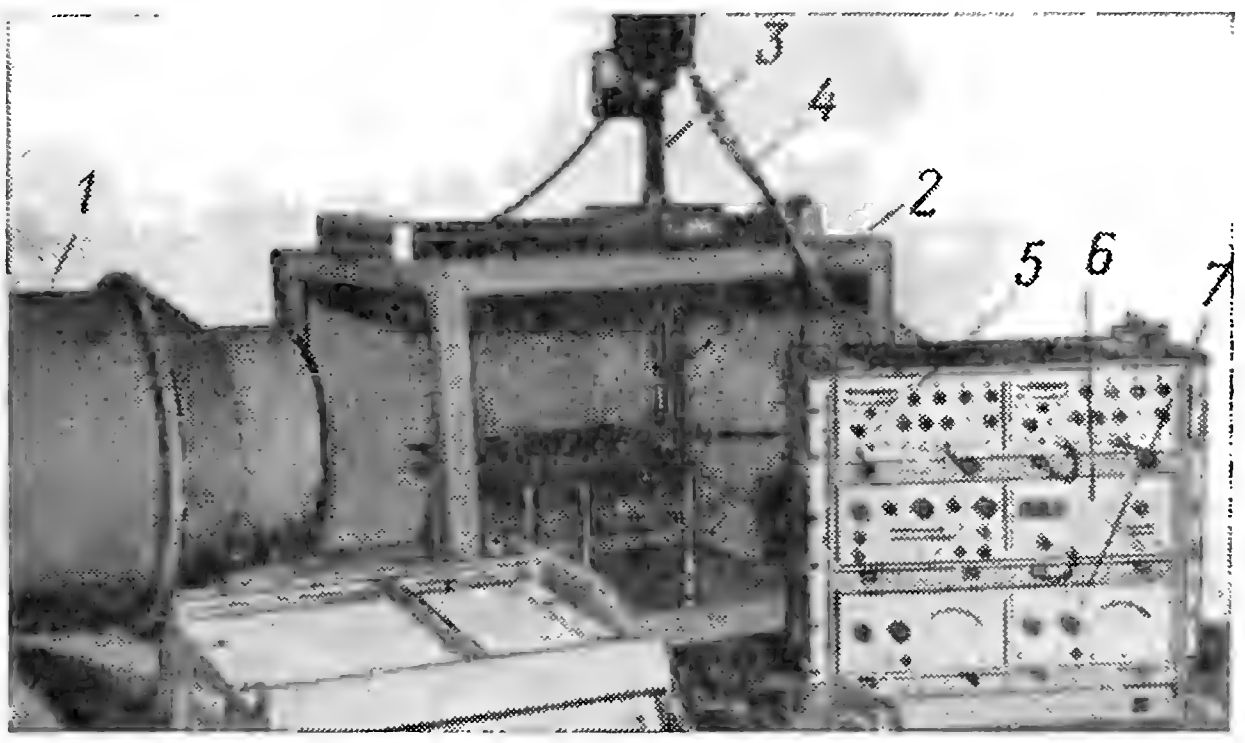


Рис. 3.2.17. Установка для определения начальной турбулентности воздушного потока:

1 — аэродинамическая труба; *2* — датчик термоанемометра; *3* — координатник; *4* — соединительные кабели; *5* — термоанемометр; *6* — вольтметр постоянного тока; *7* — вольтметр переменного тока

Проволочный датчик термоанемометра закреплялся на координатнике и устанавливался в рабочей части так, что продольная ось датчика совпадала с осью трубы. После включения электрической схемы термоанемометра и балансировки измерительного канала вольтметром постоянного тока было измерено начальное напряжение $U_0=3$ *в*. Во время работы аэродинамической трубы этим вольтметром было измерено напряжение $U_B=5{,}5$ *в*, а по шкале вольтметра переменного тока зафиксирована величина $dU_B=0{,}02$ *в*. В соответствии с этими данными и с учетом значения $U_0' = 0{,}925\ U_0 = 0{,}925 \cdot 3 = 2{,}78$ *в* начальная турбулентность согласно (3.2.39)

$$\varepsilon = 4{,}35\frac{0{,}02}{5{,}5} \cdot \frac{5{,}5^2}{5{,}5^2 - 2{,}78^2} = 0{,}021.$$

Определение угла скоса потока

Цель работы — определить угол между направлением скорости потока в рабочей части аэродинамической трубы и ее продольной осью.

Общие сведения

Аэродинамические силы и моменты, действующие на модель летательного аппарата во время ее продувки в аэродинамической трубе, зависят от угла между вектором скорости набегающего потока $\bar{V}_\infty$ и продольной осью модели, определяемого соответствующими установочными углами атаки $\alpha_{уст}$ и скольжения $\beta_{уст}$, под которыми закрепляется

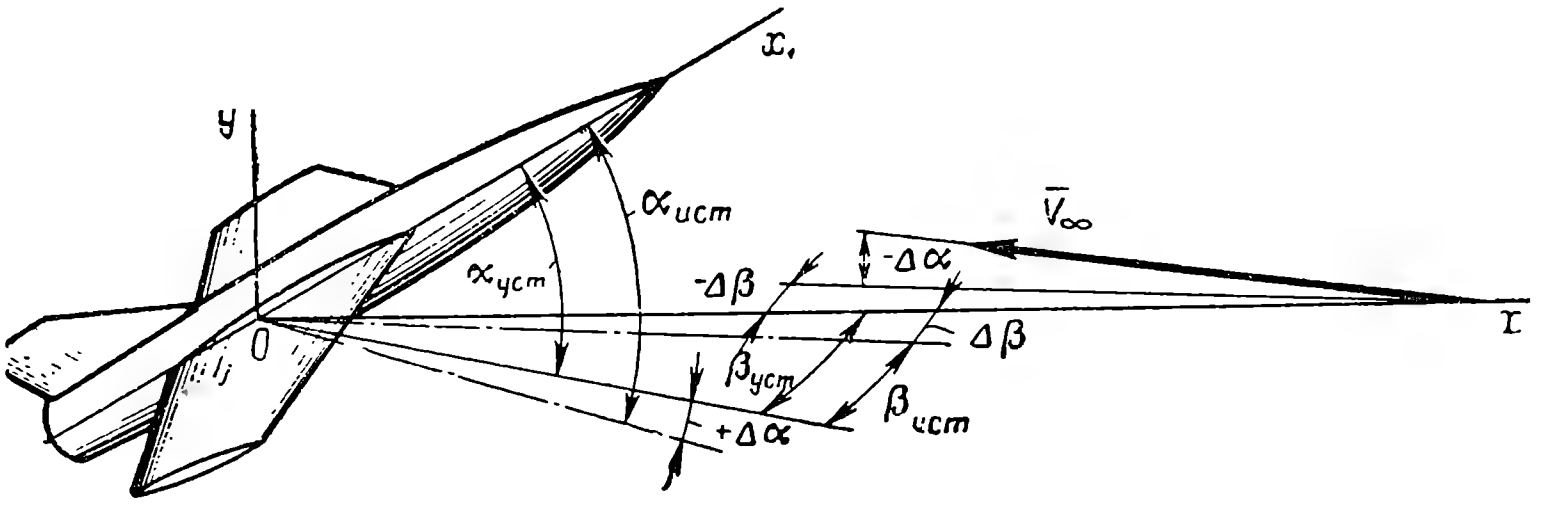


Рис. 3.2.18. Схема определения истинных углов атаки и скольжения модели летательного аппарата

модель в рабочей части. Эти углы обычно отсчитываются дозатором относительно продольной оси трубы. В случае скоса потока в трубе истинный угол атаки $\alpha_{ист}$ будет больше (или меньше) установочного на величину угла этого скоса $\Delta\alpha$. Соответствующим образом должен определяться и истинный угол скольжения $\beta_{ист}$ (рис. 3.2.18). На этом же рисунке показаны знаки углов $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$.

В общем случае для измерения углов скоса $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$ может быть использован при малых скоростях потока насадок, предназначенный для определения направления потока в трехмерном пространстве (см. рис. 2.2.15). Этот насадок закрепляется на координатнике и устанавливается в рабочей части так, чтобы его ось совпадала с продольной осью аэродинамической трубы. Каждый приемник давления (дренажное отверстие насадка) соединяется с соответствующим манометром. Во время продувки записываются показания всех микроманометров.

Для определения угла скоса в вертикальной плоскости $\Delta\alpha$ используются результаты измерения при помощи верхнего и нижнего приемников давлений (соответственно *1* и *3* на рис. 2.2.15). Если избыточное давление в приемнике *1* $\Delta p_1 = p_1 - p_{атм}$, а в приемнике *3* это давление $\Delta p_3 = p_3 - p_{атм}$, то их разность $\delta p_{13} = \Delta p_1 - \Delta p_3$. Величина этой разности зависит от угла скоса $\Delta\alpha$, который определяется из тарировочного графика функции $f_2(\alpha)$ (3.1.27′).

Нахождение угла скоса $\Delta\beta$ в горизонтальной плоскости связано с определением избыточных давлений $\Delta p_4 = p_4 - p_{атм}$ и $\Delta p_5 = p_5 - p_{атм}$. Зная разность $\delta p_{45} = \Delta p_4 - \Delta p_5$ и сумму $\Delta p_4 + \Delta p_5$, можно при помощи тарировочной кривой функции $\varphi_2(\beta)$ (3.1.28′) найти соответствующий угол скоса $\Delta\beta$.

При определении знаков углов $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$ следует учитывать величины давлений в дренажных отверстиях и показания соответствующих манометров. Если согласно схеме на рис. 2.2.15 давление в нижнем отверстии *3* больше, чем в верхнем *1*, а давление в боковом отверстии *5* больше, чем в отверстии *4*, то углы скоса $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$ рассматривают положительными.

Экспериментальное определение направления скорости в трубе обычно ведется для некоторого участка потока в его поперечной плоскости (ядра сечения) и осуществляется путем измерения давлений в соответствующих дренажных отверстиях насадка, размещаемого в различных точках выбранного сечения рабочей части. Обычно насадок перемещают в двух взаимно перпендикулярных направлениях вдоль осей симметрии сечения с шагом, равным 0,05÷0,1 поперечного размера (диаметра) этого сечения. Полученная информация об углах $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$ оказывается достаточной для оценки скоса потока в ядре сечения.

Порядок проведения работы

1. Ознакомиться с устройством аэродинамической трубы, насадка, координатника и микроманометра, а также общей схемой измерительной установки.
2. Установить координатник и закрепить на нем насадок.
3. Расположить насадок в рабочей части так, чтобы его ось совпадала с продольной осью аэродинамической трубы.
4. При помощи резиновых шлангов соединить микроманометры со штуцерами насадка и проверить герметичность соединений.
5. Установить под некоторым углом наклона отсчетные трубки микроманометров, зафиксировать соответствующие коэффициенты шкал K_n и начальные показания уровней h_{0n}.
6. Включить аэродинамическую трубу и после выхода ее на режим установившегося обтекания записать показания соответствующих микроманометров h_n.
7. Определить разности уровней Δh_1 и Δh_3, Δh_4 и Δh_5, а затем вычислить значения функций $f_2(\alpha)$ (3.1.27′) и $\varphi_2(\beta)$ (3.1.28′), по которым из тарировочных графиков найти углы скоса $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$.

Пример. Определим углы скоса потока в рабочей части малоскоростной аэродинамической трубы с открытой рабочей частью, используя пятиточечный насадок (см. рис. 2.2.15). Схема и общий вид экспериментальной установки показаны на рис. 3.2.19.

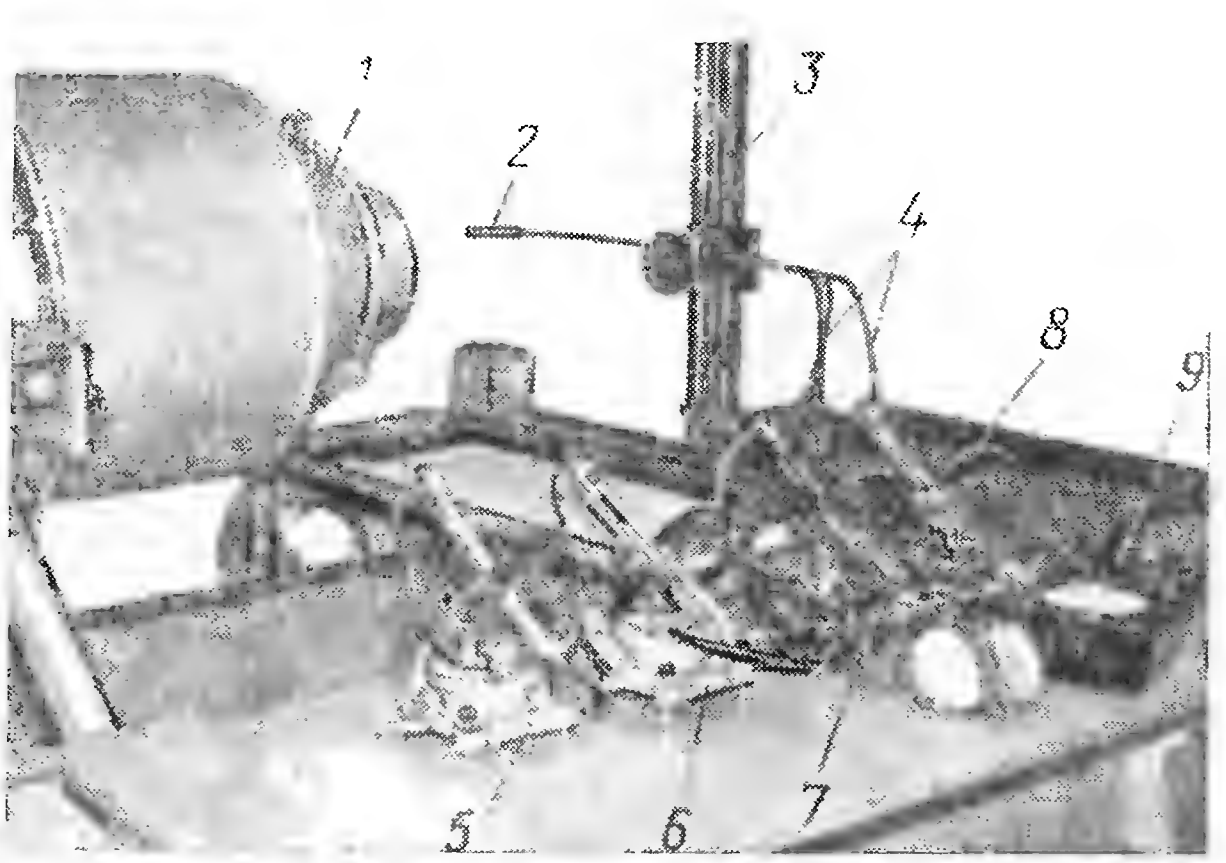


Рис. 3.2.19. Установка для измерения углов скоса потока в рабочей части аэродинамической трубы:

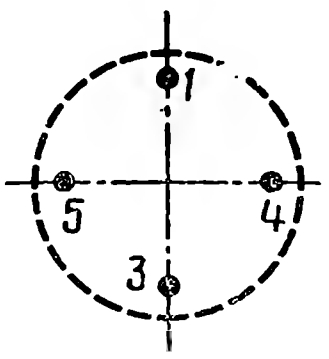
1 — аэродинамическая труба; *2* — пятиточечный насадок; *3* — координатник; *4* — соединительные шланги; *5*÷*8* — микроманометры; *9* — лабораторные барометр и термометр

Насадок закреплялся на координатнике, а горизонтальное расположение этого насадка, как и всей трубы, выверялось при помощи жидкостного уровня. Давления измерялись четырьмя чашечными микроманометрами, тарировочные коэффициенты которых были приняты одинаковыми и равными $k_{\text{т}\,n}=1{,}0$ ($n=1, 3, 4, 5$). Для удобства расчетов были установлены одинаковые значения коэффициентов шкал $K_n=0{,}4$.

Перед включением трубы были зафиксированы начальные уровни h_{0n} всех микроманометров, а во время ее работы — соответствующие показания h_n. Эти данные измерений, а также результаты расчета соответствующих разностей показаний (в *мм*) внесены в табл. А.

По значениям разности уровней можно подсчитать перепады давлений Δp_n, их разности δp_{13}, δp_{45}, суммы $\Delta p_1+\Delta p_3$, $\Delta p_4+\Delta p_5$ и отношения $\delta p_{13}/(\Delta p_1+\Delta p_3)$, $\delta p_{45}/(\Delta p_4+\Delta p_5)$. При этом, учитывая, что у всех манометров одинаковые тарировочные коэффициенты

Таблица А

Номера отверстий	1			3			4			5		
	h_{01}	h_1	Δh_1	h_{03}	h_3	Δh_3	h_{04}	h_4	Δh_4	h_{05}	h_5	Δh_5
	11	78	67	12	74	62	10	73	63	15	72	57

и коэффициенты шкал, можно при вычислении указанных отношений ограничиться значениями разностей уровней. В соответствии с этим

$$f_2(\alpha) = 5/(67 + 62) = 0{,}039;$$

$$\varphi_2(\beta) = 6/(63 + 57) = 0{,}05.$$

По вычисленным значениям функций $f_2(\alpha)$ и $\varphi_2(\beta)$ из тарировочных графиков на рис. 3.1.9 находим углы скоса $\Delta\alpha = -0{,}72°$ и $\Delta\beta = -1°$.

Работа 3.2.7

Исследование параметров газового потока в ударной трубе

Цель работы — определить скорость распространения ударной волны и параметры газа в рабочей пробке ударной трубы.

Общие сведения

Для определения скорости движения ударной волны на некотором участке трубы длиной L в ее стенке устанавливаются два ионизационных (или пьезоэлектрических) датчика (рис. 3.2.20). При прохождении ударной волны на выходе первого датчика появляется электрический сигнал, который поступает на цифровой частотомер и включает устройство отсчета времени. Движение этой волны мимо второго датчика вызовет появление другого электрического сигнала, который остановит работу частотомера. По его шкале отсчета можно определить время t прохождения участка пути между обоими датчиками. В соответствии с этим средняя скорость распространения ударной волны на этом участке трубы

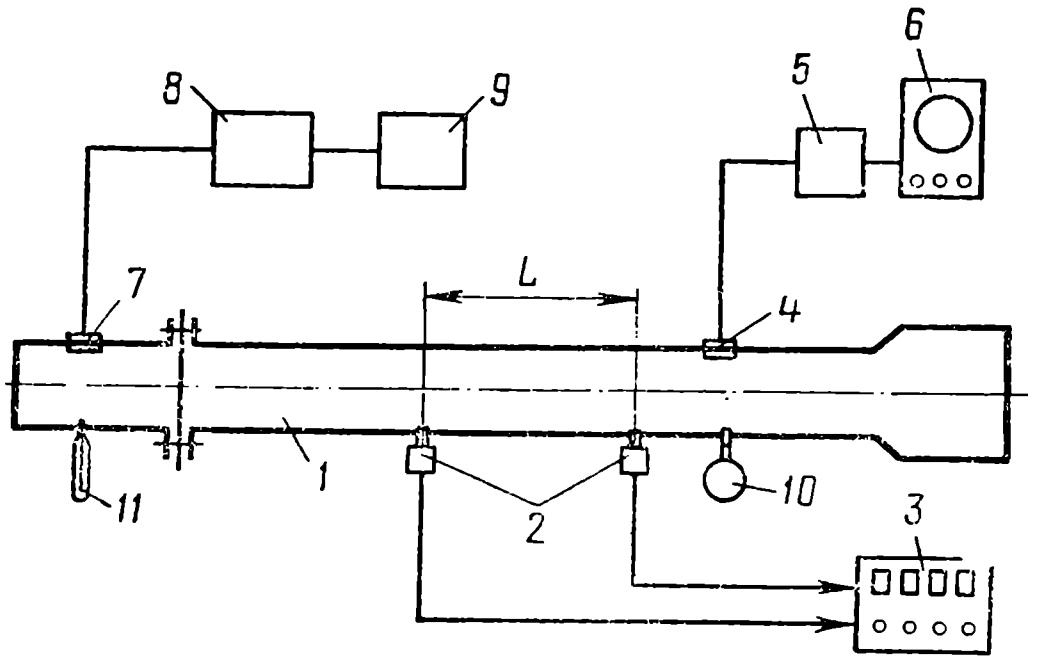


Рис. 3.2.20. Схема измерения параметров газа в ударной трубе:

1 — ударная труба; *2* — датчики, регистрирующие прохождение ударной волны (с формирующей приставкой); *3* — цифровой частотомер; *4* — пьезодатчик давления; *5* — усилитель; *6* — электронный осциллограф с фотоприставкой; *7* — тензодатчик давления; *8* — тензостанция; *9* — шлейфовый осциллограф; *10* — манометр в отсеке низкого давления; *11* — термометр в отсеке высокого давления

$$c_s = L/t. \qquad (3.2.40)$$

Соответствующее число Маха ударной волны

$$M_1 = c_s/a_1, \qquad (3.2.41)$$

где скорость звука

$$a_1 = \sqrt{k_1 R_1 T_1}$$

определяется по известным параметрам газа k_1, R_1, T_1 в отсеке низкого давления трубы (до момента разрыва диафрагмы). Полагая, что поток в рабочей пробке не диссоциирован (при $\mathbf{M}_1 < 6 \div 7$), можно по найденному числу $\mathbf{M}_1$ определить давление и температуру газа в этой пробке, используя формулы теории скачков уплотнения при постоянных теплоемкостях:

$$p_2 = p_1 \left(\frac{2k_1}{k_1 + 1} \mathbf{M}_1^2 - \frac{k_1 - 1}{k_1 + 1} \right); \tag{3.2.42}$$

$$T_2 = T_1 \left(1 + \frac{k_1 - 1}{k_1 + 1} \cdot \frac{p_2}{p_1} \right) \left(1 + \frac{k_1 - 1}{k_1 + 1} \cdot \frac{p_1}{p_2} \right)^{-1}. \tag{3.2.43}$$

По этим значениям p_2 и T_2 из уравнения состояния находится плотность

$$\rho_2 = p_2/(R_2 T_2).$$

Число Маха на участке потока за ударной волной (в рабочей пробке) определяется из соотношения

$$\mathbf{M}_2 = \frac{u_2}{a_2} = \frac{1}{k_1} \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right) \left[\frac{p_2}{p_1} \left(\frac{k_1 + 1}{2k_1} + \frac{k_1 - 1}{2k_1} \cdot \frac{p_2}{p_1} \right) \right]^{-1/2}, \tag{3.2.44}$$

в котором a_2 — скорость звука в пробке:

$$a_2 = \sqrt{k_2 R_2 T_2}$$

и u_2 — скорость движения контактной поверхности:

$$u_2 = a_1 \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right) \sqrt{\frac{2/k_1}{(k_1 + 1)\, p_2/p_1 + (k_1 - 1)}}. \tag{3.2.45}$$

Так как диссоциация отсутствует, то газовая постоянная R_2 для газа за ударной волной может быть принята равной соответствующему значению R_1 в отсеке низкого давления.

При очень больших скоростях ударной волны ($\mathbf{M}_1 > 6 \div 7$) параметры газа в рабочей пробке необходимо рассчитывать с учетом диссоциации и ионизации по заданным величинам $\mathbf{M}_1$, p_1 и T_1 (см. [47]).

Все результаты теоретических расчетов можно сопоставить с экспериментальными данными измерения соответствующих параметров в рабочей пробке, в частности давления p_2. Измерение этого давления осуществляется пьезоэлектрическим датчиком, выходной сигнал с которого поступает на усилитель, а затем на электронный осциллограф (см. рис. 3.2.20). Применение осциллографической трубки с длительным послесвечением позволяет фотографировать запись сигнала датчика с экрана осциллографа.

Высокое давление p_4 в соответствующем отсеке ударной трубы измеряется обычными механическими или ртутными манометрами. Малое давление (вакуум) в отсеке низкого давления измеряется вакуумметрами со специальными электрическими датчиками (см. § 2.1).

Температуры T_4 и T_1 в отсеках высокого и низкого давлений определяются до момента разрыва диафрагмы обычным образцовым ртутным термометром или специальным измерительным устройством с термопарой (см. рис. 2.3.5).

По измеренным параметрам в обоих отсеках можно рассчитать отношение давлений в рабочей пробке и в отсеке низкого давления p_2/p_1, пользуясь уравнением (1.5.5).

Найденное значение p_2/p_1 из (1.5.5), которое решается методом последовательных приближений, можно сравнить с соответствующей величиной, измеренной во время эксперимента.

Порядок проведения работы

1. Ознакомиться со схемой экспериментальной установки и проверить готовность к работе всех элементов ее конструкции и измерительных приборов.

2. Установить в стенке трубы ионизационные датчики и пьезодатчики давления.

3. Включить электропитание, прогреть электронные приборы и осуществить их балансировку.

4. Смонтировать диафрагму, проверить надежность соединения отсека высокого давления с мультипликатором и баллонами со сжатым газом; установить вакуумный насос и соединить его с отсеком низкого давления.

5. Включить вакуумный насос и после достижения заданного давления p_1 выключить.

6. С помощью мультипликатора заполнить газом отсек высокого давления и повысить это давление до величины p_4, при которой происходит разрыв диафрагмы. Установленным на мультипликаторе манометром зафиксировать величину p_4 в этом отсеке.

7. Выключить мультипликатор и записать показания цифрового частотомера.

8. По результатам измерений рассчитать число $\mathbf{M}_1$, а также параметры газа в рабочей пробке.

Пример. Определим параметры газа в однодиафрагменной ударной трубе с диаметром разгонного канала 50 *мм* (рис. 3.2.21). В качестве толкающего газа был выбран воздух; отсек низкого давления также заполнялся воздухом.

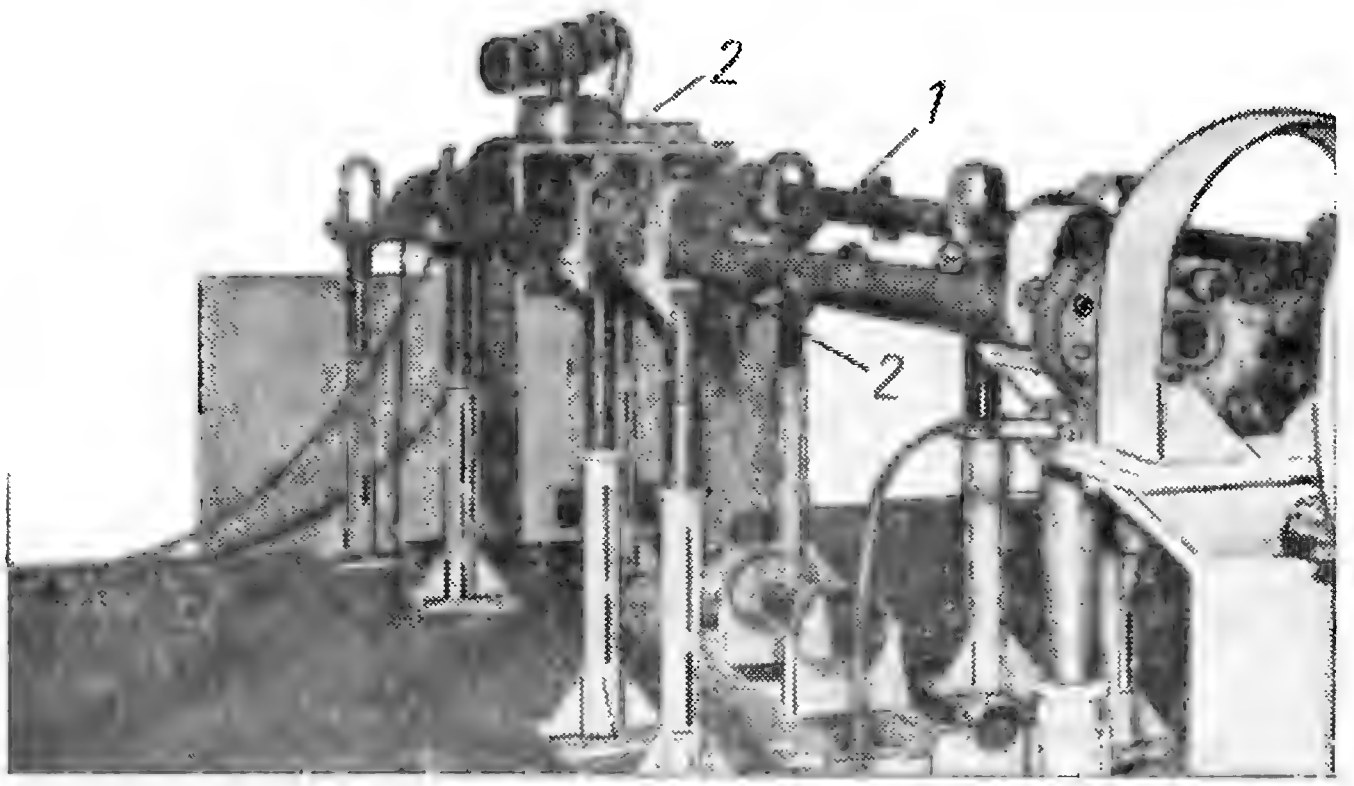


Рис. 3.2.21. Установка для измерения скорости ударной волны:

1 — ударная труба; *2* — ионизационные датчики с формирующими приставками

С помощью диффузионного масляного вакуумного насоса низкое давление в отсеке трубы достигало величины $p_1 = 50$ *мм рт. ст.* (0,068 *кГ/см*^{2}). Температура газа в этом отсеке принималась $T_{атм} = 292$ К.

В качестве диафрагмы использовался алюминиевый диск диаметром 80 *мм* и толщиной 0,8 *мм*. Крестообразные риски глубиной 0,2 *мм* на этом диске обеспечивали полное раскрытие диафрагмы и необходимую форму ее лепестков.

Ионизационные датчики устанавливались в двух отверстиях диаметром 40 *мм*, просверленных в корпусе разгонного канала на расстоянии друг от друга $L = 1500$ *мм*. Внешний вид ионизационного датчика с формирующей приставкой показан на рис. 3.2.22. Торцовая поверхность его цилиндрического корпуса выполнена по профилю канала трубы. Диаметр электрода ионизационного датчика равнялся 5 *мм*, а промежуток между ним и корпусом датчика составлял 0,5 *мм*.

Формирующая приставка позволяет получить с ионизационного датчика выходной сигнал, который требуется для запуска (или остановки) отсчетного устройства цифро-

вого частотомера, работающего в режиме измерения промежутков времени между одиночными импульсами. Минимальная величина этого промежутка времени, измеряемого частотомером, равна 10^{-6} *сек*.

Воздух в мультипликатор подавался из воздушных баллонов с начальным давлением 150 *атм*. В момент разрыва диафрагмы термопарный термометр, установленный в отсеке высокого давления, показывал температуру $T_4=298$ К, а давление, зафиксированное манометром, было 154 *кГ/см*^{2}. Атмосферное давление во время опыта $p_{атм}=758$ *мм рт. ст.*

Время прохождения ударной волной расстояния между датчиками, зафиксированное цифровым частотомером, $t=1{,}068\cdot10^{-3}$ *сек*. Так как датчики установлены на расстоянии $L=1500$ *мм*, то средняя скорость ударной волны

$$c_s = 1{,}5/(1{,}068\cdot10^{-3}) = 1400 \text{ м/сек}.$$

Так как скорость звука в отсеке низкого давления

$$a_1 = \sqrt{1{,}4\cdot287\cdot292} = 343 \text{ м/сек},$$

то соответствующее число Маха

$$M_1 = 1400/343 = 4{,}1.$$

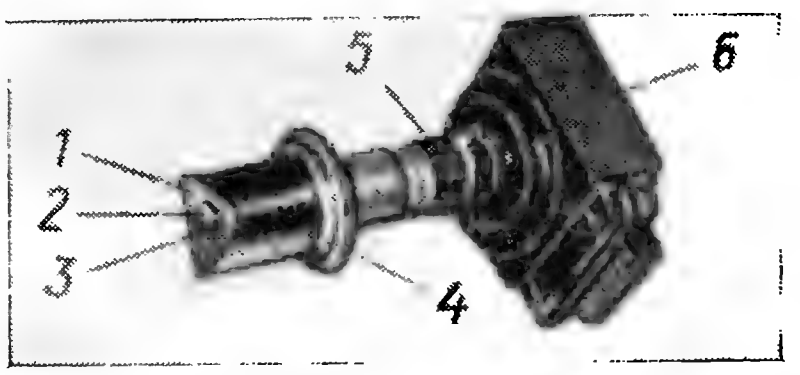


Рис. 3.2.22. Ионизационный датчик:

1 — корпус; *2* — центральный электрод; *3* — воздушный зазор; *4* — фланец для крепления; *5* — штепсельный разъем; *6* — формирующая приставка

По числу $M_1=4{,}1$ и значению $k_1=1{,}4$ находим параметры газа в рабочей пробке:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\cdot1{,}4}{1{,}4+1}4{,}1^2 - \frac{1{,}4-1}{1{,}4+1} = 19{,}45;$$

$$p_2 = (p_2/p_1)\,p_1 = 19{,}45\cdot0{,}068 = 1{,}32 \text{ кГ/см}^2;$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1+\dfrac{1{,}4-1}{1{,}4+1}19{,}45}{1+\dfrac{1{,}4-1}{1{,}4+1}\cdot\dfrac{1}{19{,}45}} = 3{,}77;$$

$$T_2 = (T_2/T_1)\,T_1 = 3{,}77\cdot292 = 1100 \text{ K};$$

$$\rho_2 = 1{,}32\cdot10^4/(287\cdot1100) = 0{,}0419 \text{ кГ}\cdot\text{сек}^2/\text{м}^4.$$

Число Маха в рабочей пробке

$$M_2 = \frac{1}{1{,}4}(19{,}45-1)\left[19{,}45\left(\frac{1{,}4+1}{2\cdot1{,}4}+\frac{1{,}4-1}{2\cdot1{,}4}19{,}45\right)\right]^{-1/2} = 1{,}57.$$

Рассчитаем отношение p_2/p_1 по измеренному начальному перепаду $p_4/p_1=2280$. Согласно (1.5.5), полагая $k_1=k_4$ и $R_1=R_4$, получим:

$$a_1/a_4 = \sqrt{T_1/T_4} = \sqrt{292/298} = 0{,}99;$$

$$2280 = \frac{p_2}{p_1}\left\{1-\frac{(1{,}4-1)\,0{,}99\,(p_2/p_1-1)}{\sqrt{2\cdot1{,}4}\sqrt{2\cdot1{,}4+(1{,}4+1)(p_2/p_1-1)}}\right\}^{-2\cdot1{,}4/(1{,}4-1)}.$$

Решая это уравнение, найдем отношение $p_2/p_1=19{,}6$, которое менее чем на 1% отличается от соответствующего значения, вычисленного по экспериментальным данным.

ГЛАВА IV

АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НА МОДЕЛЯХ КРЫЛЬЕВ

Важнейшим элементом летательного аппарата является крыло, которое в основном определяет его аэродинамические характеристики. Исследование этих характеристик непосредственно связано с изучением аэродинамики изолированных крыльев. При этом найденные для этих крыльев аэродинамические силы и моменты, вообще говоря, не совпадают с теми значениями, которые будут у них в случае комбинации с другими элементами летательного аппарата — корпусом (фюзеляжем), стабилизирующими или управляющими элементами летательного аппарата.

Причина такого явления заключается в интерференции — взаимодействии с крылом всех этих элементов, изменяющем аэродинамические свойства изолированного крыла. Истинные аэродинамические характеристики летательного аппарата, состоящего, в частности, из комбинации корпуса и крыла, могут быть получены сложением соответствующих значений этих характеристик для изолированных корпуса и крыла и некоторой добавочной величины — интерференционной поправки.

Аэродинамические свойства крыла при заданных условиях движения (скорость, углы атаки и скольжения, высота полета) зависят от его формы в плане и вида профиля. Исследования обтекания крыла сводятся в основном к определению количественной зависимости между его аэродинамическими силами и моментами и геометрическими параметрами, характеризующими форму крыла в плане и вид профиля.

Для заданной формы в плане аэродинамические характеристики могут быть определены, если найдены соответствующие их значения для ряда профилей, выбранных вдоль размаха крыла (точнее, для элементарных прямоугольных крыльев с такими профилями). При этом у прямоугольного крыла бесконечного размаха такие его характеристики, как коэффициенты подъемной силы, момента тангажа, будут теми же, что и у профиля. У крыла же конечного размаха с произвольной формой в плане аэродинамические параметры могут оказаться довольно близкими к соответствующим их значениям для профиля.

Отсюда понятна большая важность исследований обтекания профилей, занимающих особое место в экспериментальной аэродинамике.

Определение аэродинамических коэффициентов крыла (или его профиля) при продувках моделей в аэродинамических трубах может производиться либо с помощью аэродинамических весов, либо путем измерения давления на обтекаемой поверхности. Такое измерение давления и нахождение его распределения является одним из наиболее распространенных экспериментов, позволяющим не только определить соответствующие аэродинамические коэффициенты, но и изучить физическую картину обтекания. Без этого изучения нельзя успешно решать задачи управления процессами взаимодействия между газом и движущимся в нем летательным аппаратом, в частности задачи о наивыгоднейшей форме крыльев и профилей с заданными аэродинамическими свойствами.

§ 4.1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОФИЛЯ

Работа 4.1.1

Определение аэродинамических коэффициентов профиля крыла в дозвуковом потоке по измеренным давлениям на его поверхности

Цель работы — найти распределение давления по профилю крыла; вычислить коэффициенты подъемной силы, лобового сопротивления и продольного момента (момента тангажа), а также критические числа Маха и некоторые другие аэродинамические характеристики профиля в дозвуковом потоке.

Общие сведения

Аэродинамические коэффициенты. Воздействие воздушной среды на движущееся в ней крыло приводит к появлению на его поверхности непрерывно распределенных сил от давления и касательного напряжения. С учетом этого любую аэродинамическую силу и момент можно представить в виде суммы двух составляющих, одна из которых зависит от распределения давления, а другая — от касательного напряжения.

Соответствующим образом можно выразить аэродинамические коэффициенты сил и момента:

$$c_x = c_{xp} + c_{xf}; \tag{4.1.1}$$

$$c_y = c_{yp} + c_{yf}; \tag{4.1.2}$$

$$m_z = m_{zp} + m_{zf}, \tag{4.1.3}$$

где c_{xp}, c_{yp}, m_{zp} — соответственно коэффициенты лобового сопротивления, подъемной силы и продольного момента от давления; c_{xf}, c_{yf}, m_{zf} — аналогичные коэффициенты сил и момента, вызванных трением.

Исследования показывают, что составляющие аэродинамических коэффициентов сил и моментов, вызванных давлением, обычно бывают наибольшими по величине и именно эти составляющие в основном определяют аэродинамические свойства профиля.

Распределение давления по профилю опытным путем получают чаще всего в результате продувок дренированных моделей крыльев в аэродинамических трубах. Это распределение давления графически представляют с помощью векторной и координатной диаграмм, причем в качестве величины, характеризующей давление, используется безразмерный параметр p, равный избыточному давлению $p - p_\infty$, отнесенному к скоростному напору $\rho_\infty \mathbf{V}_\infty^2/2$ набегающего (невозмущенного) потока:

$$\bar{p} = 2(p - p_\infty)/(\rho_\infty V_\infty^2). \tag{4.1.4}$$

Этот безразмерный параметр называется коффициентом давления. На векторной диаграмме коэффициенты давления изображаются в виде векторов, нормальных к контуру профиля и направленных внутрь или наружу, если значения $\bar{p}$ соответственно положительные или отрицательные. В качестве иллюстрации на рис. 4.1.1 показана такая векторная диаграмма для симметричного профиля, принадлежащего тонкому крылу, обтекаемому под нулевым углом атаки.

На диаграмме передняя точка A является точкой полного торможения (критической точкой), для которой коэффициент давления несжимаемой жидкости в соответствии с уравнением Бернулли

$$V_\infty^2/2 + p_\infty/\rho_\infty = p_0/\rho_\infty \tag{4.1.5}$$

равен $\bar{p}_0 = 2(p_0 - p_\infty)/(\rho_\infty V_\infty^2) = 1$.

Уравнение (4.1.5), записанное для двух сечений струйки (одно из них выбрано в набегающем потоке, а другое — в возмущенном течении около профиля), позволяет получить формулу, связывающую местную скорость V с коэффициентом давления:

$$V = V_\infty \sqrt{1 - \bar{p}}. \qquad (4.1.6)$$

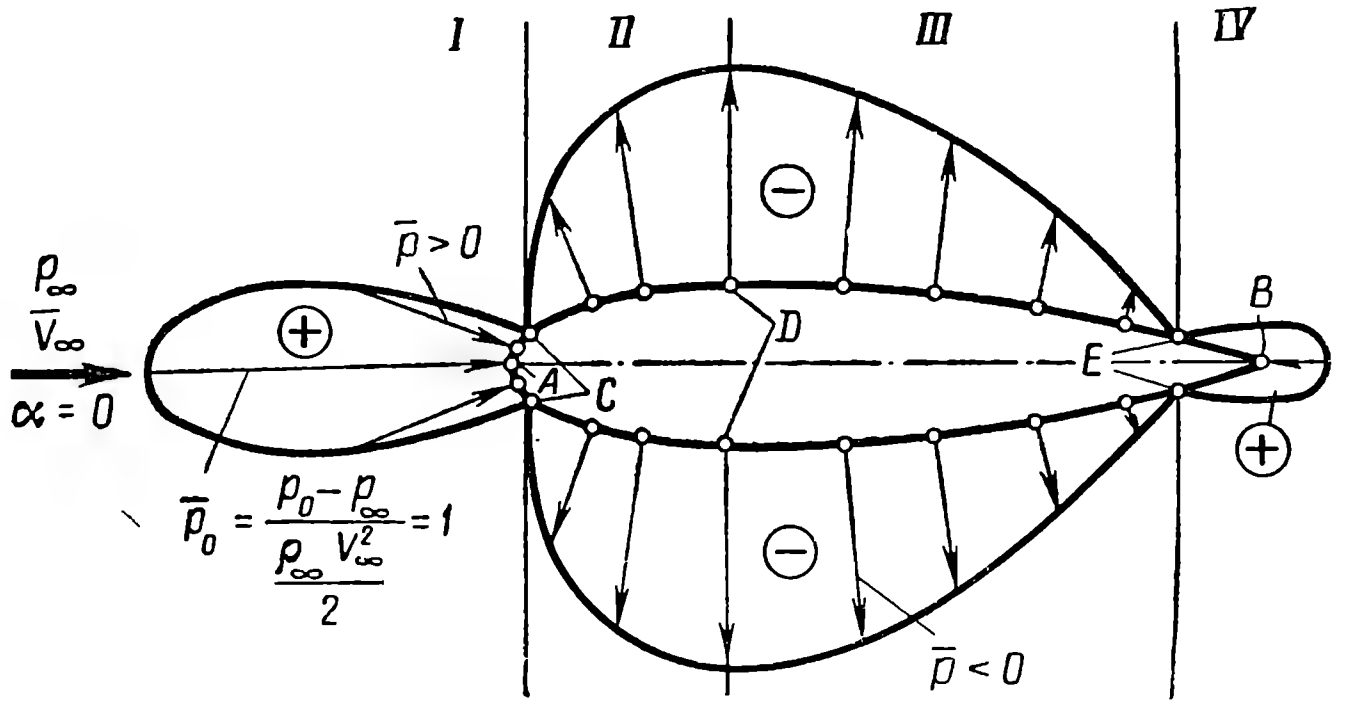


Рис. 4.1.1. Векторная диаграмма распределения коэффициента давления при обтекании симметричного профиля несжимаемым потоком под нулевым углом атаки:

I, *IV* — области течения, где местная скорость меньше скорости набегающего потока ($V < V_\infty$); *II*, *III* — области, в которых $V > V_\infty$

В соответствии с этой формулой течение в областях *I* и *IV* (см. рис. 4.1.1) характеризуется скоростями, меньшими, чем в невозмущенном потоке, поскольку, как видно из диаграммы, коэффициенты $\bar{p}$ здесь положительные (например, в точке задней кромки *B*), а в областях *II* и *III* — скоростями, бóльшими, чем в этом потоке, так как $\bar{p}$ отрицательные. Причем в точках *D*, где эти коэффициенты минимальные, скорость будет наибольшей. В точках *C* и *E* на диаграмме $\bar{p} = 0$, и соответствующая местная скорость равна скорости набегающего потока.

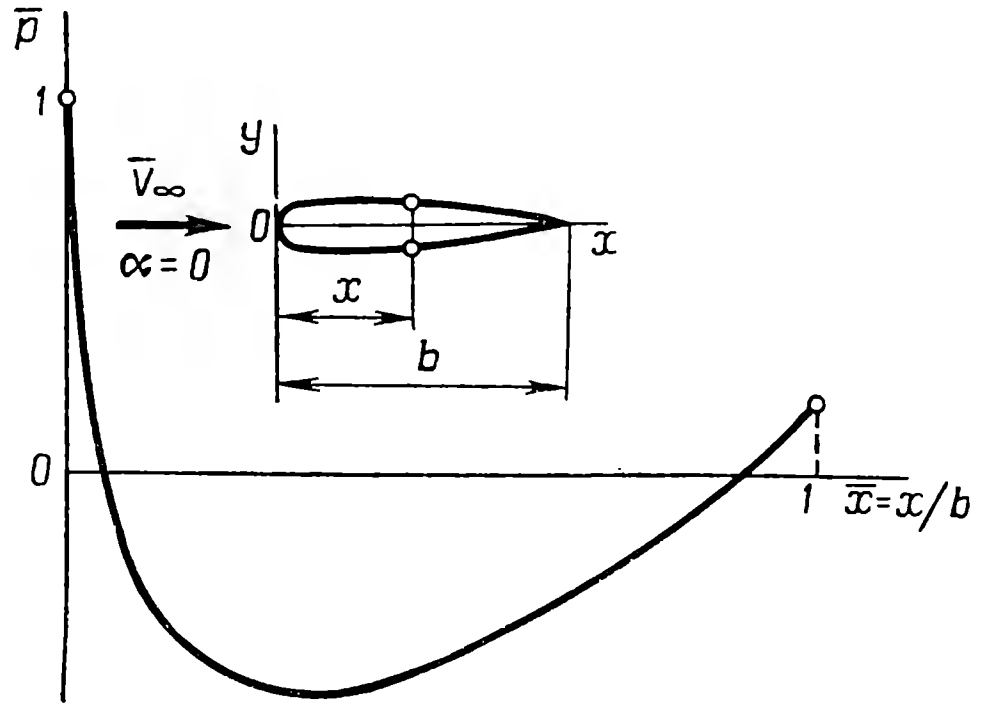


Рис. 4.1.2. Координатная диаграмма $\bar{p} = f(\bar{x})$ при нулевом угле атаки симметричного профиля

Координатная диаграмма распределения давления строится таким образом, что по оси абсцисс откладываются отношения координат точек профиля x к его хорде b, а по оси ординат — коэффициенты давления $\bar{p}$. На рис. 4.1.2 показана координатная диаграмма, которая характеризует распределение коэффициента давления около профиля — такое же, как на рис. 4.1.1.

При движении под углом атаки распределение давления по профилю будет различным на его верхней и нижней сторонах. Соответствующие векторная и координатная диаграммы приведены на рис. 4.1.3 и 4.1.4. Они характеризуют распределение давления при условии, что на профиле всюду скорости дозвуковые. Как видно, на значительном участке разрежение на верхней стороне профиля при $\alpha > 0$ больше, чем на нижней. Это различие в разрежении является определяющим фактором

в возникновении подъемной силы при дозвуковых скоростях обтекания.

Так же, как при нулевом угле атаки, и при произвольном его значении можно указать для профиля точку полного торможения, в которой скорость равна нулю, а коэффициент давления имеет предельное значение (для несжимаемой жидкости, как указывалось, это значение равно единице). Это точка при положительных углах атаки лежит на нижней стороне профиля (см. рис. 4.1.3), а при отрицательных — на верхней стороне.

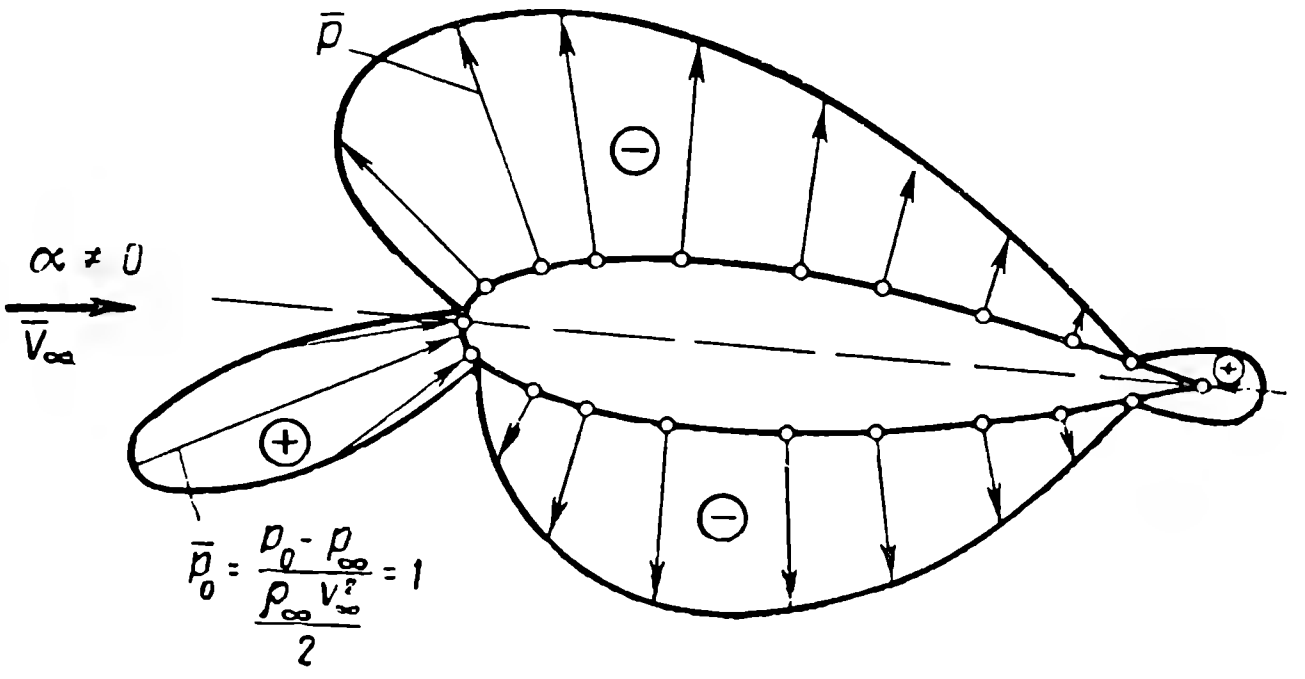


Рис. 4.1.3. Векторная диаграмма профиля при $\alpha \neq 0$

Как правило, точку полного торможения найти непосредственно опытным путем не удается, однако по характеру распределения давления можно установить, в каком месте на профиле она расположена. С этой целью используются векторная и координатная диаграммы, при построении которых путем интерполяции и находится такая критическая точка.

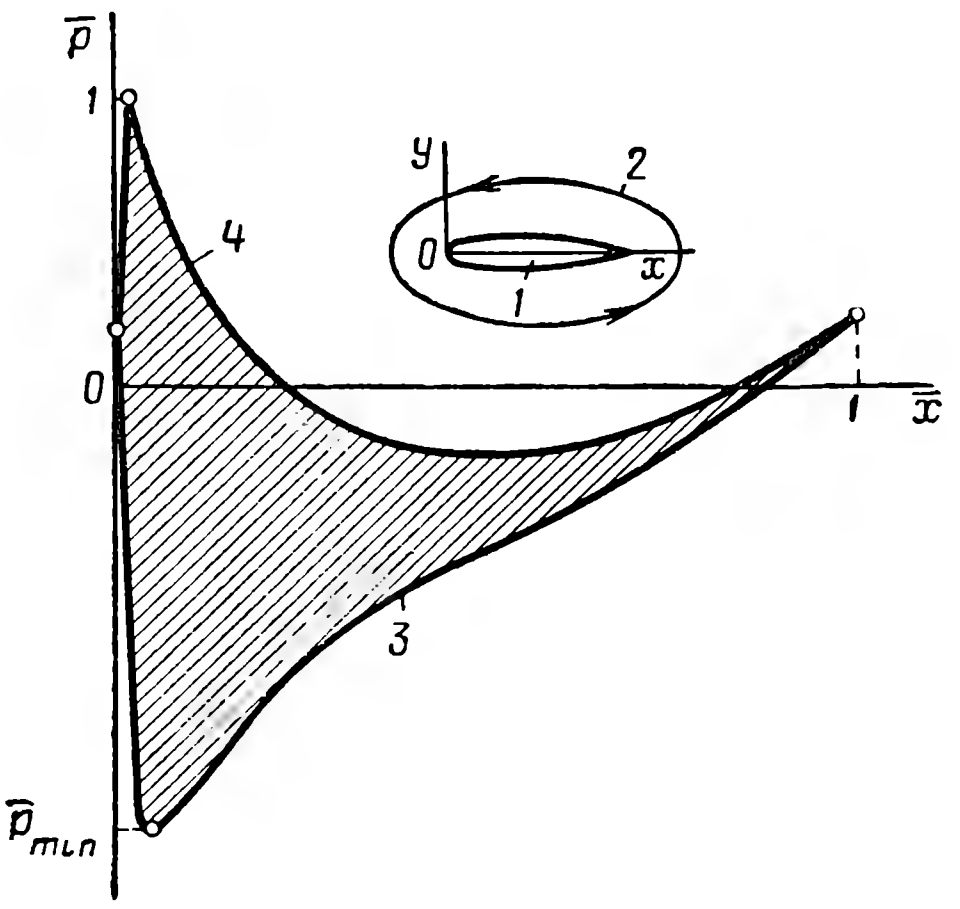


Рис. 4.1.4. Координатная диаграмма $\bar{p} = f(\bar{x})$ профиля при $\alpha \neq 0$:

1 — профиль; *2* — положительное направление обхода; *3* — верхняя сторона профиля; *4* — нижняя сторона профиля

Рассмотрим формулы, позволяющие определить для профиля составляющие коэффициентов подъемной силы, лобового сопротивления и продольного момента от давления. На рис. 4.1.5 показан профиль, принадлежащий участку прямоугольного крыла с единичным размахом.

Выделим на этом участке элементарную поверхность $dS = dl \times 1$. По нормали к ней действует элементарная сила от избыточного давления $(p - p_\infty)\,dl$. Проекция этой силы на нормаль к хорде, совпадающей со связанной осью координат Ox, представим в виде $(p - p_\infty)\,dl \cos\beta$ или, учитывая, что $dl \cos\beta = dx$ и $p - p_\infty = \bar{p} q_\infty$, запишем $\bar{p} q_\infty dx$. Интегрируя это выражение по x, получим составляющую нормальной силы от давления

$$N_p = q_\infty \oint \bar{p}\,dx. \tag{4.1.7}$$

Криволинейный интеграл в (4.1.7) вычисляется при условии, что положительным является направление обхода профиля против часовой стрелки.

Нормальная сила может быть выражена также формулой

$$N_p = c_{Np} q_\infty b, \tag{4.1.8}$$

где c_{Np} — коэффициент нормальной силы от давления. С учетом (4.1.7) и (4.1.8)

$$c_{Np} = \oint \bar{p} d\bar{x}, \tag{4.1.9}$$

где $\bar{x} = x/b$. Как видно из формулы (4.1.9), коэффициент c_{Np} определяется на координатной диаграмме $\bar{p} = f(\bar{x})$ (см. рис. 4.1.4) площадью между кривыми распределения давления на верхней и нижней сторонах профиля.

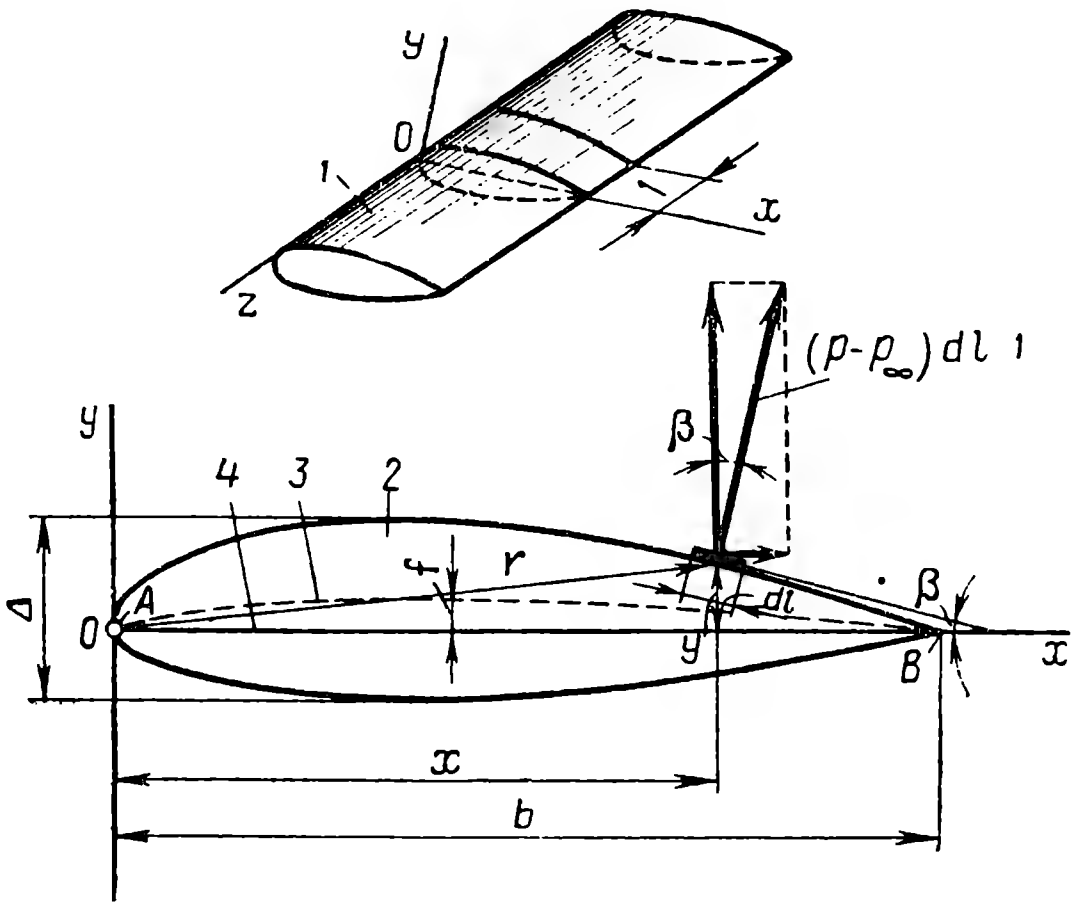


Рис. 4.1.5. К определению сил и момента, действующих на профиль, по известному распределению давления:

1 — крыло; *2* — профиль; *3* — средняя линия; *4* — хорда профиля

Таким же путем можно найти составляющую продольной (осевой) силы профиля R_p (или ее коэффициент c_{Rp}), зависящую от распределения давления. Проекция элементарной силы от избыточного давления на направление хорды профиля крыла равна $(p - p_\infty)\, dl \sin\beta$ или, учитывая, что $dl \sin\beta = dy$ и $p - p_\infty = \bar{p} q_\infty$, — величине $\bar{p} q_\infty dy$ (y — вертикальная координата, связанная с профилем). Интегрируя по y, получим продольную силу

$$R_p = q_\infty \oint \bar{p} dy. \tag{4.1.10}$$

Так как эта сила

$$R_p = c_{Rp} q_\infty b, \tag{4.1.11}$$

то с учетом (4.1.10) можно получить для коэффициента продольной силы от давления зависимость

$$c_{Rp} = \oint \bar{p} d\bar{y}, \tag{4.1.12}$$

где $\bar{y} = y/b$. Интеграл в (4.1.12) может быть вычислен графически путем определения площади между кривыми, характеризующими изменение коэффициента давления на верхней и нижней сторонах профиля в зависимости от координат точек $\bar{y}$ (рис. 4.1.6).

По найденным аэродинамическим коэффициентам в связанных осях определим соответствующие коэффициенты в поточных координатах (рис. 4.1.7):

$$\left.\begin{aligned} c_{yp} &= c_{Np} \cos\alpha - c_{Rp} \sin\alpha; \\ c_{xp} &= c_{Np} \sin\alpha + c_{Rp} \cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{4.1.13}$$

Для летных углов атаки, не превышающих значений $\alpha = 10 \div 12°$, можно написать:

$$\left.\begin{aligned} c_{yp} &\approx c_{Np}; \\ c_{xp} &= c_{yp} (\alpha°/57{,}3°) + c_{Rp}. \end{aligned}\right\} \tag{4.1.14}$$

В соответствии с (4.1.14) и (4.1.9) коэффициент подъемной силы

$$c_{yp} = \oint \bar{p} d\bar{x}. \tag{4.1.15}$$

Получим теперь зависимость для расчета составляющей коэффициента продольного момента m_{zp} от давления, определяя этот момент относительно точки A, лежащей на пересечении хорды с профилем (см. рис. 4.1.5). Будем считать момент положительным, если он увеличивает угол атаки.

Величина момента от силы, действующей на элементарную площадку dS, равна

$$-[(p-p_\infty)\,dx]\,x + [(p-p_\infty)\,dy]\,y,$$

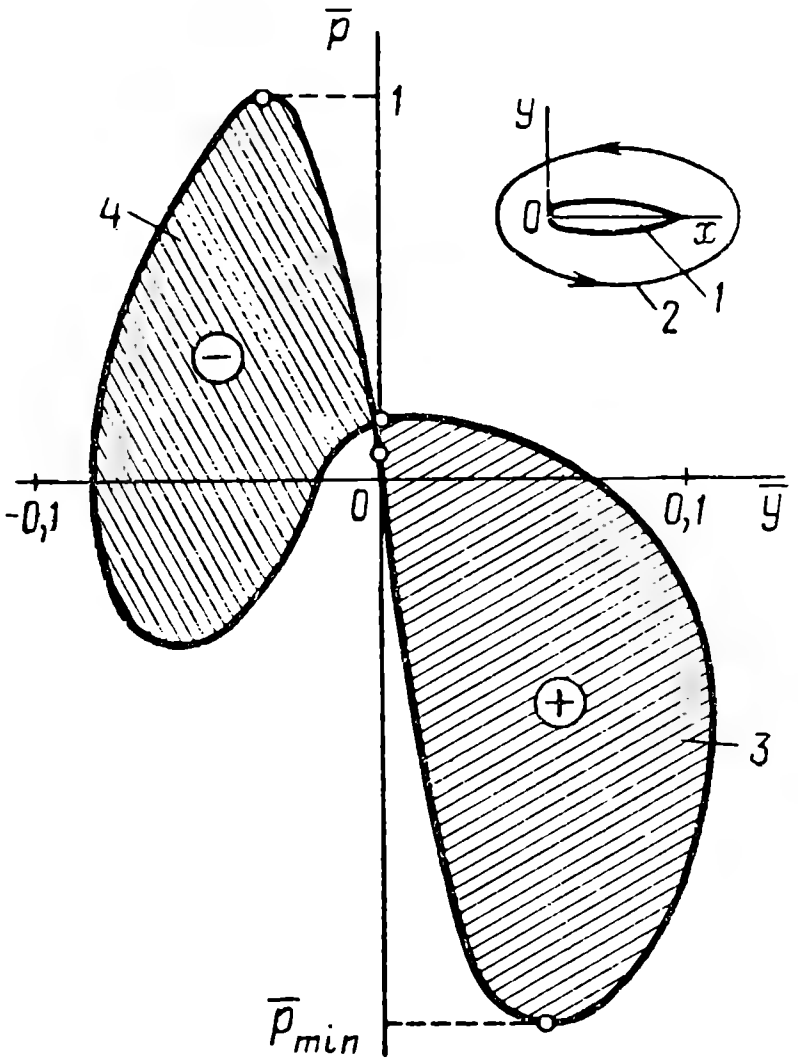


Рис. 4.1.6. Координатная диаграмма $\bar{p}=f(\bar{y})$ профиля:

1 — профиль; *2*—положительное направление обхода; *3* — замкнутая область, имеющая положительную площадь; *4* — замкнутая область с отрицательной площадью

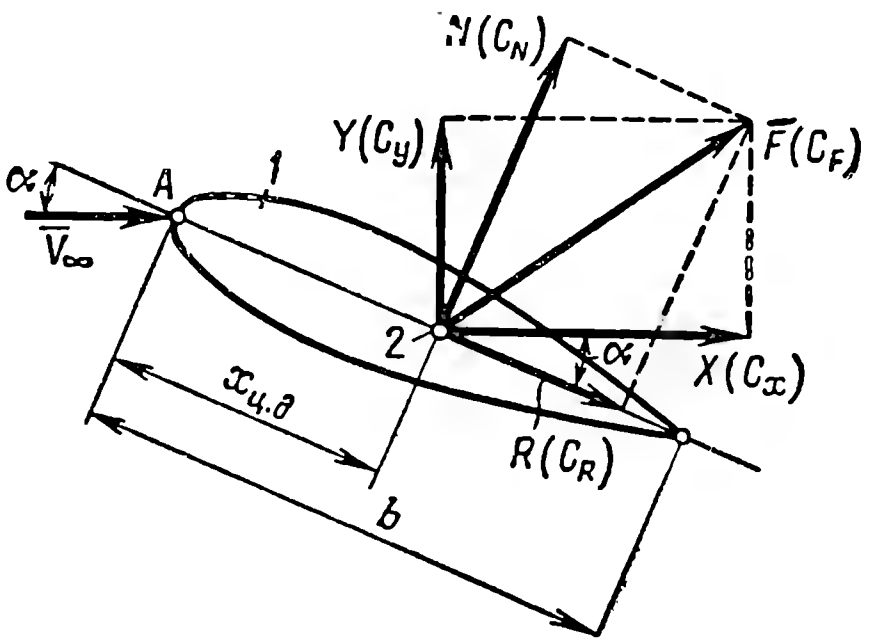


Рис. 4.1.7. Схема действующих на крыло аэродинамических сил в поточной и связанной системах осей координат:

1 — профиль крыла; *2* — центр давления

а результирующий момент

$$M_{zp} = \oint (p-p_\infty)(-x dx + y dy).$$

Производя здесь замену $p-p_\infty = \bar{p} q_\infty$ и $M_{zp} = m_{zp} q_\infty b b$, получим зависимость для коэффициента момента

$$-m_{zp} = 0{,}5 \cdot \oint \bar{p} d\bar{x}^2 - 0{,}5 \oint \bar{p} d\bar{y}^2. \tag{4.1.16}$$

Для тонкого малоизогнутого профиля можно пренебречь величиной $y dy$ по сравнению с величиной $x dx$, и тогда

$$-m_{zp} = 0{,}5 \cdot \oint \bar{p} d\bar{x}^2. \tag{4.1.17}$$

Составляющие от трения полных коэффициентов подъемной силы и продольного момента очень малы, поэтому с достаточной степенью точности можно принять для соответствующих их значений:

$$c_y = \oint \bar{p} d\bar{x}; \tag{4.1.18}$$

$$-m_z = 0{,}5 \cdot \oint \bar{p} d\bar{x}^2 - 0{,}5 \oint \bar{p} d\bar{y}^2. \tag{4.1.19}$$

Для тонких малоизогнутых профилей

$$-m_z = 0{,}5 \cdot \oint \bar{p} d\bar{x}^2. \tag{4.1.20}$$

Удельный вес составляющей от трения в суммарном сопротивлении может быть различен. Для тонких профилей бóльшую часть полного сопротивления составляет сила трения; с увеличением их толщины возрастает доля сопротивления от давления.

Сопротивление трения профиля можно найти, если известно распределение на нем касательных напряжений, аналогично тому, как это было сделано при определении сопротивления от давления. Следует, однако, отметить, что экспериментальное нахождение распределения касательных напряжений по обтекаемой поверхности представляет по сравнению с измерением давления более сложную задачу. Обычно при определении силового воздействия используют метод измерения суммарных сил трения или же соответствующие приближенные расчетные зависимости.

Расчет аэродинамических коэффициентов профиля в несжимаемом потоке. Как показывают исследования, при безотрывном обтекании профиля несжимаемым потоком его коэффициенты подъемной силы и продольного момента в диапазоне летных углов атаки α определяются соответственно зависимостями:

$$c_y = c_y^\alpha (\alpha - \alpha_0); \tag{4.1.21}$$

$$m_z = m_{z0} + m_z^{c_y} c_y, \tag{4.1.22}$$

в которых $c_y^\alpha = \partial c_y / \partial \alpha$, $m_z^{c_y} = \partial m_z / \partial c_y$ — производные от коэффициентов подъемной силы и момента соответственно по α и c_y (эти производные принимаются постоянными для данного профиля); m_{z0} — коэффициент момента при нулевой подъемной силе ($c_y = 0$); α_0 — «угол нулевой подъемной силы».

Производная c_y^α в (4.1.21) может быть определена по следующей приближенной зависимости:

$$c_y^\alpha = 2\pi (1 + 0{,}77\,\bar{\Delta}) \sqrt{1 + (\bar{f}/2)^2}, \tag{4.1.23}$$

где $\bar{f} = f/b$; $\bar{\Delta} = \Delta/b$ — соответственно относительная кривизна и толщина профиля (см. рис. 4.1.5).

Для симметричных профилей величина $\bar{f} = 0$, а для несимметричных профилей, обычно используемых в летной практике, эта величина хотя и отлична от нуля, но оказывается весьма малой, так что значением $(\bar{f}/2)^2$ по сравнению с единицей можно пренебречь. В соответствии с этим

$$c_y^\alpha = 2\pi (1 + 0{,}77\bar{\Delta}). \tag{4.1.24}$$

Для очень тонких профилей ($\bar{\Delta} \ll 1$), как и для плоской пластины ($\bar{\Delta} = 0$), можно принять

$$c_y^\alpha = 2\pi. \tag{4.1.25}$$

«Угол нулевой подъемной силы» связан с относительной кривизной профиля зависимостью [28]

$$\alpha_0 = -2\bar{f}, \; рад. \tag{4.1.26}$$

Коэффициент подъемной силы иногда определяют по приближенной формуле

$$c_y = a (\alpha - \alpha_0), \tag{4.1.27}$$

в которой $\alpha_0 = -1{,}6\bar{f}$, $рад = -90\bar{f}$, $град$ [28]. Коэффициент a в (4.1.27) определяется опытным путем для каждого профиля и зависит от угла заострения его задней кромки, числа $\mathbf{Re}_\infty = V_\infty b/\nu_\infty$, положения на про-

филе точки перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный [21]. Это значение a оказывается несколько меньшим теоретической величины $a=c_y^\alpha$ в (4.1.21).

Зависимость $m_z=f(c_y)$ [см. (4.1.22)], линейная в диапазоне летных углов атаки, может определяться по теоретическим значениям $m_{z0}=-\pi\bar{f}$ и $m_z^{c_y}=-0{,}25$. При этом, как показывают экспериментальные исследования, коэффициенты m_{z0} и $m_z^{c_y}$, полученные из опыта и зависящие от тех же факторов, что и a, оказываются, подобно этой величине, несколько меньшими теоретических. В частности, значение $m_z^{c_y}$ для большинства профилей в несжимаемом потоке составляет $-(0{,}22\div 0{,}25)$.

Рассмотрим расчет сопротивления. Известно, что составляющая этого сопротивления от давления при безотрывном дозвуковом обтекании идеальной (невязкой) жидкостью равна нулю (парадокс Эйлера — Даламбера). В реальных условиях обтекания вязкой средой и при сохранении условия безотрывности произойдет перераспределение давления и появится в дополнение к трению составляющая силы от давления. При этом для тонких вытянутых профилей с малыми углами атаки эта составляющая будет малой и сопротивление в основном будет обусловлено действием сил вязкости.

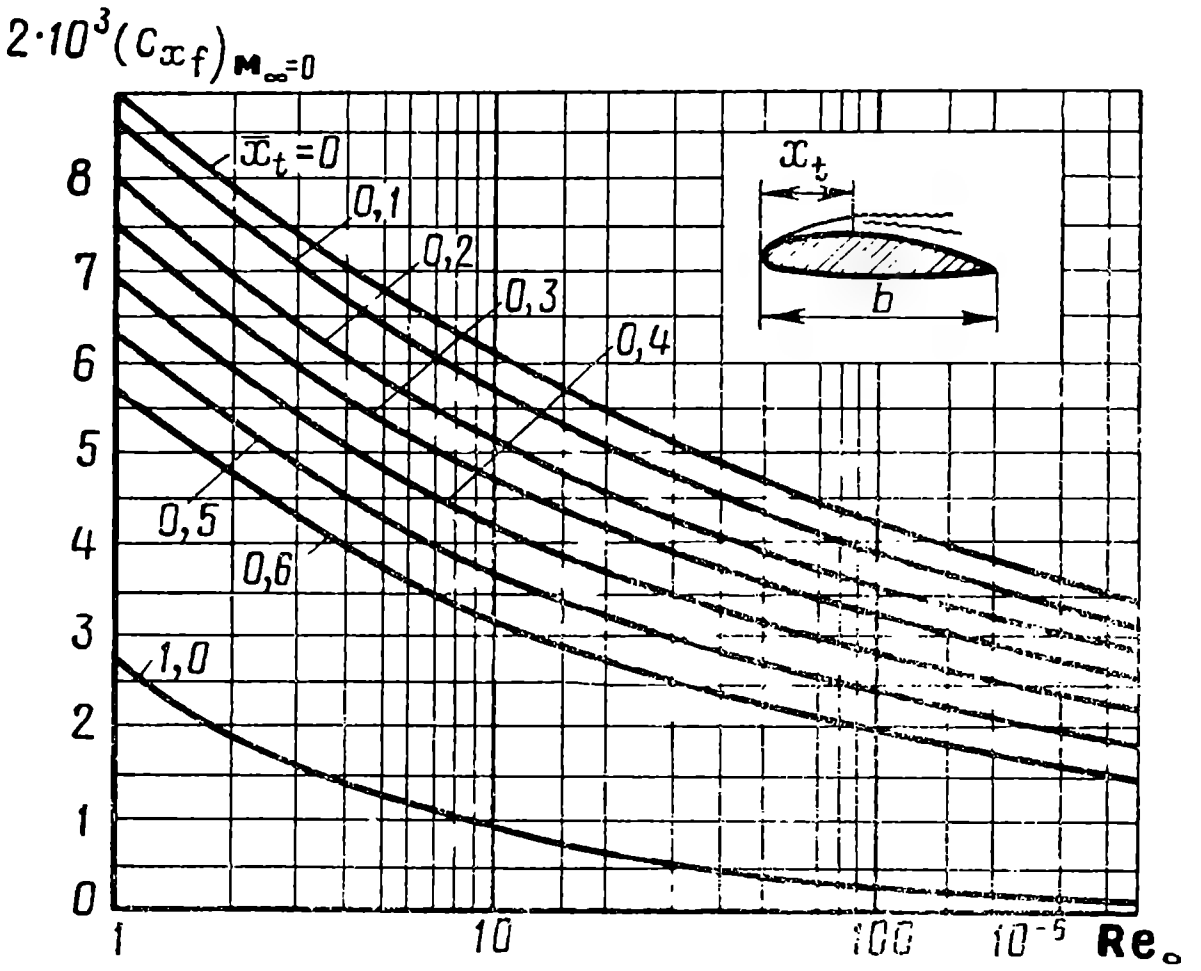


Рис. 4.1.8. График зависимости $(c_{xf})_{M_\infty=0}=f(\mathrm{Re}_\infty, \bar{x}_t)$ для плоской пластинки в несжимаемом потоке

Соответствующий коэффициент сопротивления трения $c_{xf}=X_f/(q_\infty S_{\text{пр}})$ (где $S_{\text{пр}}$ — площадь поверхности прямоугольного крыла единичного размаха с заданным профилем) может определяться по следующей эмпирической формуле [28, 30]:

$$c_{xf}=2(c_{xf})_{M_\infty=0}\eta_{\bar{\Delta}}, \qquad (4.1.28$$

где $2(c_{xf})_{M_\infty=0}$ — удвоенный коэффициент трения плоской пластины единичного размаха с шириной, равной хорде профиля, и с таким же, как у профиля, положением точки перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный; $\eta_{\bar{\Delta}}$ — некоторый поправочный коэффициент.

Значение $2(c_{xf})_{M_\infty=0}$ можно найти для малых дозвуковых скоростей по графику на рис. 4.1.8 в зависимости от числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_\infty=V_\infty b/\nu_\infty$ и относительной координаты точки перехода $\bar{x}_t=x_t/b=\mathrm{Re}_{\text{кр}}/\mathrm{Re}_\infty$ ($\mathrm{Re}_{\text{кр}}$ — критическое число Рейнольдса, которое принимается равным $5\cdot10^5$).

Для приближенного определения коэффициента $(c_{xf})_{M_\infty=0}$ гладких профилей (при отсутствии шероховатости) можно воспользоваться для ламинарного пограничного слоя формулой

$$(c_{xf})_{M_\infty=0}=1{,}29/\sqrt{\mathrm{Re}_\infty}, \qquad (4.1.29)$$

а для турбулентного пограничного слоя — формулой

$$(c_{xf})_{M_\infty=0} = 0{,}075/\sqrt[5]{\mathrm{Re}_\infty}. \qquad (4.1.30)$$

Коэффициент $\eta_{\bar{\Delta}}$ (4.1.28) учитывает влияние на сопротивление относительной толщины профиля $\bar{\Delta}$ и положения точки перехода. Значения этого коэффициента приведены на рис. 4.1.9 [28, 30]. Для тонких профилей ($\bar{\Delta}=0{,}02\div0{,}12$) с ламинарным пограничным слоем можно принять $\eta_{\bar{\Delta}}=1$. При полностью турбулентном пограничном слое зависимость $\eta_{\bar{\Delta}}$ от $\bar{\Delta}$ оказывается близкой к линейной и хорошо аппроксимируется формулой

$$\eta_{\bar{\Delta}} = 1 + 2{,}77\,\bar{\Delta}. \qquad (4.1.31)$$

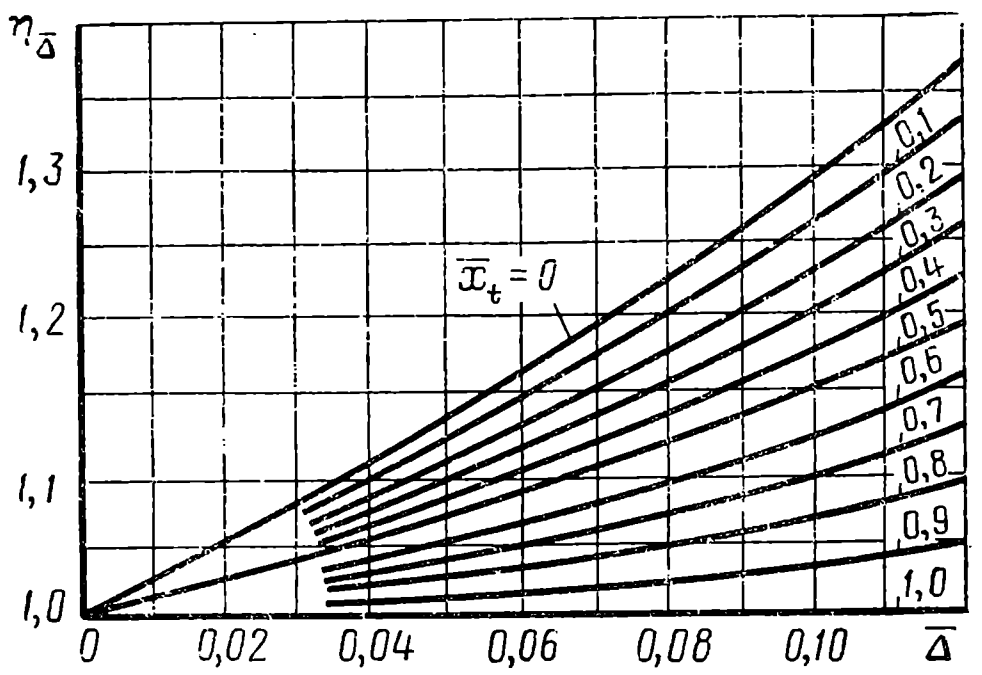


Рис. 4.1.9. График для определения коэффициента $\eta_{\bar{\Delta}} = f(\bar{\Delta}, \bar{x}_t)$

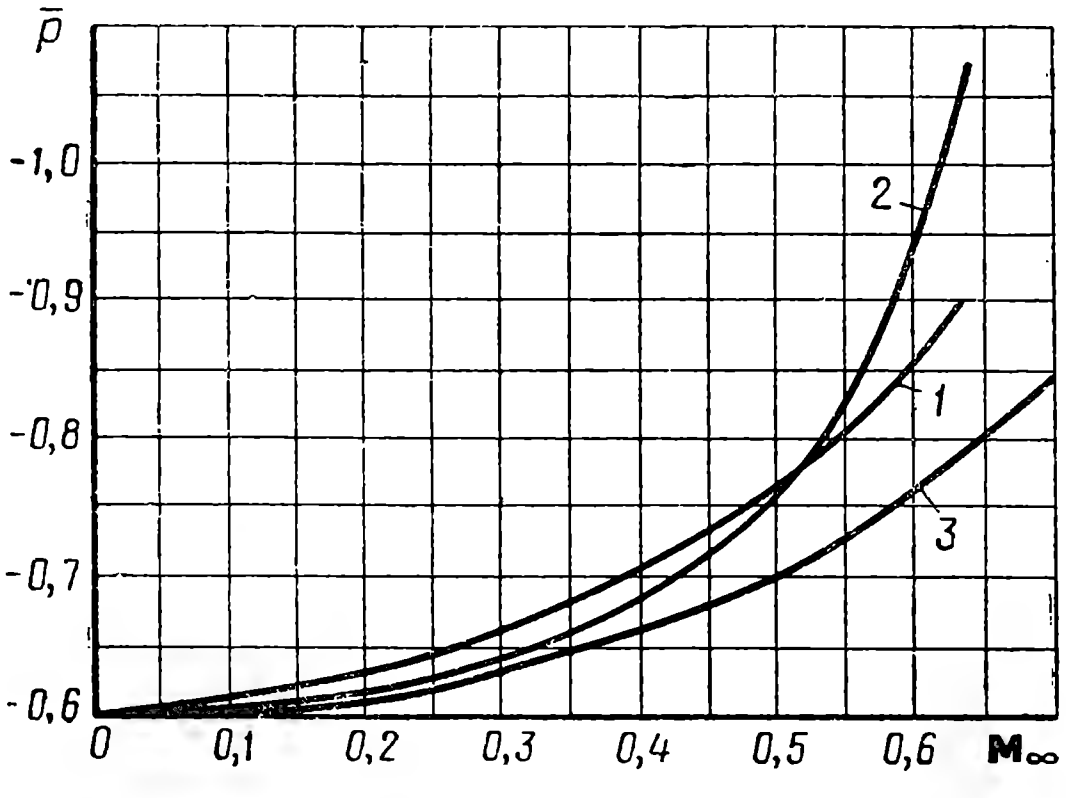


Рис. 4.1.10. Сравнение различных способов определения коэффициента давления в сжимаемой жидкости:

1 — эксперимент; *2* — по Карману — Тзяну; *3* — по Прандтлю — Глауэрту

Влияние сжимаемости на распределение давления. Для тонкого профиля при небольших углах атаки влияние сжимаемости на давление может быть учтено при помощи формулы Прандтля — Глауэрта:

$$\bar{p}_{сж} = \bar{p}_{нсж}/\sqrt{1 - M_\infty^2}, \qquad (4.1.32)$$

в которой $\bar{p}_{нсж}$ и $\bar{p}_{сж}$ — коэффициенты давления для рассматриваемой точки профиля соответственно в несжимаемом и сжимаемом потоках.

Зависимость (4.1.32) можно рассматривать в качестве первого приближения при расчете коэффициента давления в сжимаемом потоке по соответствующему значению $\bar{p}_{нсж}$. Более точные результаты, относящиеся к утолщенным профилям и увеличенным углам атаки, получаются по формуле Кармана — Тзяна:

$$\bar{p}_{сж} = \frac{\bar{p}_{нсж}}{\sqrt{1 - M_\infty^2} + \dfrac{M_\infty^2}{1 + \sqrt{1 - M_\infty^2}} \cdot \dfrac{\bar{p}_{нсж}}{2}}. \qquad (4.1.33)$$

Сравнение экспериментальных результатов и данных расчета по формулам (4.1.32), (4.1.33) показано на рис. 4.1.10.

Применение этих формул приводит к весьма большой погрешности

при определении коэффициента давления в точке полного торможения [так, например, при $\mathbf{M}_\infty = 0{,}8$ формула (4.1.32) дает значение этого коэффициента 1,67, а формула (4.1.33) — значение 1,26 вместо 1,17]. В этой точке для $\mathbf{M}_\infty < 1$ коэффициент давления можно рассчитывать по формулам:

$$\left.\begin{aligned} p_{0\text{сж}} &= 1 + \bar{\varepsilon}_p; \\ \varepsilon_p &\approx \frac{\mathbf{M}_\infty^2}{4} + \frac{2-k}{24}\mathbf{M}_\infty^4. \end{aligned}\right\} \qquad (4.1.34)$$

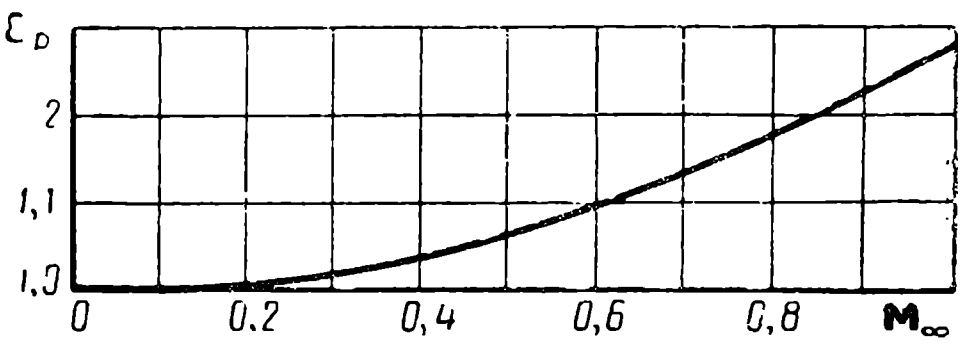


Рис. 4.1.11. Поправка, учитывающая влияние сжимаемости на давление [$\varepsilon_p = f(\mathbf{M}_\infty)$]

Для $k = 1{,}4$ значения ε_p приведены на рис. 4.1.11.

Более совершенный метод расчета коэффициента давления с учетом сжимаемости при докритических скоростях обтекания ($\mathbf{M}_\infty < \mathbf{M}_{\infty\text{кр}}$) разработан акад. С. А. Христиановичем. Этот расчет ведется следующим образом. По известному числу $\mathbf{M}_\infty$ сжимаемого потока из таблиц газодинамических функций [13] или по формуле

$$\lambda_\infty = \sqrt{\frac{(k+1)\,\mathbf{M}_\infty^2/2}{1+(k-1)\,\mathbf{M}_\infty^2/2}} \qquad (4.1.35)$$

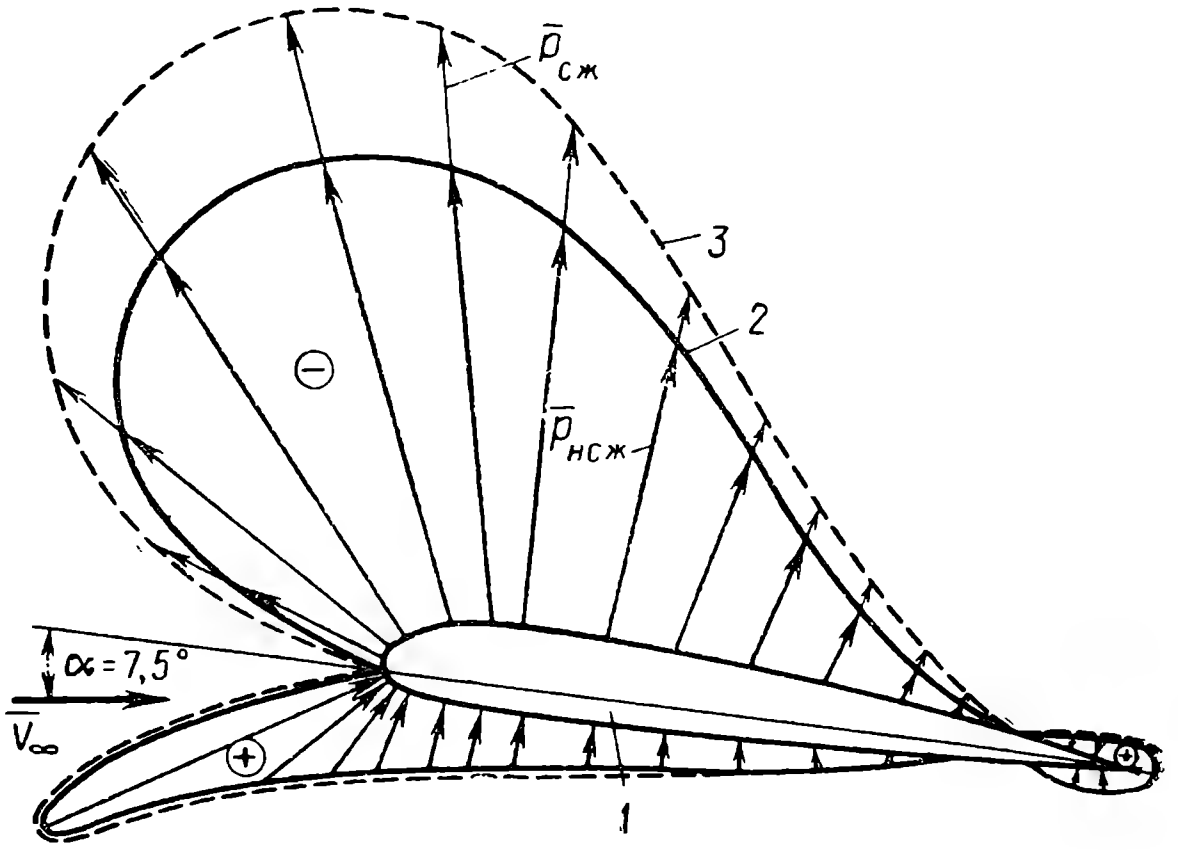


Рис. 4.1.12. Распределение коэффициента давления по профилю в несжимаемом потоке и пересчет этого распределения с учетом сжимаемости по методу акад. С. А. Христиановича:

1 — профиль ЦАГИ; *2* — несжимаемый поток; *3*—сжимаемый поток

вычисляем относительную скорость $\lambda_\infty = V_\infty/a^*$. По этому значению λ_∞ из табл. 4.1.1 определяем число Λ_∞ (относительную скорость некоторого фиктивного несжимаемого потока), а затем находим соответствующее местное число

$$\Lambda = \Lambda_\infty \sqrt{1 - \bar{p}_{\text{нсж}}} \qquad (4.1.36)$$

в той точке, где известно значение $\bar{p}_{\text{нсж}}$. Далее из табл. 4.1.1 по найденному значению Λ находим λ — местную относительную скорость, а по формуле

$$p = p_\infty \left[\frac{1-(k-1)\,\lambda^2/(k+1)}{1-(k-1)\,\lambda_\infty^2/(k+1)}\right]^{k/(k-1)} = p_\infty \frac{\pi(\lambda)}{\pi(\lambda_\infty)} \qquad (4.1.37)$$

вычисляем абсолютное давление { функции $\pi(\lambda)$ и $\pi(\lambda_\infty)$ находятся из таблиц газодинамических функций [13] }. Наконец, воспользовавшись выражением

$$\bar{p} = \frac{2(p-p_\infty)}{\rho_\infty V_\infty^2} = \frac{2(p/p_\infty - 1)}{k\mathbf{M}_\infty^2}, \qquad (4.1.38)$$

подсчитываем коэффициенты давления $\bar{p}_{сж}$ в данной точке профиля, расположенного в сжимаемом потоке с числом $\mathbf{M}_\infty$.

На рис. 4.1.12 показана для профиля (типа ЦАГИ Д2 11% с относительной толщиной $\bar{\Delta}=0{,}11$) векторная диаграмма коэффициентов давления в несжимаемом потоке при $\alpha=7{,}5°$, а также соответствующих значений этих коэффициентов, полученных в результате пересчета на $\mathbf{M}_\infty=0{,}43$ по методу акад. С. А. Христиановича.

Таблица 4.1.1

λ	$M(\lambda)$	Λ	λ	$M(\lambda)$	Λ
0	0	0	0,675	0,6410	0,6080
0,05	0,0457	0,0500	0,700	0,6668	0,6251
0,10	0,0913	0,0998	0,725	0,6929	0,6413
0,15	0,1372	0,1493	0,750	0,7192	0,6568
0,20	0,1832	0,1983	0,775	0,7458	0,6717
0,25	0,2294	0,2467	0,800	0,7727	0,6857
0,30	0,2759	0,2943	0,825	0,7998	0,6988
0,35	0,3228	0,3410	0,850	0,8274	0,7110
0,40	0,3701	0,3862	0,875	0,8552	0,7223
0,45	0,4179	0,4307	0,900	0,8834	0,7324
0,50	0,4663	0,4734	0,925	0,9119	0,7413
0,55	0,5152	0,5144	0,950	0,9409	0,7483
0,60	0,5649	0,5535	0,975	0,9702	0,7546
0,625	0,5901	0,5722	1,000	1,0000	0,7577
0,650	0,6154	0,5904	—	—	—

Аэродинамические коэффициенты профиля в дозвуковом сжимаемом потоке. Для определения аэродинамических коэффициентов профиля в дозвуковом сжимаемом потоке можно использовать данные об обтекании того же профиля несжимаемой средой. При этом для тонких профилей и небольших углов атаки расчет коэффициентов подъемной силы и продольного момента можно вести на основе формулы Прандтля — Глауэрта, аналогичной зависимости (4.1.32) для коэффициента давления:

$$c_{уеж} = c_{унсж}/\sqrt{1-\mathbf{M}_\infty^2}; \tag{4.1.39}$$

$$m_{zсж} = m_{zнсж}/\sqrt{1-\mathbf{M}_\infty^2}. \tag{4.1.40}$$

Исследования акад. С. А. Христиановича позволили получить более точные зависимости:

$$c_{усж} = c_{унсж}\,L/\sqrt{1-\mathbf{M}_\infty^2}; \tag{4.1.41}$$

$$m_{zсж} = m_{zнсж}\,L^2/\sqrt{1-\mathbf{M}_\infty^2}, \tag{4.1.42}$$

в которых

$$L = 1 + 0{,}05\mathbf{M}_\infty^2/\mathbf{M}_{\infty кр}^2. \tag{4.1.43}$$

Влияние сжимаемости на коэффициент лобового сопротивления профилей можно оценить по графику функции $c_{xсж}/c_{xнсж}=f(\mathbf{M}_\infty, \bar{\Delta})$, представленному на рис. 4.1.13, либо по формуле К. К. Федяевского

$$c_{xсж}/c_{xнсж} = 1/\sqrt{1+0{,}2\mathbf{M}_\infty^2}. \tag{4.1.44}$$

Сжимаемость изменяет положение центра давления профиля (координата этого центра $x_{ц.д}$ отсчитывается от передней кромки вдоль хор-

ды, см. рис. 4.1.7). Из (4.1.41) и (4.1.42) следует, что в сжимаемом потоке относительная координата центра давления $\bar{x}_{ц.д}=x_{ц.д}/b$, называемая также коэффициентом центра давления и обозначаемая $c_{ц.д}$, определяется соотношением

$$(c_{ц.д})_{сж} = (c_{ц.д})_{нсж} L, \qquad (4.1.45)$$

где $(c_{ц.д})_{сж} = -m_{zсж}/c_{усж}$ и $(c_{ц.д})_{нсж} = -m_{z\,нсж}/c_{унсж}$.

Из (4.1.45) следует, что центр давления в сжимаемом потоке по сравнению с несжимаемой средой смещается к задней кромке.

Аналогично изменяется положение фокуса профиля, безразмерная координата которого $\bar{x}_F=x_F/b$ для тонких малоизогнутых профилей определяется производной $\partial m_z/\partial c_y$.

Определение критического числа Маха $M_{\infty кр}$. Приведенные формулы, по которым рассчитываются аэродинамические коэффициенты в дозвуковом сжимаемом потоке, справедливы при условии, что число Маха набегающего потока M_∞ меньше критического значения этого числа $M_{\infty кр}$. Критическому числу Маха соответствует такая скорость набегающего дозвукового потока, при которой на профиле в некоторой точке местная скорость становится равной скорости звука в потоке. При докритическом обтекании ($M_\infty < M_{\infty кр}$) местная скорость всюду около профиля меньше скорости звука, т. е. такое обтекание будет чисто дозвуковым.

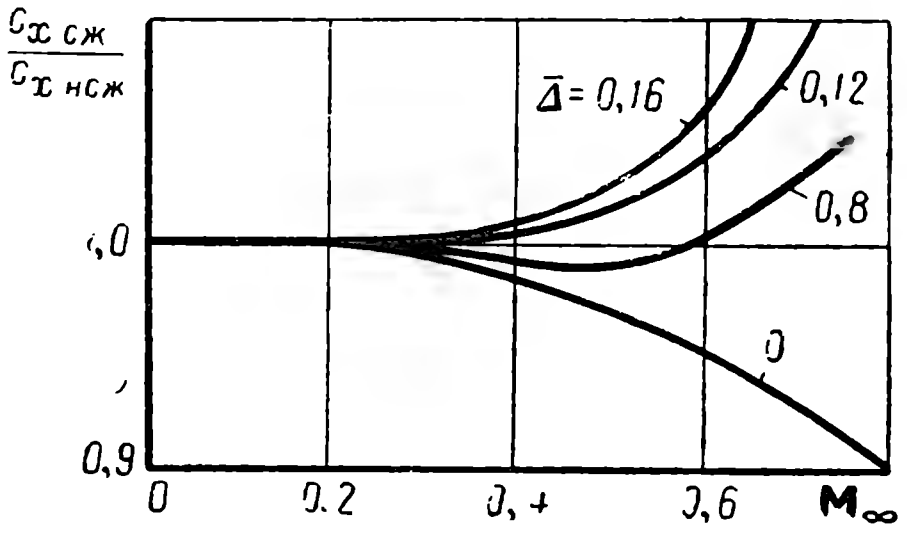


Рис. 4.1.13. Влияние сжимаемости на коэффициент лобового сопротивления профилей различной толщины

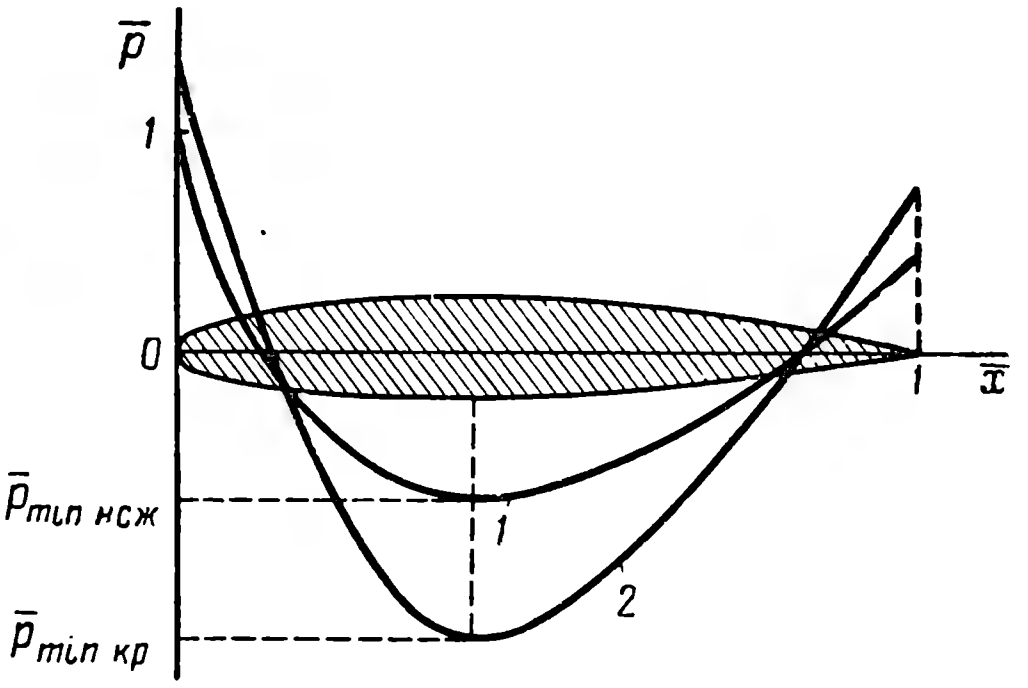


Рис. 4.1.14. Координатные диаграммы $\bar{p}=f(\bar{x})$ для симметричного профиля, обтекаемого под нулевым углом атаки несжимаемым (кривая *1*) и сжимаемым потоком ($M_\infty = M_{\infty кр}$; кривая *2*)

Величина $M_{\infty кр}$ зависит от относительной толщины профиля, расстояния от передней кромки до места его максимальной толщины, формы профиля, угла атаки. В соответствии с исследованиями акад. С. А. Христиановича местная звуковая скорость на профиле возникает в той его точке, где при $M_\infty=0$ достигается минимальное давление, которому соответствует коэффициент $\bar{p}_{min\,нсж}$ (рис. 4.1.14). Зная этот коэффициент, который определяется, например, в результате продувок профиля в малоскоростной аэродинамической трубе, можно найти число $M_{\infty кр}$, являющееся для любого профиля функцией только величины $\bar{p}_{minнсж}$.

Соответствующий расчет ведется следующим образом. По значению $\bar{p}_{min\,нсж}$ при помощи формулы

$$\bar{p}_{нсж} = 1 - \Lambda^2/\Lambda_\infty^2, \qquad (4.1.36')$$

в которой, согласно данным табл. 4.1.1, величина $\Lambda=0{,}7577$ (эта величина соответствует значению $\lambda=1$), находим относительную скорость фиктивного набегающего потока:

$$\Lambda_\infty = 0{,}7577/\sqrt{1-\bar{p}_{\min \text{ нсж}}}\,. \tag{4.1.46}$$

Далее из табл. 4.1.1 по найденной величине Λ_∞ находим относительную критическую скорость $\lambda_{\infty\text{кр}}$ и вычисляем соответствующее критическое число Маха:

$$\mathbf{M}_{\infty\text{кр}} = \sqrt{\frac{2\lambda^2_{\infty\text{кр}}/(k+1)}{1-(k-1)\,\lambda^2_{\infty\text{кр}}/(k+1)}}\,. \tag{4.1.47}$$

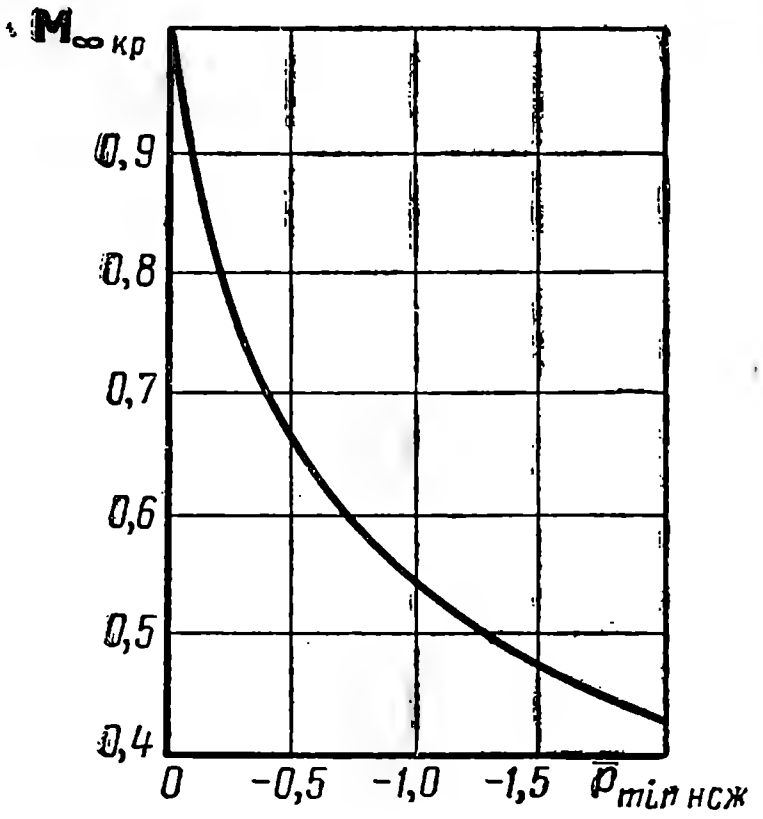


Рис. 4.1.15. Зависимость $\mathbf{M}_{\infty\text{кр}}$ от $\bar{p}_{\min \text{ нсж}}$

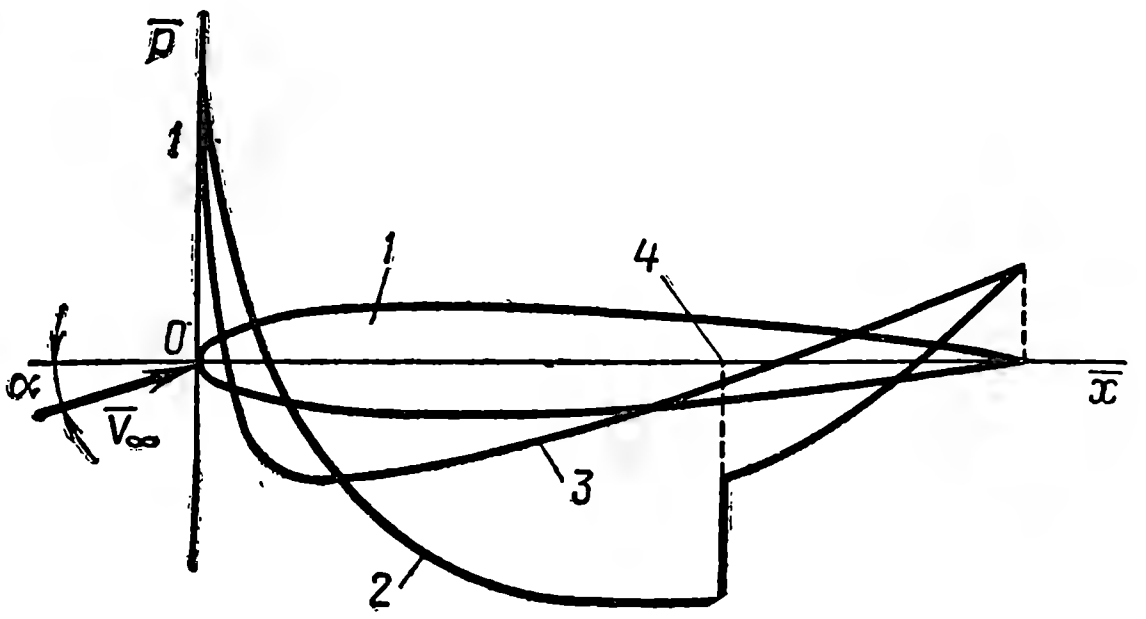


Рис. 4.1.16. Координатная диаграмма $\bar{p}=f(\bar{x})$ для профиля при закритических числах Маха ($\mathbf{M}_\infty > \mathbf{M}_{\infty\text{кр}}$):

1 — профиль; *2* — верхняя и *3* — нижняя поверхности профиля; *4* — место скачка

Это же значение числа Маха можно найти из табл. 4.1.1. Расчет значительно упрощается, если для определения $\mathbf{M}_{\infty\text{кр}}$ по значению коэффициента $\bar{p}_{\min \text{ нож}}$ воспользоваться графиком Христиановича (рис. 4.1.15).

Для чисел $\mathbf{M}_\infty$, изменяющихся в интервале $\mathbf{M}_{\infty\text{кр}} < \mathbf{M}_\infty < 1$, обтекание профиля характеризуется тем, что в его окрестности возникает зона сверхзвуковых скоростей и, как следствие, образуется местный скачок уплотнения (рис. 4.1.16). Это приводит к перераспределению давления в хвостовой части профиля и появлению дополнительного сопротивления, которое называется в о л н о в ы м. По данным Я. М. Серебрийского и С. А. Христиановича, коэффициент этого сопротивления при $\mathbf{M}_\infty \leqslant \mathbf{M}_{\infty\text{кр}}+0{,}15$

$$c_x = A\left(\mathbf{M}_\infty - \mathbf{M}_{\infty\text{кр}}\right)^3, \tag{4.1.48}$$

где A — коэффициент, зависящий от вида профиля и характера его обтекания (согласно экспериментальным данным $A=11$).

Измерение давления на профиле и вычисление соответствующих аэродинамических характеристик. Для исследования распределения давления по профилю используется дренированная модель крыла, имеющая прямоугольную форму в плане и удлинение $\lambda=l/b\geqslant 5$. При таком удлинении крыла его профиль, расположенный в середине, не испытывает влияния боковых кромок и рассматривается как профиль, принадлежащий крылу бесконечного размаха. На поверхности модели в центральном сечении, совпадающем с профилем, расположены дренажные отверстия с малым диаметром порядка 0,5 *мм*, воспринимающие давления, которые измеряются манометрами (рис. 4.1.17). Положение относитель-

но передней кромки каждого дренажного отверстия, имеющего соответствующий номер, определяется относительными координатами $\bar{x}=x/b$ и $\bar{y}=y/b$ (рис. 4.1.18).

Модель крыла устанавливается в рабочей части аэродинамической трубы на специальном приспособлении, позволяющем изменять углы атаки (см. рис. 4.1.17). При этом для дозвуковых аэродинамических труб размеры модели определяются площадью сечения рабочей части и значениями углов атаки, при которых проводятся исследования. В частности, для малоскоростных дозвуковых аэродинамических труб «загромождение» рабочей части не должно превышать 10%. С ростом скорости потока в трубе величина допустимого «загромождения» уменьшается [11]. Воздействие на модель обтекающего воздушного потока приводит к возникновению на профиле избыточного давления $p-p_\infty$ (положительного или отрицательного по величине), которое изменяет положение уровней жидкости в отсчетных коленах манометра. Разность этих уровней Δh_i (*мм*) в каком-либо манометре будет соответствовать избыточному давлению, равному разности давлений в соответствующем дренажном отверстии и в рабочей части трубы. При этом в открытой рабочей части статическое давление равно атмосферному ($p_\infty=p_{атм}$).

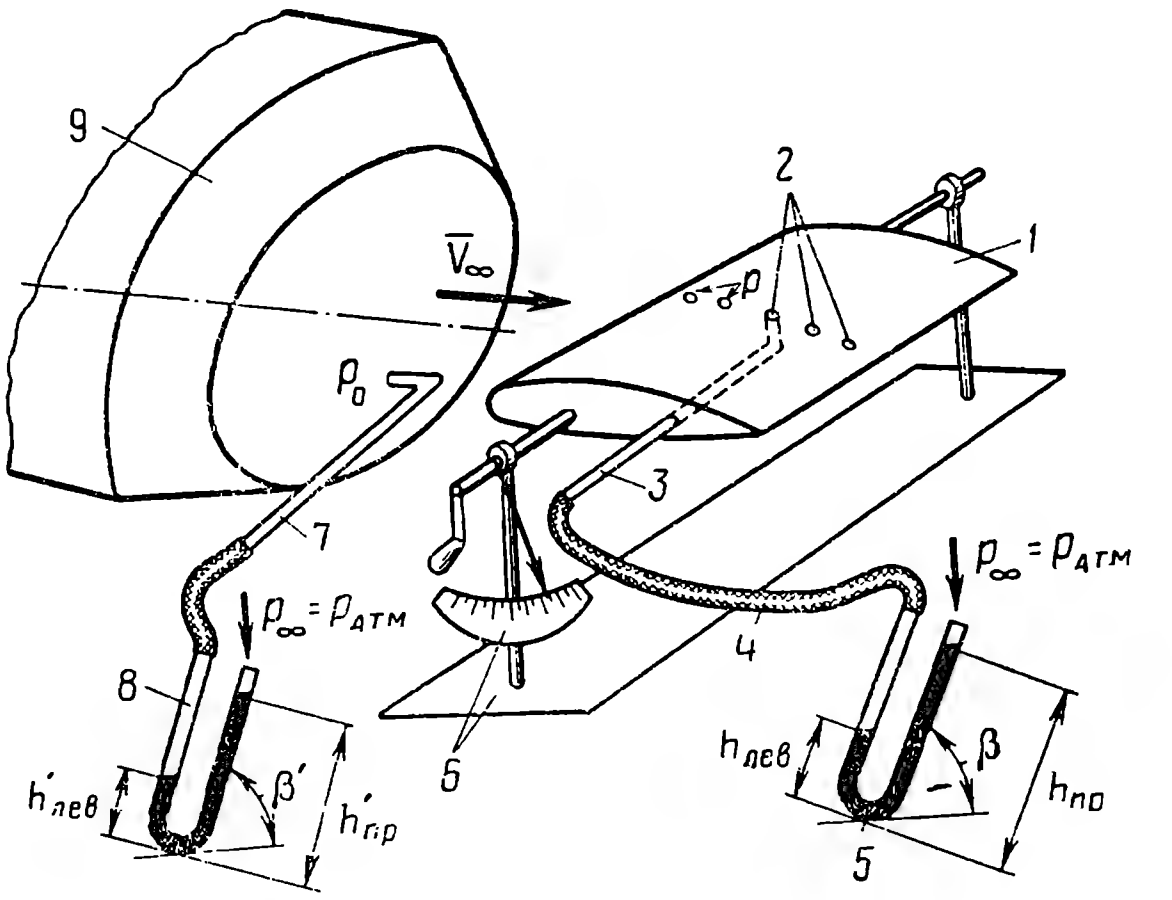


Рис. 4.1.17. Схема установки для проведения дренажных испытаний модели крыла бесконечного размаха в дозвуковом потоке:

1 — модель; *2* — дренажные отверстия; *3* — медная трубка; *4* — резиновый шланг; *5* — U-образный манометр, замеряющий избыточное давление на поверхности модели; *6* — приспособление для установки модели в рабочей части трубы и изменения угла атаки; *7* — трубка Пито; *8* — U-образный манометр для измерения скоростного напора; *9* — сопло дозвуковой малоскоростной аэродинамической трубы

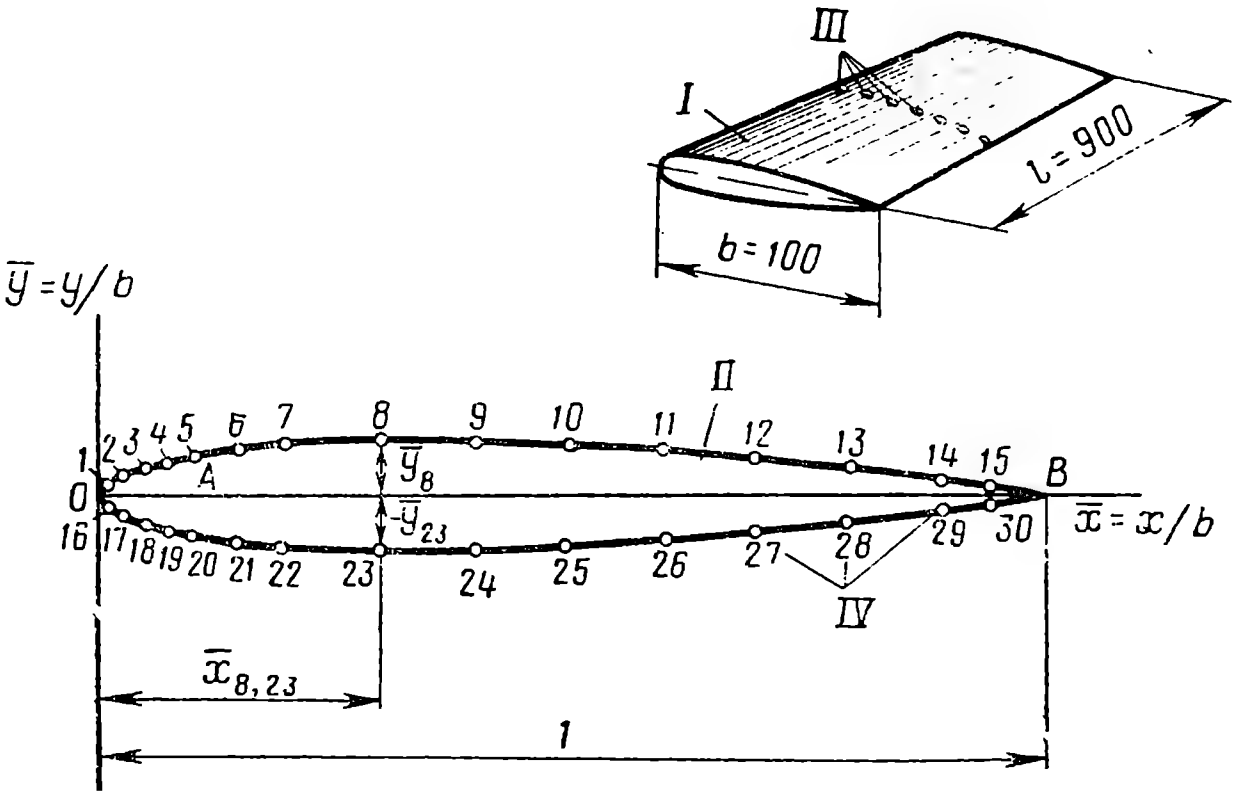


Рис. 4.1.18. Прямое крыло с исследуемым профилем:

I — крыло; *II* — форма профиля; *III* — дренажные отверстия; *IV* — маркировка дренажных отверстий; *A* — точка передней кромки; *B* — точка задней кромки

Избыточное давление подсчитывается по показаниям манометра при помощи зависимости (2.1.1), которую запишем в виде

$$p_i - p_\infty = k_т \left(h_{пр} - h_{лев}\right)_i \gamma \sin\beta = k_т \Delta h_i \gamma \sin\beta, \qquad (4.1.49)$$

где $h_{пр}$ — показания правого колена манометра, сообщающегося с атмосферой; $h_{лев}$ — показания левого колена манометра, связанного

с дренажным отверстием; $k_т$ — тарировочный коэффициент манометра.

Для определения скоростного напора q_∞ и скорости набегающего потока V_∞ в поток вводится трубка полного напора — трубка Пито *7* (см. рис. 4.1.17), соединенная с манометром. В соответствии с уравнением Бернулли и с учетом показания этого манометра:

$$q_\infty = \rho_\infty V_\infty^2/2 = p_0 - p_\infty = k_т' \xi_т \left(h'_{пр} - h'_{лев}\right) \gamma' \sin\beta' = \\ = k_т' \xi_т \Delta h' \gamma' \sin\beta'; \qquad (4.1.50)$$

$$V_\infty = \sqrt{(2/\rho_\infty) k_т' \xi_т \Delta h' \gamma' \sin\beta'}, \qquad (4.1.51)$$

где $k_т'$ и $\xi_т$ — тарировочные коэффициенты соответственно манометра и трубки Пито; $\rho_\infty = \rho_{атм}$ — плотность набегающего потока (атмосферного воздуха), определяемая по формуле

$$\rho_{атм} = \frac{p_{атм}}{RT_{атм}}\left(1 - 0{,}378\,\frac{x p_{н.п}}{p_{атм}}\right), \qquad (4.1.52)$$

в которой $p_{н.п}$ — давление насыщенного водяного пара; x — относительная влажность.

По значениям $p_i - p_\infty$ и q_∞ можно найти коэффициент давления в i-й точке профиля:

$$\bar{p_i} = \frac{p_i - p_\infty}{q_\infty} = \frac{k_т \Delta h_i \gamma \sin\beta}{k_т' \xi_т \Delta h' \gamma' \sin\beta'} \qquad (4.1.53)$$

или, при одинаковых углах наклона манометров ($\beta = \beta'$) и одной манометрической жидкости ($\gamma = \gamma'$), а также при условии, что $k_т = k_т' = \xi_т = 1$,

$$\bar{p} = (p_i - p_\infty)/q_\infty = \Delta h_i/\Delta h'. \qquad (4.1.54)$$

По значению этого коэффициента в дренажных отверстиях профиля можно определить при помощи формул (4.1.18), (4.1.12), (4.1.19) или (4.1.20) аэродинамические коэффициенты. При этом интегралы в указанных формулах могут быть вычислены путем измерения соответствующей площади между кривыми, построенными по экспериментальным функциям $\bar{p} = f_1(\bar{x})$, $\bar{p} = f_2(\bar{y})$, $\bar{p} = f_3(\bar{x^2})$ и $\bar{p} = f_4(\bar{y^2})$.

На рис. 4.1.4 показаны кривые $\bar{p} = f_1(\bar{x})$ для верхней *3* и нижней *4* сторон профиля, позволяющие определить по формуле (4.1.18) коэффициент подъемной силы. Пусть площадь между этими кривыми будет F_y, $мм^2$ (на рис. 4.1.4 заштрихована). Согласно этому значению коэффициент подъемной силы

$$c_y = F_y \mu_{\bar{p}} \mu_{\bar{x}} \qquad (4.1.5$$

где $\mu_{\bar{p}}$ и $\mu_{\bar{x}}$, $1/мм$ — масштабы $\bar{p}$ и $\bar{x}$ соответственно по осям ординат и абсцисс.

Для определения коэффициента продольной силы c_{Rp} необходимо в соответствии с формулой (4.1.12) построить по экспериментальным значениям $\bar{p_i}$ координатную диаграмму $\bar{p} = f_2(\bar{y})$ и измерить по ней площадь, ограниченную замкнутой кривой (на рис. 4.1.6 эта площадь заштрихована). Если величина измеренной площади F_x, $мм^2$, то коэффициент

$$c_{Rp} = F \quad \mu \mu \qquad (4.1.5\ )$$

где $\mu_{\bar{p}}$ и $\mu_{\bar{y}}$, $1/мм$ — масштабы $\bar{p}$ и $\bar{y}$ соответственно по осям ординат и абсцисс.

Следует отметить, что диаграмма $\bar{p} = f_2(\bar{y})$ дает несколько замкнутых областей. При этом площадь F_x равна алгебраической сумме пло-

щадей этих областей, а знак площади каждой области определяется знаками $\bar{p}$ и $d\bar{y}$ при обходе контура против часовой стрелки.

Расчет коэффициента момента m_z по формуле (4.1.19) связан с использованием двух диаграмм: $\bar{p}=f_3(\bar{x}^2)$ и $\bar{p}=f_4(\bar{y}^2)$. Определяя площади F_{my} и F_{mx}, $мм^2$, ограниченные соответственно кривыми $\bar{p}=f_3(\bar{x}^2)$ и $\bar{p}=f_4(\bar{y}^2)$, найдем величину этого коэффициента, которая в некотором масштабе будет определяться разностью этих площадей:

$$-m_z = 0{,}5 \cdot F_{my}\,\mu_{\bar{p}}\mu_{\bar{x}^2} - 0{,}5 \cdot F_{mx}\,\mu_{\bar{p}}\,\mu_{\bar{y}^2}, \qquad (4.1.57)$$

где $\mu_{\bar{p}}$ и $\mu_{\bar{x}^2}$, $\mu_{\bar{y}^2}$, $1/мм$ — масштабы $\bar{p}$ и $\bar{x}^2$, $\bar{y}^2$ соответственно по осям ординат и абсцисс.

Если применяется формула (4.1.20), то при определении коэффициента момента можно ограничиться нахождением площади между кривыми функции $\bar{p}=f_3(\bar{x}^2)$. В соответствии с этим

$$-m_z = 0{,}5 \cdot F_{my}\,\mu_{\bar{p}}\,\mu_{\bar{x}^2}. \qquad (4.1.58)$$

По экспериментальным данным c_y и m_z можно определить для профиля коэффициент центра давления $c_{ц.д}=x_{ц.д}/b=-m_z/c_y$, а по данным $c_x=c_y\,\alpha+c_{Rp}+c_{xf}$ и c_y — качество профиля $K=c_y/c_x$.

Порядок проведения работы

1. Ознакомиться с экспериментальной установкой и необходимой измерительной аппаратурой.
2. Закрепить модель крыла в рабочей части трубы под заданным углом атаки и проверить на герметичность соединения резиновыми шлангами дренажных трубок и манометров.
3. Записать показания барометра ($p_{атм}=p_\infty$), термометра ($T_{атм}=T_\infty$) и психрометра (T').
4. Включить трубу и после выхода ее на режим установившегося обтекания ввести в поток трубку Пито, а затем снять показания с отсчетных колен связанного с ней манометра ($h'_{пр}$, $h'_{лев}$).
5. Снять показания уровней жидкости ($h_{пр}$, $h_{лев}$) в отсчетных коленах манометров для каждой дренажной точки; после этого прекратить работу трубы.
6. Определить параметры набегающего потока в аэродинамической трубе.
7. Найти разности уровней $(h_{пр}-h_{лев})_i$ и соответствующие коэффициенты давления $\bar{p}_i$ для каждой дренажной точки.
8. Построить векторную диаграмму коэффициента давления и координатные диаграммы функций: $\bar{p}=f_1(\bar{x})$, $\bar{p}=f_2(\bar{y})$, $\bar{p}=f_3(\bar{x}^2)$, $\bar{p}=f_4(\bar{y}^2)$.
9. Определить графическим интегрированием коэффициенты c_y, c_{Rp}, m_z профиля при заданном угле атаки.
10. Вычислить составляющие коэффициента сопротивления профиля от давления c_{xp} и от трения c_{xf}, а также полный коэффициент $c_x=c_{xp}+c_{xf}$.
11. Определить численные значения коэффициентов полной аэродинамической силы $c_F=\sqrt{c_x^2+c_y^2}$, центра давления $c_{ц.д}=-m_z/c_y$, а также качества профиля $K=c_y/c_x$.
12. Найти критическое число Маха набегающего потока ($\mathbf{M}_{\infty кр}$).
13. Изменить угол атаки модели и повторить операции, указанные в п.п. 5÷12.
14. Заполнить сводную таблицу аэродинамических коэффициентов профиля крыла при различных углах атаки.

15. По данным этой таблицы построить кривые изменения аэродинамических коэффициентов в зависимости от угла атаки, а также поляру $c_y = f(c_x)$.

Примечание. В необходимых случаях для сокращения времени продувки модели регистрацию соответствующих показаний манометров, связанных с дренажными отверстиями, осуществляют путем фотографирования панели, на которой установлены отсчетные трубки. Расшифровка этих показаний ($h_{пр}$, $h_{лев}$) ведется по полученному негативному изображению на фотопленке с помощью оптического прибора «Микрофот».

Пример. Рассмотрим результаты исследования распределения давления по симметричному профилю в центральном сечении модели прямоугольного крыла, размах которого $l = 0{,}9$ *м*, хорда $b = 0{,}1$ *м* (удлинение $\lambda = l/b = 9$) и максимальная толщина

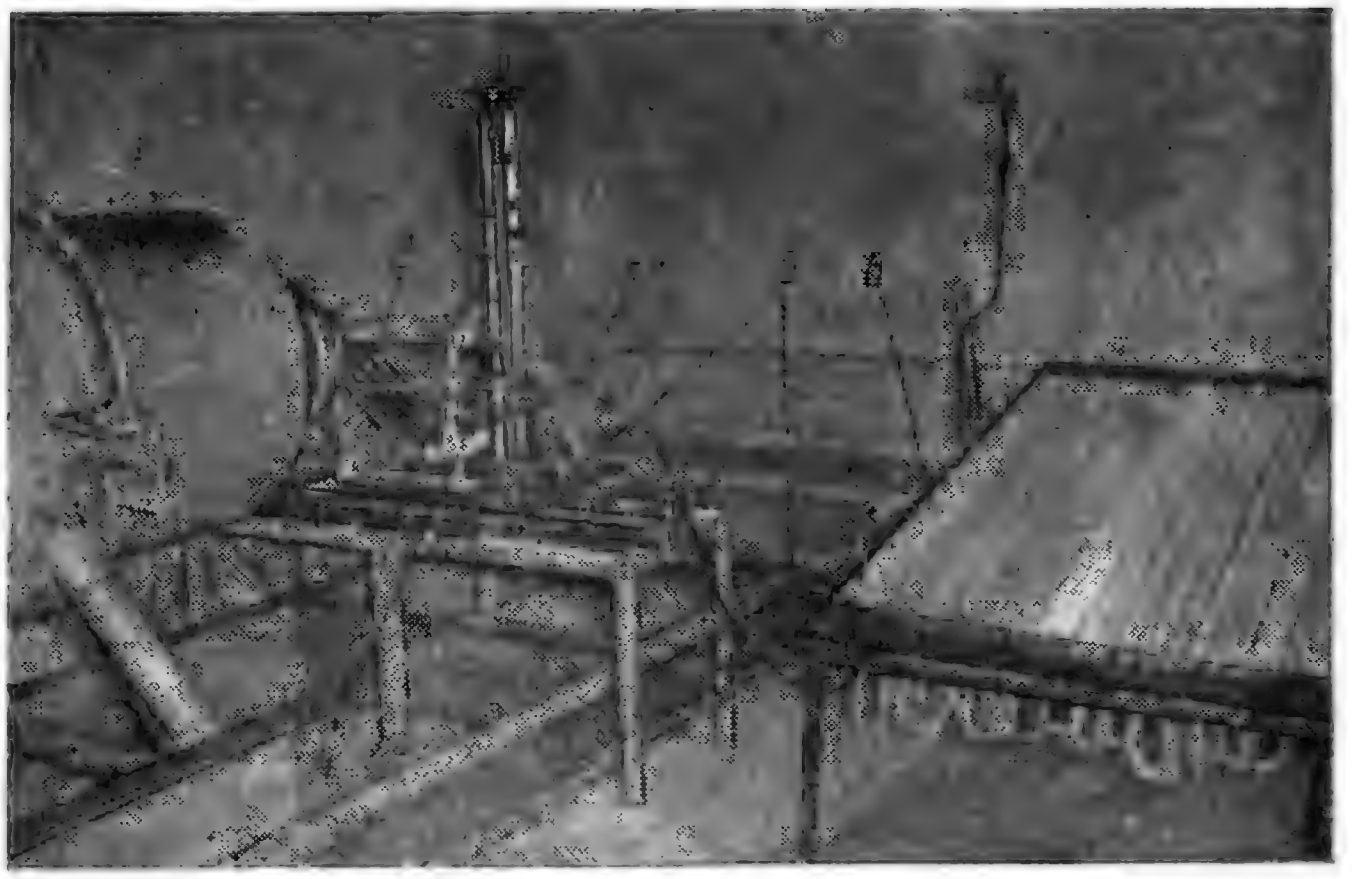


Рис. 4.1.19. Установка для исследования распределения давлений по профилю крыла в дозвуковой малоскоростной трубе:

1 — аэродинамическая труба; *2* — модель крыла; *3* — насадок полного напора; *4* — приспособление для крепления модели в рабочей части трубы под заданным углом атаки; *5* — резиновые шланги; *6*—батарея U-образных жидкостных манометров

$\Delta = 0{,}012$ *м*. Эти продувки производились в аэродинамической трубе малых скоростей с открытой рабочей частью диаметром $D = 0{,}8$ *м*. «Загромождение» потока моделью выбиралось из следующих соображений. Поскольку размах модели крыла превышает диаметр рабочей части, примем при расчете величину этого размаха $l = D = 0{,}8$ *м*. При наибольшем угле атаки, на котором проводилась продувка ($\alpha = 15°$), площадь проекции модели крыла на плоскость, нормальную вектору скорости набегающего потока, $S_м = bD \sin\alpha = 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot \sin 15° = 0{,}0207$ *м*^{2}. Поскольку площадь сечения рабочей части трубы $S_т = \pi D^2/4 = 3{,}14 \cdot 0{,}8^2/4 = 0{,}503$ *м*^{2}, то величина загромождения составит $S_м/S_т = 0{,}0207/0{,}503 = 0{,}0412$, что меньше предельно допустимой. При углах $\alpha < 15°$ «загромождение», очевидно, будет еще меньше.

Форма выбранного профиля с относительной толщиной $\bar{\Delta} = 0{,}12$ показана на рис. 4.1.18. На этом же рисунке номерами отмечены дренажные отверстия; относительные координаты некоторых из них приведены в табл. Б. На рис. 4.1.19 показан общий вид измерительной установки, включающей рабочую часть аэродинамической трубы, модель крыла, приспособление, на котором она закрепляется под заданным углом атаки, дренажные трубки и резиновые шланги, насадок полного напора, а также манометры.

В ходе эксперимента были определены параметры набегающего потока, при этом некоторые из параметров, такие как скоростной напор или скорость, находились путем измерений в потоке, плотность, коэффициент динамической вязкости и другие вычислялись по соответствующим теоретическим или эмпирическим зависимостям. Например, плотность набегающего потока определялась по формуле (4.1.52), в которой величины $p_{атм} = 760$ *мм рт. ст.* и $T_{атм} = 288$ K находились с помощью соответственно барометра и термометра, а величины $x = 0{,}9$ и $p_{н.п} = 12{,}79$ *мм рт. ст.* — из табл. 2.2.1 и 2.2.2 по соответствующим значениям $T_{атм} = 288$ K и $T_{атм} - T' = 1°$ ($T' = 287$ K — температура, показанная влажным термометром в психрометре). Результаты определения параметров потока в рабочей части трубы приведены в табл. А.

В табл. А приведено число $\mathbf{M}_\infty = 0{,}09$. Практически при такой малой его величине поток в аэродинамической трубе может рассматриваться несжимаемым. Некоторые дан-

Таблица А

Исходные данные: $T_\infty = 288$ К; $p_\infty = 760$ *мм. рт. ст.*; $R = 287$ *дж/кг·град*; $k = c_p/c_v = 1{,}4$; $\Delta h' = h'_{\text{пр}} - h'_{\text{лев}} = 300$ *мм*; $\gamma' = 0{,}805$ *кГ/дм*³ (спирт); $\sin\beta' = 0{,}246$; $k'_T = \xi_T = 1{,}0$

Параметры набегающего потока	Обозначение и размерность	Расчетная формула	Величина
Плотность	ρ_∞, *кГ·сек²/м*⁴	(4.1.52)	0,125
Коэффициент динамической вязкости	μ_∞, *кГ·сек/м*²	(3.1.35)	$1{,}82\cdot10^{-6}$
Коэффициент кинематической вязкости	ν_∞, *м*²*/сек*	$\nu_\infty = \mu_\infty/\rho_\infty$	$1{,}46\cdot10^{-5}$
Скоростной напор	q_∞, *кГ/м*²	(4.1.50)	59,5
Скорость	V_∞, *м/сек*	(4.1.51)	30,8
Число Рейнольдса	Re_∞	$\mathrm{Re}_\infty = V_\infty b/\nu_\infty$	$2{,}07\cdot10^5$
Скорость звука	a_∞, *м/сек*	$a_\infty = \sqrt{kRT_\infty}$	341
Число Маха	M_∞	$M_\infty = V_\infty/a_\infty$	0,09

ные измерений параметров обтекания таким потоком профиля при $\alpha = 6°$, а также результаты расчета соответствующих значений коэффициента давления приведены в табл. Б.

Таблица Б

Поверхности	Номера дренажных точек	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x}^2$	$\bar{y}^2$	$h_{\text{пр}}$, *мм*	$h_{\text{лев}}$, *мм*	$\Delta h = h_{\text{пр}} - h_{\text{лев}}$, *мм*	$\bar{p} = \dfrac{\Delta h}{\Delta h'}$
Верхняя	*1*	0,01	0,01	0,0001	0,0001	53	447	—394	—1,31
	2	0,025	0,0214	0,0006	0,0005	84	416	—332	—1,11
	3	0,05	0,0306	0,0025	0,0009	106	394	—288	—0,96
	5	0,1	0,0423	0,01	0,0018	124	376	—252	—0,84
	7	0,2	0,0549	0,04	0,0030	150	350	—200	—0,67
	9	0,4	0,0592	0,16	0,0035	184	316	—132	—0,44
	11	0,6	0,0492	0,36	0,0023	209	291	—82	—0,27
	13	0,8	0,0284	0,64	0,0008	238	262	—24	—0,08
	14	0,9	0,0157	0,81	0,0002	255	245	10	0,03
	15	0,95	0,01	0,90	0,0001	265	235	30	0,10
Нижняя	*16*	0,01	—0,01	0,0001	0,0001	385	115	270	0,90
	17	0,025	—0,0214	0,0006	0,0005	347	153	194	0,65
	18	0,05	—0,0306	0,0025	0,0009	309	191	118	0,39
	20	0,1	—0,0423	0,01	0,0018	271	229	42	0,14
	22	0,2	—0,0549	0,04	0,0030	245	255	—10	—0,03
	24	0,4	—0,0592	0,16	0,0035	236	264	—28	—0,09
	26	0,6	—0,0492	0,36	0,0023	240	260	—20	—0,06
	28	0,8	—0,0284	0,64	0,0008	250	250	0	0,00
	29	0,9	—0,0157	0,81	0,0002	256	244	12	0,04
	30	0,95	—0,01	0,90	0,0001	265	235	30	0,10

Все расчеты проводились для угла наклона отсчетных трубок манометров (замеряющих избыточное давление на модели) $\beta=\beta'=14°15'$ и удельного веса жидкости в этих манометрах $\gamma=\gamma'=0{,}805$ *кГ/дм*^{3} (спирт).

На рис. 4.1.20 приведена построенная по данным табл. Б векторная диаграмма коэффициента давления, а на рис. 4.1.21÷4.1.24 — графики функций $\bar{p}=f_1(\bar{x})$; $\bar{p}=f_2(\bar{y})$, $\bar{p}=f_3(\bar{x}^2)$, $\bar{p}=f_4(\bar{y}^2)$. При построении этих диаграмм и графиков с помощью интерполяции были найдены положения критической точки C, где $\bar{p}_C=\bar{p}_0=1$, и точек, для которых $\bar{p}=0$ (одна из таких точек совпала с точкой A передней кромки), а также значение коэффициента давления $\bar{p}_B$ в точке B задней кромки (см. рис. 4.1.20÷4.1.24).

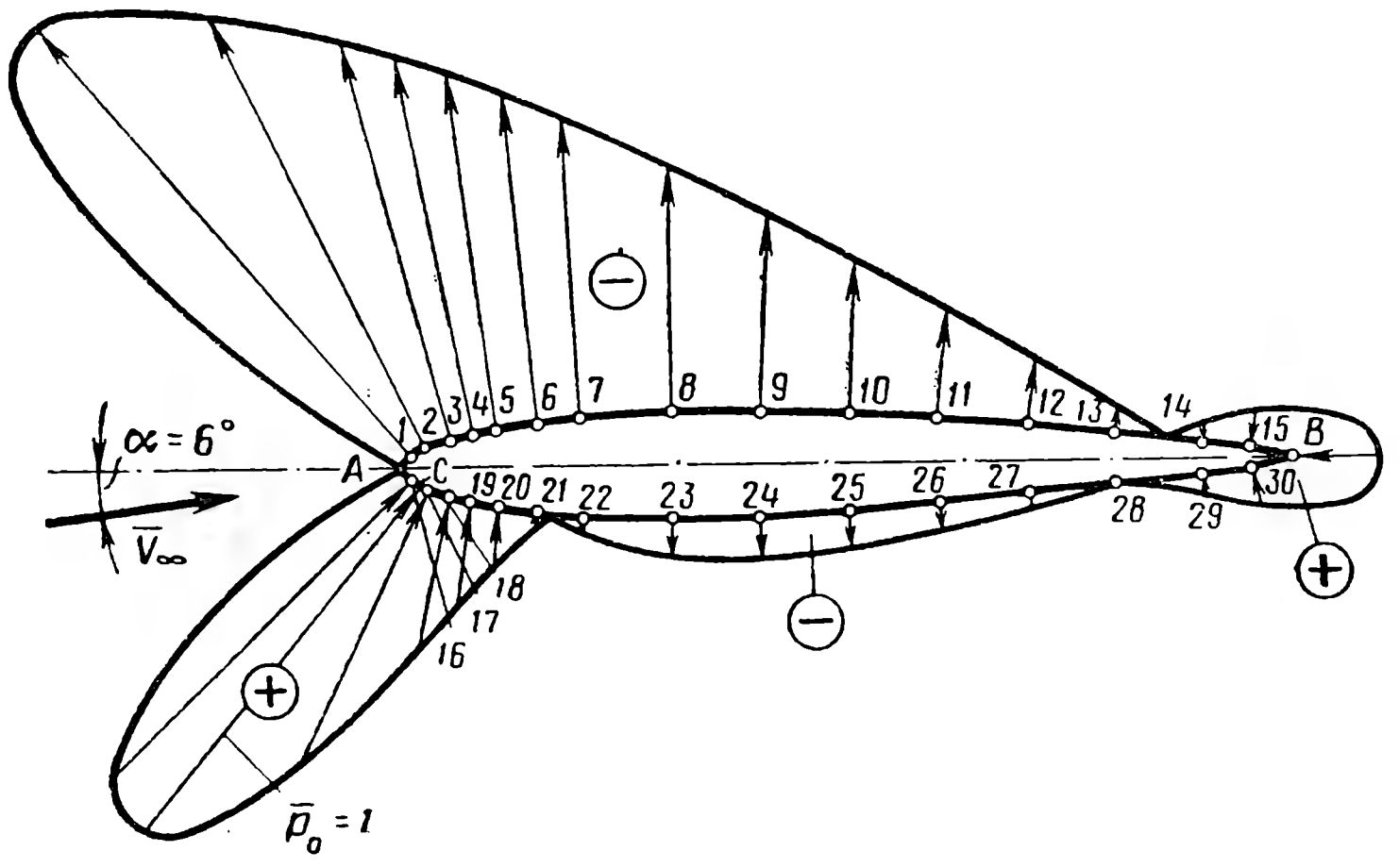


Рис. 4.1.20. Векторная диаграмма для профиля крыла, обтекаемого несжимаемым потоком под углом атаки $\alpha=6°$:

A и B — точки передней и задней кромок; C — критическая точка; знак «+» соответствует области, где $\bar{p}>0$, а знак «—», где $\bar{p}<0$

В соответствии с графиками на рис. 4.1.21÷4.1.24 масштаб коэффициента давления был выбран равным $\mu_{\bar{p}}=2\cdot10^{-2}$, 1/*мм*, а величин $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{x}^2$, $\bar{y}^2$, отложенных по осям абсцисс, — соответственно $\mu_{\bar{x}}=10^{-2}$, $\mu_{\bar{y}}=10^{-3}$, $\mu_{\bar{x}^2}=10^{-2}$, $\mu_{\bar{y}^2}=5\cdot10^{-5}$, 1/*мм*.

Согласно рис. 4.1.21 измеренная планиметром площадь $F_y=1900$ *мм*^{2}. В соответствии с этим

$$c_y = F_y\,\mu_{\bar{p}}\,\mu_{\bar{x}} = 1900\cdot2\cdot10^{-2}\cdot10^{-2} = 0{,}38.$$

Измеренная планиметром на рис. 4.1.22 результирующая площадь (с учетом знака) $F_x=1360$ *мм*^{2}. Следовательно,

$$c_{Rp} = F_x\,\mu_{\bar{p}}\,\mu_{\bar{y}} = 1360\cdot2\cdot10^{-2}\cdot10^{-3} = 0{,}027.$$

Наконец, из диаграмм на рис. 4.1.23 и 4.1.24, планиметрируя кривые $\bar{p}=f_3(\bar{x}^2)$ и $\bar{p}=f_4(\bar{y}^2)$, находим площади $F_{my}=916$ *мм*^{2} и $F_{mx}=3160$ *мм*^{2}. Соответствующий коэффициент продольного момента

$$-m_z = 0{,}5\cdot916\cdot2\cdot10^{-2}\cdot10^{-2} - 0{,}5\cdot3160\cdot2\cdot10^{-2}\cdot5\cdot10^{-5} = 0{,}090.$$

Коэффициент сопротивления c_{xp} определяется по формуле (4.1.14), в которой $c_{yp}=c_y$:

$$c_{xp} = c_y\frac{\alpha^\circ}{57{,}3^\circ} + c_{Rp} = 0{,}38\,\frac{6}{57{,}3} + 0{,}027 = 0{,}067.$$

Определим составляющую c_{xf} коэффициента лобового сопротивления от трения. Поскольку число $\mathbf{Re}_\infty=V_\infty/b/\nu_\infty=2{,}07\cdot10^5$ меньше критического ($\mathbf{Re}_{кр}=5\cdot10^5$), то пограничный слой на крыле ламинарный (координата точки перехода $\bar{x}_t=1{,}0$). Поэтому для определения коэффициента c_{xf} воспользуемся формулами (4.1.28) и (4.1.29), приняв $\eta_{\bar{\Delta}}=1$:

$$c_{xf} = 2\,(c_{xf})_{M_\infty=0}\,\eta_{\bar{\Delta}} = \frac{2\cdot1{,}29}{\sqrt{\mathbf{Re}_\infty}} = \frac{2\cdot1{,}29}{\sqrt{2{,}07\cdot10^5}} = 0{,}00585.$$

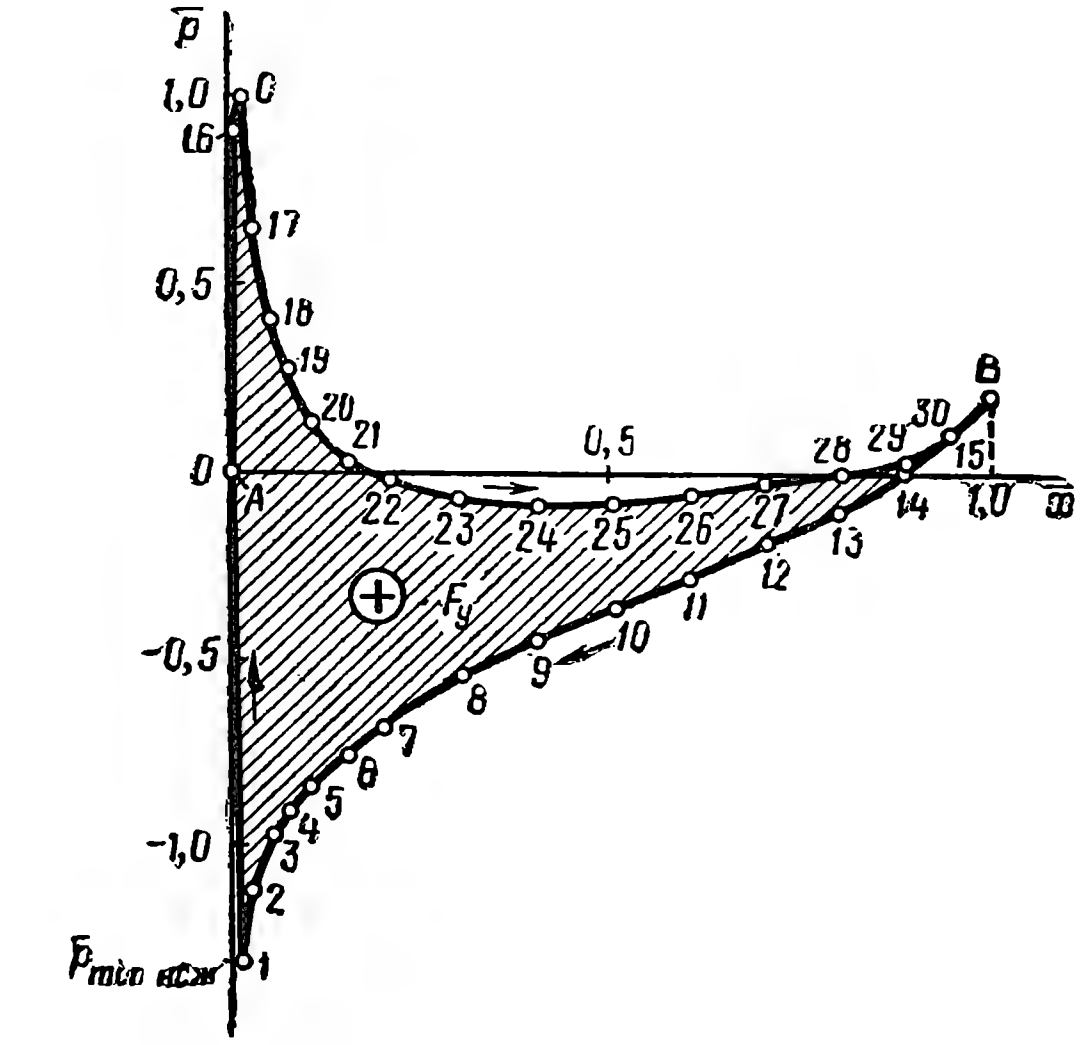


Рис. 4.1.21. Координатная диаграмма $\bar{p}=f_1(\bar{x})$ для профиля крыла, обтекаемого несжимаемым потоком под углом атаки $\alpha=6°$

(стрелки на диаграмме указывают направление обхода кривой при определении знака площади F_y)

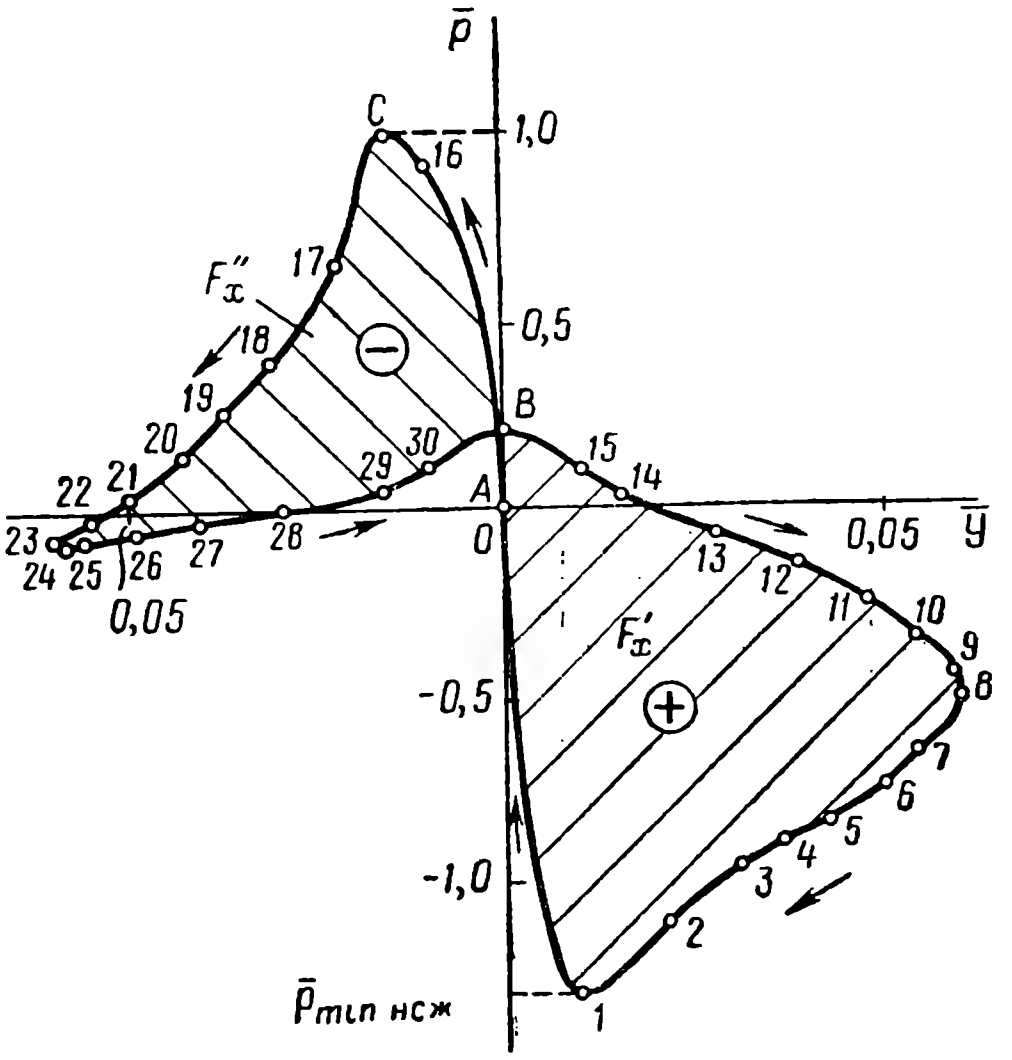


Рис. 4.1.22. Координатная диаграмма $\bar{p}=f_2(\bar{y})$ для профиля крыла в несжимаемом потоке под углом атаки $\alpha=6°$

(стрелки на диаграмме указывают направление обхода кривой при определении знака замкнутых областей F_x' и F_x'')

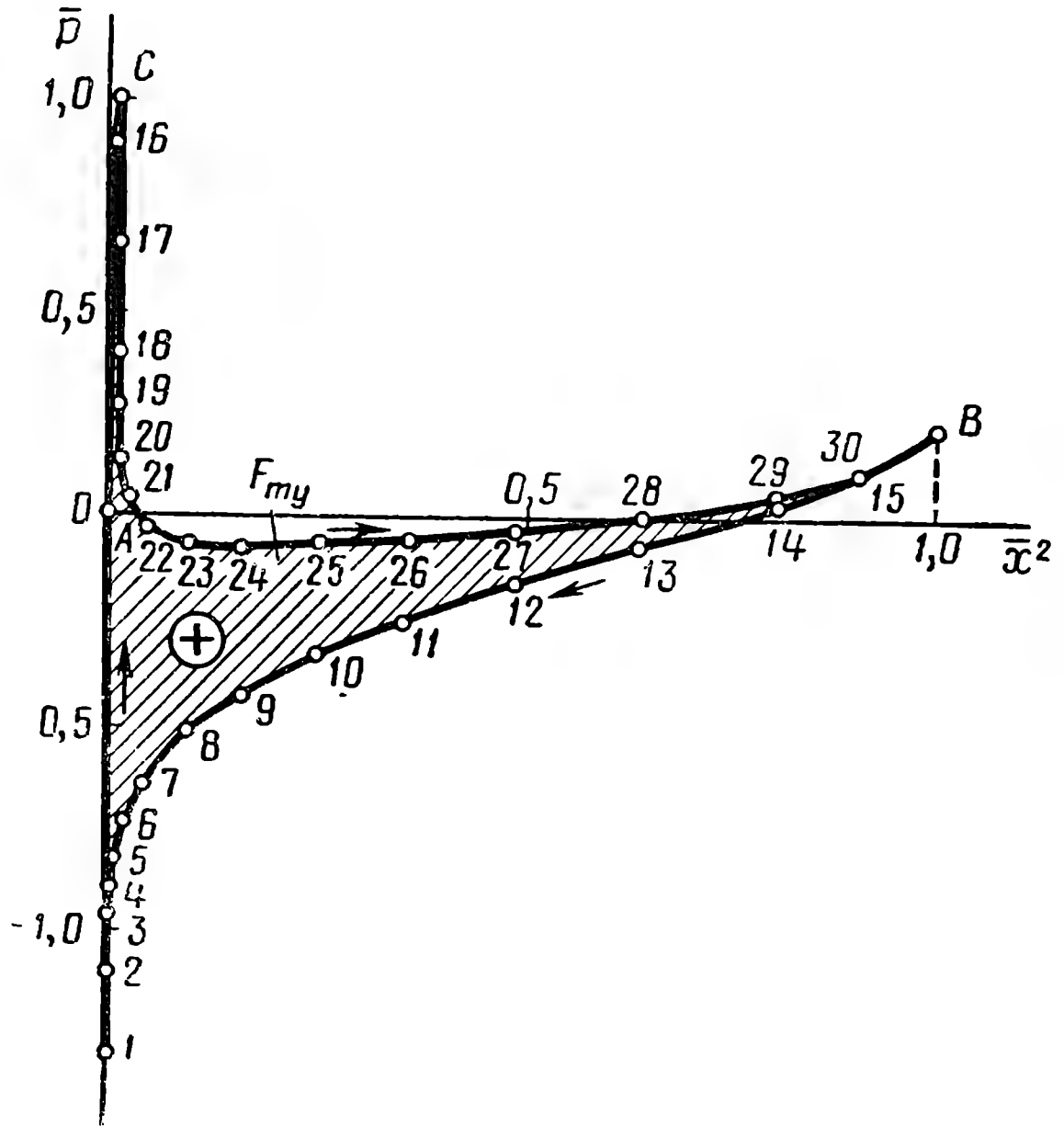


Рис. 4.1.23. Координатная диаграмма $\bar{p}=f_3(\bar{x}^2)$ для профиля крыла, обтекаемого несжимаемым потоком под углом атаки $\alpha=6°$

(обход кривой при определении знака площади F_{my} показан стрелками)

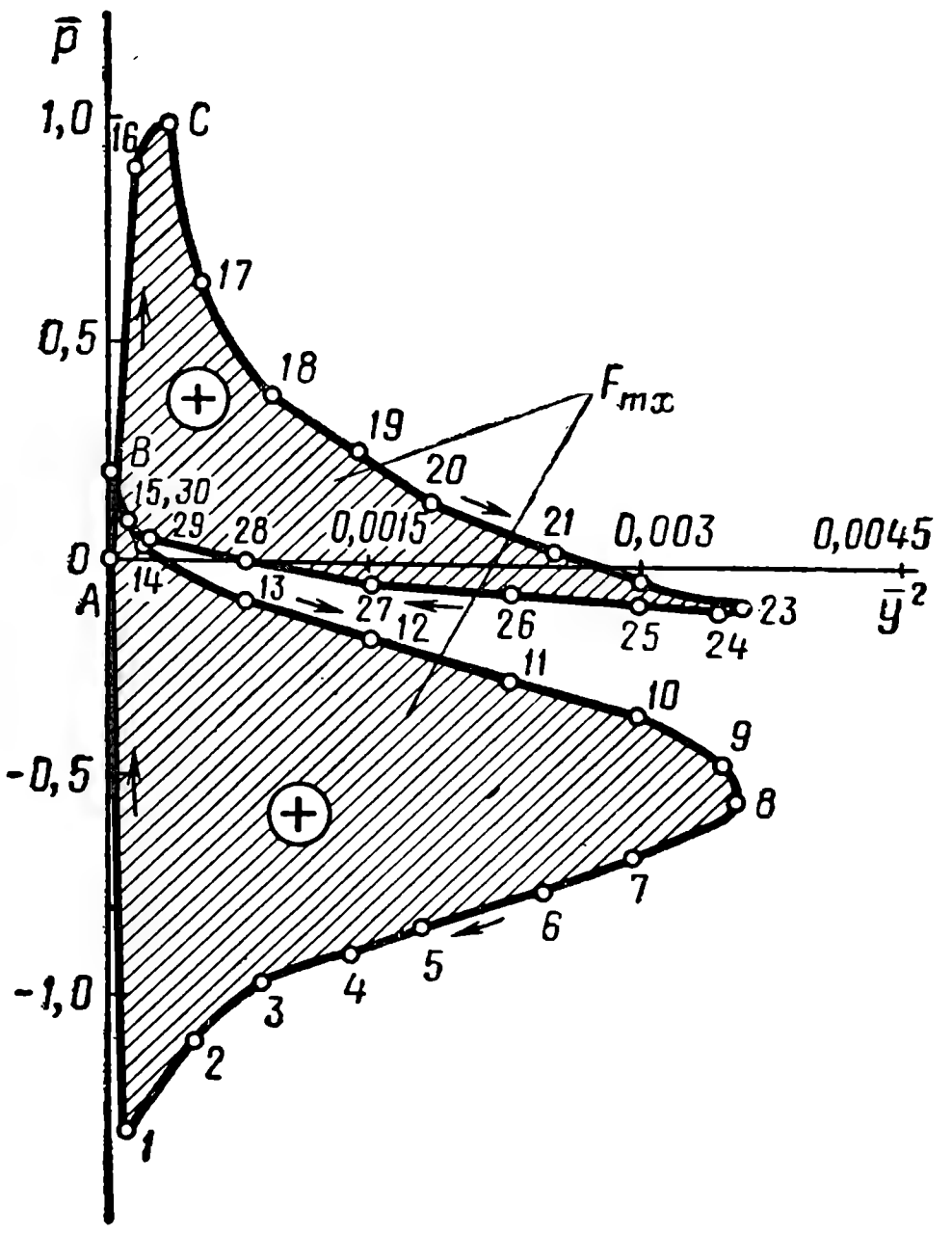


Рис. 4.1.24. Координатная диаграмма $\bar{p}=f_4(\bar{y}^2)$ для профиля крыла в несжимаемом потоке под углом атаки $\alpha=6°$

(стрелки на диаграмме показывают направление обхода кривой при определении знака площади F_{mx})

Полный коэффициент лобового сопротивления в соответствии с (4.1.1)

$$c_x = c_{xp} + c_{xf} = 0{,}067 + 0{,}00585 = 0{,}073.$$

По полученным значениям c_x, c_y и m_z можно найти коэффициент суммарной аэродинамической силы

$$c_F = \sqrt{c_x^2 + c_y^2} = \sqrt{0{,}073^2 + 0{,}38^2} = 0{,}39,$$

качество профиля

$$K = c_y/c_x = 0{,}38/0{,}073 = 5{,}22$$

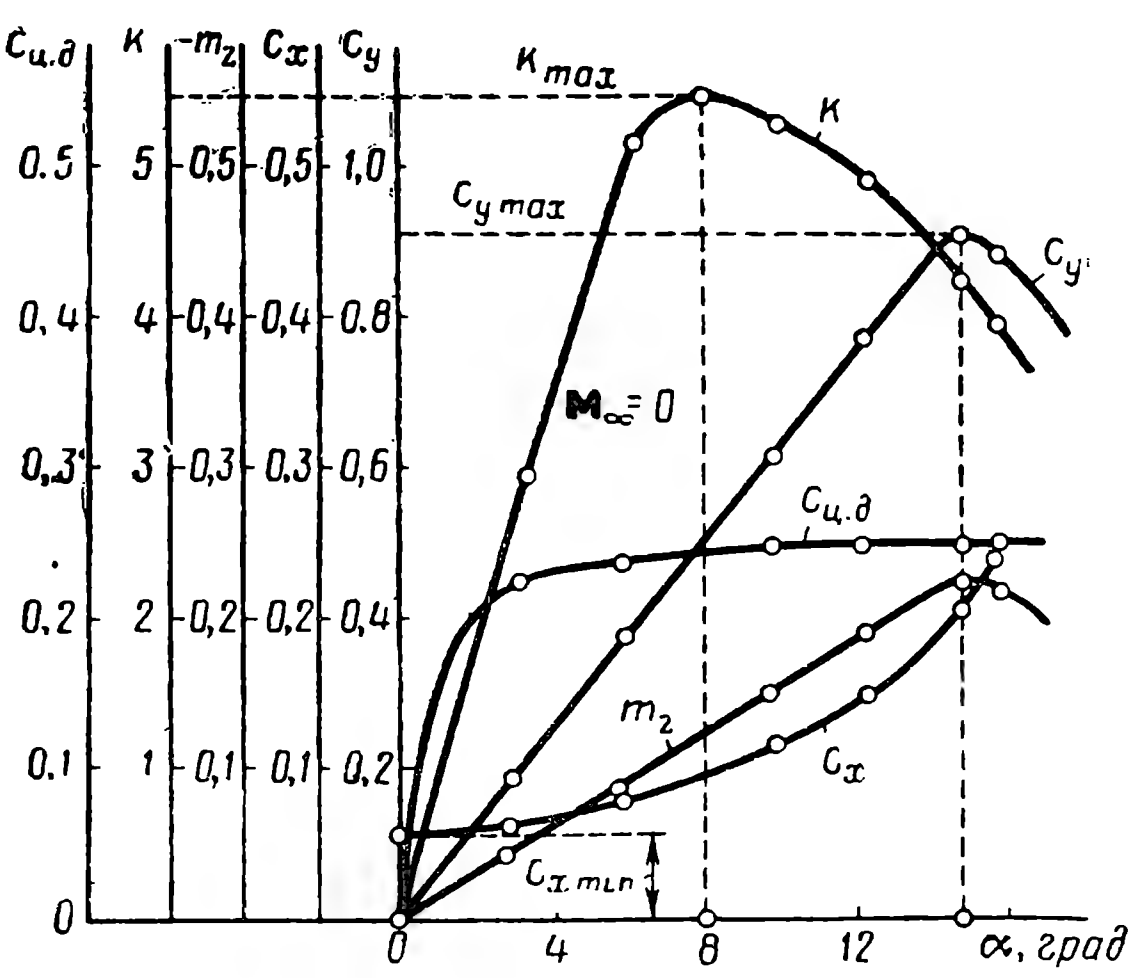


Рис. 4.1.25. Характеристические диаграммы для профиля крыла в несжимаемом потоке

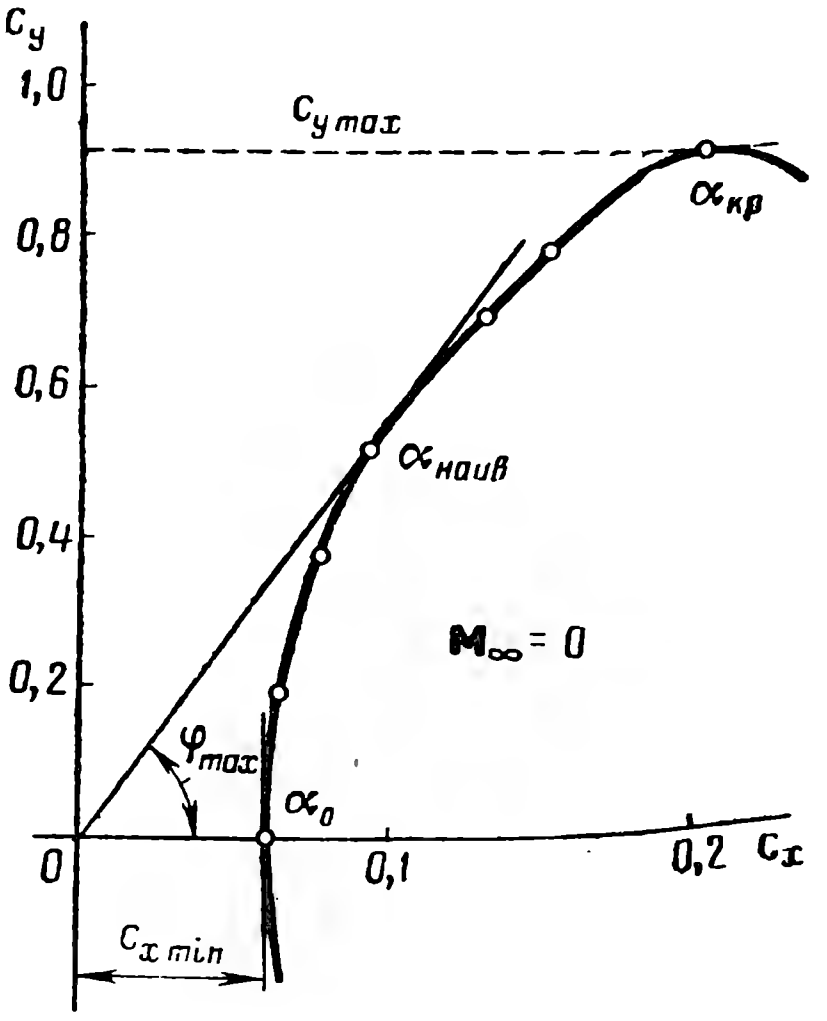


Рис. 4.1.26. Поляра профиля крыла $c_y = f(c_x)$

и коэффициент центра давления

$$c_{ц.д} = x_{ц.д}/b = -m_z/c_y = 0{,}090/0{,}38 = 0{,}24.$$

Аналогичные расчеты были проведены для ряда других углов атаки; результаты расчетов приведены в табл. В.

По данным табл. В построены характеристические диаграммы

$$c_y = \varphi_1(\alpha),\ c_x = \varphi_2(\alpha),\ m_z = \varphi_3(\alpha),\ K = \varphi_4(\alpha),\ c_{ц.д} = \varphi_5(\alpha)$$

Таблица В

α, град	c_y	c_x	$-m_z$	K	$c_{ц.д}$
0	0	0,060	0	0	0
3	0,20	0,067	0,045	2,99	0,23
6	0,38	0,073	0,090	5,22	0,24
8	0,50	0,092	0,12	5,45	0,24
10	0,60	0,11	0,15	5,30	0,24
12,5	0,78	0,16	0,19	5,03	0,25
15	0,91	0,21	0,23	4,33	0,25
16	0,89	0,22	0,22	3,95	0,25

(рис. 4.1.25), а также поляра профиля (рис. 4.1.26). По кривым на рис. 4.1.25 и 4.1.26 можно установить характерные углы атаки профиля и соответствующие аэродинамические коэффициенты. «Угол нулевой подъемной силы» равен нулю ($\alpha_0 = 0$), и этому значению соответствует минимальный коэффициент сопротивления $c_{x\,min} = 0{,}060$. Критический угол атаки $\alpha_{кр} = 15°$, а соответствующий максимальный коэффициент подъемной силы $c_{y\,max} = 0{,}91$. Наивыгоднейший угол атаки $\alpha_{наив} = 8°$, при этом имеем максимальное качество $K_{max} = 5{,}45$; на поляре (рис. 4.1.26) этому значению пропорциональна величина $\operatorname{tg} \varphi_{max}$.

На рис. 4.1.27 и 4.1.28 сравниваются результаты экспериментального и теоретического определения коэффициентов подъемной силы $c_y = f(\alpha)$ и момента $m_z = f(c_y)$. Величина c_y была рассчитана по формулам (4.1.21) и (4.1.24):

$$c_y = 2\pi(1 + 0{,}77\bar{\Delta})\alpha = 2 \cdot 3{,}14\,(1 + 0{,}77 \cdot 0{,}12)\alpha = 6{,}86\alpha = 0{,}12\alpha°,$$

а также по формуле (4.1.27), в которой величина a находилась по [21]:

$$c_y = 0{,}08\alpha°.$$

Для коэффициента момента согласно (4.1.22) имеет место зависимость

$$m_z = -0{,}25\, c_y.$$

Как видно из рис. 4.1.27, наибольшее расхождение между экспериментом и теорией возникает при использовании зависимостей (4.1.21), (4.1.24). Данные расчета по зависимостям (4.1.27), (4.1.22) отличаются от экспериментальных результатов примерно на 10÷15% (см. рис. 4.1.28).

Рассмотрим, как изменяются аэродинамические характеристики профиля при обтекании его сжимаемым дозвуковым потоком.

Прежде всего определим критическое число Маха. Из графика на рис. 4.1.21 находим минимальный коэффициент давления в несжимаемом потоке $\bar{p}_{\min\,нсж} = -1{,}31$ и по этой величине определяем при помощи формулы (4.1.46):

$$\Lambda_\infty = 0{,}7577 / \sqrt{1 - (-1{,}31)} = 0{,}50.$$

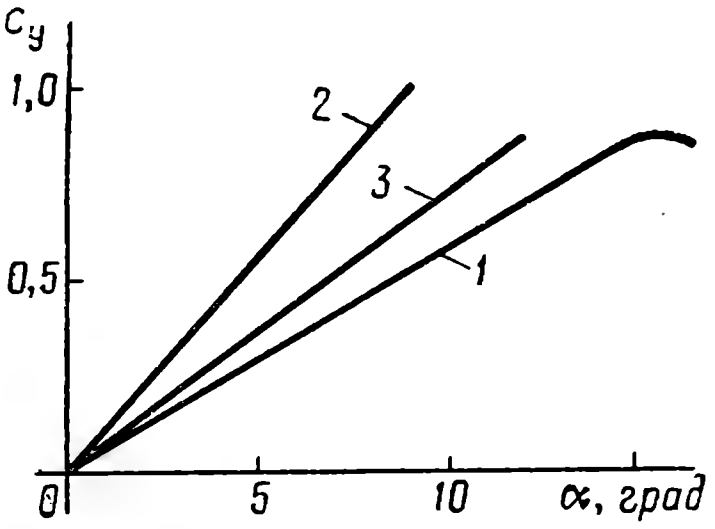


Рис. 4.1.27. Теоретические и экспериментальная кривые $c_y = f(\alpha)$ для симметричного профиля в несжимаемом потоке:

1 — эксперимент; *2* — $c_y = 0{,}12 \cdot \alpha°$ — расчет по формулам (4.1.21) и (4.1.24); *3* — $c_y = 0{,}08 \cdot \alpha°$ — расчет по формуле (4.1.27)

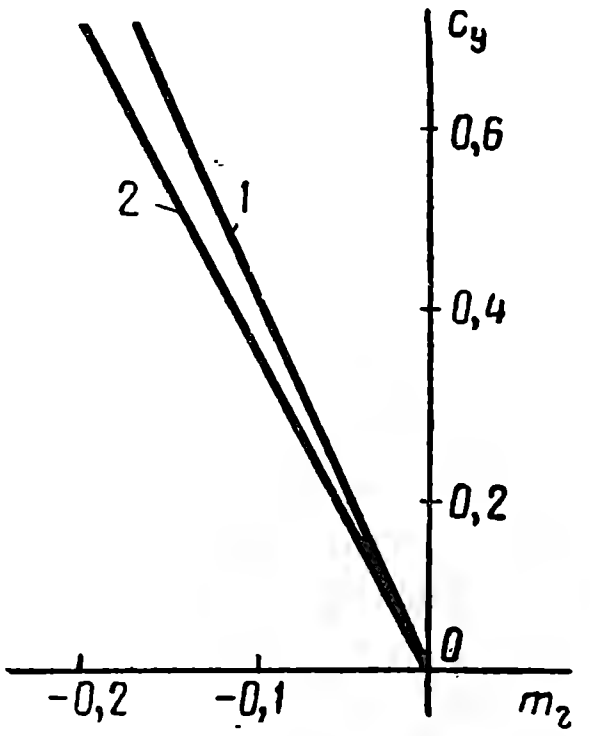


Рис. 4.1.28. Теоретическая и экспериментальная кривые $m_z = f(c_y)$ для симметричного профиля в несжимаемом потоке:

1 — эксперимент; *2* — $m_z = -0{,}25\, c_y$ — расчет по формуле (4.1.22)

Затем из табл. 4.1.1 находим $\lambda_{\infty кр} = 0{,}53$ и, наконец, по выражению (4.1.47) вычисляем соответствующее число $\mathbf{M}_{\infty кр} = 0{,}50$.

В качестве примера найдем изменение коэффициентов давления на профиле при обтекании его сжимаемым потоком с числом $\mathbf{M}_\infty = 0{,}45$ ($\lambda_\infty \approx 0{,}48$). В точке полного торможения (на рис. 4.1.20 точка C) при этом значении числа Маха коэффициент давления согласно (4.1.34)

$$\bar{p}_{0сж} = 1 + \frac{0{,}45^2}{4} + \frac{2 - 1{,}4}{24} 0{,}45^4 = 1{,}05.$$

По сравнению с несжимаемым потоком коэффициент давления увеличился примерно на 5%.

Для определения соответствующих коэффициентов давления $\bar{p}_{сж}$ в других точках на профиле при $\mathbf{M}_\infty = 0{,}45$ можно воспользоваться методом акад. С. А. Христиановича, формулой Кармана — Тзяна (4.1.33) или формулой Прандтля — Глауэрта (4.1.32).

Рассмотрим результаты расчета по методу акад. С. А. Христиановича, как наиболее точному. В качестве примера выберем точки *1, 6, 10* на верхней и *17, 18* на нижней сторонах профиля. В этих точках коэффициенты давления для несжимаемого потока были найдены из рис. 4.1.20 и по ним подсчитаны при помощи формулы (4.1.36) соответствующие значения Λ. При этом входящая в формулу (4.1.36) относительная скорость равнялась, по данным табл. 4.1.1, для $\lambda_\infty = 0{,}48$ величине $\Lambda_\infty = 0{,}45$. Далее из той же табл. 4.1.1 по найденным значениям Λ определялись соответствующие относительные скорости λ, затем по формуле (4.1.37) — отношения давлений p/p_∞ и, наконец, по выражению (4.1.38) для $\mathbf{M}_\infty = 0{,}45$ — коэффициенты давления. Результаты этих расчетов приведены в табл. Г.

Для сравнения в табл. Г приведены также коэффициенты давления, подсчитанные по формулам Кармана — Тзяна (4.1.33) и Прандтля — Глауэрта (4.1.32). Последняя формула дает, как видно, наименее точный результат, поскольку не учитывает имеющую место в действительности нелинейную зависимость между $\bar{p}_{сж}$ и $\bar{p}_{нсж}$.

Таблица Г

Номера дренажных точек	$\bar{p}_{нсж}$	Λ	λ	$\frac{p}{p_\infty}$	$\bar{p}_{сж}$		
					по методу Христиановича	по формуле (4.1.33)	по формуле (4.1.32)
1	—1,31	0,69	0,80	0,78	—1,57	—1,60	—1,47
6	—0,67	0,59	0,65	0,89	—0,78	—0,79	—0,75
10	—0,35	0,53	0,57	0,96	—0,39	—0,40	—0,39
17	0,65	0,27	0,27	1,11	0,78	0,71	0,73
18	0,39	0,35	0,36	1,07	0,50	0,43	0,43

Воспользовавшись формулами (4.1.41)÷(4.1.43), можно найти коэффициенты подъемной силы и продольного момента рассматриваемого профиля в сжимаемом потоке. В частности для $\alpha=6°$ и $\mathbf{M}_\infty=0{,}45$:

$$L = 1 + 0{,}05 \cdot 0{,}45^2/0{,}5^2 = 1{,}041;$$

$$c_{y\,сж} = 0{,}38 \cdot 1{,}041/\sqrt{1-0{,}45^2} = 0{,}44;$$

$$m_{z\,сж} = (-0{,}090) \cdot 1{,}041^2/\sqrt{1-0{,}45^2} = -0{,}11.$$

Для сравнения приведем результаты, полученные по формулам Прандтля — Глауэрта (4.1.39), (4.1.40):

$$c_{y\,сж} = 0{,}38/\sqrt{1-0{,}45^2} = 0{,}42;$$

$$m_{z\,сж} = -0{,}090/\sqrt{1-0{,}45^2} = -0{,}10.$$

Для определения влияния сжимаемости на коэффициент сопротивления находим из рис. 4.1.13 отношение $c_{x\,сж}/c_{x\,нсж}=1{,}01$, по которому вычисляем

$$c_{x\,сж} = 1{,}01 \cdot c_{x\,нсж} = 1{,}01 \cdot 0{,}073 = 0{,}074.$$

В заключение определим новое положение центра давления. Согласно (4.1.45)

$$(c_{ц.д})_{сж} = 0{,}24 \cdot 1{,}041 = 0{,}25.$$

Центр давления в сжимаемом потоке сдвигается к задней кромке, однако этот сдвиг незначителен.

Работа 4.1.2

Определение лобового сопротивления профиля в дозвуковом потоке методом импульсов

Цель работы — исследовать поле скоростей (давлений) в следе за крылом и определить коэффициент лобового сопротивления профиля.

Общие сведения

Определение метода импульсов. При обтекании крыла реальным (вязким) потоком за ним возникает след (спутная струя), состоящий из заторможенных частиц жидкости. Скорости в этом следе сильно отличаются от скорости набегающего (невозмущенного) течения. При этом наибольшее торможение испытывают частицы, расположенные вдоль оси следа. В направлении внешней нормали к этой оси наблюдается увеличение скоростей и постепенное выравнивание их профиля. Значения скоростей приближаются к соответствующей величине для набегающего потока.

Зная распределение скоростей в следе, можно определить лобовое сопротивление профиля, если воспользоваться методом импульсов. Этот метод основан на теореме, согласно которой изменение количества движения жидкости в данном объеме равно импульсу сил, действующих на жидкость. В соответствии с методом импульсов поток и находящееся в нем тело представляют собой единую

механическую систему, а лобовое сопротивление рассматривается как реакция тела на силовое воздействие движущейся жидкости.

Для определения этого сопротивления следует рассмотреть двухмерное плоское обтекание крыла бесконечного размаха. Выберем на обтекаемой поверхности элемент прямоугольного крыла единичного размаха и расположим его внутри замкнутого контура *1—1—2—2* (рис. 4.1.29). Форма контура может быть произвольной, однако для простоты примем ее прямоугольной — такой, чтобы линии *1—1* и *2—2* были параллельны оси y, а линии *1—2* — оси x, с которой совпадает вектор скорости набегающего потока. Линия *1—1* проходит в зоне невозмущенного потока, характеризующегося скоростью V_∞, статическим давлением

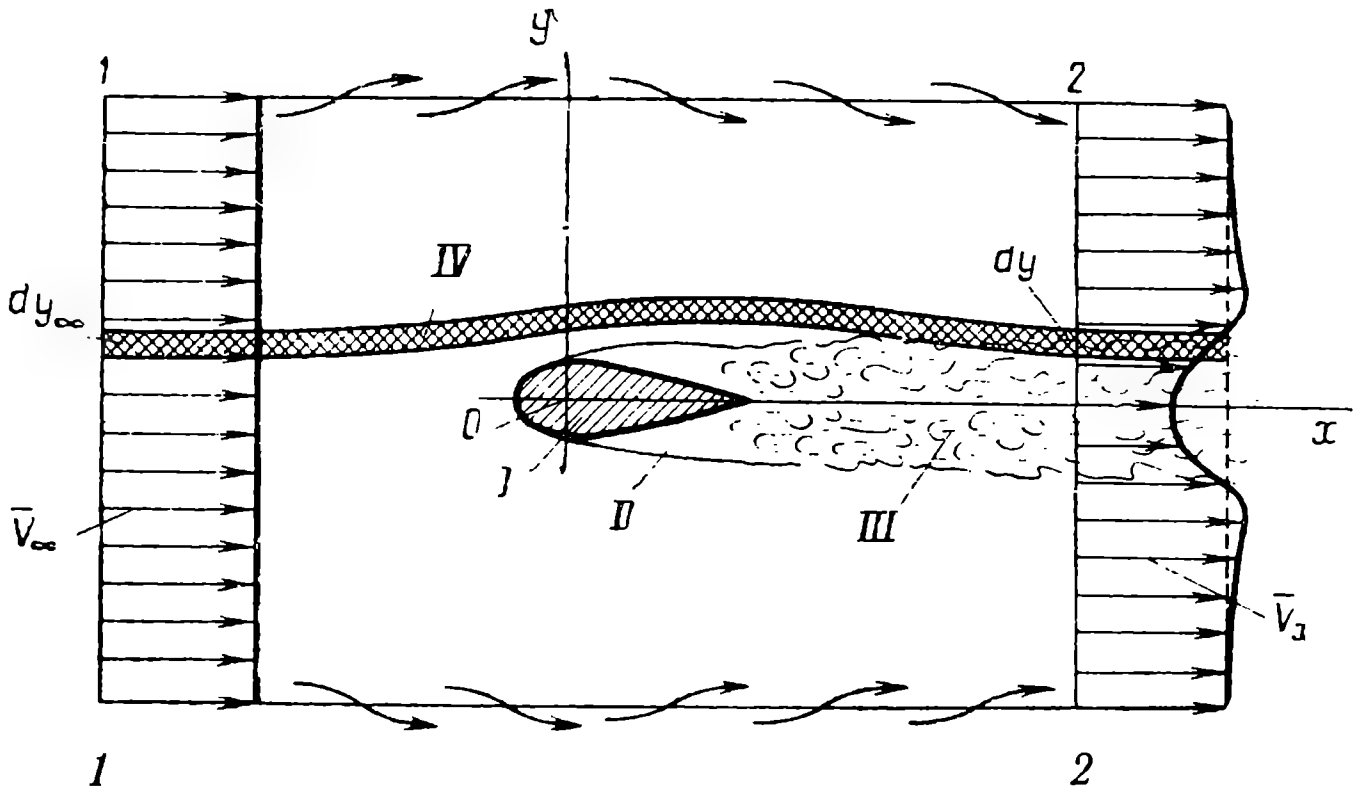


Рис. 4.1.29. К расчету силы лобового сопротивления профиля крыла методом импульсов:

I — модель крыла; *II* — пограничный слой; *III* — след; *IV*—элементарная струйка жидкости

p_∞ и давлением торможения p_0. Линия *2—2* пересекает след крыла, где скорость V_x и давление p переменные и отличаются от соответствующих величин для невозмущенного течения.

Примерная картина изменения скорости в следе на линии *2—2* показана на рис. 4.1.29. Как видно, для следа характерна «впадина» в эпюре скоростей ($V_x < V_\infty$). При этом в соответствии с законом сохранения массы вне этой «впадины» скорости оказываются несколько большими V_∞. Далее, по мере удаления от оси следа скорость асимптотически приближается к ее значению в набегающем потоке.

На линиях *1—2* в передней части потока, где струйки как бы раздвигаются благодаря влиянию обтекаемой поверхности, скорости направлены наружу контура, а на заднем участке, где струйки смыкаются, течение направлено внутрь. При бесконечном удалении этих линий контура количество движения протекающей сквозь них жидкости равно нулю, а статическое давление будет таким же, как в невозмущенном потоке. Если выбрать именно такое расположение линий *1—2*, то можно вместо контура рассматривать два сечения *1—1* и *2—2*.

Изменение количества движения жидкости в проекции на ось x в единицу времени может быть определено как разность произведений секундного массового расхода через контрольные сечения *2—2* и *1—1* на соответствующую скорость, т. е.

$$\int\limits_{(1-1)} \rho_\infty V_\infty^2 \, dy_\infty - \int\limits_{(2-2)} \rho V_x^2 \, dy, \qquad (4.1.59)$$

где ρ и $V_x = V_x(y)$ — соответственно плотность и скорость в некоторой точке сечения 2—2; dy_∞ и dy — толщины элементарных струек соответственно в сечениях *1—1* и *2—2*.

Выражение (4.1.59) можно упростить, перейдя к интегралу только вдоль сечения *2—2*. Для этого воспользуемся уравнением расхода для элементарной струйки при установившемся движении

$$\rho_\infty V_\infty dy_\infty = \rho V_x dy, \tag{4.1.60}$$

из которого найдем

$$dy_\infty = \frac{\rho V_x}{\rho_\infty V_\infty} dy.$$

С учетом этого равенства выражение (4.1.59) запишем в виде

$$\int\limits_{(2-2)} \rho_\infty V_\infty^2 \frac{\rho V_x}{\rho_\infty V_\infty} dy - \int\limits_{(2-2)} \rho V_x^2 dy,$$

или

$$\int\limits_{(2-2)} \rho V_x (V_\infty - V_x)\, dy. \tag{4.1.61}$$

Силы, действующие вдоль оси x между контрольными сечениями *1—1* и *2—2*, сводятся: 1) к проекции на эту ось реакции крыла, являющейся аэродинамической силой лобового сопротивления X; 2) к результирующей силе от распределенных по сечениям *1—1* и *2—2* давлений, равной $\int\limits_{(2-2)} (p - p_\infty) dy$; 3) к силе от касательных напряжений, распределенных вдоль сечения *2—2*, равной $\int\limits_{(2-2)} \tau dy$ [в приведенных выражениях величины $p = p(y)$ и $\tau = \tau(y)$ представляют собой соответственно давление и напряжение трения в сечении *2—2*].

Исследования показывают, что напряжения трения невелики и соответствующей составляющей сопротивления можно пренебречь. С учетом этого теорему об изменении количества движения, записанном в виде (4.1.61), можно выразить уравнением

$$\int\limits_{(2-2)} \rho V_x (V_\infty - V_x)\, dy = X + \int\limits_{(2-2)} (p - p_\infty)\, dy,$$

откуда сила лобового сопротивления

$$X = \int\limits_{(2-2)} \rho V_x (V_\infty - V_x)\, dy + \int\limits_{(2-2)} (p_\infty - p)\, dy. \tag{4.1.62}$$

Эта формула позволяет определить сопротивление, если известно распределение скоростей и давлений в некотором сечении, пересекающем поток за обтекаемой поверхностью. При этом область интегрирования может быть ограничена следом, поскольку вне его изменение скоростей и давлений пренебрежимо мало.

Контрольное сечение *2—2* обычно располагают на небольшом расстоянии от задней кромки крыла, равном примерно половине хорды профиля. Как показывают измерения, статическое давление в следе практически не меняется по его высоте уже в сечениях, расположенных на расстоянии, большем 0,3 хорды, и равно давлению в невозмущенном потоке. При таком расположении контрольного сечения *2—2* можно пренебречь вторым слагаемым в правой части (4.1.62) и получить более простое соотношение для силы сопротивления

$$X = \int\limits_{(2-2)} \rho V_x (V_\infty - V_x)\, dy. \tag{4.1.63}$$

Эту же силу можно представить через коэффициент сопротивления профиля c_x в виде

$$X = c_x (\rho_\infty V_\infty^2/2)\, b.$$

В соответствии с этим

$$c_x = 2\int\limits_{(2-2)} \frac{\rho}{\rho_\infty} \cdot \frac{V_x}{V_\infty}\left(1 - \frac{V_x}{V_\infty}\right) d\bar{y}, \qquad (4.1.64)$$

где $\bar{y}=y/b$. При малых скоростях эффект сжимаемости можно не учитывать ($\rho=\rho_\infty$), поэтому

$$c_x = 2\int\limits_{(2-2)} \frac{V_x}{V_\infty}\left(1 - \frac{V_x}{V_\infty}\right) d\bar{y}. \qquad (4.1.65)$$

Как видно из выражения (4.1.65), для определения коэффициента сопротивления необходимо знать распределение скорости V_x в следе, которое может быть найдено по измеренному в нем полному давлению. С этой целью воспользуемся уравнением Бернулли для элементарной струйки несжимаемой жидкости, пересекающей сечение *1—1* [см. (2.1.15)], из которого скорость невозмущенного потока

$$V_\infty = \sqrt{2\,(p_0 - p_\infty)/\rho_\infty}\,. \qquad (4.1.66)$$

Для струйки, пересекающей сечение *2—2*,

$$\rho_\infty V_x^2/2 + p_\infty = p_0',$$

откуда скорость в следе

$$V_x = \sqrt{2\,(p_0' - p_\infty)/\rho_\infty}\,. \qquad (4.1.67)$$

В формулах (4.1.66) и (4.1.67) значения p_0 и p'_0 определяют давления торможения соответственно для набегающего потока и течения в следе. При этом давление p_0' меньше полного давления p_0 вследствие потерь кинетической энергии частиц жидкости, вызванных трением при обтекании крыла.

После подстановки (4.1.66) и (4.1.67) в (4.1.65) получаем

$$c_x = 2\int\limits_{(2-2)} \sqrt{\frac{p_0' - p_\infty}{p_0 - p_\infty}}\left(1 - \sqrt{\frac{p_0' - p_\infty}{p_0 - p_\infty}}\right) d\bar{y}. \qquad (4.1.68)$$

Таким образом, для определения c_x необходимо знать распределение полного давления p_0' по высоте следа.

Найденное при этом сопротивление обусловлено воздействием на крыло одновременно давления и трения. Отсюда следует важное преимущество метода импульсов, которое заключается в этой возможности нахождения суммарной силы вместо определения отдельных ее составляющих, как предусматривается в других методах. При этом точность метода импульсов составляет, как показывают исследования, примерно $\pm 5\%$.

Определение коэффициента сопротивления профиля по измерениям в малоскоростной аэродинамической трубе. Схема экспериментальной установки для измерения полных давлений p_0 и p_0' в потоке аэродинамической трубы, необходимых для расчета коэффициента сопротивления профиля по формуле (4.1.68), показана на рис. 4.1.30. В сечении *1—1* перед моделью помещен насадок полного давления (трубка Пито), при помощи которого определяется величина $p_0 - p_\infty$, входящая в (4.1.68). Эта же величина равна скоростному напору в соответствии с выражением $q_\infty = \rho_\infty V_\infty^2/2 = p_0 - p_\infty$.

Избыточное давление $p_0 - p_\infty$ находится по показаниям дифференциального манометра по формуле (4.1.50), в которой заменим $\Delta h'$ на Δh_{1-1}.

Распределение давления p_0' в следе находится при помощи насадка полного напора, перемещающегося вертикально вдоль сечения *2—2*. Избыточное давление $p_0'-p_\infty$ в некоторой точке этого сечения регистрируется дифференциальным манометром. Если $\Delta h_{2-2}=h_{пр}-h_{лев}$ — разность уровней в отсчетных трубках, γ и β — соответственно удельный вес манометрической жидкости и угол наклона трубок, а $k_т$ и $\xi_т$ — тарировочные коэффициенты соответственно для манометра и насадка полного напора, то

$$p_0'-p_\infty=k_т\,\xi_т\,\Delta h_{2-2}\,\gamma\sin\beta. \tag{4.1.69}$$

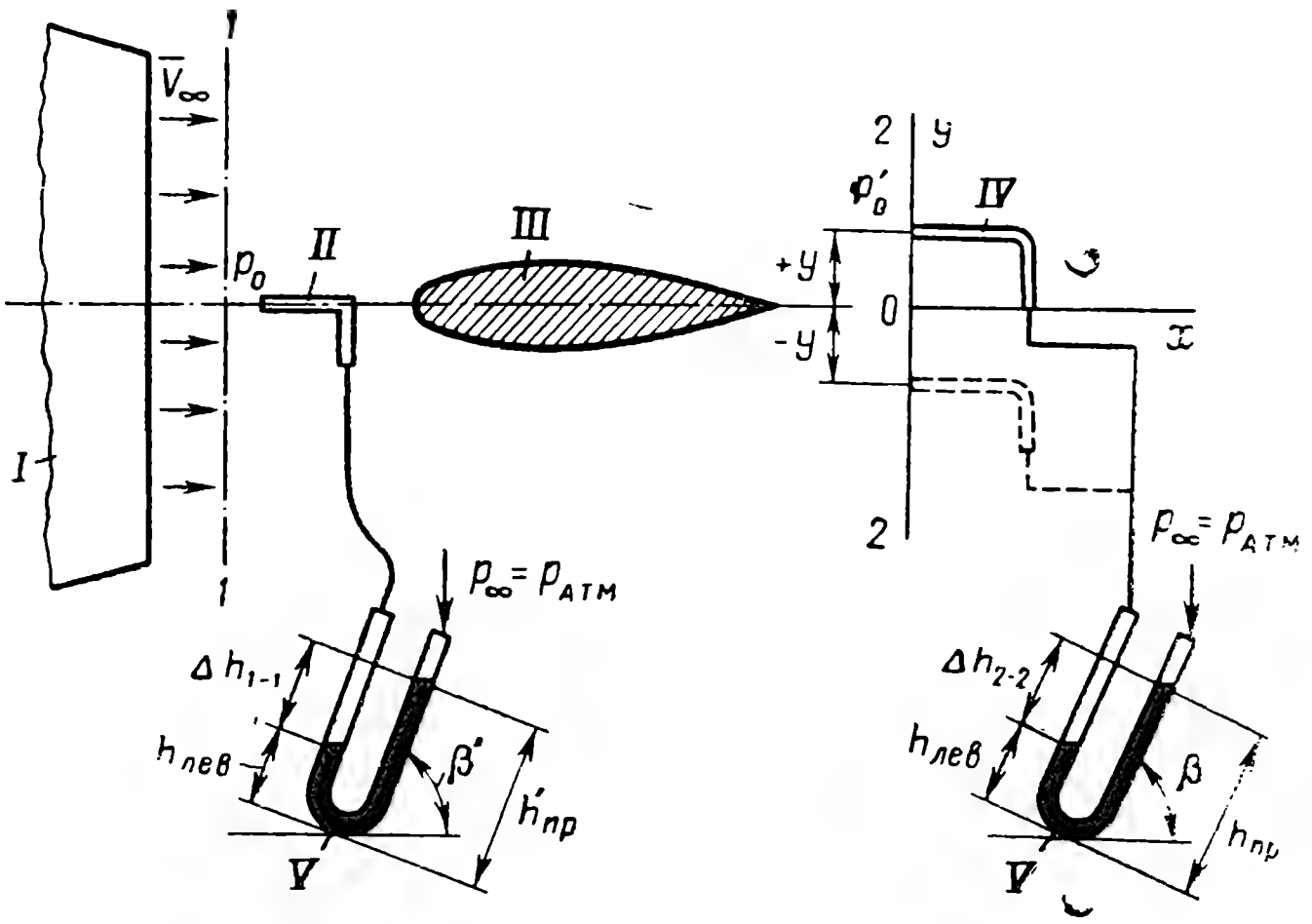


Рис. 4.1.30. Схема измерений при определении силы лобового сопротивления профиля крыла в несжимаемом потоке методом импульсов:

I — сопло дозвуковой малоскоростной аэродинамической трубы; *II* — трубка Пито; *III* — модель крыла; *IV* — насадок полного напора координатника; *V* — U-образные манометры

С учетом (4.1.50) и (4.1.69) и при условии, что $k_т=k_т'$, расчетная зависимость (4.1.68) для коэффициента сопротивления примет вид

$$c_x=2\int\limits_{(2-2)}\sqrt{\frac{\Delta h_{2-2}\,\gamma\sin\beta}{\Delta h_{1-1}\,\gamma'\sin\beta'}}\left(1-\sqrt{\frac{\Delta h_{2-2}\,\gamma\sin\beta}{\Delta h_{1-1}\,\gamma'\sin\beta'}}\right)d\bar{y}. \tag{4.1.70}$$

При одинаковых удельных весах жидкости в манометрах ($\gamma=\gamma'$) и равных углах наклона трубок ($\beta=\beta'$) формула (4.1.70) будет более простой:

$$c_x=2\int\limits_{(2-2)}\sqrt{\frac{\Delta h_{2-2}}{\Delta h_{1-1}}}\left(1-\sqrt{\frac{\Delta h_{2-2}}{\Delta h_{1-1}}}\right)d\bar{y}. \tag{4.1.71}$$

Вводя обозначение

$$J=\sqrt{\frac{\Delta h_{2-2}}{\Delta h_{1-1}}}\left(1-\sqrt{\frac{\Delta h_{2-2}}{\Delta h_{1-1}}}\right), \tag{4.1.72}$$

получим

$$c_x=2\int\limits_{(2-2)}J\,d\bar{y}. \tag{4.1.73}$$

Измерениями в потоке аэродинамической трубы можно определить величину Δh_{1-1}, а также значения Δh_{2-2} в различных точках сечения *2—2*. По этим данным затем вычисляется функция J (4.1.72) и строится график $J=f(\bar{y})$ (рис. 4.1.31). Площадь S, *мм*^{2}, под кривой на этом графике определяет интеграл:

$$\int_{(2-2)} J d\bar{y} = S\mu_S, \qquad (4.1.74)$$

где μ_S, $1/мм^2$ — масштаб площади; $\mu_S = \mu_J \mu_{\bar{y}}$ (μ_J и $\mu_{\bar{y}}$, $1/мм$ — масштабы соответственно величины J и безразмерной координаты $\bar{y}=y/b$).

Коэффициент лобового сопротивления профиля с учетом (4.1.73)

$$c_x = 2S\mu_S. \qquad (4.1.75)$$

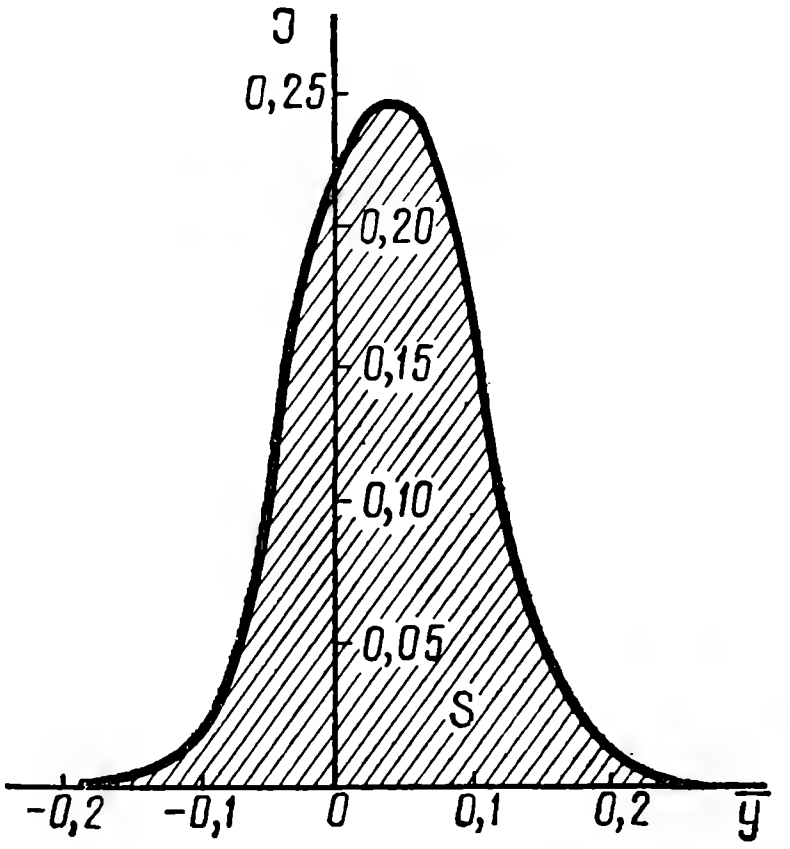


Рис. 4.1.31. График функции $J=f(\bar{y})$

Порядок проведения работы

1. Ознакомиться со схемой аэродинамической установки и необходимой измерительной аппаратурой, предназначенной для проведения лабораторной работы.

2. Закрепить модель крыла в рабочей части трубы под заданным углом атаки.

3. Установить перед моделью (в сечении *1—1*) насадок полного напора, включить трубу и записать показания манометра ($h'_{пр}$, $h'_{лев}$).

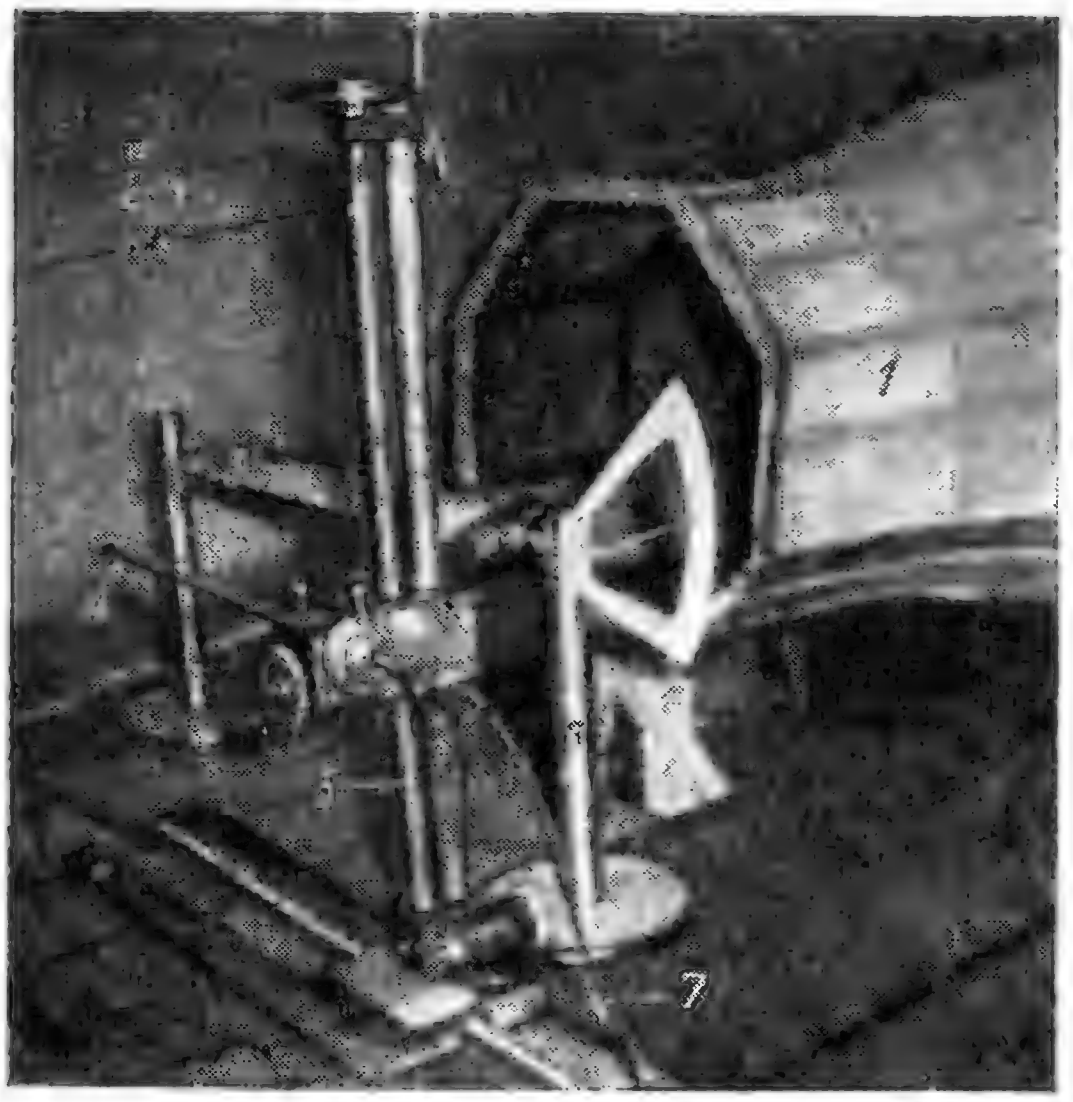


Рис. 4.1.32. Установка для определения сопротивления профиля крыла в несжимаемом потоке методом импульсов:

1 — сопло аэродинамической трубы; *2* — рабочая часть трубы; *3* — модель крыла; *4* — насадок полного напора координатника; *5* — координатник; *6* — приспособление для установки модели в рабочей части трубы под заданным углом атаки; *7* — резиновые шланги (к манометру)

4. Измерить температуру в лаборатории ($T_{атм}=T_\infty$) и атмосферное давление ($p_{атм}=p_\infty$), а также записать показания T' влажного термометра в психрометре.

5. По значениям T_∞, T', p_∞ и измеренному полному давлению p_0 определить параметры набегающего потока.

6. Расположить насадок полного напора, установленный на координатнике, в сечении *2—2* и вращением микровинта перемещать его в вертикальном направлении с заданным шагом. Для каждого фиксированного положения насадка снять соответствующие показания с отсчетных трубок манометра ($h_{пр}$, $h_{лев}$). При этом координата y, определяющая положение насадка в следе, отсчитывается от оси трубы, относительно которой измеряется также установочный угол атаки крыла.

7. Рассчитать по формуле (4.1.72) значения функции J и построить соответствующий график $J=f(\bar{y})$.

8. Подсчитать площадь под кривой $J=f(\bar{y})$ и по зависимости (4.1.75) определить коэффициент сопротивления c_x.

Пример. Рассмотрим результаты лабораторной работы по определению сопротивления профиля, изображенного на рис. 4.1.18. Эта работа проводилась на установке, общий вид которой изображен на рис. 4.1.32.

Измерения осуществлялись в аэродинамической трубе, поток в которой определялся параметрами, приведенными в табл. А работы 4.1.1. В табл. А величина $\Delta h'=300$ *мм* соответствует принятому здесь обозначению Δh_{1-1}.

Модель крыла прямоугольной формы имела те же размеры, что и в примере к работе 4.1.1: $b=0{,}1$ *м*; $l=0{,}9$ *м*; $\Delta=0{,}012$ *м*. Как было отмечено, при таких размерах модели загромождение рабочей части для угла атаки $\alpha=15°$ составляет примерно 4%. В этом случае влияние границ потока на профиль в центральном сечении практически исключено. Таким образом, в пределах границ воздушного потока трубы с открытой рабочей частью выполняется условие, позволяющее при применении метода импульсов перейти от замкнутого контура к двум контрольным сечениям.

Результаты измерений при угле атаки $\alpha=6°$ представлены в табл. А

Таблица А

Положение насадка (координата y, *мм*)	Безразмерная координата $\bar{y}=y/b$	Показания отсчетных трубок манометра, *мм*			$\sqrt{\frac{\Delta h_{2-2}}{\Delta h_{1-1}}}$	$1-\sqrt{\frac{\Delta h_{2-2}}{\Delta h_{1-1}}}$	J [формула (4.1.72)]
		$h_{\text{пр}}$	$h_{\text{лев}}$	$\Delta h_{2-2}=h_{\text{пр}}-h_{\text{лев}}$			
300	0,300	550	250	300	1	0	0
200	0,200	547	253	294	0,990	0,010	0,010
150	0,150	532	268	264	0,936	0,064	0,060
100	0,100	493	307	186	0,780	0,220	0,170
50	0,050	438	362	76	0,500	0,500	0,250
0	0	468	332	136	0,670	0,330	0,220
—50	—0,050	519	281	238	0,890	0,110	0,100
—100	—0,100	545	255	290	0,985	0,015	0,015
—150	—0,150	549	251	298	≈ 1	≈ 0	≈ 0

По данным табл. А на рис. 4.1.31 построен график зависимости $J=f(\bar{y})$. Согласно этому графику маштаб функции J выбран равным $\mu_J=2{,}5\cdot10^{-3}$, 1/*мм*, а безразмерной координаты $\bar{y}$—$\mu_{\bar{y}}=5\cdot10^{-3}$, 1/*мм*. Соответствующий масштаб площади $\mu_S=\mu_J\mu_{\bar{y}}=12{,}5\cdot10^{-6}$, 1/*мм*^{2}. Так как измеренная площадь между кривой $J=f(\bar{y})$ и осью $\bar{y}$ равна $S=3{,}36\cdot10^3$ *мм*^{2}, то коэффициент сопротивления профиля при угле атаки $\alpha=6°$

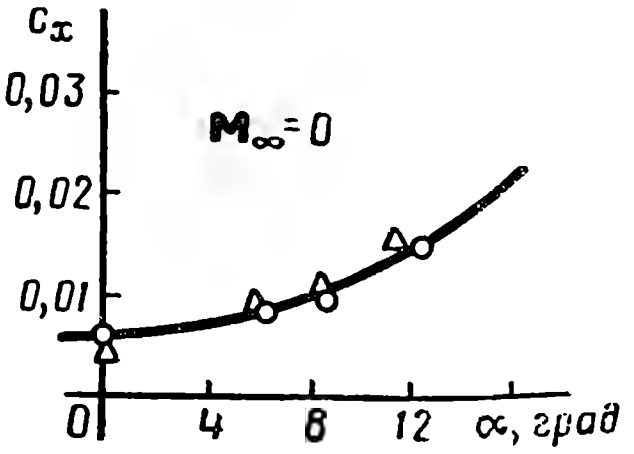


Рис. 4.1.33. График зависимости $c_x=f(\alpha)$ для профиля крыла в несжимаемом потоке:

Δ — результат измерения по методу импульсов; О — данные по опытному распределению давления и теоретическому расчету трения

$$c_x = 2S\mu_S = 2\cdot3{,}36\cdot10^3\cdot12{,}5\cdot10^{-6} = 0{,}084.$$

Аналогично могут быть определены значения c_x для других углов атаки ($\alpha=0$, 6, 8, 12°). Полученные результаты графически изображены на рис. 4.1.33. Здесь же для сравнения представлены коэффициенты сопротивления экспериментального профиля, найденные путем измерения распределения давления и приближенного расчета трения (см. работу 4.1.1).

Определение коэффициента подъемной силы профиля методом электроаналогии

Цель работы — ознакомление с методом электроаналогии на примере исследования подъемной силы профиля в невязком несжимаемом потоке. В результате работы определяется спектр обтекания модели профиля и находится коэффициент его подъемной силы.

Общие сведения

Метод электроаналогии. Движение электрического тока в проводящей среде и течение невязкой жидкости описываются одинаковыми по форме дифференциальными уравнениями в частных производных эллиптического типа. Такая аналогия между двумя физическими явлениями, проявляющаяся в одной и той же форме их математического описания, используется как метод исследования потока жидкости на основе известных (заданных) свойств электрической проводимости. В данном случае электрический ток в проводящей среде является своеобразной моделью картины потока. Этот метод изучения движения несжимаемой жидкости называется методом электрогидродинамической аналогии (ЭГДА). В данной работе используется одна из разновидностей метода, основанная на моделировании при помощи электропроводящей бумаги. Прибор, при помощи которого осуществляется такое моделирование, называется интегратором.

Рассмотрим подробнее дифференциальные уравнения движения жидкости и электрического тока. Плоский несжимаемый поток исследуется при помощи уравнения неразрывности

$$\partial V_x/\partial x + \partial V_y/\partial y = 0. \qquad (4.1.76)$$

Для потенциального течения составляющие скорости можно выразить через гидродинамический потенциал скоростей $\varphi_{гд}$ в виде

$$V_x = \partial\varphi_{гд}/\partial x;\ V_y = \partial\varphi_{гд}/\partial y. \qquad (4.1.77)$$

Тогда (4.1.76) примет форму уравнения для потенциала скорости

$$\partial^2\varphi_{гд}/\partial x^2 + \partial^2\varphi_{гд}/\partial y^2 = 0. \qquad (4.1.78)$$

Это уравнение является основным в гидродинамике двухмерных плоских установившихся течений.

Изучение стационарного электрического тока в проводнике основано на использовании уравнения

$$\partial J_{\bar{x}}/\partial\bar{x} + \partial J_{\bar{y}}/\partial\bar{y} = 0, \qquad (4.1.79)$$

в котором $J_{\bar{x}}$, $J_{\bar{y}}$ — компоненты вектора плотности электрического тока $\bar{J} = J_{\bar{x}}i + J_{\bar{y}}j$ в данной точке электрического поля (i, j — единичные векторы соответственно по осям $\bar{x}$ и $\bar{y}$). Эти компоненты могут быть выражены через коэффициент электропроводности σ и электрический потенциал φ:

$$J_{\bar{x}} = -\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}},\ J_{\bar{y}} = -\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{y}}. \qquad (4.1.80)$$

В соответствии с этим уравнение (4.1.79) преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left[\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}}\right] + \frac{\partial}{\partial\bar{y}}\left[\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{y}}\right] = 0. \qquad (4.1.81)$$

В частном случае движения электрического тока в однородной среде коэффициент $\sigma = \text{const}$ и (4.1.81) преобразуется в уравнение Лапласа

$$\partial^2\varphi/\partial\bar{x}^2 + \partial^2\varphi/\partial\bar{y}^2 = 0. \qquad (4.1.82)$$

На основе уравнений (4.1.78) и (4.1.82) рассмотрим электрическую модель, которая в некотором геометрическом масштабе отражает исследуемую область течения жидкости. Если обозначить этот масштаб через m, то координаты точек электрического поля $(\bar{x}, \bar{y})$ и потока жидкости (x, y) будут связаны соотношениями

$$\bar{x} = mx,\ \bar{y} = my, \qquad (4.1.83)$$

причем значения $\bar{x}$, $\bar{y}$ могут быть координатами точек профиля на электропроводной бумаге, а x, y — в обтекающем потоке.

Примем, что электрический потенциал φ связан с гидродинамическим потенциалом $\varphi_{гд}$ зависимостью

$$\varphi = a\varphi_{гд} + b, \qquad (4.1.84)$$

в которой a и b — некоторые постоянные параметры. Будем считать, что коэффициент электропроводности σ является величиной постоянной. Внося (4.1.83) и (4.1.84) в уравнение (4.1.82), получим

$$\frac{a}{m}\left(\frac{\partial^2\varphi_{гд}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_{гд}}{\partial y^2}\right) = 0. \qquad (4.1.85)$$

Поскольку $a \neq 0$ и $m < \infty$, полученное уравнение тождественно (4.1.78) и, следовательно, всякому его решению соответствует некоторое решение уравнения (4.1.78).

Из зависимости (4.1.84) для φ и $\varphi_{гд}$ вытекают условия, в соответствии с которыми при $\varphi = \text{const}$ будет также иметь место равенство $\varphi_{гд} = \text{const}$, а при $\partial\varphi/\partial n = 0$ — равенство $\partial\varphi_{гд}/\partial n = 0$. Согласно этому линиям равного потенциала на электропроводящей бумаге (т. е. на электрической модели) соответствуют эквипотенциальные линии в потоке, а силовым линиям — линии тока.

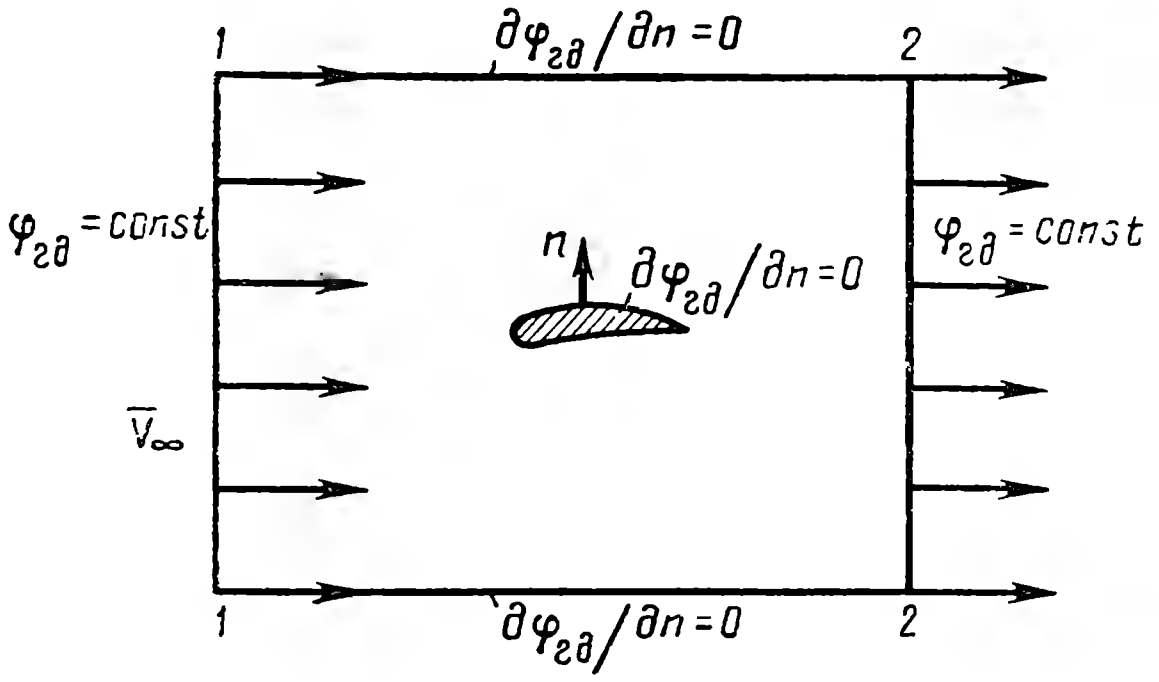


Рис. 4.1.34. Граничные условия при обтекании профиля потенциальным потоком невязкой несжимаемой жидкости

В процессе проведения работы производится измерение электрического потенциала. При этом если потенциал измеряется в абсолютных единицах (вольтах), то это требует практически полной стабилизации напряжения питающего тока, что связано с определенными трудностями. Поэтому целесообразно перейти к определению безразмерных (приведенных) значений электрического потенциала, определяемых как отношение измеренного потенциала к разности потенциалов источника тока, питающего интегратор. Эти безразмерные значения, измеряемые в долях единицы или в процентах, не будут зависеть от изменения выходного напряжения питающего устройства, что повышает точность моделирования движения жидкости при помощи электроаналогии.

Максимальное и минимальное значения рабочего напряжения на выходе питающего устройства интегратора приняты равными соответственно $\varphi = 1\,(100\%)$ и $\varphi = 0$.

Граничные условия. При исследовании обтекания профиля потоком невязкой несжимаемой жидкости используется уравнение (4.1.78), решение которого должно удовлетворять граничным условиям:

$$\partial\varphi_{гд}/\partial n = 0 \text{ и } \varphi_{гд} = \text{const}.$$

Первое условие выполняется в области невозмущенного потока вдоль границ *1—2* (рис. 4.1.34). Одновременно это условие соответствует безотрывному характеру обтекания профиля, при котором нормальная к контуру составляющая скорости равна нулю. Второе условие выполняется в области невозмущенного потока вдоль границ *1—1* и *2—2*. При моделировании обтекания профиля этим двум граничным условиям соответствуют согласно (4.1.84) условия

$$\partial\varphi/\partial n = 0 \text{ и } \varphi = \text{const}.$$

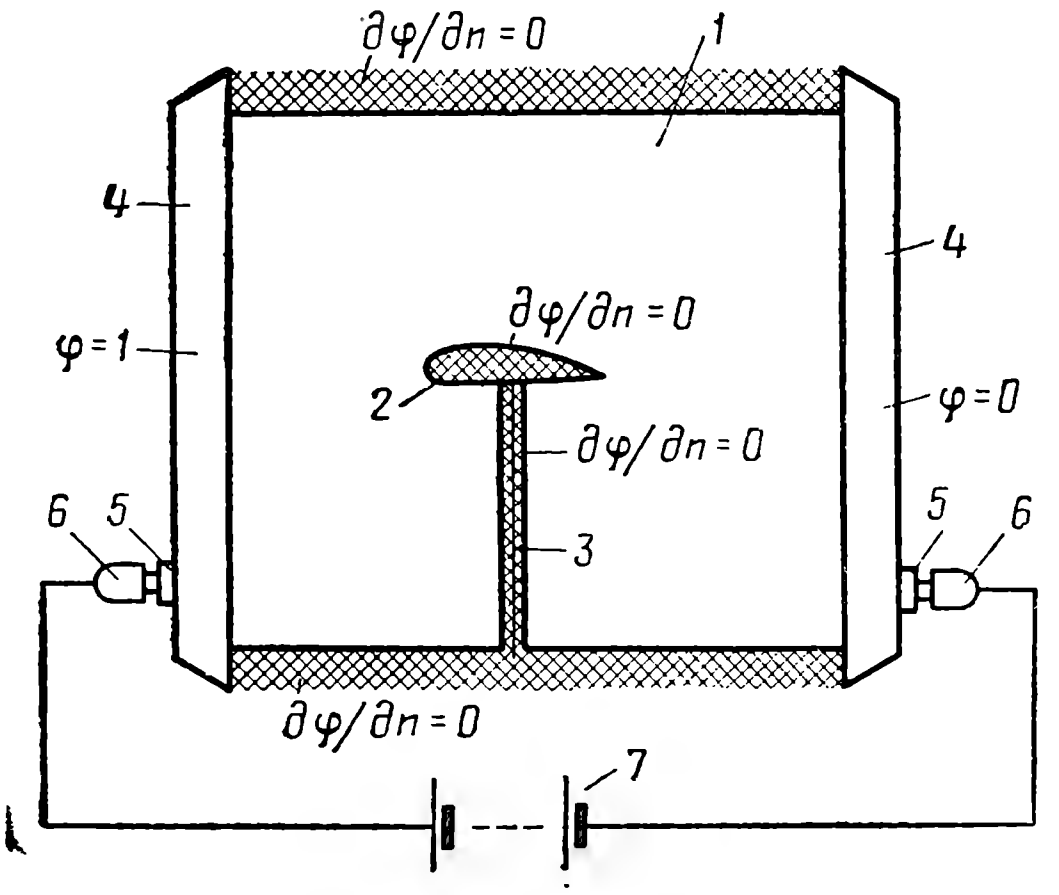


Рис. 4.1.35. Реализация граничных условий $\partial\varphi/\partial n = 0$ и $\varphi = \text{const}$ при моделировании обтекания профиля:

1 — электропроводная бумага; *2* — контур профиля; *3* — полоска кальки; *4*—шины-зажимы; *5*—гнезда для штепселя; *6* — штепсели коммутационного шнура; *7* — источник питания (штриховкой показаны изолированные области)

Для реализации первого условия необходимо вдоль рассматриваемых линий обрезать электропроводную бумагу, т. е. изолировать ее. Если такими линиями являются границы внутри области, то для надежности изоляции в разрез вставляется полоска кальки, согнутая под прямым углом (рис. 4.1.35).

Вырезав профиль заданной формы в прямоугольном листе электропроводной бумаги, получим тем самым область движения электрического тока, геометрически подобную участку течения жидкости, обтекающей заданный профиль. Поскольку ток может течь только вдоль изолированной границы, на ней выполняется требуемое условие $\partial\varphi/\partial n = 0$.

Чтобы обеспечить выполнение второго условия $\varphi = \text{const}$, на прямолинейных границах устанавливаются шины-зажимы, на которые подается требуемый потенциал (см. рис. 4.1.35).

При исследовании двухмерных плоских течений несжимаемой жидкости можно вместо потенциальной функции $\varphi_{гд}$ использовать функцию тока $\psi_{гд}$, связь между которыми устанавливается соотношениями:

$$\partial\psi_{гд}/\partial x = \partial\varphi_{гд}/\partial y;\ \partial\psi_{гд}/\partial y = -\partial\varphi_{гд}/\partial x.$$

Аналогично при изучении плоских электрических полей можно вместо электрического потенциала φ рассмотреть силовую функцию тока ψ. Известно, что эквипотенциальные линии ($\varphi = \text{const}$) и линии тока ($\psi = \text{const}$) пересекаются под прямым углом, образуя ортогональную сетку. В соответствии с этим линии тока будут перпендикулярны границе области, на которой $\varphi = \text{const}$, следовательно, функция тока ψ будет сохранять в направлении, нормальном к эквипотенциальным линиям, постоянное значение, т. е. $\partial\psi/\partial n = 0$. Таким образом, граничное условие $\varphi = \text{const}$ заменяется эквивалентным условием $\partial\psi/\partial n = 0$. Аналогично вместо $\psi = \text{const}$ можно воспользоваться условием $\partial\varphi/\partial n = 0$.

При электромоделировании можно найти только поле потенциальной функции. Однако для любой задачи легко отыскивается новая модель, в которой эквипотенциальные линии и линии тока меняются местами.

Рассмотрим следующий пример. На рис. 4.1.36, *а* эквипотенциальными являются дуги концентрических окружностей. Причем на крайних дугах приведены значения разности потенциалов $\varphi=1$ и $\varphi=0$. Если теперь вдоль заданных граничных прямых, на которых выполняется условие $\partial\varphi/\partial n=0$, установить электрические шины с относительной разностью потенциалов, которой соответствуют приведенные значения силовой функции тока $\psi=1$ и $\psi=0$, и предусмотреть изоляцию (для этого необходимо обрезать бумагу вдоль прежних эквипотенци-

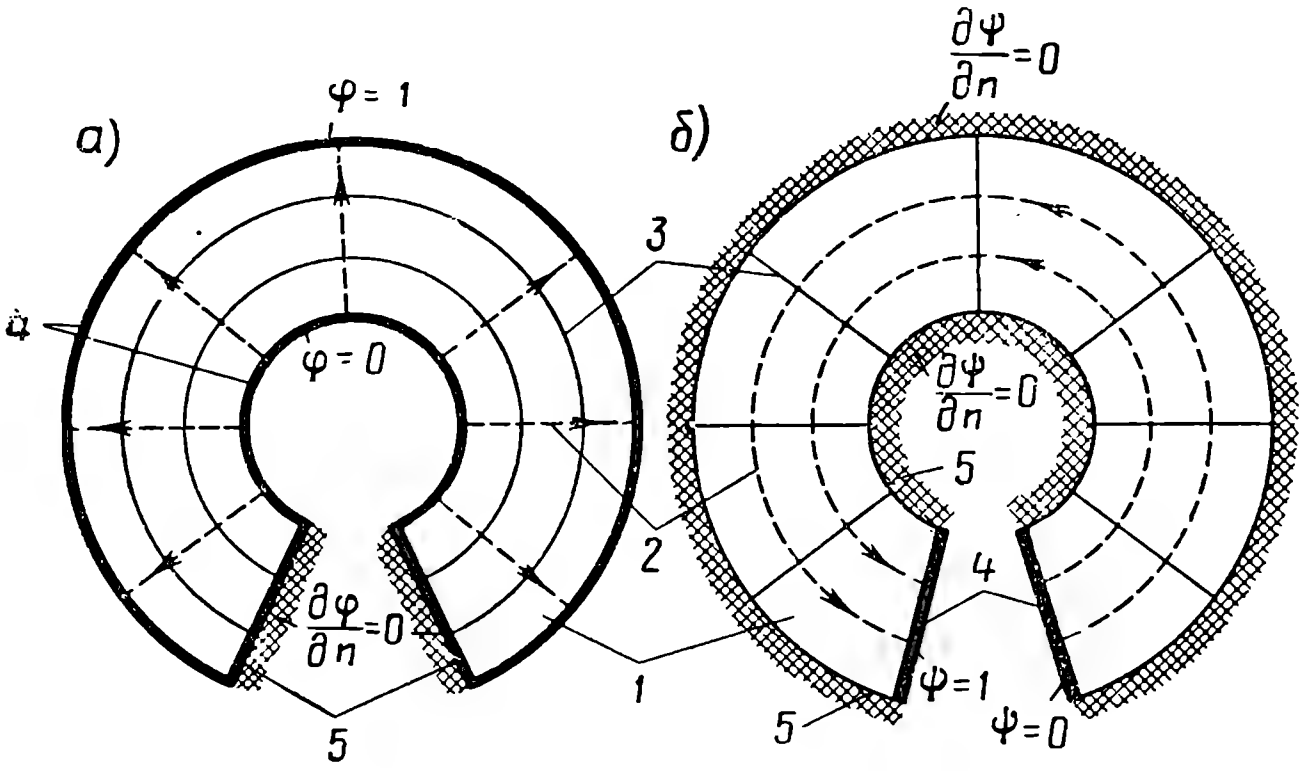


Рис. 4.1.36. К примеру обращения задачи:

а — прямая задача; *б* — обращенная задача; *1* — электропроводная бумага; *2* — линии тока; *3* — эквипотенциальные линии; *4* — электрические шины; *5* — изолированные границы — линии обреза

альных линий $\varphi=1$ и $\varphi=0$; см. рис. 4.1.36, *б*), то в полученной обращенной картине эквипотенциальные линии совпадают с первоначальными линиями тока.

В пределе, при стягивании внутреннего контура в точку и переходе к полным окружностям, получим картину, состоящую из семейства концентрических окружностей и радиальных линий. В прямой задаче такие окружности и линии являются соответственно эквипотенциальными кривыми и линиями тока в поле точечного источника (стока), а в обращенной задаче, наоборот, — линиями тока и линиями равного потенциала в поле потока от точечного вихря.

Деление моделирующих задач на прямую и обращенную является отражением характерной особенности двухмерных плоских полей, которая состоит в их дуальности, т. е. возможности осуществления двух сопряженных полей с ортогональными сетками из эквипотенциальных линий и линий тока. Для таких полей можно построить соответствующие электрические модели, которые получаются путем взаимного обращения граничных условий. Случаи прямой и обращенной задач условно называют соответственно аналогией «А» и аналогией «В».

Бесциркуляционное обтекание профиля. Рассмотрим задачу об обтекании профиля (с контуром в виде окружности) потоком невязкой несжимаемой жидкости. Подъемная сила симметричного профиля равна нулю. Отсюда в соответствии с формулой Жуковского ($Y=\rho_\infty V_\infty \Gamma$) при $Y=0$ равна нулю и циркуляция скорости около профиля ($\Gamma=0$). Поэтому рассматриваемое обтекание называют бесциркуляционным, а возникающий возмущенный поток — поступательным.

Таким же будет обтекание симметричного профиля, отличающегося по форме от окружности, при установке его в поток под нулевым углом атаки (рис. 4.1.37).

Как показали исследования, при обтекании профилей на расстоянии от них, равном примерно 2÷3 хордам, можно считать сверху и снизу поток практически невозмущенным. В качестве границ такого

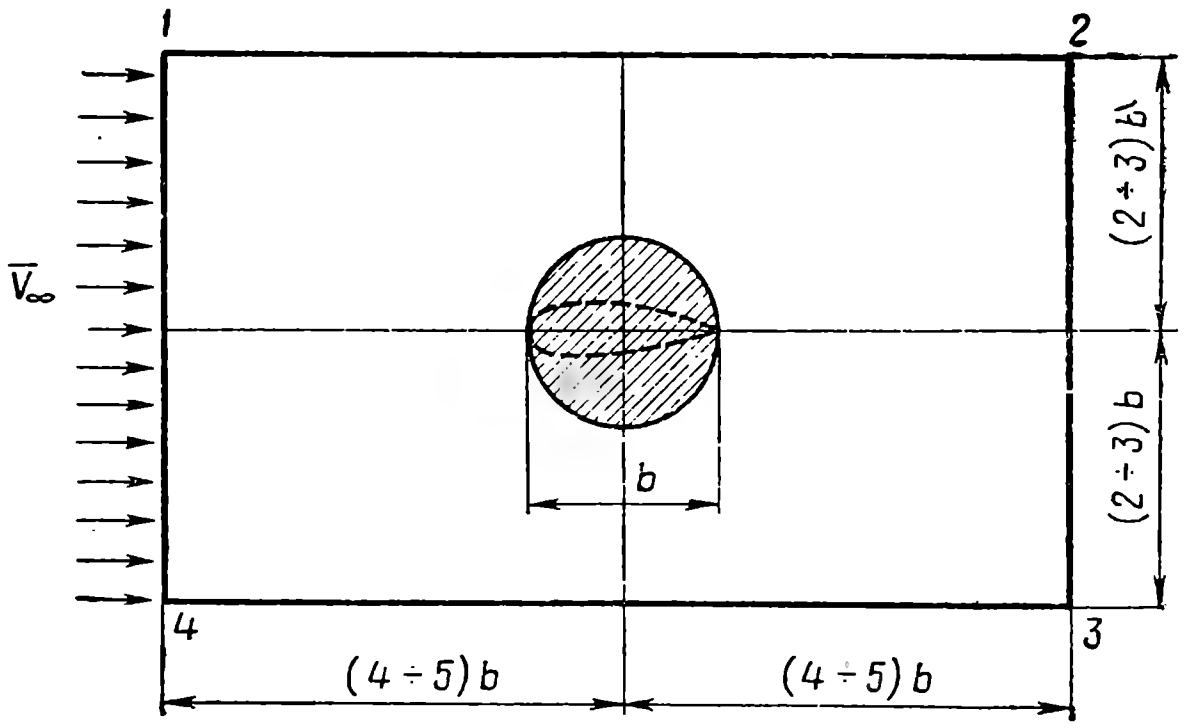


Рис. 4.1.37. Обтекание симметричного профиля безграничным потоком невязкой несжимаемой жидкости

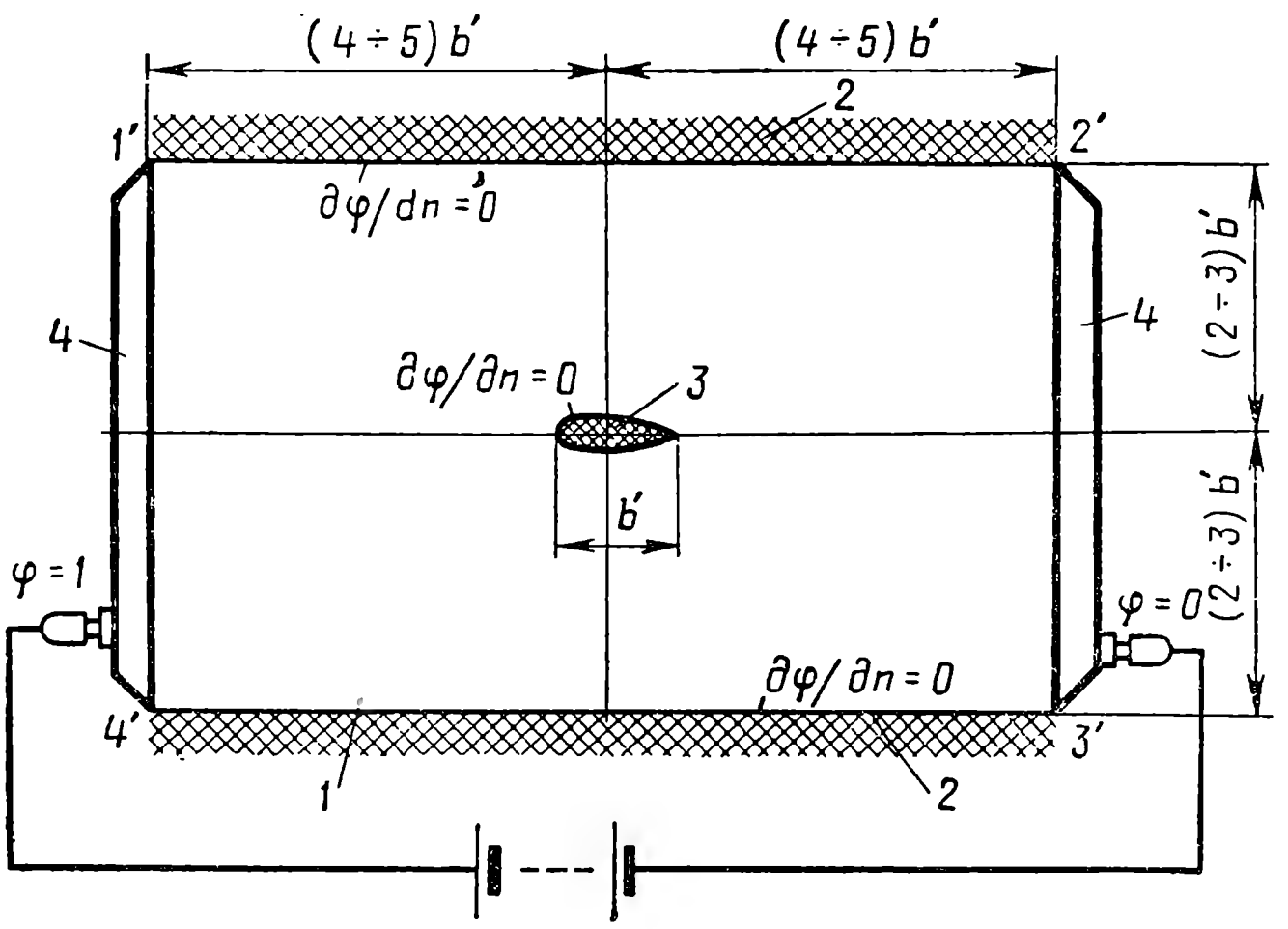


Рис. 4.1.38. Моделирование обтекания профиля бесциркуляционным потоком (аналогия «*A*»):

1 — электропроводная бумага; *2*—изолированные границы; *3*—вырезанный контур профиля; *4* — шины-зажимы

потока можно выбрать прямые, параллельные хордам, удаленные от профиля на указанное расстояние.

Аналогичными исследованиями установлено, что вверх и вниз по потоку прямые линии, ограничивающие участки невозмущенного течения, располагаются от профиля на расстоянии, равном примерно 4÷5 хордам. Таким образом, область возмущенного потока около модели может быть представлена в виде прямоугольника *1 2 3 4* (см. рис. 4.1.37). При этом стороны *1 2* и *3 4* можно рассматривать как линии тока, а *1 4* и *2 3* — как линии равного потенциала. Граничными условиями при решении задачи об обтекании профиля будут постоянные зна-

чения потенциала скоростей на линиях *1 4* и *2 3* ($\varphi_{гд}=\text{const}$) и равенство $\partial\varphi_{гд}/\partial n=0$ на линиях *1 2* и *3 4*.

Перейдем к моделированию рассматриваемой задачи. Если вырезать профиль заданной формы в листе электропроводной бумаги пря-

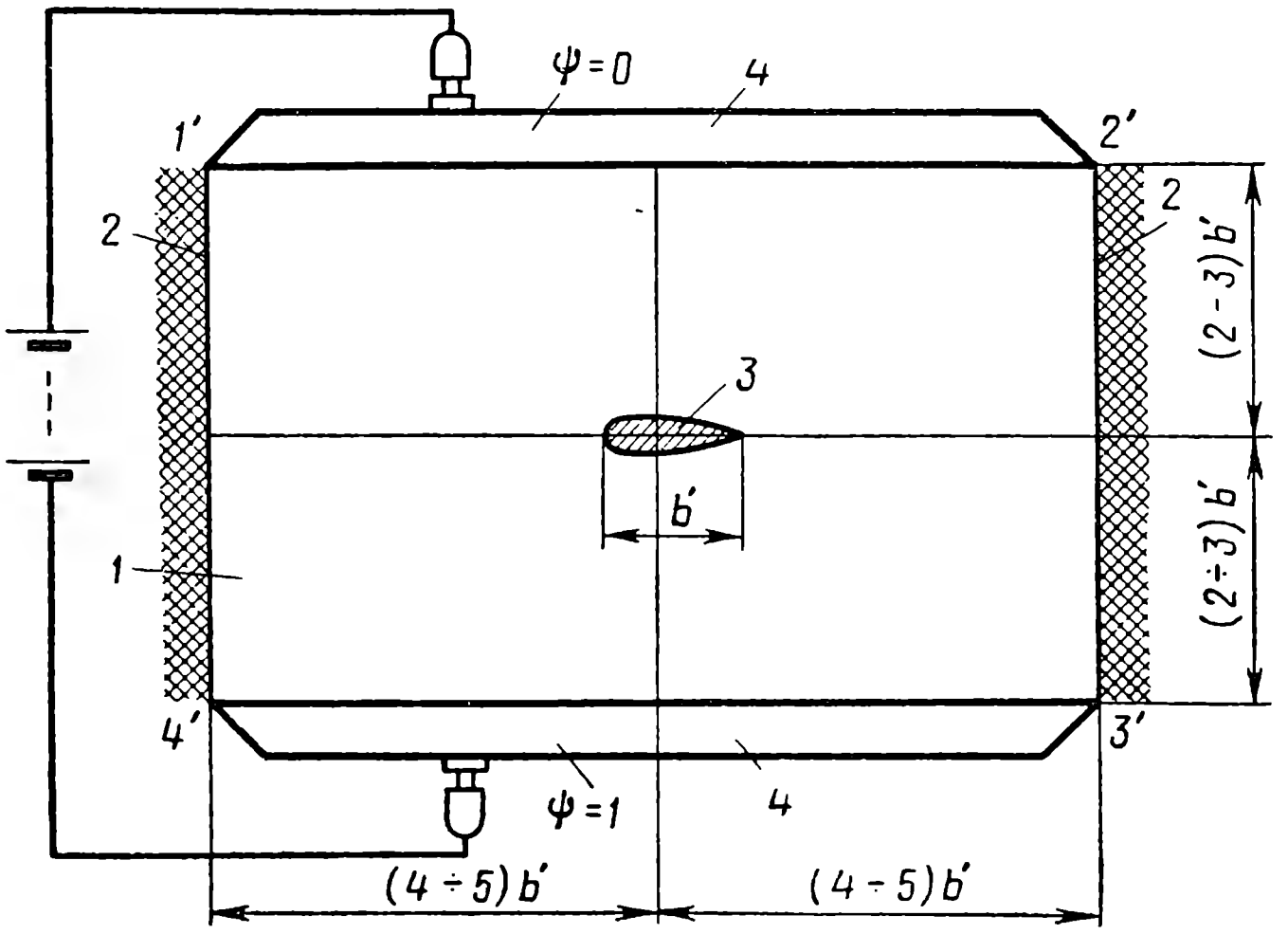


Рис. 4.1.39. Моделирование обтекания профиля безциркуляционным потоком (аналогия «В»):

1 — электропроводная бумага; *2* — изолированные границы; *3* — профиль из медной фольги; *4* — шины-зажимы

моугольной формы с такими же относительными размерами, как на рис. 4.1.37, то получим область *1′ 2′ 3′ 4′* движения электрического тока (рис. 4.1.38), геометрически подобную участку обтекания профиля *1 2 3 4*. Соответствующими граничными условиями при решении задач о таком движении электрического тока будут постоянство электрического потенциала вдоль прямых *1′ 4′* и *2′ 3′* ($\varphi=\text{const}$) и равенство $\partial\varphi/\partial n=0$ вдоль линий *1′ 2′* и *3′ 4′*, а также на контуре профиля. Укрепив шины-зажимы вдоль сторон *1′ 4′* и *2′ 3′* и подведя к ним электрический ток некоторого напряжения, определяем на бумаге распределение эквипотенциальных линий, решая таким образом прямую задачу (аналогия «А»).

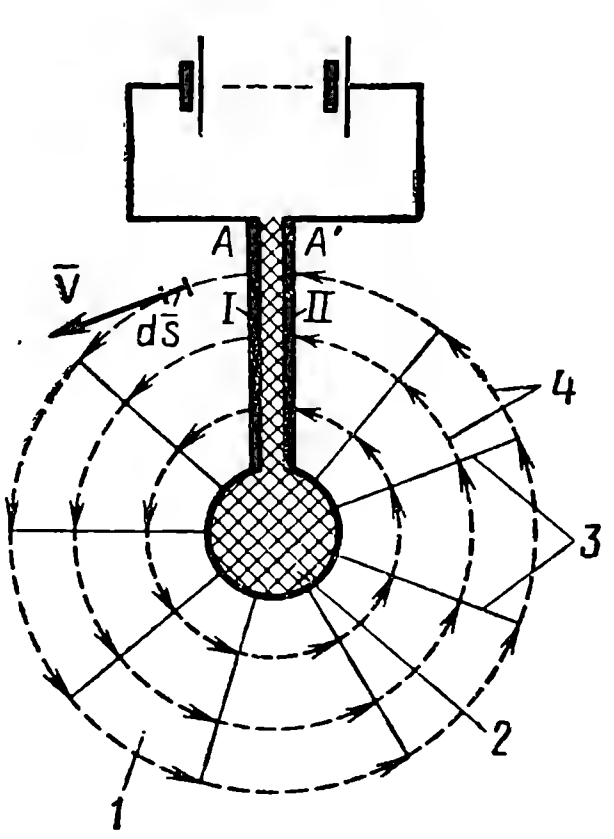


Рис. 4.1.40. К задаче о циркуляционном обтекании кругового цилиндра несжимаемым потоком (аналогия «А»):

1 — электропроводная бумага; *2* — изолированный вырез; *3* — линии равного потенциала (=const); *4* — линии тока ($\psi=\text{const}$); *I*, *II* — шины-зажимы

Рассмотрим обращенную задачу (аналогия «В»). При ее моделировании профиль изготовляется из медной фольги и приклеивается электропроводным клеем к листу электропроводной бумаги (рис. 4.1.39). В этом случае шины-зажимы закрепляются вдоль сторон *1′ 2′* и *3′ 4′*. Подав на шины электрический ток, определяем на бумаге семейство линий тока аналогично тому, как это было сделано при нахождении эквипотенциальных линий. При этом на контур профиля никакого напряжения не подается; но поскольку контур профиля выполнен из проводника, то вдоль него пойдет электрический ток от шин на линиях *1′ 2′* и *3′ 4′*, т. е. контур станет линией тока, как и должно быть по условию задачи.

В результате моделирования прямой и обращенной задач строится ортогональная сетка кривых $\varphi=\text{const}$ и $\psi=\text{const}$, что позволяет выполнить численный расчет бесциркуляционного обтекания профиля.

Циркуляционное обтекание. Рассмотрим задачу о чисто циркуляционном обтекании кругового цилиндра несжимаемым потоком (рис. 4.1.40). Это обтекание характеризуется циркуляцией скорости около цилиндра, которая определяется в виде разности потенциалов в совмещенных точках произвольного кругового контура A—A' (см. рис. 4.1.40), а именно

$$\Gamma=\oint \bar{V}\, d\bar{s} = (\varphi_{\text{гд}})_{A'} - (\varphi_{\text{гд}})_{A}.$$

При этом совмещенные точки могут быть выбраны на замкнутом контуре, совпадающем с сечением заданного цилиндра.

Моделирование рассматриваемой задачи осуществляется следующим образом. Выбрав круглый лист электропроводной бумаги, его разрезают, как показано на рис. 4.1.40, и вдоль радиального участка разреза устанавливают шины-зажимы I и II, на которые подается электрический ток с некоторой разностью потенциалов $\Delta\varphi_{I-II}$. Возникающее при этом электрическое поле характеризуется семейством эквипотенциальных линий $\varphi=\text{const}$, которые определяются непосредственно и представляют собой радиальные лучи, а также семейством линий тока $\psi=\text{const}$ в виде концентрических окружностей.

По этой разности электрических потенциалов $\Delta\varphi_{I-II}$ можно найти циркуляцию скорости Γ в моделируемом потоке, используя зависимость

$$\Gamma = (\varphi_{II} - \varphi_{I})/a = \Delta\varphi_{I-II}/a, \qquad (4.1.86)$$

в которой a — некоторый постоянный параметр, определяемый в соответствии с (4.1.84).

В обращенной задаче используются изогнутые полосовые шины-зажимы, которые устанавливаются вдоль контура цилиндра и по окружности достаточно большого радиуса. К ним подводится электрический ток с некоторой разностью потенциалов. В образующемся электрическом поле путем непосредственных измерений можно определить эквипотенциальные линии в виде концентрических окружностей, с которыми в прямой задаче совпадают линии тока, а также линии тока в виде радиальных лучей.

Рассмотренное решение для круглого цилиндра можно распространить также на случай циркуляционного обтекания симметричного профиля произвольной формы при нулевом угле атаки.

Циркуляционно-поступательный поток. Такой — более сложный — поток получается в результате наложения друг на друга циркуляционного и поступательного течений несжимаемой жидкости. Потенциал скорости и функция тока циркуляционно-поступательного потока определяются соответственно выражениями $\varphi_{\text{гд}}=\varphi_{1\text{гд}}+\varphi_{2\text{гд}}$ и $\psi_{\text{гд}}=\psi_{1\text{гд}}+\psi_{2\text{гд}}$, в которых индекс «1» относится к циркуляционному, а индекс «2» — к поступательному течению.

Очевидно, функции $\varphi_{\text{гд}}$ и $\psi_{\text{гд}}$, так же как $\varphi_{1(2)\text{гд}}$ и $\psi_{1(2)\text{гд}}$, удовлетворяют уравнению Лапласа (4.1.78). Этому же уравнению будут удовлетворять соответствующие суммарные значения электрического потенциала $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$ и функции тока $\psi=\psi_1+\psi_2$. На этом основывается электрическое моделирование задач об обтекании тел циркуляционно-поступательным потоком.

На рис. 4.1.41 показана принципиальная схема установки для моделирования линий тока (аналогия «В»). На листе электропроводной бумаги наклеивается под некоторым углом атаки изготовленная из

медной фольги модель профиля. Электрический ток некоторого напряжения подводится к этому листу и контуру профиля шинами-зажимами.

Известно, что если на контур не подавать дополнительного напряжения, то будет моделироваться бесциркуляционное обтекание профиля. Подведя же к нему электрический ток, можно получить распределения силовых функций тока, которые соответствуют различным случаям об-

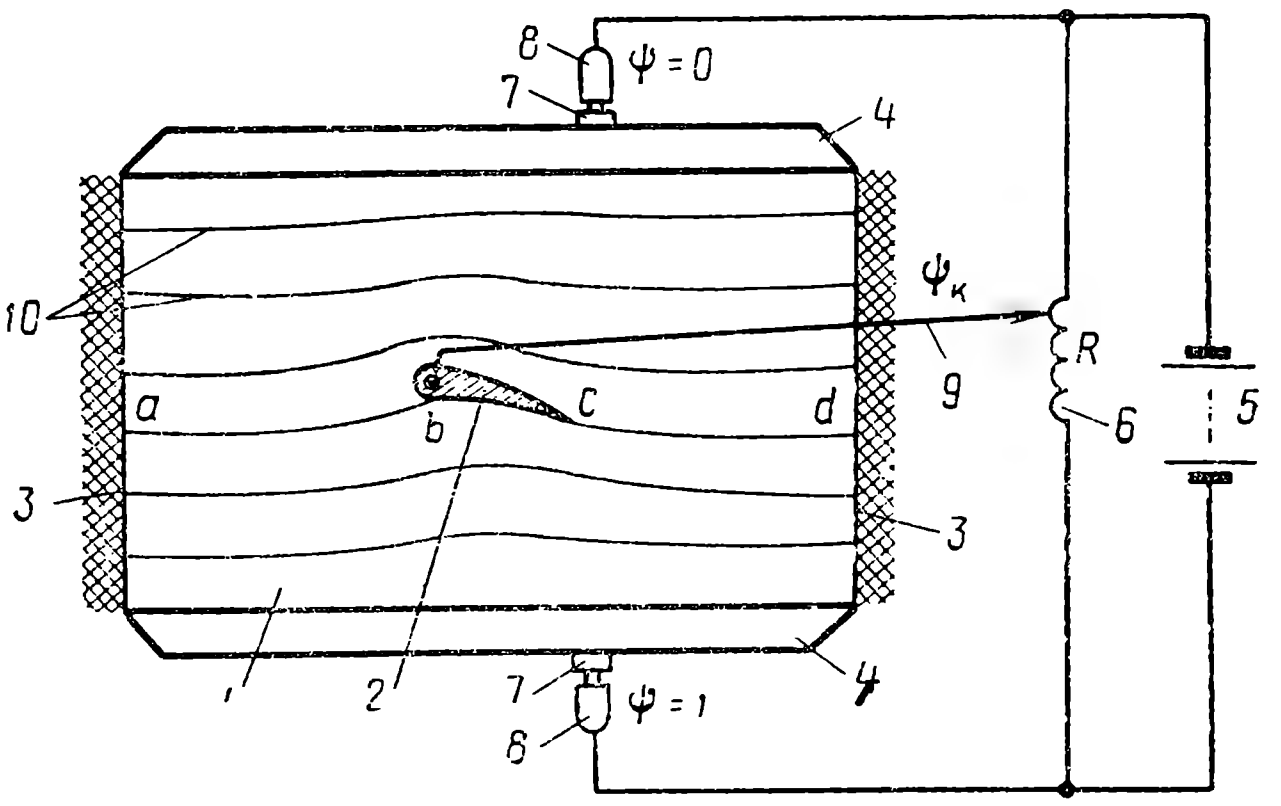


Рис. 4.1.41. Принципиальная схема установки для моделирования линий тока около профиля, обтекаемого с циркуляцией (аналогия «В»):

1 — электропроводная бумага; *2* — модель профиля из медной фольги; *3* — изолированные границы; *4* — шины-зажимы; *5* — источник тока; *6* — сопротивление (делитель напряжения); *7*—гнезда для штепселя; *8* — штепсели; *9* — отвод со штепсельной вилкой; *10* — линии тока ψ =const; *abcd* — линия тока, на которой $\psi = \psi_к$; *b* — точка полного торможения на профиле

текания заданного профиля циркуляционно-поступательным потоком. При этом следует выбрать поле с распределением электрических параметров, соответствующим такому обтеканию профиля, при котором его задняя кромка является точкой плавного схода струй (постулат Жуковского — Чаплыгина). С этой целью в процессе моделирования подбирают такое напряжение на контуре $\psi_к$, чтобы одна из линий тока $\psi = \psi_к$ совпадала с контуром заданного профиля и сходила с него в задней критической точке профиля.

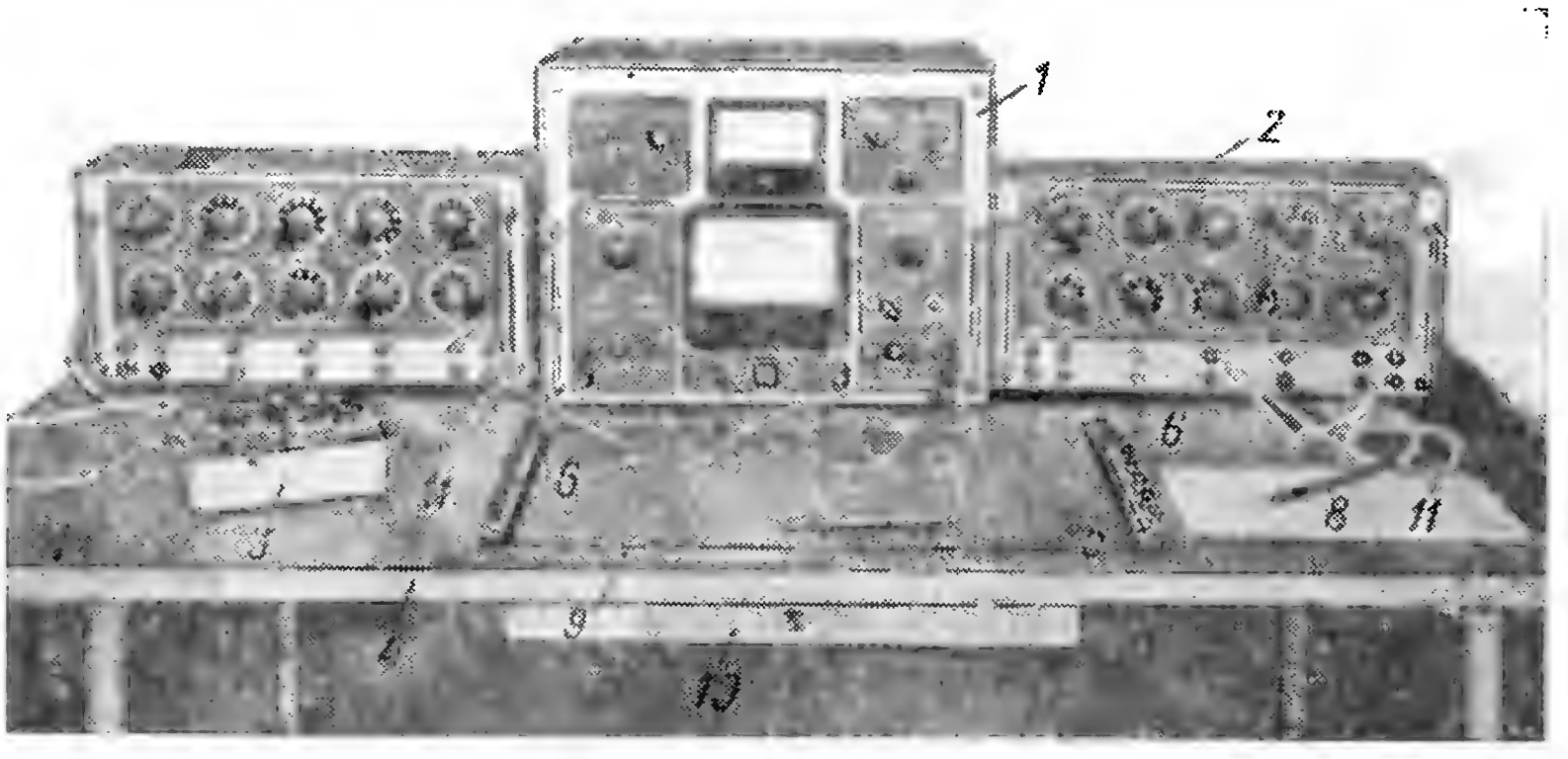


Рис. 4.1.42. Стенд и блоки интегратора ЭГДА:

1 — блок питающего устройства и управления; *2* — блоки потенциометрических делителей напряжения; *3* — измерительное устройство; *4* — стенд интегратора; *5* — шины-зажимы; *6* — зажимные ключи; *7* — одинарная измерительная игла; *8* — двойная измерительная игла; *9* — электропроводная бумага; *10* — ящик для инструмента и приспособлений; *11* — коммутационные и соединительные шнуры

Методика измерений. Комплекс приборов и устройств, используемых для измерения электрических параметров при моделировании процессов обтекания на основе электрогидродинамической аналогии, называется интегратором. В аэродинамических лабораториях широко применяется универсальный интегратор типа ЭГДА-9/60 (рис. 4.1.42).

Рассмотрим методику измерений электрического поля при помощи этого интегратора, а также расчет по результатам этих измерений распределения параметров обтекания профиля и коэффициента его подъемной силы. Заданными условиями в этой задаче являются форма профиля, угол атаки α и скорость набегающего потока V_∞. В результате ее решения должна быть определена геометрическая картина обтекания в виде семейства линий тока и эквипотенциальных кривых, найдено распределение скоростей (давлений) в возмущенной области течения, включая контур профиля, а также вычислен коэффициент подъемной силы.

Как уже указывалось, при электрическом моделировании такого обтекания выбирается лист электропроводной бумаги, в середине которого наклеивается модель профиля из медной фольги, наклоненная к продольной оси под углом α. При этом к модели припаивается отвод со штепсельной вилкой. Такой лист бумаги размещается на панели стенда интегратора и закрепляется шинами-зажимами, как показано на рис. 4.1.41. На эти шины от блока питающего устройства подают напряжения $\psi=1$ и $\psi=0$ и, соединив штепсельную вилку с делителем напряжения, подводят к контуру напряжение $\psi_к$.

С помощью одинарной измерительной иглы, соединенной с измерительным устройством, находят в окрестности задней кромки профиля точку с таким же потенциалом $\psi_к$. Затем, перемещая иглу по направлению к профилю, фиксируют точки, в которых потенциал равен $\psi_к$. Путем подбора $\psi_к$ строится такая линия *cd* с потенциалом $\psi_к$, которая сходит с профиля в задней критической точке (см. рис. 4.1.41). После построения линии *cd* находится другая ветвь *ab* той же линии тока. В окрестности предполагаемой точки полного торможения *b* находится точка с потенциалом $\psi_к$, после чего, перемещая иглу по направлению к профилю (и в обратную сторону), строят по точкам линию *ab*, вдоль которой потенциал является постоянным и равным его значению $\psi_к$ на профиле.

Задавшись шагом $\Delta\psi=\pm(1\div10\%)$, по обе стороны от линии тока *abcd* с помощью той же измерительной иглы строят линии тока $\psi=$ $=$const. На этом моделирование заканчивается.

Затем переходят к моделированию по аналогии «А», которое должно завершиться построением эквипотенциальных линий. Для этой цели необходимо вырезать модель из листа электропроводной бумаги, установить шины-зажимы так, как показано на рис. 4.1.38, и подключить их к блоку питающего устройства, подав напряжения $\varphi=1$ и $\varphi=0$. В таком виде моделирующая установка подготовлена к соответствующим измерениям, в результате которых находятся линии равного потенциала.

При осуществлении измерений следует иметь в виду, что в задачах обтекания с циркуляцией потенциал скорости не является однозначной функцией, т. е. при каждом новом обходе контура значения потенциала будут отличаться на величину циркуляции. Поэтому при моделировании в случае аналогии «А» помимо обычного обращения задачи необходимо перевести двухсвязную область (контур электропроводного листа и контур профиля) в односвязную область.

С этой целью, используя найденные линии тока, строят ортогональную кривую, начинающуюся на контуре и являющуюся эквипотенциальной линией. Затем вдоль нее производят разрез, по «берегам» кото-

рого устанавливают шины-зажимы или полосовые шины (см. рис. 4.1.43), соединенные друг с другом посредством реостата. В полученной области потенциал скорости является однозначной функцией.

Следует отметить, что реостат R не включается в систему питания интегратора, а лишь замыкает шины, установленные по «берегам» разреза. Однако под действием электрического поля, созданного шинами, к которым подведены потенциалы $\varphi=1$ и $\varphi=0$, между «берегами» устанавливается некоторая разность потенциалов φ_{I-II}, что и требовалось при воспроизведении циркуляционного движения. При этом изменением потенциалов φ_I и φ_{II} по «берегам» разреза $I—II$, достигаемым с помощью ползуна реостата, добиваются в соответствии с постулатом Жуковского — Чаплыгина совпадения точки c разветвления эквипотенциальной линии mcn с задней кромкой профиля (см. рис. 4.1.43).

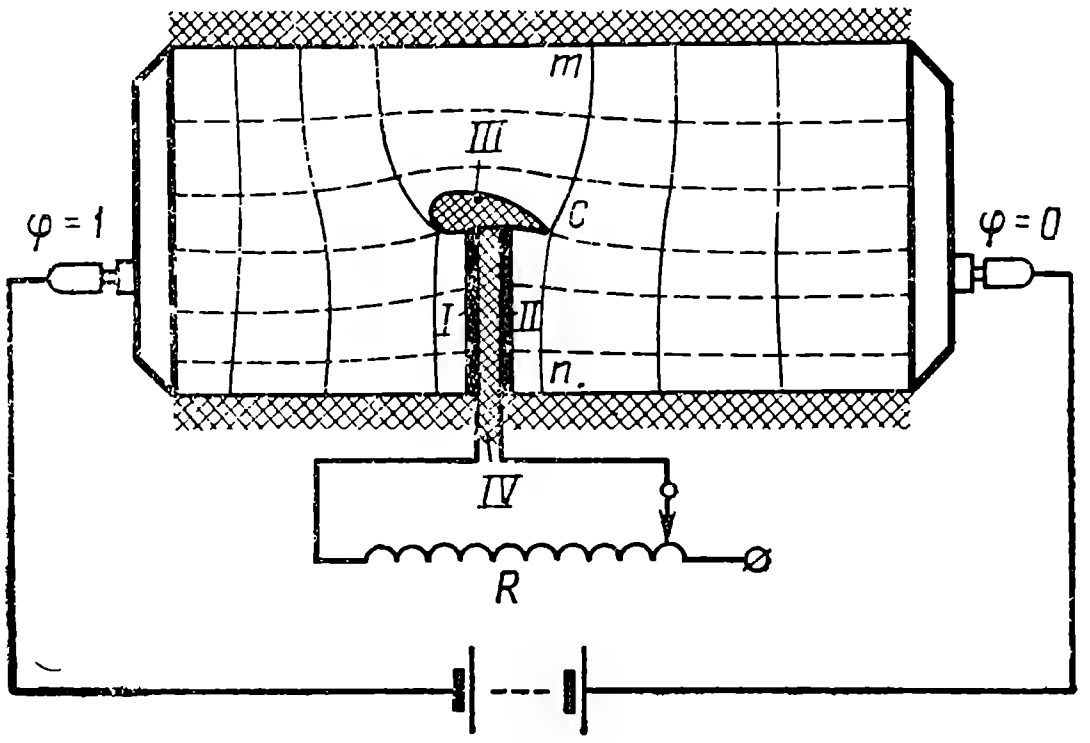


Рис. 4.1.43. Принципиальная схема установки для построения эквипотенциальных линий при обтекании профиля (аналогия «А»):

I, *II* — шины-зажимы; *III* — вырезанный контур профиля; *IV* — изолированный разрез

При некотором положении ползуна реостата и соответствующем сопротивлении R с помощью одинарной иглы (см. рис. 4.1.42) замеряют потенциал в какой-либо точке в окрестности задней кромки и, перемещая эту иглу, определяют положение линии с таким потенциалом. Может случиться, что эта линия не попадет на профиль в точке c; тогда по аналогии с предыдущим берут в качестве исходной новую точку в окрестности задней кромки с другим потенциалом. Если отыскать такую линию не удается, то с помощью реостата изменяют электрическое поле и повторяют указанные операции. В результате соответствующим подбором сопротивления R находят эквипотенциальную линию mc, подходящую к профилю в точке схода. После этого с помощью той же одинарной иглы и измерительного устройства определяют положение другой ветви cn этой линии (см. рис. 4.1.43), а затем, задавшись шагом $\Delta\varphi=\pm(1\div10\%)$, обычным образом строят остальные линии равного потенциала.

Соответствующая разность потенциалов $\Delta\varphi_{I-II}=\varphi_{II}-\varphi_I$ измеряется двойной измерительной иглой (см. рис. 4.1.42), связанной с гальванометром измерительного устройства. По этой величине можно определить разность гидродинамических потенциалов $\Delta\varphi_{гд}=\Delta\varphi_{I-II}/a$, а затем вычислить коэффициент подъемной силы. Соответствующая расчетная зависимость находится из уравнения связи между соотношением $c_y=Y/(0{,}5\rho_\infty V_\infty^2 b)$ и формулой Жуковского $Y=\rho_\infty V_\infty \Gamma$, согласно которому

$$c_y = 2\Gamma/(V_\infty b). \qquad (4.1.87)$$

Так как циркуляция $\Gamma=\Delta\varphi_{гд}=\Delta\varphi_{I-II}/a$, то

$$c_y = 2\Delta\varphi_{I-II}/(V_\infty ab).$$

В этой формуле V_∞ можно выразить через потенциал скоростей набегающего потока:

$$V_\infty = \partial\varphi_{гд\infty}/\partial x$$

или в конечных разностях:

$$V_\infty \approx \Delta\varphi_{гд\infty}/(\Delta x).$$

Так как $\Delta x = m\Delta\bar{x}$, $b = mb'$ (b' — хорда модели) и $\Delta\varphi_{гд\infty} = \Delta\varphi_\infty/a$, где $\Delta\varphi_\infty$ — разность электрических потенциалов вдоль отрезка $\Delta\bar{x}$ силовой линии, моделирующей линию тока набегающего потока, то коэффициент

$$c_y = 2\frac{\Delta\varphi_{I-II}}{\Delta\varphi_\infty}\cdot\frac{\Delta\bar{x}}{b'}. \qquad (4.1.88)$$

Величина $\Delta\varphi_\infty$, как и $\Delta\varphi_{I-II}$, замеряется двойной иглой в области линии *1′4′* (см. рис. 4.1.38), моделирующей набегающий невозмущен-

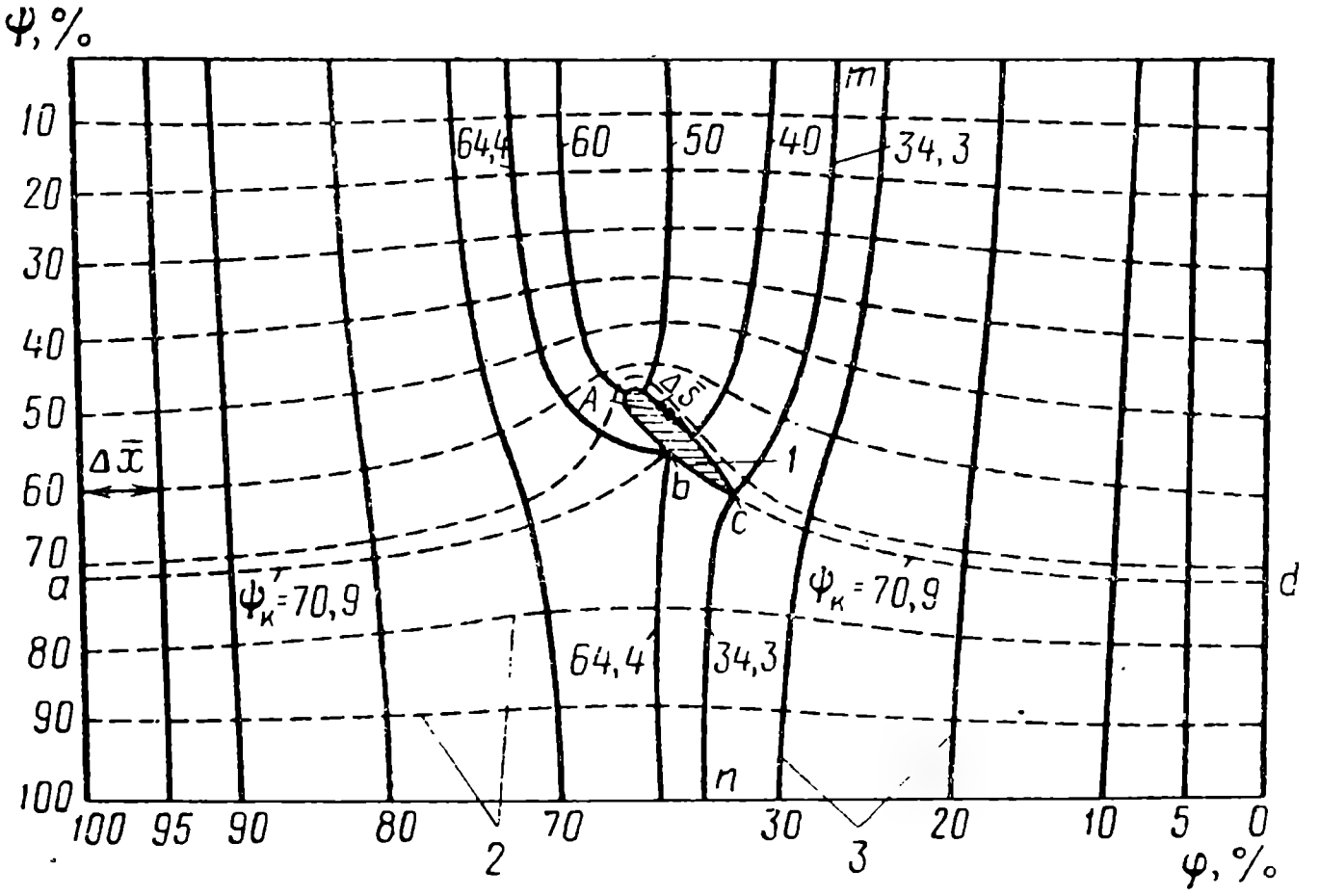


Рис. 4.1.44. Сетка линий тока и эквипотенциальных линий:

1 — профиль; *2* — линии тока; *3* — линии равного потенциала

ный поток, вдоль направления невозмущенного потока и регистрируется гальванометром. Длина отрезка $\Delta\bar{x}$ силовой линии тока, на котором измеряется разность потенциалов $\Delta\varphi_\infty$, регулируется изменением расстояния между иглами.

Если известно распределение линий тока и эквипотенциальных линий около профиля (рис. 4.1.44), то нетрудно определить скорость в любой точке потока. В частности, местная скорость на профиле

$$V_s = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\bar{s}}\cdot\frac{\Delta\bar{x}}{\Delta\varphi_\infty}V_\infty, \qquad (4.1.89)$$

где $\Delta\varphi_\infty$ — шаг, определяющий расстояние между эквипотенциальными линиями «на бесконечности» (около боковых кромок листа); $\Delta\bar{x}$ — отрезок линии тока, заключенный между двумя такими линиями; $\Delta\varphi$ — шаг, определяющий расстояние между эквипотенциальными линиями вблизи профиля; $\Delta\bar{s}$ — отрезок линии тока (контура профиля), заключенный между этими линиями.

Определяемая по (4.1.89) скорость V_s относится к середине участка $\Delta\bar{s}$. Например, если замеренная на отрезке $\Delta\bar{x} = 10$ *мм* (см. рис. 4.1.44) величина $\Delta\varphi_\infty = 0{,}05$ (5%), то в точке A, где на отрезке $\Delta\bar{s} = 10$ *мм* величина $\Delta\varphi = 0{,}10$ (10%), скорость

$$V_A = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\bar{s}}\cdot\frac{\Delta\bar{x}}{\Delta\varphi_\infty}V_\infty = \frac{0{,}10}{10\ мм}\cdot\frac{10\ мм}{0{,}05}V_\infty = 2V_\infty.$$

Воспользовавшись формулой (4.1.6), можно определить коэффициент давления в точке A:

$$\bar{p}_A = 1 - \frac{V_A^2}{V_\infty^2} = 1 - \frac{(2V_\infty)^2}{V_\infty^2} = -3$$

и соответствующее абсолютное давление:

$$p_A = \bar{p}_A q_\infty + p_\infty = -3q_\infty + p_\infty.$$

Порядок проведения работы

1. Ознакомиться с устройством и принципом действия, а также проверить готовность к работе всех блоков и приборов интегратора в соответствии с инструкцией по его эксплуатации.

2. Изготовить из медной фольги модель исследуемого профиля.

3. Вырезать прямоугольный лист электропроводной бумаги, размеры которого определяются в соответствии с величиной модели профиля (см. рис. 4.1.38).

4. Приклеить модель профиля электропроводным клеем в середине вырезанного листа так, чтобы она оказалась наклоненной к продольной оси на заданный угол атаки.

5. Припаять к модели отвод со штепсельной вилкой, по которому на контур профиля подается потенциал.

6. Разместить лист электропроводной бумаги с наклеенной моделью из фольги на панель интегратора, установить шины-зажимы и соединить их с источником питания.

7. Осуществить на листе электропроводной бумаги построение силовой линии тока, сходящей с задней кромки модели профиля. Для этого необходимо выполнить следующие операции:

а) определить при помощи одинарной измерительной иглы и измерительного устройства электрический потенциал $\psi_к'$ на контуре профиля в случае, когда напряжение на лист электропроводной бумаги подается только через шины-зажимы;

б) используя ту же измерительную иглу, найти точку в окрестности задней кромки профиля с таким же потенциалом $\psi_к'$, а затем постепенно перемещать иглу по направлению к контуру, фиксируя точки с потенциалом $\psi = \psi_к'$. В результате получим силовую линию тока $\psi = \psi_к'$;

в) если эта линия тока не совпадает с контуром в точке задней кромки, то следует подключить отвод со штепсельной вилкой к блоку потенциометрических делителей напряжения и подать на профиль дополнительное напряжение, затем измерить новый потенциал на контуре $\psi_к''$ и построить другую линию $\psi = \psi_к''$. Аналогичные построения производят до тех пор, пока одна из линий тока $\psi = \psi_к^n$ не совпадает с кривой cd (см. рис. 4.1.41), сходящей с задней кромки. Затем при помощи измерительной иглы по значению электрического потенциала $\psi = \psi_к^n$ построить другую ветвь ab найденной линии тока (см. рис. 4.1.41);

г) выбрав произвольное значение электрического потенциала, отличающееся от $\psi = \psi_к^n$ на величину шага, производят аналогичное построение соседней с контуром линии тока и т. д. При этом величина шага в малой окрестности профиля составляет не более 1% выбранного потенциала, а на удалении от него — примерно до 10%.

На черной электропроводной бумаге точки, зафиксированные измерительной иглой, и соединяющие их линии тока наносятся цветным стеклографом.

8. Отключив шины-зажимы от источника питания, а отвод на модели от делителя напряжения и сняв затем эти шины с листа электро-

проводной бумаги, провести под профилем (см. рис. 4.1.43) на небольшом расстоянии друг от друга две линии *I* и *II*, перпендикулярные линиям тока. После этого вырезать часть бумаги между этими линиями и одновременно сделать вырез по контуру профиля.

9. Установить шины-зажимы (или полосовые шины) вдоль линий *I* и *II* и, кроме того, закрепить аналогичные шины на боковых кромках листа электропроводной бумаги (см. рис. 4.1.43).

10. Присоединив шины-зажимы к источнику питания, а шины, установленные вдоль линий *I—II*, — к реостату, осуществить, используя

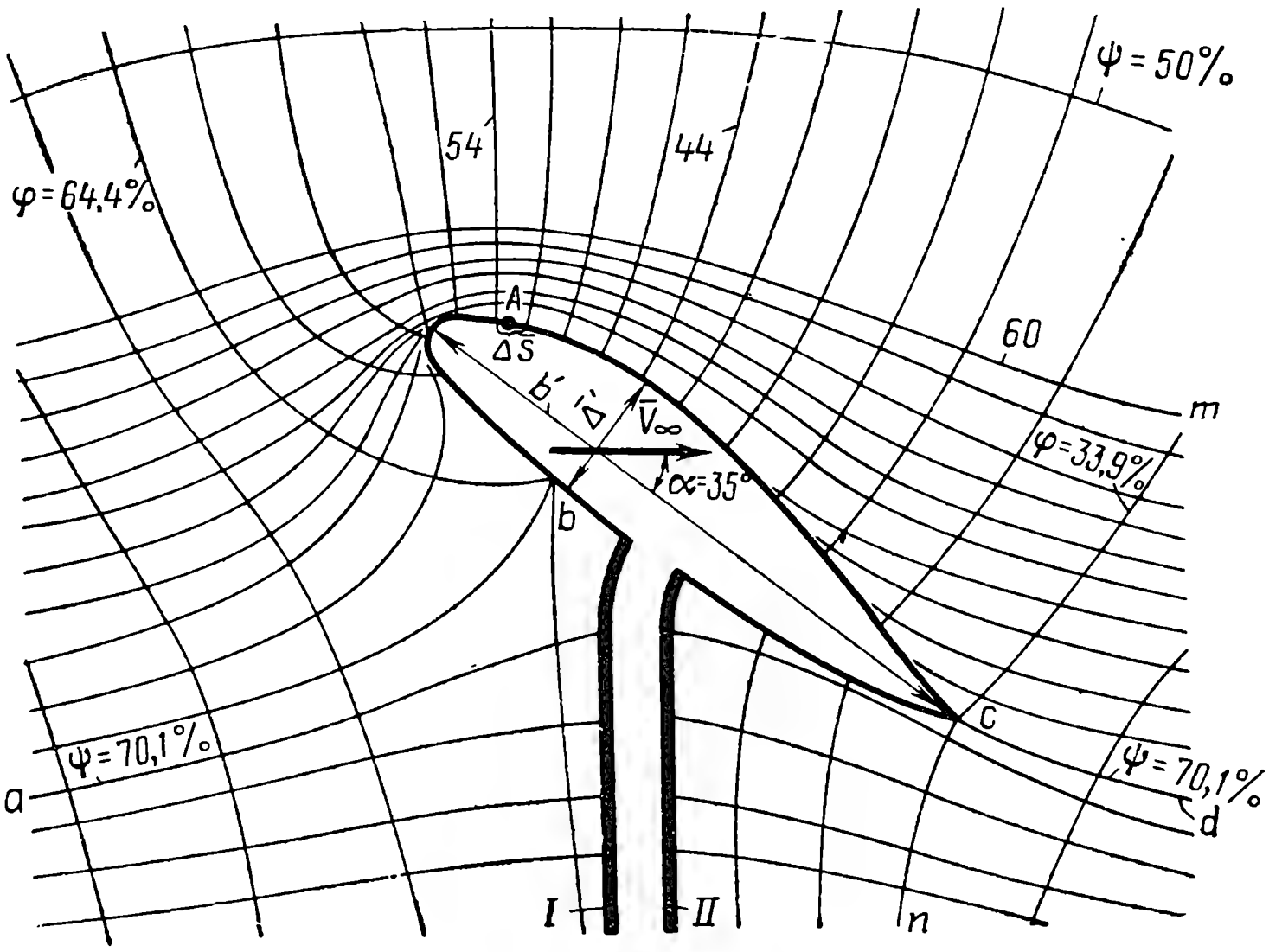


Рис. 4.1.45. Сетка линий тока и эквипотенциальных линий при обтекании профиля несжимаемым невязким потоком, построенная по методу электроаналогии

одинарную иглу и измерительное устройство, построение эквипотенциальной кривой *mcn* (см. рис. 4.1.43), проходящей через заднюю кромку профиля. Такое построение достигается путем соответствующего изменения сопротивления реостата. Этот процесс нахождения эквипотенциальной кривой *mcn* аналогичен построению линии тока *abcd*. После нахождения этой кривой строятся по заданному шагу $\Delta\varphi = \pm(1 \div 10\%)$ другие эквипотенциальные линии.

11. При помощи двойной измерительной иглы и измерительного устройства определить на шинах разность потенциалов $\Delta\varphi_{I-II}$.

12. Используя двойную иглу, определить разность потенциалов $\Delta\varphi_\infty$ вдоль нескольких силовых линий тока вблизи боковых кромок листа (при одинаковом расстоянии $\Delta\bar{x}$ между иглами) и вычислить соответствующее среднее значение этой разности.

13. По формуле (4.1.88) подсчитать коэффициент подъемной силы профиля при заданном угле атаки.

14. По распределению эквипотенциальных кривых на контуре профиля рассчитать распределение скорости [см. (4.1.89)].

Пример. Рассмотрим применение интегратора ЭГДА-9/60 для исследования обтекания профиля серии ЦАГИ В, форма которого показана на рис. 4.1.45. Исследование обтекания профиля несжимаемым потоком проводилось для угла атаки $\alpha = 35°$.

Длина хорды модели профиля, выполненной из медной фольги, равнялась $b' = 100$ *мм*, а толщина профиля $\Delta' = 20$ *мм* (относительная толщина $\bar{\Delta}' = \Delta'/b' = 0{,}2$). В соответствии с размерами модели прямоугольный лист электропроводной бумаги имел размеры 250×450 *мм*. Модель была наклеена электропроводным клеем в середине этого

листа под углом $\alpha=35°$ к продольной оси. Шины-зажимы, установленные вдоль продольных сторон листа, соединялись с блоком питания интегратора, на выходе которого постоянное напряжение равнялось 28 *в*. Это напряжение в соответствии с безразмерной градуировкой шкал интегратора и принималось за 100%. Таким образом, на каждой из двух шин потенциалы равнялись соответственно 100% и 0. Изменяя напряжение $\psi_к$, подаваемое на контур профиля, подбирали значение $\psi_к=70{,}1\%$, при котором линия тока *cd* сходила с точки задней кромки. При этом точки линии тока с потенциалом $\psi=\psi_к$ находились с помощью измерительной иглы и гальванометра. Для фиксации этих точек и построения линий тока использовался стеклограф, заполненный жидкой акварельной краской желтого цвета. Аналогично строилась другая ветвь *ab* линии тока с $\psi=\psi_к=70{,}1\%$.

Затем для принятого значения $\Delta\psi=-1\%$ были построены линии тока с электрическими потенциалами, значения которых изменялись от 69 до 60%. При этом, применяя одинарную иглу, на бумаге отыскивали точки с соответствующим потенциалом, величина которого регистрировалась по гальванометру. Построение каждой линии начиналось от одной из боковых кромок. Таким же образом были определены линии тока для выбранных ψ от 50 до 10% (с интервалом в 10%).

В области под профилем был выбран шаг $\Delta\psi=2\%$ и линии тока построены с потенциалами ψ от 72 до 80%. Затем построения были продолжены с большим шагом ($\Delta\psi=5\%$) для значений $\psi=85$; 90 и 95%.

Ввиду большой густоты линий тока в области над профилем часть этих линий на рис. 4.1.45 оборвана. Линии *I* и *II* под профилем, перпендикулярные построенным линиям тока, проводились на расстоянии 8 *мм* друг от друга. После того как была разрезана бумага между этими линиями и вырезан контур профиля, к установленным на боковых кромках листа шинам-зажимам были проведены напряжения $\varphi=100\%$ и 0. Изменением сопротивления реостата было подобрано напряжение $\varphi=33{,}9\%$, при котором точка разветвления эквипотенциальной линии совпала с точкой *c* задней кромки.

Аналогично были построены эквипотенциальные линии с шагом $\Delta\varphi=\pm2\%$ для значений φ от 30 до 70%, а затем с шагом $\Delta\varphi=10\%$ для $\varphi=10\div90\%$. Полученная в результате этих построений сетка линий тока и линий равного потенциала около профиля показана на рис. 4.1.45.

Используя двойную измерительную иглу, подключенную к гальванометру, измеряли разность потенциалов $\Delta\varphi_{I-II}=17{,}4\%$ на линиях *I*—*II*. При помощи этого же измерительного устройства, в котором расстояние между иглами установлено $\Delta\bar{x}=10$ *мм*, вблизи боковых кромок листа была измерена разность потенциалов вдоль нескольких силовых линий и вычислено среднее значение этой разности, оказавшееся равным $\Delta\varphi_\infty=6\%$. По этим данным при помощи (4.1.88) определен коэффициент подъемной силы профиля:

$$c_y=2\frac{\Delta\varphi_{I-II}}{\Delta\varphi_\infty}\cdot\frac{\Delta\bar{x}}{b'}=2\frac{0{,}174}{0{,}06}\cdot\frac{10}{100}=0{,}58.$$

По полученной сетке линий тока и линий равного потенциала определялись скорость и давление. Рассмотрим для примера точку *A* на профиле (см. рис. 4.1.45). Измерив в ее окрестности расстояние между двумя эквипотенциальными кривыми $\Delta\bar{s}=3$ *мм* и установив по сетке разность потенциалов $\Delta\varphi=2\%$ (0,02), можно найти по формуле (4.1.89) скорость

$$V_A=\frac{\Delta\varphi}{\Delta\bar{s}}\cdot\frac{\Delta\bar{x}}{\Delta\varphi_\infty}V_\infty=\frac{0{,}02}{3}\cdot\frac{10}{0{,}06}V_\infty=1{,}11\,V_\infty.$$

Соответствующий коэффициент давления

$$\bar{p}_A=1-V_A^2/V_\infty^2=1-(1{,}11)^2=-0{,}23.$$

Работа 4.1.4

Профиль крыла в сверхзвуковом потоке

Цель работы — найти распределение давления по профилю крыла при различных углах атаки и вычислить соответствующие аэродинамические коэффициенты профиля.

Общие сведения

Основные расчетные формулы. Сверхзвуковое обтекание заостренного профиля характеризуется возникновением перед ним присоединенного криволинейного скачка уплотнения (рис. 4.1.46). Непосредст-

венно за таким скачком происходит резкое изменение направления струек, скачкообразное увеличение давления и соответствующее уменьшение скорости. При этом для углов заострения профиля, меньших критических, эта скорость остается сверхзвуковой. Вниз по потоку вдоль криволинейной поверхности сверхзвуковая скорость постепенно увеличивается, а давление соответственно уменьшается. Сверхзвуковое течение за профилем поворачивается и принимает направление, близкое к направлению набегающего потока. Такой поворот сопровождается образованием хвостового скачка уплотнения, течение за которым уже не оказывает влияния на обтекание профиля.

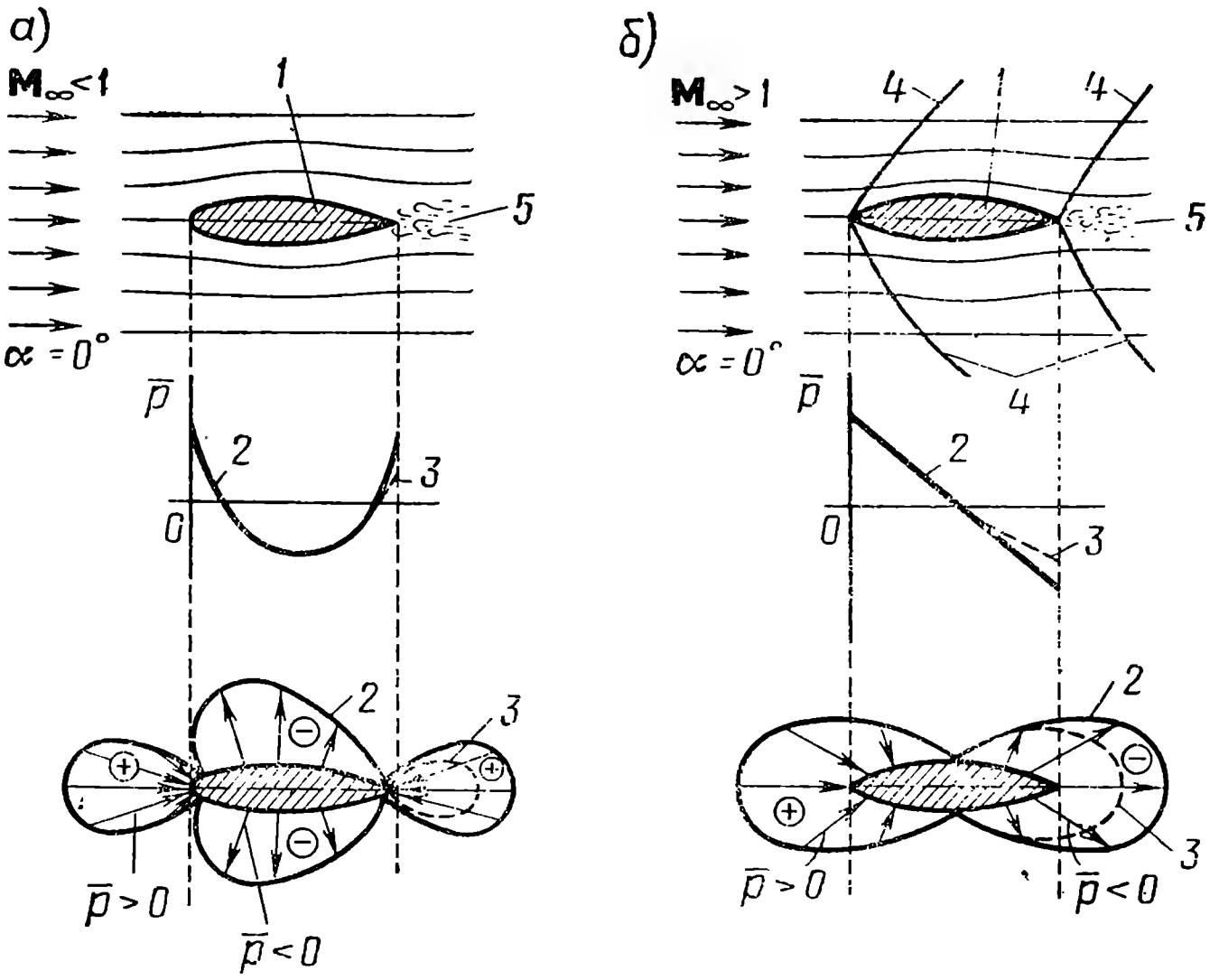


Рис. 4.1.46. Профиль в потоке газа:

а — дозвуковое обтекание; *б* — сверхзвуковое обтекание; *1* — профиль; *2* — идеальная жидкость; *3* — вязкая жидкость; *4* — скачки уплотнения; *5* — вихревой след

Сверхзвуковое обтекание профиля по своему характеру принципиально отличается от обтекания его потоками с дозвуковыми скоростями. На это указывает, в частности, различие в распределении давления (см. рис. 4.1.46). Для дозвукового обтекания идеальной (невязкой) жидкостью характерно полное восстановление давления до его величины в набегающем потоке, тогда как в сверхзвуковом потоке такое явление не имеет места. Анализ распределения давления на рис. 4.1.46 показывает, что при обтекании профиля дозвуковым невязким потоком аэродинамическое сопротивление отсутствует (парадокс Эйлера—Даламбера). В случае же сверхзвуковых скоростей такое сопротивление, обусловленное перераспределением давления, обязательно возникает, даже если поток невязкий. Это сопротивление называется **волновым.**

В реальных условиях обтекание вязким газом вызывает некоторое перераспределение давления и соответствующее изменение волнового сопротивления. Одновременно возникает дополнительное сопротивление, обусловленное трением. Полное сопротивление профиля будет равно сумме сопротивлений от давления и трения. Соответствующая величина суммарного коэффициента сопротивления

$$c_x = c_{xp} + c_{xf} = c_{x\text{в}} + c_{xf}, \qquad (4.1.90)$$

где $c_{x\text{в}}$ и c_{xf} — соответственно коэффициенты волнового сопротивления и сопротивления трения.

Как и при дозвуковых скоростях, влияние вязкости на подъемную силу и аэродинамический момент профиля в сверхзвуковом потоке значительно меньше, чем на сопротивление. Практически этим влиянием можно пренебречь и считать, что подъемная сила и момент создаются только за счет соответствующего распределения давления. Таким образом, аэродинамические коэффициенты этой силы и момента будут $c_y = c_{yp}$ и $m_z = m_{zp}$.

Расчет коэффициента давления $\bar{p} = (p - p_\infty)/q_\infty$ на тонком профиле, обтекаемом сверхзвуковым потоком под малым углом атаки, можно

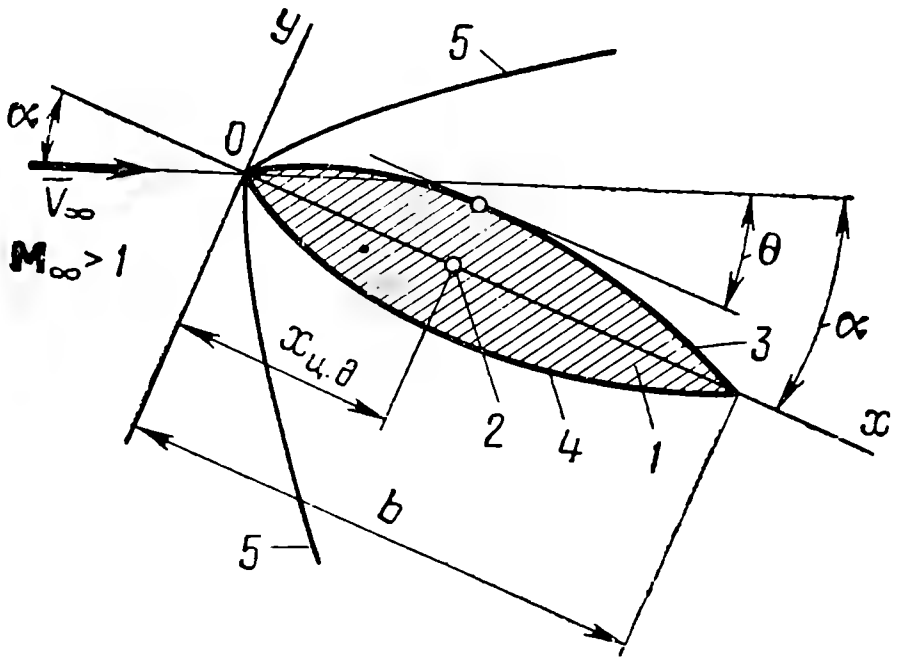


Рис. 4.1.47. Профиль в сверхзвуковом потоке:

1 — профиль; *2* — центр давления; *3*—верхний контур профиля с уравнением $y_в = f_1(x)$; *4* — нижний контур — $y_н = f_2(x)$; *5* — скачок уплотнения

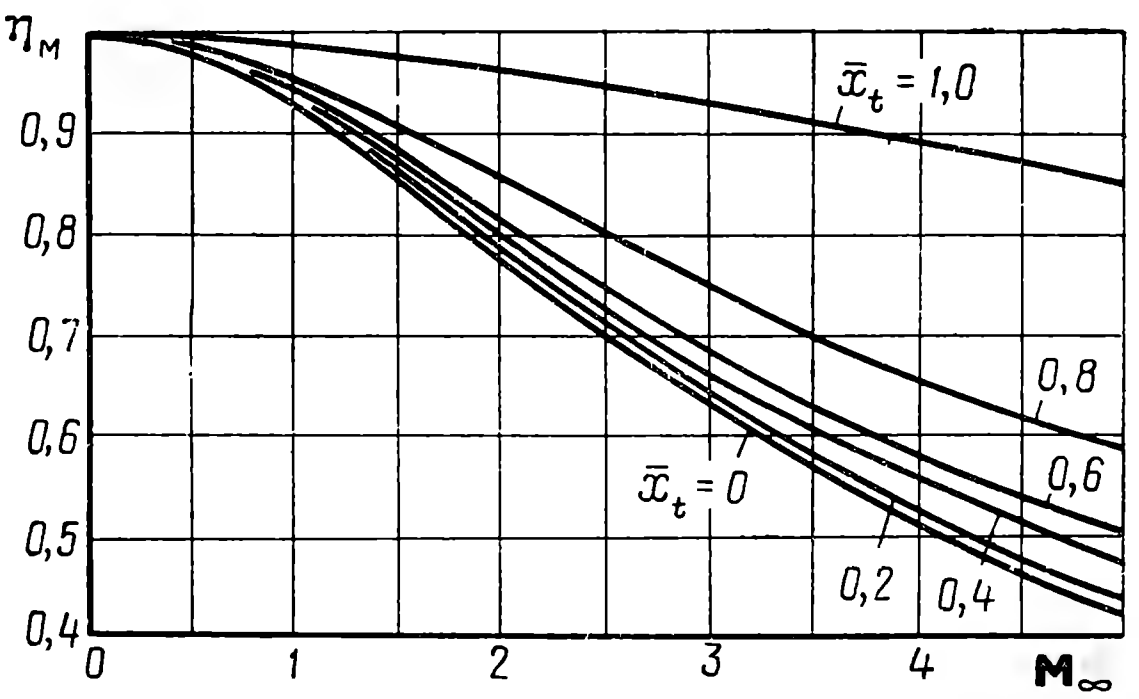


Рис. 4.1.48. График для определения коэффициента $\eta_м = f(M_\infty, \bar{x}_t)$

осуществлять по следующей формуле, полученной в аэродинамической теории второго приближения,

$$\bar{p} = \pm c_1 \theta + c_2 \theta^2, \tag{4.1.91}$$

где θ, *рад* — угол между касательной к профилю в данной точке и направлением невозмущенного потока;

$$c_1 = 2\left(M_\infty^2 - 1\right)^{-1/2}; \tag{4.1.92}$$

$$c_2 = 0{,}5 \cdot \left(M_\infty^2 - 1\right)^{-2}\left[\left(M_\infty^2 - 2\right)^2 + kM_\infty^4\right]. \tag{4.1.93}$$

В соответствии с рис. 4.1.47, на котором показан положительный угол атаки, знак «+» в (4.1.91) относится к нижней, а «—» — к верхней стороне профиля. Угол θ в (4.1.91) зависит от формы профиля, определяемой уравнением $y = f(x)$ его контура, а также от угла атаки α в соответствии с выражением

$$\theta = \alpha - dy/dx. \tag{4.1.94}$$

Здесь производная dy/dx определяется по уравнению контура $y = f(x)$ с учетом знака для верхней и нижней сторон профиля. Величину (4.1.94) можно рассматривать в качестве местного угла атаки, под которым обтекается потоком с числом M_∞ тонкая пластинка (полигон) в виде элементарного участка контура, совпадающего с касательной в рассматриваемой точке.

Внося (4.1.91) в (4.1.9), нетрудно получить формулу для коэффициента нормальной силы c_{Np}, который в соответствии с (4.1.14) и равенством $c_y = c_{yp}$ можно принять с достаточным приближением равным полному коэффициенту подъемной силы:

$$c_y = c_y^\alpha \alpha = 2c_1 \alpha + c_2 K_2, \tag{4.1.95}$$

где

$$K_2 = \int_0^1 \left[\left(\frac{d\bar{y}_н}{d\bar{x}} \right)^2 - \left(\frac{d\bar{y}_в}{d\bar{x}} \right)^2 \right] d\bar{x}. \qquad (4.1.96)$$

После подстановки (4.1.91) в (4.1.12) получим соотношение для коэффициента c_{Rp} осевой силы от давления, которое вместе с (4.1.14) и (4.1.95) дает следующую формулу для коэффициента волнового сопротивления:

$$c_{xв} = c_{xp} = 2c_1 \alpha^2 + c_1 K_1 \bar{\Delta}^2 + 3c_2 K_2 \alpha, \qquad (4.1.97)$$

где $\bar{\Delta} = \Delta/b$ — относительная толщина профиля;

$$K_1 = \frac{1}{\bar{\Delta}^2} \int_0^1 \left[\left(\frac{d\bar{y}_н}{d\bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{d\bar{y}_в}{d\bar{x}} \right)^2 \right] d\bar{x}. \qquad (4.1.98)$$

В выражениях (4.1.96), (4.1.98) $\bar{y}_н = y_н/b$ и $\bar{y}_в = y_в/b$ — относительные координаты точек контура соответственно для нижней и верхней сторон профиля. В частном случае симметричного профиля $(d\bar{y}_н/d\bar{x})^2 = (dy_в/dx)^2 = (dy/dx)^2$ и, следовательно, $K_2 = 0$;

$$K_1 = \frac{2}{\bar{\Delta}^2} \int_0^1 \left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} \right)^2 d\bar{x}; \qquad (4.1.99)$$

$$c_y = 2c_1 \alpha; \qquad (4.1.100)$$

$$c_{xв} = 2c_1 \alpha^2 + c_1 K_1 \bar{\Delta}^2. \qquad (4.1.101)$$

С учетом (4.1.90) и (4.1.97) коэффициент полного сопротивления профиля

$$c_x = 2c_1 \alpha^2 + c_1 K_1 \bar{\Delta}^2 + 3c_2 K_2 \alpha + c_{xf}. \qquad (4.1.102)$$

Для симметричного профиля согласно (4.1.101)

$$c_x = 2c_1 \alpha^2 + c_1 K_1 \bar{\Delta}^2 + c_{xf} \qquad (4.1.103)$$

или с учетом (4.1.100) и (4.1.92)

$$c_x = \frac{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}{4} c_y^2 + c_1 K_1 \bar{\Delta}^2 + c_{xf}. \qquad (4.1.104)$$

Уравнение (4.1.104) определяет зависимость между коэффициентами сопротивления и подъемной силы — так называемую поляру профиля.

Коэффициент продольного момента относительно передней кромки найдем в результате подстановки (4.1.91) в (4.1.20):

$$m_z = c_1 A_1 \bar{\Delta} - 2c_2 B_2 + (2c_2 A_2 - c_1) \alpha, \qquad (4.1.105)$$

где

$$A_1 = \frac{1}{\bar{\Delta}} \int_0^1 \left(\frac{d\bar{y}_н}{d\bar{x}} + \frac{d\bar{y}_в}{d\bar{x}} \right) \bar{x} d\bar{x}; \qquad (4.1.106)$$

$$A_2 = \int_0^1 \left(\frac{d\bar{y}_н}{d\bar{x}} - \frac{d\bar{y}_в}{d\bar{x}} \right) \bar{x} d\bar{x}; \qquad (4.1.107)$$

$$B_2 = \int_0^1 \left[\left(\frac{d\bar{y}_н}{d\bar{x}} \right)^2 - \left(\frac{d\bar{y}_в}{d\bar{x}} \right)^2 \right] \bar{x} d\bar{x}. \qquad (4.1.108)$$

Для симметричного профиля $d\bar{y}_н/d\bar{x} = -d\bar{y}_в/d\bar{x}$, поэтому $A_1 = 0$, $B_2 = 0$ и

$$A_2 = -2\int_0^1 \frac{d\bar{y}_в}{d\bar{x}}\bar{x}d\bar{x}. \qquad (4.1.109)$$

В соответствии с этим

$$m_{\bar{z}} = (2c_2 A_2 - c_1)\alpha. \qquad (4.1.110)$$

Коэффициент центра давления профиля определяется с учетом формулы $c_{ц.д} = -m_z/c_y$ и зависимостей (4.1.105) и (4.1.95). Для симметричного профиля, воспользовавшись (4.1.110) и (4.1.100), найдем

$$c_{ц.д} = x_{ц.д}/b = 0{,}5\left(1 - 2\frac{c_2}{c_1}A_2\right). \qquad (4.1.111)$$

Коэффициент сопротивления трения c_{xf} в формуле (4.1.102) или (4.1.103) может быть определен по выражению

$$c_{xf} = (2c_{xf})_{M_\infty=0}\eta_{\bar{\Delta}}\eta_м, \qquad (4.1.112)$$

в котором $(2c_{xf})_{M_\infty=0}$, $\eta_{\bar{\Delta}}$, $\eta_м$ определяются из графиков соответственно на рис. 4.1.8, 4.1.9, 4.1.48. При этом для нахождения величины $(2\,c_{xf})_{M_\infty=0}$ необходимо знать относительную координату точки перехода $x_t = \mathbf{Re}_{кр}/\mathbf{Re}_\infty$ и число Рейнольдса $\mathbf{Re}_\infty = V_\infty b/\nu_\infty$, для определения коэффициента $\eta_{\bar{\Delta}}$ — относительные толщину профиля $\bar{\Delta}$ и координату точки перехода $\bar{x}_t$, а для определения коэффициента $\eta_м$ — ту же координату $\bar{x}_t$ и число $\mathbf{M}_\infty$.

Измерение давления. Исследования сверхзвукового обтекания профиля с целью измерения на нем давления осуществляются в сверхзвуковых аэродинамических трубах. Эксперименты в таких трубах проводятся с дренированными моделями крыльев, сечения которых совпадают по форме с заданным профилем (см. работу 4.1.1). При этом следует подчеркнуть, что при разработке их конструкции должно быть обращено особое внимание на обеспечение прочности моделей, а также устройств для их крепления в рабочей части трубы, имея в виду, что вследствие больших скоростей обтекания могут возникнуть значительные аэродинамические силы и моменты.

На рис. 4.1.49 показана схема экспериментальной установки, включающей сверхзвуковую аэродинамическую трубу с закрытой рабочей частью, модель крыла с заостренным профилем произвольной формы, устройство для ее крепления и установки под заданным углом атаки, а также измерительные приборы (манометры).

Размеры моделей, которые используются для испытаний в сверхзвуковых аэродинамических трубах, с учетом степени допустимого «загромождения» площади сечения трубы определяются по экспериментальному графику на рис. 1.4.15.

Форма и размеры профиля, а также угол атаки, под которым модель располагается в рабочей части трубы, должны быть такими, чтобы отраженные волны пересекались за пределами модели (рис. 4.1.50).

Размах модели выбирается из условия, чтобы влияние концов крыла не сказывалось на характере течения в той части модели, где расположены дренажные отверстия. Другими словами, полоска крыла, в которой располагаются дренажные отверстия, должна быть вне областей, ограниченных конусами Маха, проведенными через передние кромки концевых сечений (рис. 4.1.51).

Для определения параметров сверхзвукового потока, необходимых в дальнейшем для расчета аэродинамических коэффициентов профиля,

замеряются полное давление и температура изэнтропического торможения (p_0 и T_0), а также статическое давление p_∞ в рабочей части трубы. По этим данным определяются другие параметры воздуха в рабочей части, а именно: число M_∞, скорость потока V_∞, скорость звука a_∞, плотность ρ_∞, коэффициент динамической вязкости μ_∞.

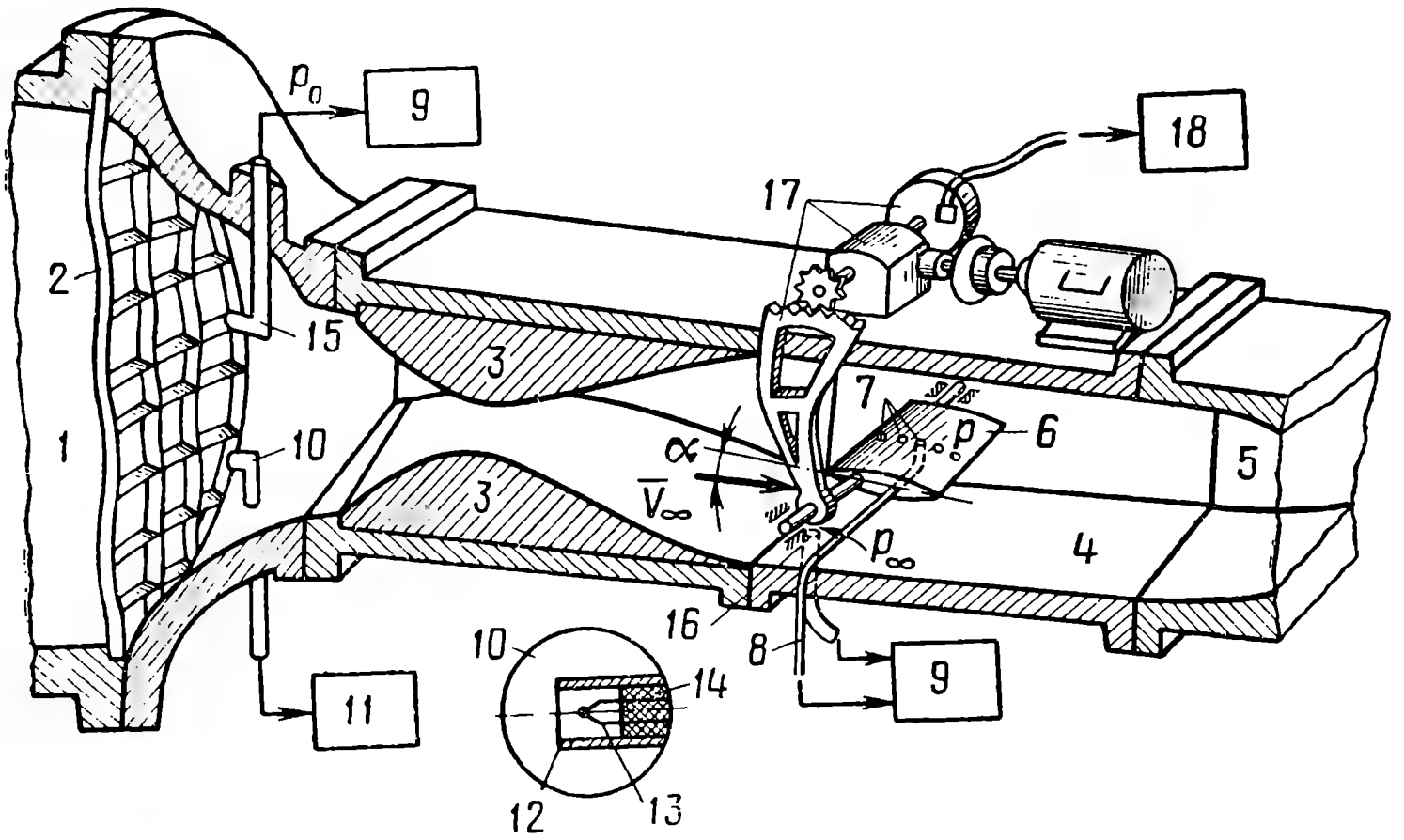


Рис. 4.1.49. Схема установки модели крыла и измерительных приборов в сверхзвуковой аэродинамической трубе:

1 — форкамера; *2* — спрямляющая решетка; *3* — сопло (сопловой вкладыш); *4* — рабочая часть; *5* — диффузор; *6* — модель крыла; *7* — дренажные отверстия; *8* — дренажная трубка; *9* — групповой регистрирующий манометр (ГРМ); *10* — датчик температуры; *11* — милливольтметр; *12* — кожух; *13* — термопара; *14* — изоляция; *15* — трубка Пито; *16* — отверстие в стенке трубы для замера статического давления; *17* — механизм изменения углов атаки; *18* — пульт управления

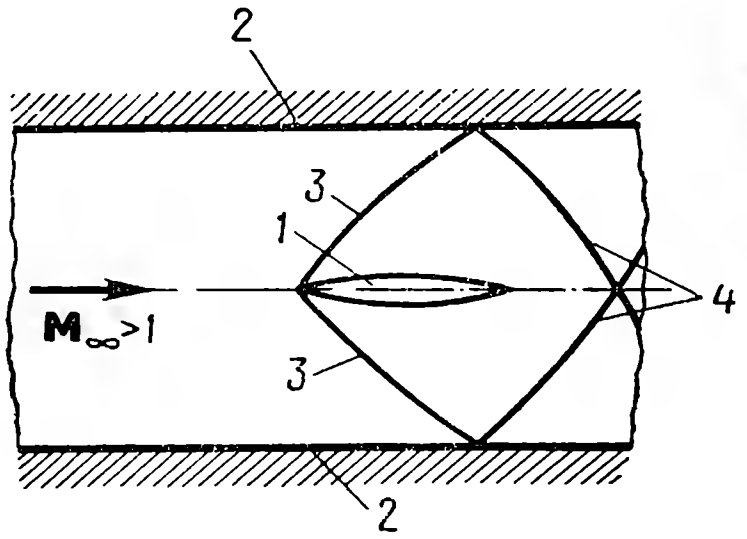


Рис. 4.1.50. Отражение ударных волн от стенок аэродинамической трубы;

1 — модель; *2* — стенки трубы; *3* — скачки уплотнения; *4*—отраженные ударные волны

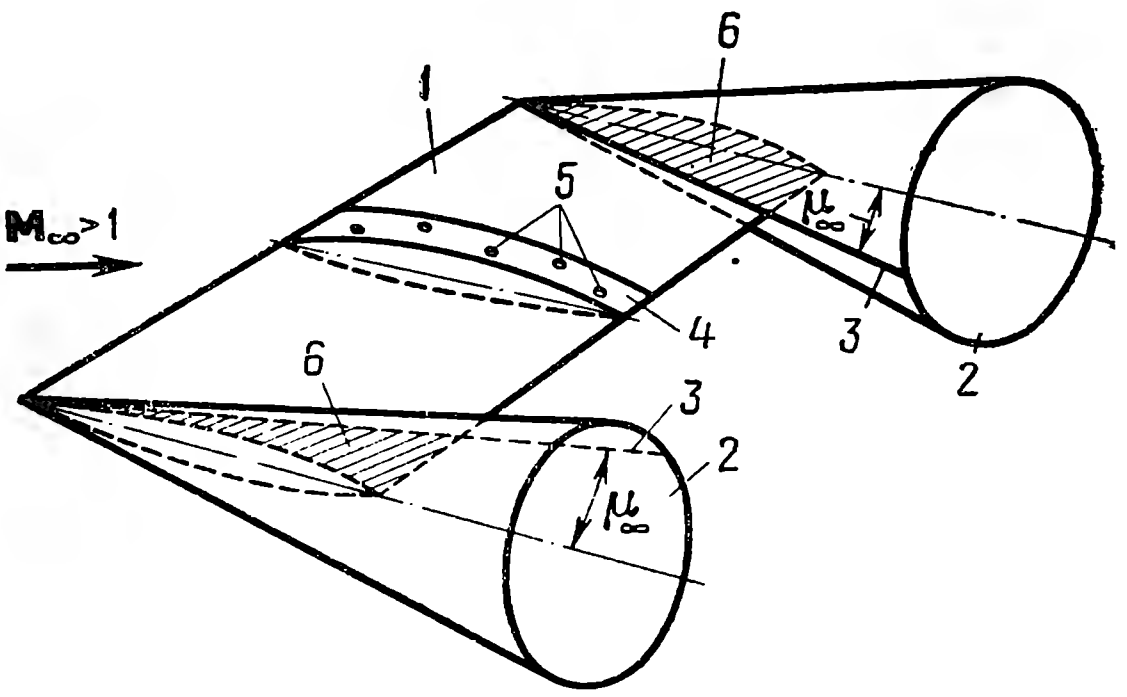


Рис. 4.1.51. Области влияния концов крыла на его обтекание сверхзвуковым потоком:

1 — крыло; *2* — конусы возмущений; *3* — линии Маха; *4* — область расположения дренажных отверстий; *5* — дренажные отверстия; *6* — области влияния

Замер избыточных давлений на поверхности дренированной модели производится с помощью дренажных отверстий, соединенных медными трубками и резиновыми шлангами с манометрами. В качестве такого манометра может использоваться ГРМ, регистрирующий избыточную величину давления $p—p_{атм}$. Эта величина находится в результате расшифровки записи ГРМ по формуле (2.1.14). Аналогичным образом можно измерить избыточное полное давление $p_0—p_{атм}$ в форкамере, если в ней разместить трубку Пито и соединить ее с ГРМ, а также избыточное статическое давление $p_\infty—p_{атм}$ в рабочей части.

Зная атмосферное давление $p_{атм}$ по показанию лабораторного манометра, можно определить абсолютное значение давлений p_0, p_∞ и p (на поверхности модели). Соответствующие коэффициенты давления на профиле определяются по формуле $\bar{p}=2(p-p_\infty)/(\rho_\infty V_\infty^2)$. Получив распределение этих коэффициентов по профилю в сверхзвуковом потоке, можно вычислить по формулам (4.1.9), (4.1.12) и (4.1.16) соответствующие коэффициенты c_{Np}, c_{Rp} и m_{zp}. При этом для тонких малоизогнутых профилей вместо (4.1.9) и (4.1.16) можно воспользоваться сответственно (4.1.18) и (4.1.20).

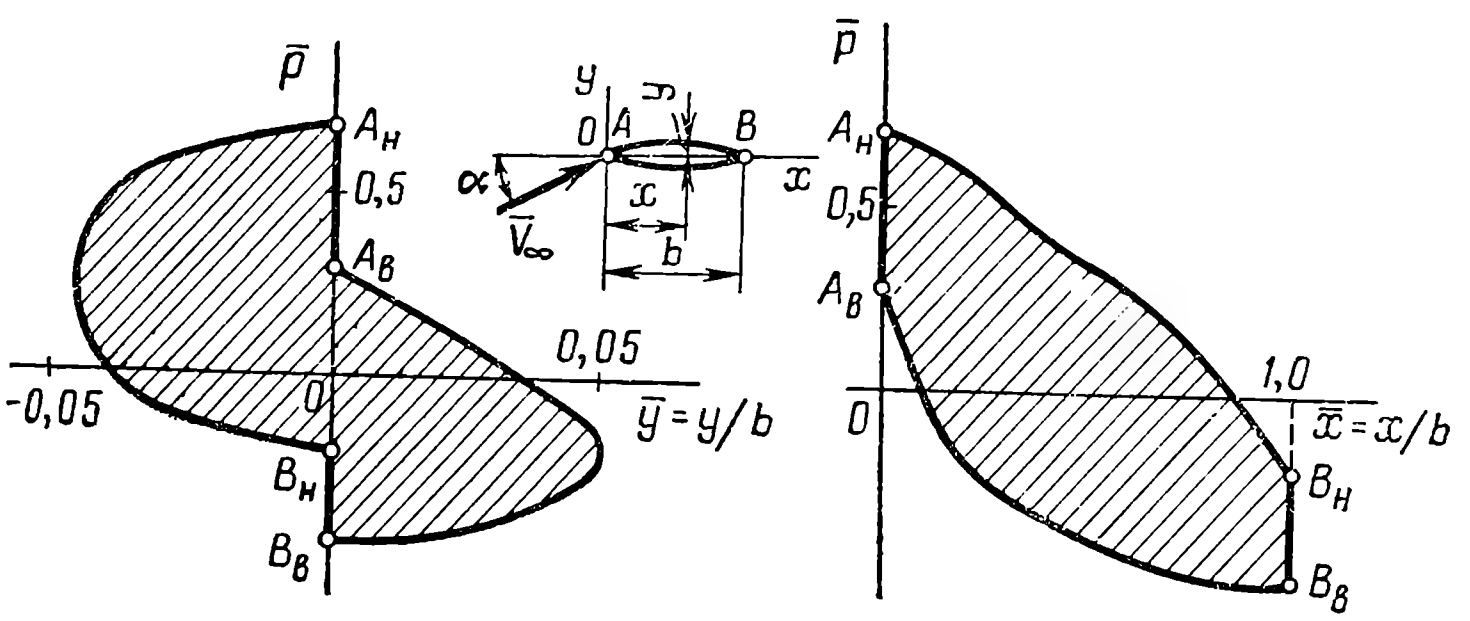


Рис. 4.1.52. Координатные диаграммы $\bar{p}=f_1(\bar{x})$ и $\bar{p}=f_2(\bar{y})$ для профиля, расположенного в сверхзвуковом потоке под углом атаки

Чтобы определить аэродинамические коэффициенты, следует построить диаграммы $\bar{p}=f_1(\bar{x})$, $\bar{p}=f_2(\bar{y})$, $\bar{p}=f_3(\bar{x}^2)$ и вычислить площади под соответствующими кривыми. Характер координатных диаграмм $\bar{p}=f_2(\bar{y})$ и $\bar{p}=f_1(\bar{x})$ для заостренного профиля, расположенного под небольшим углом атаки в сверхзвуковом потоке, показан на рис. 4.1.52.

Коэффициент $c_{xв}=c_{xp}$ определяется по формуле (4.1.14), затем подсчитываются коэффициенты c_{xf} и c_x соответственно по формулам (4.1.112) и (4.1.90), аэродинамическое качество $K=c_y/c_x$ и коэффициент центра давления $c_{ц.д}$.

Порядок проведения работы

1. Ознакомиться с устройством экспериментальной установки и проверить готовность к работе всех ее элементов. Особое внимание обратить на герметичность соединения медных дренажных трубок и резиновых шлангов со штуцерами ГРМ.

2. Закрепить модель в рабочей части аэродинамической трубы под заданным углом атаки.

3. Замерить лабораторным барометром атмосферное давление $p_{атм}$.

4. Записать начальные показания на печатающем устройстве ГРМ, соответствующие каждому измерительному каналу, включая каналы для измерения статического давления p_∞ в рабочей части трубы и полного давления p_0 в форкамере.

5. Осуществить запуск трубы, и после выхода ее на режим установившегося движения воздуха в рабочей части включить печатающие устройства ГРМ; одновременно замерить температуру в форкамере. После осуществления этих операций прекратить работу трубы.

6. Расшифровать показания ГРМ, соответствующие измерениям p_0 и p_∞, затем определить эти параметры и вычислить соответствующие газодинамические величины для воздуха в рабочей части.

7. Расшифровать показание ГРМ, регистрирующего избыточные давления $p - p_{атм}$ на поверхности модели, и вычислить по этим показаниям коэффициенты давления в соответствующих дренажных точках.

8. По найденным значениям построить соответствующие диаграммы, а затем определить аэродинамические коэффициенты профиля при заданном угле атаки.

9. Повторить измерения и соответствующие расчеты, задавшись несколькими углами атаки.

10. Используя полученные результаты, построить графики аэродинамических коэффициентов профиля [$c_y = c_y(\alpha)$, $c_x = c_x(\alpha)$, $m_z = m_z(\alpha)$, $K = K(\alpha)$, $c_{ц.д} = c_{ц.д}(\alpha)$], соответствующие данному числу $\mathbf{M}_\infty$.

11. Изменив условия течения в рабочей части трубы путем смены соплового вкладыша, что обеспечит поток с другим числом $\mathbf{M}_\infty$, осуществить измерения и расчеты давления и аэродинамических коэффициентов, соответствующие этому числу $\mathbf{M}_\infty$. В результате получить аэродинамические коэффициенты как функции не только углов атаки, но и чисел Маха.

Пример. Рассмотрим результаты измерений и расчета аэродинамических коэффициентов на примере продувки в сверхзвуковой трубе профиля, форма и относительные размеры которого показаны на рис. 4.1.53. На этом же рисунке показаны модель прямоугольного в плане крыла с заданным профилем (с размахом $l = 0{,}35$ *м*), а также расположение дренажных отверстий. Выбранный заостренный профиль является криволинейным и образован двумя симметричными дугами окружностей. Его хорда $b = 0{,}1$ *м*, максимальная толщина $\Delta = 0{,}01$ *м*, угол заострения $\beta_0 \approx 11°$, угол атаки модели принят $\alpha = 8°$.

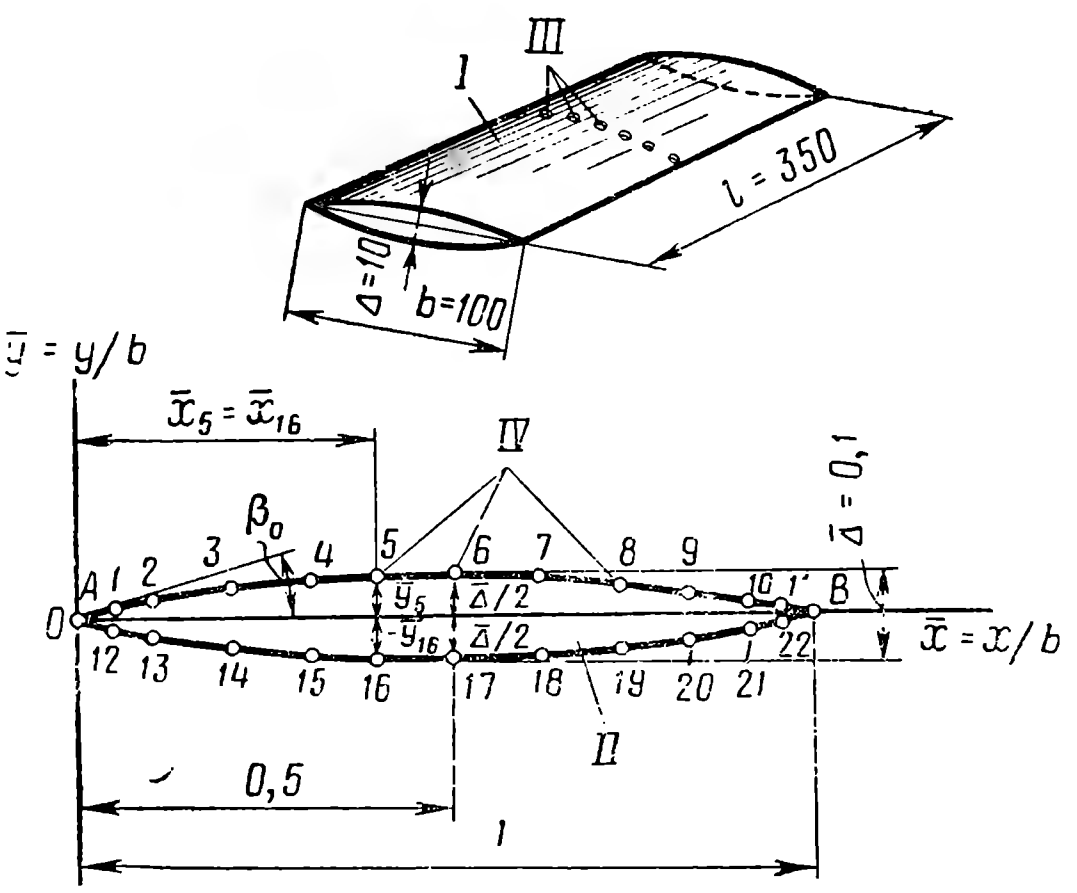


Рис. 4.1.53. Крыло с криволинейным симметричным профилем (угол $\beta_0 \approx 11°$):

I — крыло; *II* — профиль; *III* — дренажные отверстия; *IV* — маркировка дренажных отверстий

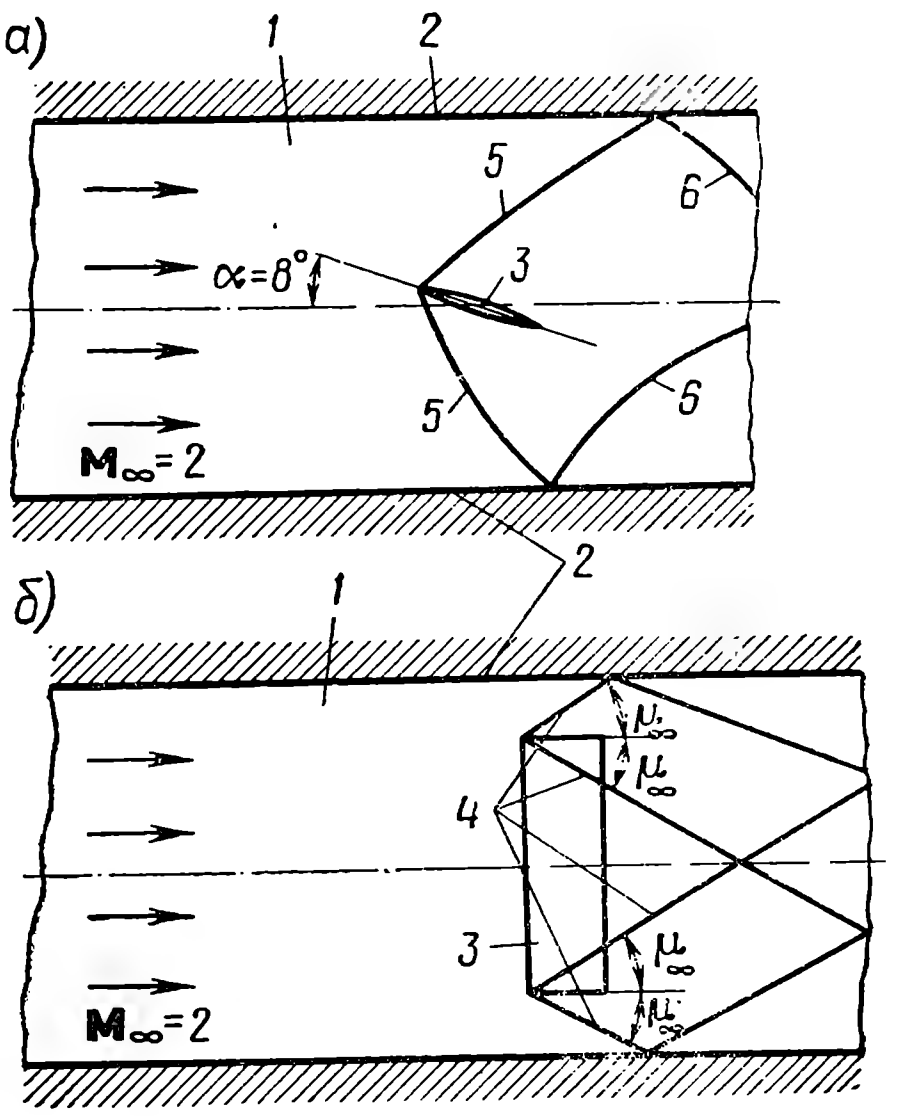


Рис. 4.1.54. Модель прямоугольного крыла в рабочей части сверхзвуковой трубы:

а — вид сбоку; *б* — вид сверху; *1* — рабочая часть трубы; *2* — стенки трубы; *3* — модель; *4* — линии Маха; *5* — ударные волны; *6* — отраженные ударные волны

Продувка производилась в сверхзвуковой аэродинамической трубе кратковременного действия (с баллонами для сжатого воздуха) с закрытой рабочей частью. Сопловый вкладыш был рассчитан на число $\mathbf{M}_\infty = 2$ (это число уточнялось по измерениям в рабочей части трубы). Размер сечения рабочей части 400×400, а ее длина — 800 *мм*.

Для проверки правильности выбора размеров крыла и угла атаки (с точки зрения допустимого «загромождения») из рис. 1.4.15 по $\mathbf{M}_\infty = 2$ было определено отношение $S_м/S_т = 0{,}25$. Площадь проекции модели крыла на плоскость, нормальную вектору скорости набегающего потока (при $\alpha = 8°$), $S_м = b(\sin\alpha)\, l = 0{,}1 \cdot 0{,}139 \cdot 0{,}35 = 0{,}005$ *м*^{2}, а площадь квадратного сечения рабочей части трубы $S_т = 0{,}4^2 = 0{,}16$ *м*^{2}. В соответствии с этим $S_м/S_т = 0{,}005/0{,}16 = 0{,}03$. Таким образом, при угле атаки $\alpha = 8°$ величина «загромождения» оказывается в допустимых пределах.

Приближенный расчет волновой картины обтекания профиля заданных размеров при $M_\infty = 2$ и $\alpha = 8°$ показал, что отраженные скачки не попадают на модель, а плоскость расположения дренажных отверстий лежит вне конусов возмущения (рис. 4.1.54).

Как уже отмечалось, давления p_0 и p_∞, а также статические давления p на поверхности модели замеряются с помощью ГРМ, которые выбираются по ожидаемому диапазону измеряемых давлений. Так, например, для замера давления p_0 был выбран ГРМ со шкалой избыточных давлений $+5$ *атм*, а для замера давлений p_∞ и p — со шкалой — 1 *атм*. Выбранные ГРМ имели коэффициенты $k = +0{,}05$ в первом случае и $k = -0{,}05$ во втором.

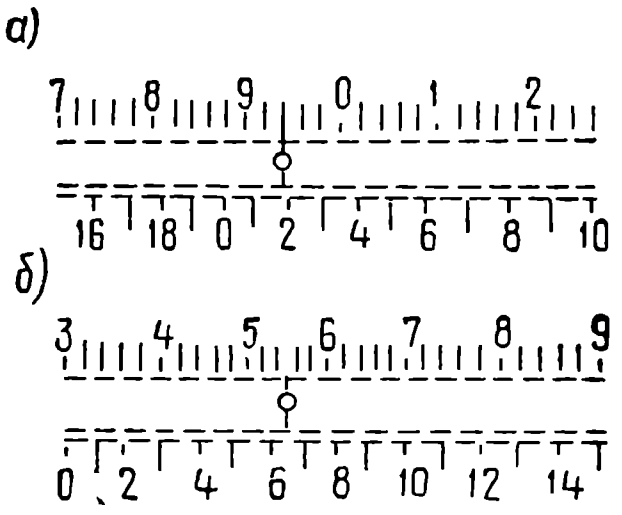


Рис. 4.1.55. Запись на бумажной ленте ГРМ избыточного давления ($p_0 - p_{атм}$):

а — начальное показание N_0 прибора; *б* — величина N

На рис. 4.1.55 показана запись на бумажной ленте ГРМ, один из каналов которого подключен к трубке Пито, помещенной в форкамере трубы. По данным этой записи, $N_0 = 19{,}4$ и $N = 65{,}5$. Воспользовавшись формулой (2.1.14), находим

$$p_0 - p_{атм} = (N - N_0)\,k = (65{,}5 - 19{,}4) \times$$
$$\times 0{,}05 = 2{,}305 \text{ кГ/см}^2.$$

По величине этой разности давлений и атмосферному давлению, измеренному лабораторным барометром, $p_{атм} = 738$ *мм рт. ст.* (1,003 кГ/см^2) вычисляем

$$p_0 = (p_0 - p_{атм}) + p_{атм} = 2{,}305 + 1{,}003 = 3{,}31 \text{ кГ/см}^2.$$

Аналогично расшифровываются записи статического давления p_∞ в рабочей части и статических давлений p на поверхности модели. При этом измерения показали, что $p_\infty = 0{,}353$ кГ/см^2.

При расшифровке записи давлений с помощью ГРМ была составлена табл. А

Таблица А

Определение p_0 ($k = 0{,}05$)					Определение p_∞ ($k = -0{,}05$)				
N_0	N	$N - N_0$	$p_0 - p_{атм}$, кГ/см^2; формула (2.1.14)	p_0, кГ/см^2	N_0	N	$N - N_0$	$p_\infty - p_{атм}$, кГ/см^2; формула (2.1.14)	p_∞, кГ/см^2
19,4	65,5	46,1	2,305	3,31	15,0	28,0	13,0	—0,650	0,353

По отношению $p_\infty / p_0 = \pi(M_\infty)$ определяем число Маха M_∞ в рабочей части трубы, воспользовавшись таблицами газодинамических функций воздуха [13]. Подставляя данные, находим

$$\pi(M_\infty) = p_\infty / p_0 = 0{,}107 \text{ и } M_\infty = 2{,}13.$$

По шкале милливольтметра, связанного с помещенной в форкамере термопарой, в ходе эксперимента была зафиксирована температура в форкамере $T_0 = 288$ К.

Соответствующими расчетами были найдены также другие параметры воздушного потока в рабочей части трубы (для $k = c_p/c_v = 1{,}4$; $R = 287$ *дж/кг·град*). Все результаты этих расчетов были сведены в табл. Б.

Таблица Б

Параметры потока	Обозначение и размерность	Расчетная формула	Величина
Полное давление	p_0, кГ/см^2	—	3,31 (измерена)
Статическое давление	p_∞, кГ/см^2	—	0,353 (измерена)
Температура торможения	T_0, К	—	288 (измерена)
Число Маха	M_∞	по функции $\pi(M_\infty) = p_\infty/p_0$ [13]	2,13

Продолжение табл. Б

Параметры потока	Обозначение и размерность	Расчетная формула	Величина
Температура	T_∞, К	$T_\infty = T_0\tau(\mathbf{M}_\infty)$ [13]	151
Плотность	ρ_∞, $кГ\cdot сек^2/м^4$	$\rho_\infty = \dfrac{p_\infty}{RT_\infty}$	0,0817
Скорость звука	a_∞, $м/сек$	$a_\infty = \sqrt{kRT_\infty}$	246
Скорость	V_∞, $м/сек$	$V_\infty = \mathbf{M}_\infty a_\infty$	525
Скоростной напор	q_∞, $кГ/м^2$	$q_\infty = \dfrac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} = \dfrac{k}{2} p_\infty \mathbf{M}_\infty^2$	$1{,}12\cdot10^4$
Коэффициент динамической вязкости	μ_∞, $кГ\cdot сек/м^2$	(3.1.35)	$1{,}05\cdot10^{-6}$
Коэффициент кинематической вязкости	ν_∞, $м^2/сек$	$\nu_\infty = \mu_\infty/\rho_\infty$	$1{,}3\cdot10^{-5}$
Число Рейнольдса	$\mathbf{Re}_\infty$	$\mathbf{Re}_\infty = V_\infty b/\nu_\infty$	$4{,}0\cdot10^6$

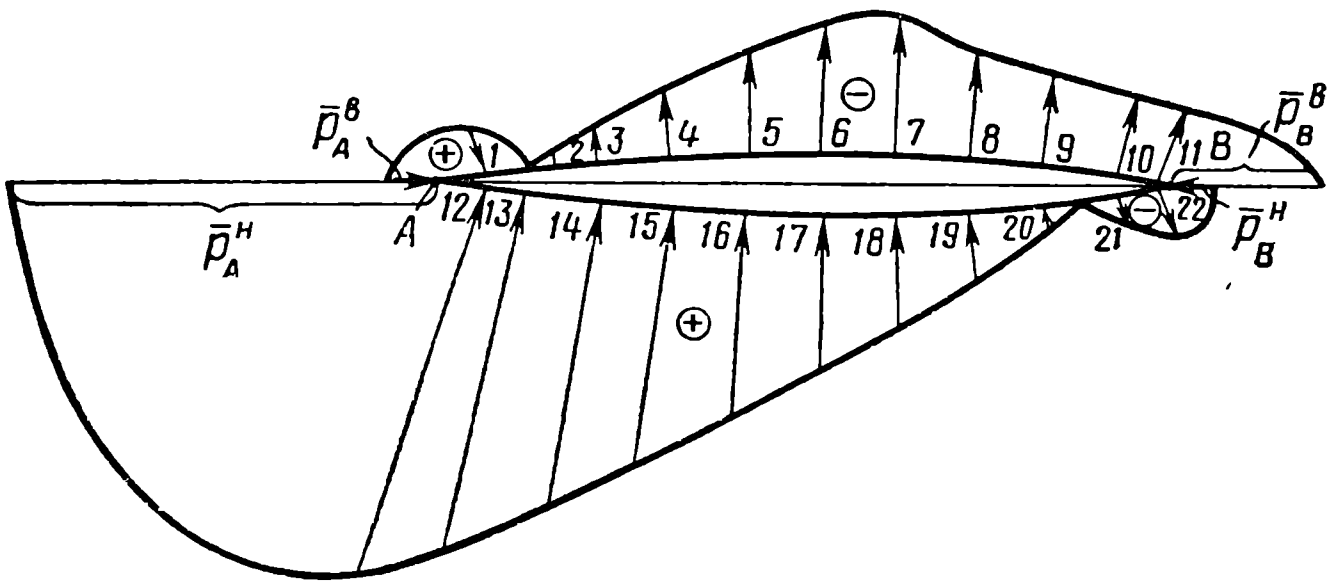


Рис. 4.1.56. Векторная диаграмма для профиля, обтекаемого потоком с $\mathbf{M}_\infty = 2{,}13$ под углом атаки $\alpha = 8°$:

A и B — точки соответственно передней и задней кромок; $\bar{p}_A^в$, $\bar{p}_B^в$ — коэффициенты давления в точках A и B на верхней стороне профиля; $\bar{p}_A^н$, $\bar{p}_B^н$ — то же, на нижней стороне; знак «+» соответствует области, где $\bar{p}>0$, знак «—» — области, где $\bar{p}<0$

В результате расшифровки записи ГРМ и определения коэффициентов давления в дренажных точках профиля (см. рис. 4.1.53) получены данные, которые помещены в табл. В.

По этим данным построены векторная диаграмма (рис. 4.1.56) и координатные диаграммы $\bar{p}=f_1(\bar{x})$ (рис. 4.1.57), $\bar{p}=f_2(\bar{y})$ (рис. 4.1.58) и $\bar{p}=f_3(\bar{x}^2)$ (рис. 4.1.59). При построении указанных диаграмм значения коэффициентов давления в точках A и B (см. также рис. 4.1.53) определялись по формулам (4.1.91) и (4.1.94).

Номера дренажных точек		Верхняя поверхность										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\bar{x}$		0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
$\bar{y}$		0,010	0,020	0,035	0,040	0,048	0,050	0,048	0,040	0,035	0,020	0,010
$\bar{x}^2$		0,0025	0,01	0,04	0,09	0,16	0,25	0,36	0,49	0,64	0,81	0,9025
Расшифровка записи ГРМ	N_0	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
	N	32,0	33,0	34,0	34,6	35,4	35,8	36,4	35,8	35,4	35,2	35,2
	$N-N_0$	12,0	13,0	14,0	14,6	15,4	15,8	16,4	15,8	15,4	15,2	15,2
	$p-p_{атм}$, $кГ/см^2$	—0,60	—0,65	—0,70	—0,73	—0,77	—0,79	—0,82	—0,79	—0,77	—0,76	—0,76
p, $кГ/см^2$		0,40	0,35	0,30	0,27	0,23	0,21	0,18	0,21	0,23	0,24	0,24
$p-p_\infty$, $кГ/см^2$		0,05	0	—0,05	—0,08	—0,12	—0,14	—0,17	—0,14	—0,12	—0,11	—0,11
$\bar{p}=(p-p_\infty)/q_\infty$		0,045	0	—0,045	—0,07	—0,11	—0,13	—0,15	—0,13	—0,11	—0,10	—0,10

В точке A для верхней стороны профиля $(dy/dx)^{в}_{A}=\bar{y}_1/\bar{x}_1=+0{,}2$, а для нижней $(dy/dx)^{н}_{A}=-0{,}2$. Находим соответственно значения:

$$\theta^{в}_{A}=\alpha-(dy/dx)^{в}_{A}=0{,}14-0{,}2=-0{,}06;$$

$$\theta^{н}_{A}=\alpha-(dy/dx)^{н}_{A}=0{,}14-(-0{,}2)=0{,}34.$$

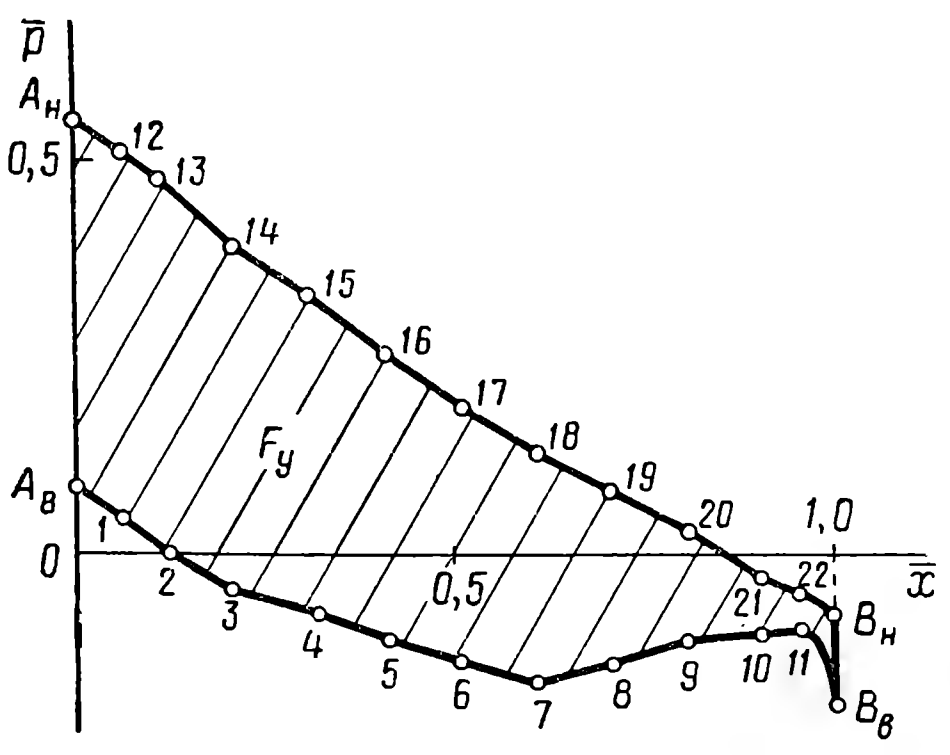


Рис. 4.1.57. Координатная диаграмма $p=f_1(x)$ для профиля ($M_\infty=2{,}13$; $\alpha=8°$)

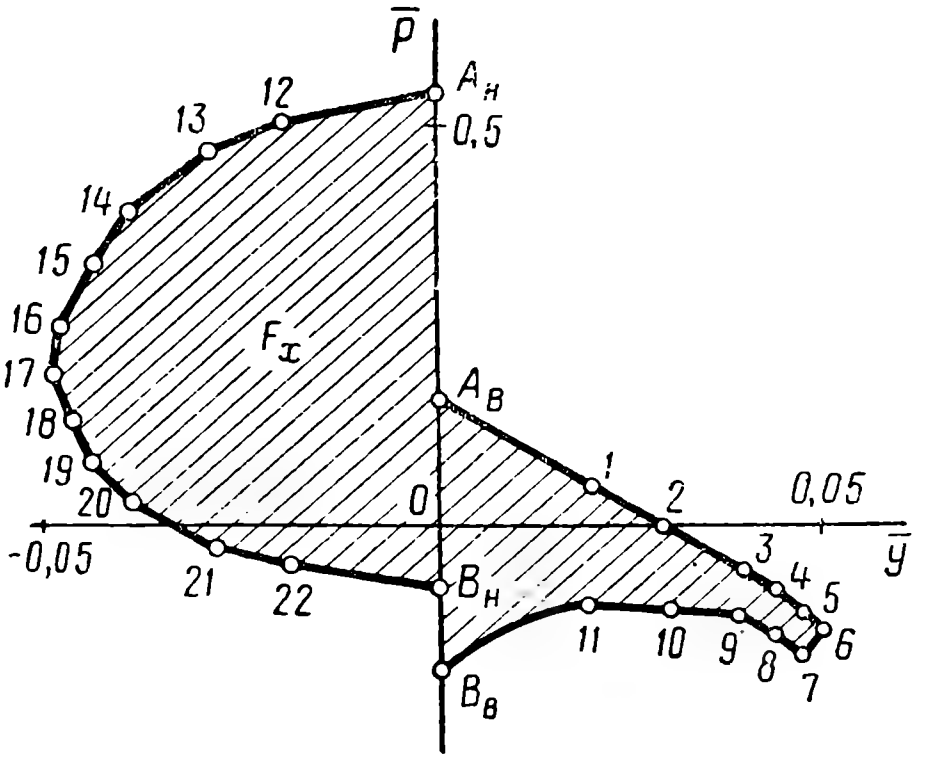


Рис. 4.1.58. Координатная диаграмма $\bar{p}=f_2(\bar{y})$ для профиля ($M_\infty=2{,}13$; $\alpha=8°$)

Таблица В

Нижняя поверхность										
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
0,010	0,020	0,035	0,040	0,048	0,050	0,048	0,040	0,035	0,020	0,010
0,0025	0,01	0,04	0,09	0,16	0,25	0,36	0,49	0,64	0,81	0,9025
20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
21,8	23,0	24,8	26,0	27,6	29,0	30,2	31,2	32,4	33,6	34,0
1,8	3,0	4,8	6,0	7,6	9,0	10,2	11,2	12,4	13,6	14,0
—0,09	—0,15	—0,24	—0,30	—0,38	—0,45	—0,51	—0,56	—0,62	—0,68	—0,70
0,91	0,85	0,76	0,70	0,62	0,55	0,49	0,44	0,38	0,32	0,30
0,56	0,50	0,41	0,35	0,27	0,20	0,14	0,09	0,03	—0,03	—0,05
0,50	0,45	0,37	0,31	0,24	0,18	0,13	0,08	0,027	—0,027	—0,045

По формуле (4.1.91) получаем:

$$\bar{p}_A^{\text{в}} = -c_1\,\theta_A^{\text{в}} + c_2\left(\theta_A^{\text{в}}\right)^2 = -1{,}07\times$$
$$\times(-0{,}06) + 1{,}43\,(-0{,}06)^2 = 0{,}0693;$$
$$\bar{p}_A^{\text{н}} = c_1\,\theta_A^{\text{н}} + c_2\left(\theta_A^{\text{н}}\right)^2 = 1{,}07\cdot 0{,}34 +$$
$$+ 1{,}43\cdot 0{,}34^2 = 0{,}529.$$

В этих выражениях значения коэффициентов $c_1 = 1{,}07$ и $c_2 = 1{,}43$ находятся по числу $M_\infty = 2{,}13$ из формул (4.1.92), (4.1.93).

Аналогично определялись значения коэффициентов давления в точке B (см. рис. 4.1.53). По формуле (4.1.94)

$$\theta_B^{\text{в}} = \alpha - (dy/dx)_B^{\text{в}} = 0{,}14 -$$
$$-(-0{,}2) = 0{,}34;$$
$$\theta_B^{\text{н}} = \alpha - (dy/dx)_B^{\text{н}} = 0{,}14 -$$
$$-0{,}2 = -0{,}06.$$

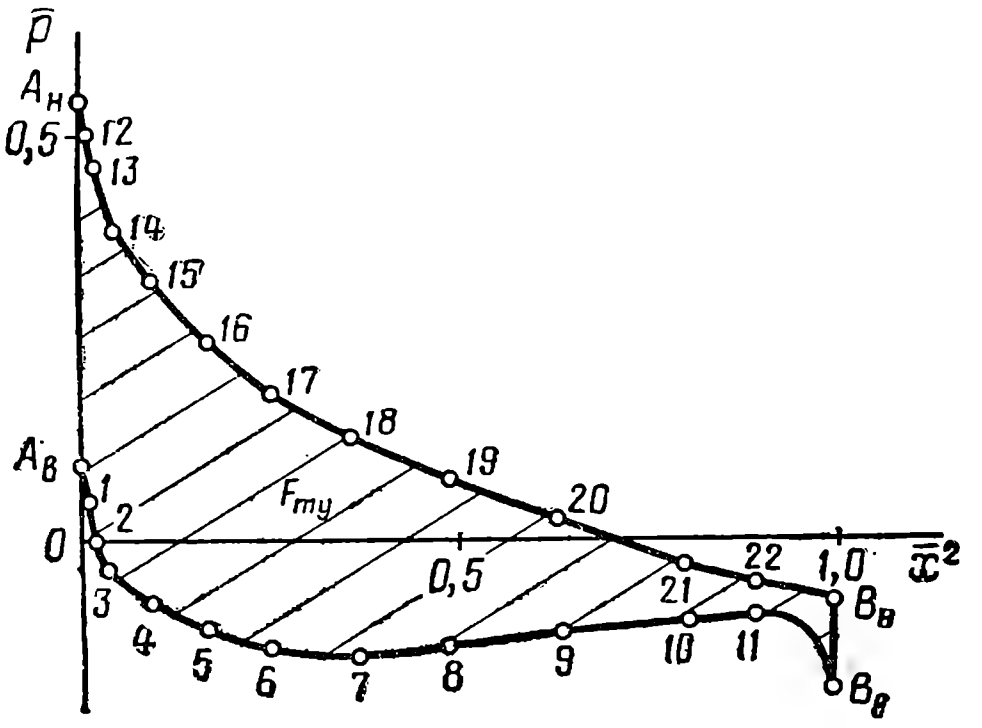


Рис. 4.1.59. Координатная диаграмма $\bar{p} = f_3(\bar{x}^2)$ для профиля ($M_\infty = 2{,}13$; $\alpha = 8°$)

По (4.1.91)

$$\bar{p}_B^{\text{в}} = -c_1\,\theta_B^{\text{в}} + c_2\left(\theta_B^{\text{в}}\right)^2 = -1{,}07\,(0{,}34) + 1{,}43\,(0{,}34)^2 = -0{,}198;$$
$$\bar{p}_B^{\text{н}} = c_1\,\theta_B^{\text{н}} + c_2\left(\theta_B^{\text{н}}\right)^2 = 1{,}07\,(-0{,}06) + 1{,}43\,(-0{,}06)^2 = -0{,}0590.$$

При построении диаграмм были выбраны следующие масштабы: масштаб коэффициента давления $\mu_{\bar{p}} = 10^{-2}$ *1/мм*, а масштабы величин, отложенных по осям абсцисс, составляли $\mu_{\bar{x}} = 10^{-2}$, $\mu_{\bar{y}} = 10^{-3}$, $\mu_{\bar{x}^2} = 10^{-2}$ *1/мм*.

Согласно рис. 4.1.57 площадь, ограниченная замкнутым контуром и измеренная с помощью планиметра, равна $F_y=2900$ *мм*^{2}. В соответствии с (4.1.55) находим

$$c_y = F_y \mu_{\bar{p}} \mu_{\bar{x}} = 2900 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-2} = 0{,}29.$$

Измерение площади на рис. 4.1.58 дает значение $F_x=3080$ *мм*^{2}, следовательно [см. (4.1.56)],

$$c_{Rp} = F_x \mu_{\bar{p}} \mu_{\bar{y}} = 3080 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-3} = 0{,}0308.$$

Наконец, из диаграммы на рис. 4.1.59, планиметрируя кривую, находим $F_{my}=2420$ *мм*^{2} и по формуле (4.1.58) подсчитываем соответствующий коэффициент продольного момента:

$$-m_z = 0{,}5 \cdot F_{my} \mu_{\bar{p}} \mu_{\bar{x}^2} = 0{,}5 \cdot 2420 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-2} = 0{,}121.$$

Коэффициент волнового сопротивления $c_{x\text{в}}=c_{xp}$ определяется по формуле (4.1.14), в которой $c_{yp}=c_y$:

$$c_{x\text{в}} = c_y \frac{\alpha^\circ}{57{,}3^\circ} + c_{Rp} = 0{,}29 \frac{3}{57{,}3} + 0{,}0308 = 0{,}0713.$$

Воспользовавшись формулой (4.1.112), определим значение коэффициента c_{xf}. Приняв $\mathbf{Re}_{\text{кр}}=3 \cdot 10^6$, находим

$$\bar{x}_t = \mathbf{Re}_{\text{кр}}/\mathbf{Re}_\infty = 3 \cdot 10^6/4 \cdot 10^6 = 0{,}75.$$

По этой величине $\bar{x}_t=0{,}75$ и значению $\bar{\Delta}=0{,}1$ из графика на рис. 4.1.9 находим $\eta_{\bar{\Delta}}=1{,}05$. По величине $\bar{x}_t=0{,}75$ и значению $\mathbf{M}_\infty=2{,}13$ из графика на рис. 4.1.48 устанавливаем значение коэффициента $\eta_{\text{м}}=0{,}85$. Наконец по величинам $\bar{x}_t=0{,}75$ и $\mathbf{Re}_\infty=4 \cdot 10^6$ из графика на рис. 4.1.8 находим $2(c_{xf})_{\mathbf{M}_\infty=0}=0{,}003$. Таким образом,

$$c_{xf} = 2(c_{xf})_{\mathbf{M}_\infty=0} \eta_{\bar{\Delta}} \eta_{\text{м}} = 0{,}003 \cdot 1{,}05 \cdot 0{,}85 = 0{,}0027.$$

Полный коэффициент сопротивления согласно (4.1.90)

$$c_x = c_{xp} + c_{xf} = 0{,}0713 + 0{,}0027 = 0{,}074.$$

По полученным значениям c_x, c_y и m_z находим качество профиля:

$$K = c_y/c_x = 0{,}29/0{,}074 = 3{,}93$$

и коэффициент центра давления:

$$c_{\text{ц.д}} = x_{\text{ц.д}}/b = -m_z/c_y = 0{,}121/0{,}29 = 0{,}418.$$

Результаты определения аэродинамических характеристик заданного профиля при $\mathbf{M}_\infty=2{,}13$ и других углах атаки приведены в табл. Г.

Таблица Г

α, *град*	c_y	c_x	$-m_z$	K	$c_{\text{ц.д}}$
0	0	0,030	0	0	0
2	0,07	0,032	0,030	2,18	0,430
4	0,14	0,040	0,060	3,50	0,430
6	0,22	0,053	0,091	4,15	0,413
8	0,29	0,074	0,121	3,93	0,418
10	0,37	0,097	0,153	3,82	0,414
15	0,56	0,175	0,225	3,20	0,403
20	0,74	0,285	0,302	2,55	0,409

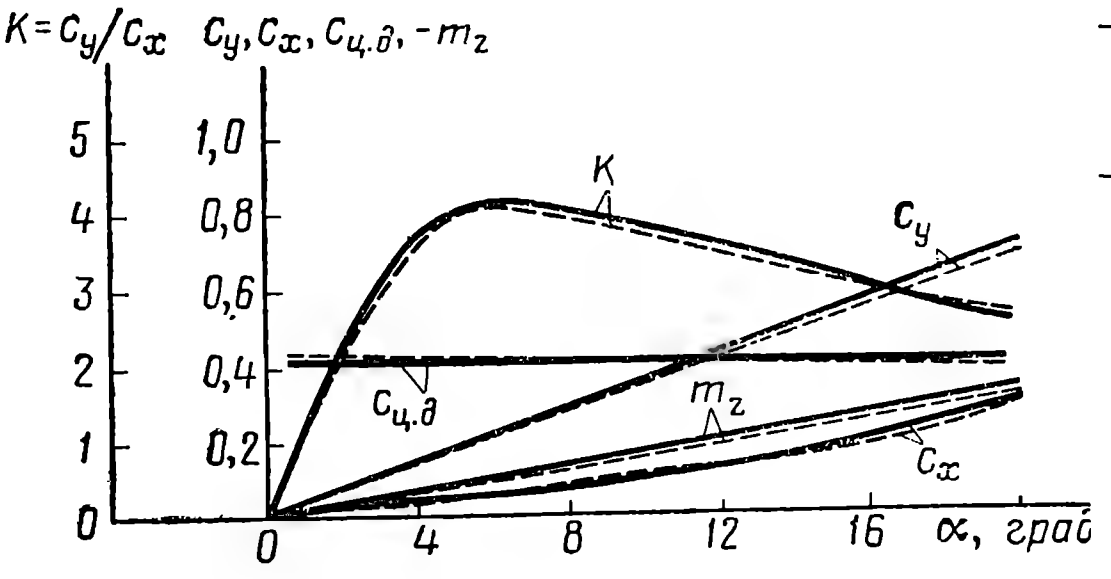


Рис. 4.1.60. Характеристические диаграммы для профиля при $\mathbf{M}_\infty=2{,}13$:

———— рассчитанные по теории второго приближения; — — — экспериментальные

По данным табл. Г построены характеристические диаграммы $c_y=\varphi_1(\alpha)$, $c_x=\varphi_2(\alpha)$, $m_z=\varphi_3(\alpha)$, $K=\varphi_4(\alpha)$, $c_{\text{ц.д}}=\varphi_5(\alpha)$ профиля крыла в сверхзвуковом потоке с $\mathbf{M}_\infty=2{,}13$, показанные на рис. 4.1.60 штриховыми линиями.

Проведем аэродинамический расчет профиля, воспользовавшись теорией второго приближения, и сравним результаты этого расчета с полученными экспериментальными данными. Расчет распределения давления по профилю ведется по формулам (4.1.91),

(4.1.94). Так, в частности, были определены значения коэффициентов давления в точках A и B, о чем говорилось ранее. Аналогично находятся коэффициенты давления в любой точке профиля. Например, в точках *6* и *17* (см. рис. 4.1.53), где $(dy/dx)_{6;17}=0$ и $\theta_6=\theta_{17}=\alpha-(dy/dx)_{6,17}=\alpha$, при угле атаки $\alpha=8°$ (0,14 *рад*) коэффициенты давления:

$$\bar{p}_6 = -c_1\,\theta_6 + c_2\,\theta_6^2 = -1,07\cdot 0,14 + 1,43\cdot 0,14^2 = -0,122\ (-0,13);$$

$$\bar{p}_{17} = c_1\,\theta_{17} + c_2\,\theta_{17}^2 = 1,07\cdot 0,14 + 1,43\cdot 0,14^2 = 0,178\ (0,18).$$

Здесь в скобках приведены экспериментальные значения соответствующих коэффициентов давления при том же угле атаки, взятые из табл. В.

Коэффициент подъемной силы определен по формуле (4.1.100)

$$c_y = 2\cdot 1,07\alpha = 2,14\alpha$$

или

$$c_y = 0,0374\alpha^\circ. \qquad (4.1.113)$$

Коэффициент сопротивления [см. (4.1.103)]

$$c_x = 2\cdot 1,07\,\alpha^2 + 1,07(8/3)\,0,1^2 + 0,0027 = 0,0311 + 2,14\alpha^2$$

или

$$c_x = 0,0311 + 0,00065\,(\alpha^\circ)^2. \qquad (4.1.114)$$

В (4.1.103) величина $K_1=8/3$ определялась по (4.1.99).

Коэффициент момента согласно (4.1.110)

$$m_z = [2\cdot 1,43\,(2/3)\,0,1 - 1,07]\,\alpha = -0,879\alpha$$

или

$$m_z = -0,0153\,\alpha^\circ; \qquad (4.1.115)$$

величина $A_2=(2/3)\bar{\Delta}$ определялась по (4.1.109).

Воспользовавшись формулами (4.1.113) и (4.1.114), находим аэродинамическое качество:

$$K = \frac{c_y}{c_x} = \frac{0,0374\,\alpha^\circ}{0,0311 + 0,00065\,(\alpha^\circ)^2}. \qquad (4.1.116)$$

При определении коэффициента центра давления вследствие симметричности профиля используем формулу (4.1.111):

$$c_{\text{ц.д}} = 0,5\left(1 - 2\,\frac{1,43}{1,07}\cdot\frac{2}{3}\,0,1\right) = 0,411. \qquad (4.1.117)$$

Приведенные зависимости (4.1.113)÷(4.1.117), соответствующие теории второго приближения, нанесены на график на рис. 4.1.60 сплошными линиями. Как видно из рисунка, расчетные и экспериментальные результаты достаточно близки.

Работа 4.1.5

Исследование сверхзвукового обтекания профиля оптическим методом

Цель работы — по фотографии скачков уплотнения и линий слабых возмущений найти распределение скоростей и давлений в сверхзвуковом потоке, обтекающем профиль.

Общие сведения

Расчет параметров обтекания. Характерной особенностью сверхзвуковых газовых течений является возникновение в них скачков уплотнения и линий слабых возмущений (линий Маха). От этого зависят величина и распределение параметров сверхзвукового обтекания, таких как скорость, давление, температура и др. Если экспериментальным путем найдена система скачков и линий Маха, то можно определить указанные параметры, характеризующие обтекание заданной поверхности, в частности профиля крыла. Рассмотрим некоторые методы этого определения.

На рис. 4.1.61 приведена схема обтекания сверхзвуковым потоком заостренного профиля в виде симметричного ромба. На его нижней

стороне показан прямолинейный скачок уплотнения, сходящий с точки передней кромки профиля. На этой же стороне у излома контура и в точке задней кромки профиля показаны линии Маха. На верхней стороне показаны линии Маха, выходящие из точки O передней кромки

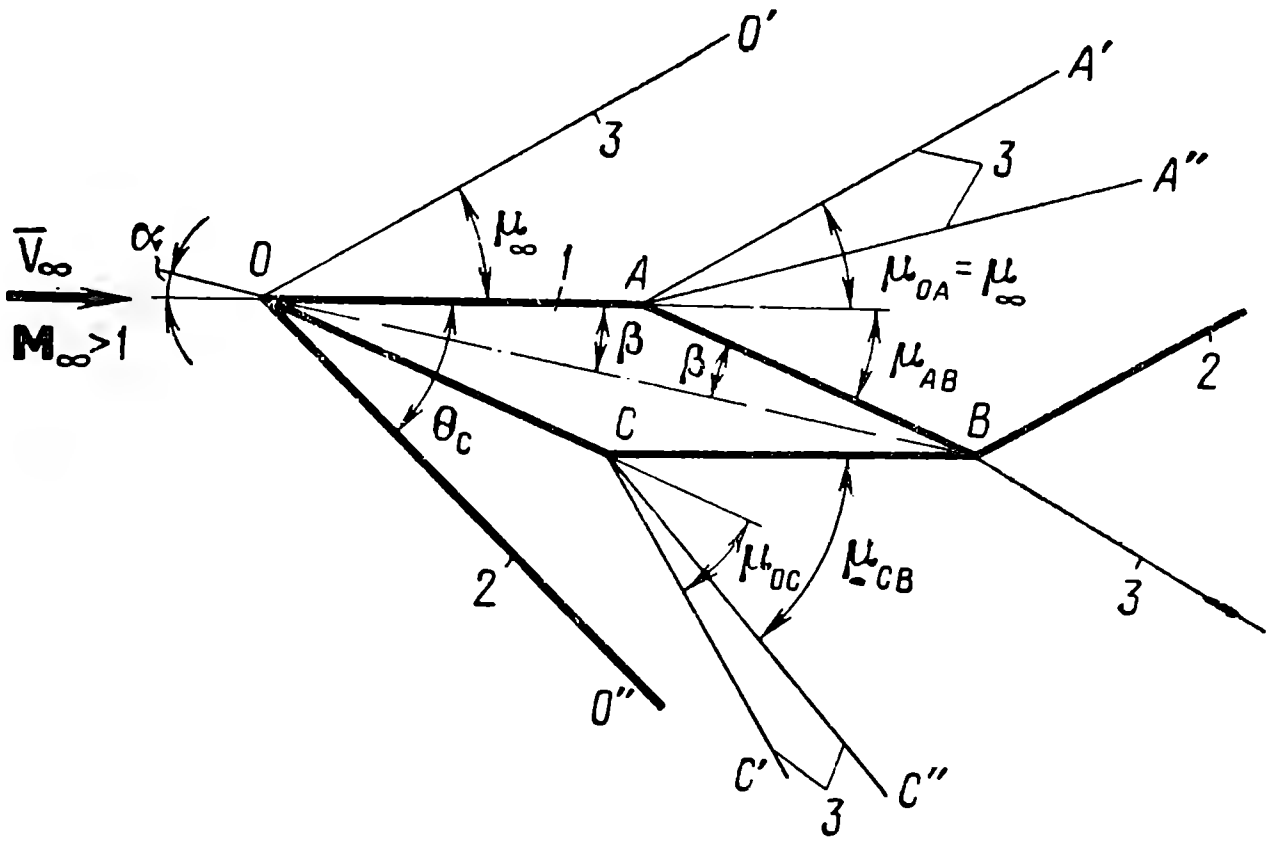


Рис. 4.1.61. Симметричный ромбовидный профиль под углом атаки в сверхзвуковом потоке:

1 — профиль; *2* — скачки уплотнения; *3* — линии Маха

и точки A излома контура, а также скачок уплотнения у задней кромки. Систему таких скачков уплотнения и линий Маха можно наблюдать при продувках моделей крыльев в сверхзвуковых аэродинамических трубах, используя для этих целей специальные оптические приборы, например теневые приборы ИАБ-451 системы Д. Д. Максутова или ТЕ-23.

При помощи фотокамеры, присоединенной к прибору, можно получить снимки потока, на которых четко видны скачки и линии Маха. На снимках можно измерить углы наклона этих скачков и линий Маха к обтекаемому контуру, а затем, используя значения этих углов, вычислить соответствующие значения давлений и других параметров газа.

Рассмотрим верхний контур профиля. Из точки O передней кромки этого контура выходит одна линия Маха OO' с углом наклона $\mu_\infty = \arcsin(1/M_\infty)$. Это указывает на то, что участок контура (грань OA) расположен параллельно вектору $\bar{V}_\infty$. Поэтому давление на нем $p_{OA} = p_\infty$, а коэффициент давления $\bar{p}_{OA}=0$.

За точкой A этого участка наблюдается течение Прандтля — Майера, характеризующееся тем, что между линиями Маха AA' ($\mu_{OA}=\mu_\infty$) и AA'' частицы газа претерпевают поворот и за линией AA'' перемещаются параллельно грани AB. По измеренному углу μ_{AB} наклона линии AA'' из формулы $\sin\mu_{AB}=1/M_{AB}$ можно найти на грани AB число Маха $M_{AB}=1/\sin\mu_{AB}$, определить соответствующее давление

$$p_{AB} = p_\infty \left[\frac{1+(k-1)\,M_\infty^2/2}{1+(k-1)\,M_{AB}^2/2}\right]^{k/(k-1)} \qquad (4.1.118)$$

и коэффициент этого давления

$$\bar{p}_{AB} = \frac{2}{kM_\infty^2}\left\{\left[\frac{1+(k-1)\,M_\infty^2/2}{1+(k-1)\,M_{AB}^2/2}\right]^{k/(k-1)} - 1\right\}. \qquad (4.1.119)$$

На нижней грани OC давление будет таким, как за косым скачком уплотнения OO''. По углу θ_c его наклона к вектору $\bar{V}_\infty$ (этот угол также замеряется по фотографии обтекания) находим по теории скачка уплотнения давление на этой грани:

$$p_{OC} = p_\infty \left(\frac{2k}{k+1} \mathbf{M}_\infty^2 \sin^2 \theta_c - \frac{k-1}{k+1} \right) \tag{4.1.120}$$

и соответствующий коэффициент давления:

$$\bar{p}_{OC} = \frac{4}{(k+1)\,\mathbf{M}_\infty^2} \left(\mathbf{M}_\infty^2 \sin^2 \theta_c - 1 \right). \tag{4.1.121}$$

Число Маха на грани OC определяется по углу μ_{OC} наклона линии Маха CC': $\mathbf{M}_{OC} = 1/\sin \mu_{OC}$.

Поток около грани CB будет аналогичен течению Прандтля—Майера по верхней стороне. Коэффициент давления на этой грани можно найти, определив угол μ_{CB} наклона линии Маха CC'':

$$\bar{p}_{CB} = \frac{2}{k\mathbf{M}_\infty^2} \left(\frac{p_{CB}}{p_{OC}} \cdot \frac{p_{OC}}{p_\infty} - 1 \right), \tag{4.1.122}$$

где p_{OC}/p_∞ определяется по (4.1.120), а p_{CB}/p_{OC} — по формуле

$$\frac{p_{CB}}{p_{OC}} = \left[\frac{1 + (k-1)\left(\sin \mu_{OC}\right)^{-2}/2}{1 + (k-1)\left(\sin \mu_{CB}\right)^{-2}/2} \right]^{k/(k-1)}. \tag{4.1.123}$$

С этими результатами, полученными по измеренным экспериментально углам наклона скачков и линий Маха, сравниваются соответствующие данные, полученные методами теоретических исследований.

Одним из них является метод, основанный на сочетании теорий скачков уплотнения и течения Прандтля—Майера. Применение этого метода рассмотрим на примере расчета обтекания профиля (рис. 4.1.62) более общего вида, чем ромбовидный. Такой расчет предусматривает следующие три случая обтекания.

1. Угол атаки α меньше верхнего угла заострения профиля $\beta_в$ ($\alpha < \beta_в$) (рис. 4.1.62, *а*).

В этом случае на верхней и на нижней сторонах профиля возникают скачки уплотнения, интенсивность которых, вообще говоря, может быть различной (углы наклона скачков $\theta_{св}$ и $\theta_{сн}$ не равны). Эти скачки будут одинаковыми ($\theta_{св} = \theta_{сн}$), если выполняется условие $\beta_в - \beta_н = 2\alpha$, как это видно из рисунка, или в случае, когда профиль симметричный и $\alpha = 0$.

2. Угол атаки α равен верхнему углу заострения профиля $\beta_в$ ($\alpha = \beta_в$) (рис. 4.1.62, *б*).

При этом скачок уплотнения возникает перед передней кромкой только на нижней поверхности, а на верхней появляется линия Маха, проходящая через точку O этой кромки, которую можно рассматривать как источник малых возмущений. Угол наклона этой линии к грани OA будет $\mu_{OA} = \mu_\infty = \arcsin\,(1/\mathbf{M}_\infty)$.

3. Угол атаки α больше угла заострения профиля $\beta_в$ ($\alpha > \beta_в$) (рис. 4.1.62, *в*).

В этом случае на нижней поверхности перед передней кромкой по-прежнему возникает скачок уплотнения, а на верхней появляются две линии Маха, проходящие через точку O: одна из них с углом наклона $\mu_\infty = \operatorname{argsin}(1/\mathbf{M}_\infty)$ к вектору V_∞, а другая с углом наклона $\mu_{OA} = \arcsin\,(1/\mathbf{M}_{OA})$ к грани OA ($\mathbf{M}_{OA}$ — число Маха на грани OA).

В каждом из приведенных случаев поток за скачками уплотнения рассматривается как течение со сжатием. Обтекание верхней поверхности профиля (см. рис. 4.1.62, *б*, *в*) характеризуется как тече-

ние разрежения (течение Прандтля — Майера). При этом течение со сжатием можно рассматривать как сочетание потока непосредственно за скачком уплотнения и движения газа с расширением вдоль участков контура ABC и DEC (см. рис. 4.1.62)), т. е. течения Прандтля—

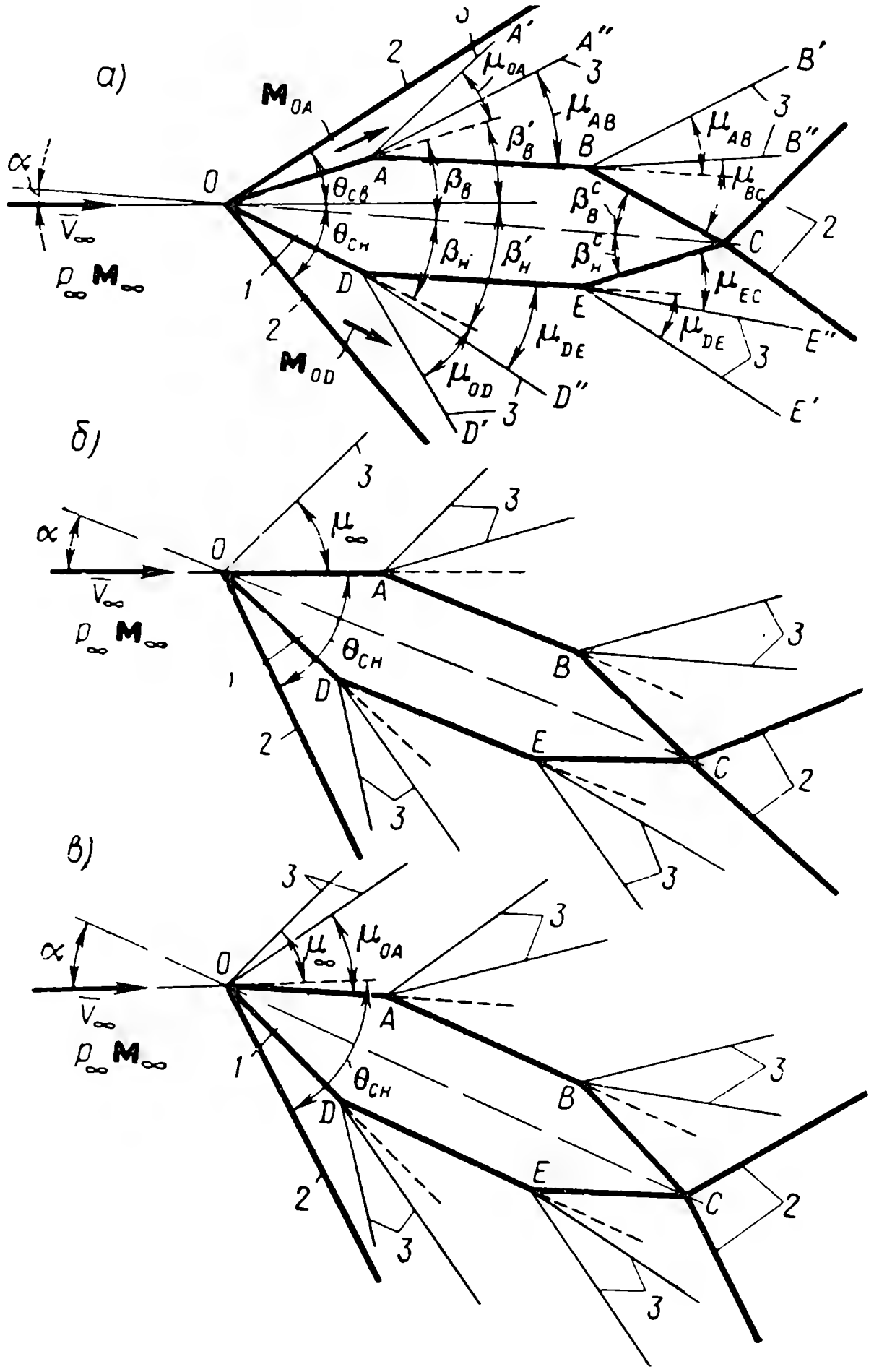


Рис. 4.1.62. Схемы обтекания линейного профиля сверхзвуковым потоком при $\alpha \geqslant 0$:

1 — профиль; *2* — скачки уплотнения; *3* — линии Маха

Майера. Такое комбинированное течение, как и поток с расширением, возможны при условии, что углы $\beta'_в$ и $\beta'_н$ меньше некоторой величины, так называемого критического угла клина $\beta_{кр}$, определяемого для заданных числа M_∞ и отношения $k = c_p/c_v$. Если это условие не выполняется, то происходит отсоединение скачка уплотнения и возникающий далее за ним поток не совпадает с течением Прандтля—Майера.

Рассмотрим конкретные зависимости, при помощи которых осуществляется расчет обтекания профиля с заданными числами M_∞ и углом атаки α. Прежде всего по значению M_∞ из графика на рис. III-1 книги [17] определим предельный (критический) угол клина $\beta_{кр}$ (для $k = 1{,}4$), а затем из условий

$$\beta'_в = \beta_в - \alpha < \beta_{кр}, \quad \beta'_н = \beta_н + \alpha < \beta_{кр}$$

уточним допустимые величины угла атаки α (или при заданном α — допустимые значения $\beta_в$ и $\beta_н$). При этих условиях давление на верхней

стороне профиля (см. рис. 4.1.62, *а*) определяется следующим образом.

На грани OA давление

$$p_{OA} = p_\infty \left(\frac{2k}{k+1} \mathbf{M}_\infty^2 \sin^2 \theta_{св} - \frac{k-1}{k+1} \right),$$

где угол скачка $\theta_{св}$ находится из решения уравнений:

$$\frac{\rho_c}{\rho_\infty} = \frac{\mathbf{M}_\infty^2 \sin^2 \theta_{св}}{2/(k+1) + (k-1)\,\mathbf{M}_\infty^2 \sin^2 \theta_{св}/(k+1)}, \qquad (4.1.124)$$

$$\operatorname{tg} \theta_{св} = \operatorname{ctg} \beta_в' \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\rho_c}{\rho_\infty} - 1 \right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{\rho_c}{\rho_\infty} - 1 \right)^2 - \frac{\rho_c}{\rho_\infty} \operatorname{tg}^2 \beta_в'} \right], \qquad (4.1.125)$$

в которых ρ_∞ и ρ_c — плотность соответственно в набегающем потоке и на скачке уплотнения.

Соответствующий коэффициент давления

$$\bar{p}_{OA} = \frac{4}{(k+1)\,\mathbf{M}_\infty^2} \left(\mathbf{M}_\infty^2 \sin^2 \theta_{св} - 1 \right).$$

Число Маха на рассматриваемой грани

$$\mathbf{M}_{OA} = \frac{1}{\sin\left(\theta_{св} - \beta_в' \right)} \sqrt{\frac{2/(k+1)}{\rho_{OA}/\rho_\infty - (k-1)/(k+1)}}, \qquad (4.1.126)$$

где ρ_{OA}/ρ_∞ определяется по формуле (4.1.124), в которой $\rho_c = \rho_{OA}$.

Эти расчеты давления и числа Маха за скачком уплотнения можно производить при помощи таблиц или графиков.

Для определения скорости и давления на гранях AB и BC воспользуемся методом характеристик. В соответствии со схемой течения на рис. 4.1.62, *а* поток, параллельный плоскости OA, при обтекании точки излома контура A постепенно поворачивается, принимая направление, параллельное плоскости AB. Возмущенный участок течения с расширением ограничен с левой стороны линией Маха AA', наклоненной к плоскости OA под углом $\mu_{OA} = \arcsin(1/\mathbf{M}_{OA})$.

Процесс расширения заканчивается на линии Маха AA'', наклоненной под углом $\mu_{AB} = \arcsin(1/\mathbf{M}_{AB})$ к плоскости AB. Между этими линиями происходит непрерывное изменение параметров потока. Число Маха на плоскости AB определяется по углу $\omega_{AB} = \omega_{OA} + \beta_в$, где $\omega_{OA} = \omega$ находится из уравнения

$$\omega = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{k-1}{k+1} (\mathbf{M}^2 - 1)} - \operatorname{arctg} \sqrt{\mathbf{M}^2 - 1} \qquad (4.1.127)$$

по числу $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{OA}$. Из этого же уравнения по $\omega = \omega_{AB}$ находится соответствующее число $\mathbf{M}_{AB}$. При проведении подобных расчетов обычно пользуются таблицами функций $\omega = f(\mathbf{M})$. Такие таблицы, составленные, в частности, для значения $k = c_p/c_V = 1{,}4$, приведены в [13, 17].

Найденное из (4.1.127) или по таблицам число Маха $\mathbf{M}_{AB}$ позволяет определить давление на грани AB

$$p_{AB} = p_{OA} \left[\frac{1 + (k-1)\,\mathbf{M}_{OA}^2/2}{1 + (k-1)\,\mathbf{M}_{AB}^2/2} \right]^{k/(k-1)} \qquad (4.1.128)$$

и коэффициент давления

$$\bar{p}_{AB} = \frac{2}{k\mathbf{M}_\infty^2} \left(\frac{p_{AB}}{p_{OA}} \cdot \frac{p_{OA}}{p_\infty} - 1 \right). \qquad (4.1.129)$$

За точкой B излома контура также наблюдается течение Прандтля—Майера, характеризующееся тем, что на участке между линиями Ма-

ха BB' [угол наклона этой линии $\mu_{AB}=\arcsin(1/\mathbf{M}_{AB})$] и BB'' [$\mu_{BC}=\arcsin(1/\mathbf{M}_{BC})$] частицы газа поворачиваются и за линией BB'' перемещаются параллельно грани BC. По соответствующему этой грани углу $\omega_{BC}=\omega_{AB}+\beta_{\text{в}}^{C}$ (см. рис. 4.1.62, a) вычисляется из (4.1.127) число $\mathbf{M}_{BC}$, а затем давление

$$p_{BC}=p_{AB}\left[\frac{1+(k-1)\,\mathbf{M}_{AB}^2/2}{1+(k-1)\,\mathbf{M}_{BC}^2/2}\right]^{k/(k-1)} \tag{4.1.130}$$

и коэффициент давления

$$\bar{p}_{BC}=\frac{2}{k\mathbf{M}_{\infty}^2}\left(\frac{p_{BC}}{p_{AB}}\cdot\frac{p_{AB}}{p_{OA}}\cdot\frac{p_{OA}}{p_{\infty}}-1\right), \tag{4.1.131}$$

причем отношения давлений p_{AB}/p_{OA} и p_{OA}/p_{∞} были определены ранее.

Аналогично рассчитываются параметры обтекания нижней поверхности для всех расчетных схем, т. е. для всех тех случаев, когда возникает скачок уплотнения.

Теперь рассмотрим течение разрежения на верхней поверхности (см. рис. 4.1.62, $б$, $в$). На рис. 4.1.62, $б$ грань OA параллельна вектору $\bar{V}_{\infty}$, поэтому на ней $p_{OA}=p_{\infty}$, $\bar{p}_{OA}=0$ и $\mathbf{M}_{OA}=\mathbf{M}_{\infty}$. По величине ω_{∞}, найденной по числу $\mathbf{M}_{\infty}$ из табл. 5.3.1 [20], можно определить для граней AB и BC углы

$$\omega_{AB}=\omega_{\infty}+\beta_{\text{в}}\ \text{и}\ \omega_{BC}=\omega_{AB}+\beta_{\text{в}}^{C},$$

а по ним из той же таблицы или из табл. 10 [13] — соответствующие числа $\mathbf{M}_{AB}$ и $\mathbf{M}_{BC}$. Расчет давления p_{AB} и коэффициента давления $\bar{p}_{AB}$ ведется по формулам (4.1.118) и (4.1.119) соответственно. Давление p_{BC} и коэффициент давления $\bar{p}_{BC}$ определяются соотношениями

$$p_{BC}=p_{AB}\left[\frac{1+(k-1)\,\mathbf{M}_{AB}^2/2}{1+(k-1)\,\mathbf{M}_{BC}^2/2}\right]^{k/(k-1)}$$

и

$$\bar{p}_{BC}=\frac{2}{k\mathbf{M}_{\infty}^2}\left(\frac{p_{BC}}{p_{AB}}\cdot\frac{p_{AB}}{p_{\infty}}-1\right),$$

где p_{AB}/p_{∞} находится по (4.1.118).

Аналогично вычисляем числа Маха на верхней стороне профиля, обтекаемого по схеме на рис. 4.1.62, $в$. Здесь течение Прандтля—Майера начинается непосредственно у передней точки грани OA. Для этой грани

$$\omega_{OA}=\omega_{\infty}^{*}+(\alpha-\beta_{\text{в}}),$$

а для двух других —

$$\omega_{AB}=\omega_{OA}^{*}+\beta_{\text{в}}\ \text{и}\ \omega_{BC}=\omega_{AB}+\beta_{\text{в}}^{C}.$$

По этим значениям ω из табл. 10 [13] находим соответствующие числа Маха, а по ним давления. В частности, давление на грани OA

$$p_{OA}=p_{\infty}\left[\frac{1+(k-1)\,\mathbf{M}_{\infty}^2/2}{1+(k-1)\,\mathbf{M}_{OA}^2/2}\right]^{k/(k-1)},$$

а коэффициент давления

$$\bar{p}_{OA}=\frac{2}{k\mathbf{M}_{\infty}^2}\left(\frac{p_{OA}}{p_{\infty}}-1\right).$$

Для грани AB расчет давления и коэффициента давления ведется по формулам (4.1.128) и (4.1.129), а для грани BC — по (4.1.130) и (4.1.131).

Течение за хвостовыми скачками и линиями Маха не исследуется, так как оно не оказывает влияния на обтекание профиля.

Оптические исследования в аэродинамических трубах. Целью этих исследований является фотографирование модели крыла с заданным профилем, расположенной в рабочей части сверхзвуковой аэродинамической трубы, и последующее измерение углов наклона скачков и линий Маха. Для проведения таких экспериментов необходимо иметь кроме аэродинамической трубы модели крыла, устройства для ее крепления и установки угла атаки, а также соответствующие оптические приборы и фотографические устройства.

Оптические исследования обычно проводятся в сверхзвуковых трубах с закрытой рабочей частью, причем такие исследования можно осуществлять одновременно с дренажными испытаниями. Особенность закрытой рабочей части трубы, предназначенной для оптических исследований, состоит в том, что в ее боковых стенках должны быть «окна» из оптического стекла, через которые просвечивается и фотографируется возмущенная область потока около модели.

Порядок проведения работы

1. Ознакомиться со схемой экспериментальной установки и проверить готовность к работе всех ее элементов, включая оптический прибор.
2. Подсоединить манометр к штуцеру насадка полного напора (трубки Пито), установленного в форкамере, а вакуумметр — к штуцеру отверстия (приемника статического давления) в рабочей части трубы.
3. Закрепить при помощи специального приспособления модель крыла в рабочей части трубы и установить ее под заданным углом атаки.
4. Включить источник света оптического прибора и произвести фокусировку изображения модели по матовому стеклу. Затем отключить источник света, присоединить к прибору на место матового стекла фотоприставку, заряженную фотопленкой, установить экспозицию и подключить фотоприставку к блоку питания. После этого закрыть кожухом узел фотоаппаратуры. Дальнейшее управление работой оптического прибора осуществляется автоматически с пульта управления.
5. Записать по показанию лабораторного барометра величину атмосферного давления $p_{атм}$.
6. Включить аэродинамическую трубу и после выхода ее на режим установившегося обтекания осуществить фотографирование модели, а также измерить давление p_0 в форкамере и статическое давление в рабочей части p_∞.
7. По измеренным давлениям p_0 и p_∞ определить число Маха в рабочей части трубы.
8. Проявить фотопленку, снятую с фотоприставки к оптическому прибору, и сделать несколько фотоотпечатков.
9. Измерить на полученной фотографии углы наклона скачков уплотнения и линий Маха, осуществить по ним необходимые расчеты параметров потока около модели и сравнить с теоретическими данными.

Пример. Рассмотрим результаты оптических исследований в сверхзвуковой аэродинамической трубе, которые получены на модели прямоугольного крыла с симметричным ромбовидным профилем (рис. 4.1.63), установленной в потоке под углом атаки $\alpha = 8°$. Хорда профиля равнялась $b = 0{,}1$ *м*, максимальная толщина $\Delta = 0{,}01$ *м*, а угол заострения $\beta \approx 6°$. Модель крыла с таким профилем располагалась вплотную к боковым стенкам трубы, расстояние между которыми $l = 0{,}4$ *м*. Труба имела закрытую ра-

бочую часть прямоугольного сечения и сопловой вкладыш, рассчитанный на число $\mathbf{M}_\infty = 2$. «Загромождение» рабочей части трубы

$$\frac{S_м}{S_т} = \frac{b \sin\alpha l}{l^2} = \frac{b \sin\alpha}{l} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}139}{0{,}4} = 0{,}035$$

находилось согласно графику на рис. 1.4.15 в допустимых пределах.

Давление p_0 в форкамере измерялось образцовым манометром, а разрежение в рабочей части — вакуумметром, рассчитанными соответственно на давление до 5 *атм* и 760 *мм рт. ст.*

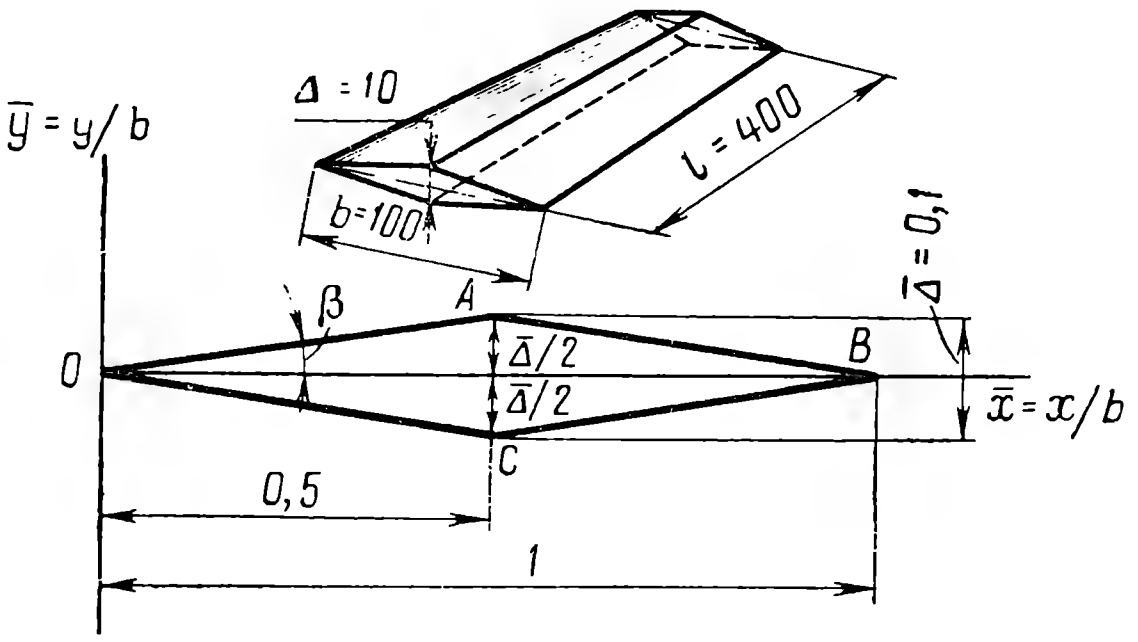


Рис. 4.1.63. Модель прямоугольного крыла с симметричным ромбовидным профилем

Число Маха $\mathbf{M}_\infty$ в рабочей части трубы уточнялось по измеренному отношению давлений $p_\infty/p_0 = \pi(\mathbf{M}_\infty)$ из таблиц газодинамических функций [13]. Измеренные значения $p_{атм}$, p_0 и p_∞, а также число Маха были такими же, как в примере к работе 4.1.4.

На рис. 4.1.64 показана фотография спектра обтекания профиля, на которой видна система скачков уплотнения и линий Маха. По этой фотографии были измерены угол наклона скачка $\theta_c = 42°$, а также углы наклона линий Маха: $\mu_\infty = 28°$; $\mu_{OA} = 27°$; $\mu_{AB} = 22°$; $\mu_{OC} = 39°$; $\mu_{CB} = 30°$.

По этим углам рассчитаны соответствующие параметры обтекания. Значение $\mu_\infty = 28°$ определяет число Маха набегающего потока

$$\mathbf{M}_\infty = 1/\sin\mu_\infty = 1/\sin 28° = 2{,}13.$$

На грани *OA* верхней стороны число Маха

$$\mathbf{M}_{OA} = 1/\sin 27° = 2{,}20.$$

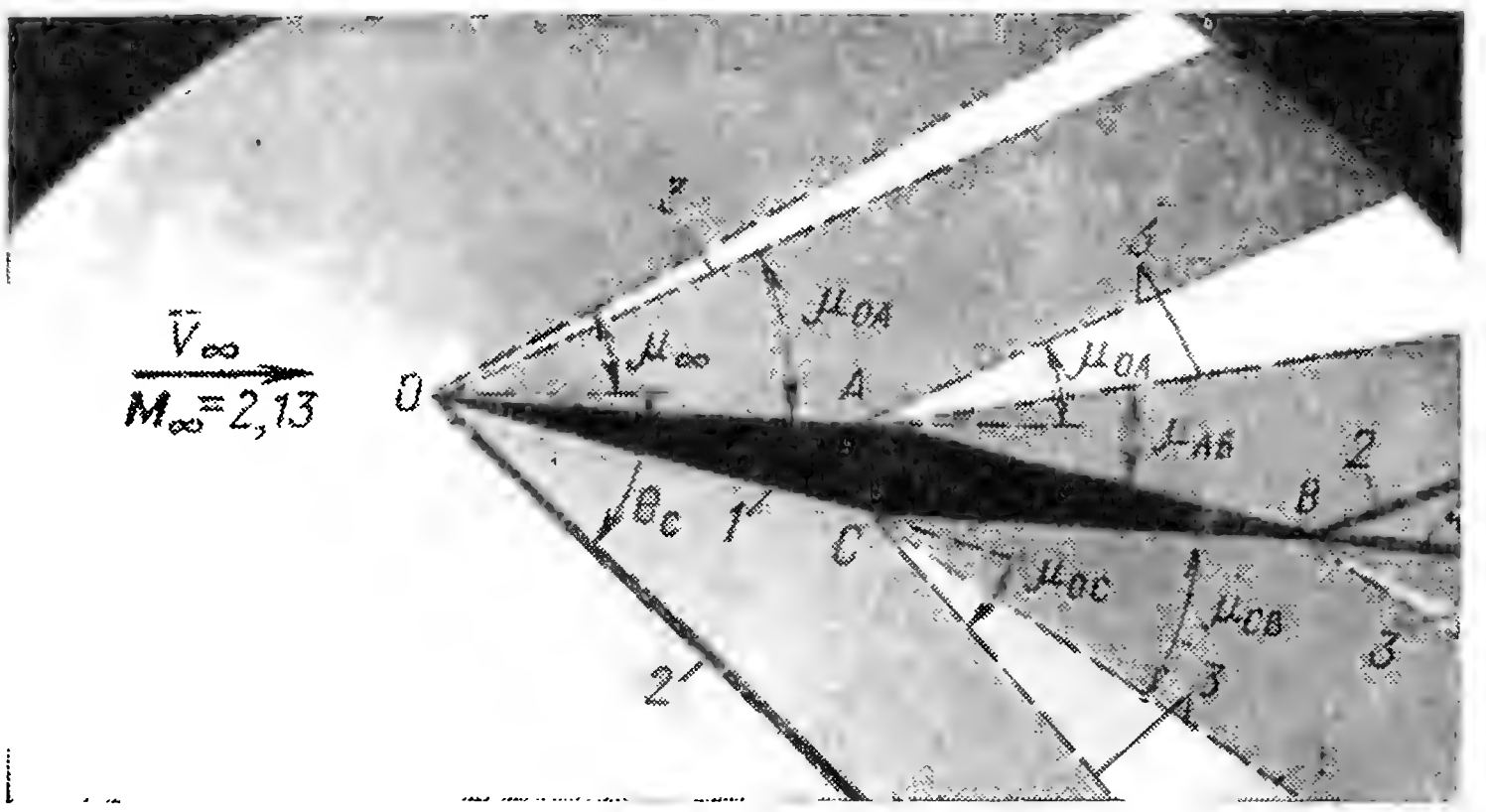


Рис. 4.1.64. Спектр обтекания профиля сверхзвуковым потоком с $\mathbf{M}_\infty = 2{,}13$:

1 — профиль; *2* — скачки уплотнения; *3* — линии Маха; *4* — след

Аналогично найдены числа Маха на гранях *AB* верхней и *CB* нижней поверхностей:

$$\mathbf{M}_{AB} = 1/\sin 22° = 2{,}67;\ \mathbf{M}_{CB} = 1/\sin 30° = 2{,}0,$$

а также число Маха на грани *OC* (после косого скачка уплотнения)

$$\mathbf{M}_{OC} = 1/\sin 39° = 1{,}59.$$

По найденным числам Маха определялись давления. В частности, на грани *OA*

$$\frac{p_{OA}}{p_\infty}=\frac{p_0}{p_\infty}\left(1+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_{OA}^2\right)^{-k/(k-1)}=\frac{3{,}31}{0{,}353}\left(1+\frac{1{,}4-1}{2}2{,}20^2\right)^{-1{,}4/(1{,}4-1)}=0{,}895.$$

Соответствующий коэффициент давления

$$\bar{p}_{OA}=\frac{2}{k\mathbf{M}_\infty^2}\left(\frac{p_{OA}}{p_\infty}-1\right)=\frac{2}{1{,}4\cdot 2{,}13^2}(0{,}895-1)=-0{,}0331.$$

Аналогично для грани AB той же верхней стороны

$$\frac{p_{AB}}{p_\infty}=\frac{p_0}{p_\infty}\left(1+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_{AB}^2\right)^{-k/(k-1)}=\frac{3{,}31}{0{,}353}\left(1+\frac{1{,}4-1}{2}2{,}67^2\right)^{-1{,}4/(1{,}4-1)}=0{,}430$$

и

$$\bar{p}_{AB}=\frac{2}{k\mathbf{M}_\infty^2}\left(\frac{p_{AB}}{p_\infty}-1\right)=\frac{2}{1{,}4\cdot 2{,}13^2}(0{,}430-1)=-0{,}180.$$

На нижней грани OC давление определяется по формуле (4.1.120):

$$\frac{p_{OC}}{p_\infty}=\frac{2\cdot 1{,}4}{1{,}4+1}2{,}13^2\sin^2 42^\circ-\frac{1{,}4-1}{1{,}4+1}=2{,}20,$$

а коэффициент давления — по формуле (4.1.121):

$$\bar{p}_{OC}=\frac{4}{(1{,}4+1)\,2{,}13^2}(2{,}13^2\sin^2 42^\circ-1)=0{,}378.$$

На грани CB коэффициент давления находится следующим образом. Используя (4.1.123), получим

$$\frac{p_{CB}}{p_{OC}}=\left[\frac{1+(1{,}4-1)\,(\sin 39^\circ)^{-2}/2}{1+(1{,}4-1)\,(\sin 30^\circ)^{-2}/2}\right]^{1{,}4/(1{,}4-1)}=0{,}535.$$

Далее по (4.1.122) находим соответствующий коэффициент давления:

$$\bar{p}_{CB}=\frac{2}{1{,}4\cdot 2{,}13^2}(0{,}535\cdot 2{,}20-1)=0{,}0558.$$

Теперь проведем расчет обтекания профиля при $\mathbf{M}_\infty=2{,}13$ и $\alpha=8^\circ$ по методу, сочетающему теорию косых скачков уплотнения и течений разрежения. При угле $\alpha=8^\circ$ реализуется третья расчетная схема, когда перед нижней гранью OC возникает косой скачок уплотнения, а на всех остальных — течение разрежения Прандтля — Майера.

По числу $\mathbf{M}_\infty=2{,}13$ из табл. 5.3.1 [20] находим $\omega_\infty=30^\circ$. Затем для граней OA и AB определяем значения:

$$\omega_{OA}=\omega_\infty+(\alpha-\beta)=30+(8-6)=32^\circ;$$

$$\omega_{AB}=\omega_{OA}+2\beta=32+2\cdot 6=44^\circ$$

и из табл. 10 [13] отыскиваем соответствующие числа Маха: $\mathbf{M}_{OA}=2{,}21$; $\mathbf{M}_{AB}=2{,}72$. По этим числам находим:

$$\frac{p_{OA}}{p_\infty}=\left[\frac{1+(k-1)\mathbf{M}_\infty^2/2}{1+(k-1)\mathbf{M}_{OA}^2/2}\right]^{k/(k-1)}=\left[\frac{1+(1{,}4-1)2{,}13^2/2}{1+(1{,}4-1)2{,}21^2/2}\right]^{1{,}4/(1{,}4-1)}=0{,}880;$$

$$\bar{p}_{OA}=\frac{2}{k\mathbf{M}_\infty^2}\left(\frac{p_{OA}}{p_\infty}-1\right)=\frac{2}{1{,}4\cdot 2{,}13^2}(0{,}880-1)=-0{,}0379;$$

$$\frac{p_{AB}}{p_\infty}=\left[\frac{1+(k-1)\mathbf{M}_\infty^2/2}{1+(k-1)\mathbf{M}_{AB}^2/2}\right]^{k/(k-1)}=\left[\frac{1+(1{,}4-1)2{,}13^2/2}{1+(1{,}4-1)2{,}72^2/2}\right]^{1{,}4/(1{,}4-1)}=0{,}399;$$

$$\bar{p}_{AB}=\frac{2}{k\mathbf{M}_\infty^2}\left(\frac{p_{AB}}{p_\infty}-1\right)=\frac{2}{1{,}4\cdot 2{,}13^2}(0{,}399-1)=-0{,}189.$$

Обтекание нижней поверхности определяется углом наклона косого скачка θ_c. Его величина была найдена по $M_\infty = 2{,}13$ и углу отклонения потока $\beta' = \beta + \alpha = 6° + 8° = 14°$ из графика на рис. III-1 [17] и равнялась $\theta_c = 41{,}5°$. Там же находилось число Маха за косым скачком $M_{OC} = 1{,}55$. Соответствующее отношение давлений определялось по формуле (4.1.120):

$$\frac{p_{OC}}{p_\infty} = \left(\frac{2 \cdot 1{,}4}{1{,}4+1} 2{,}13^2 \sin^2 41{,}5° - \frac{1{,}4-1}{1{,}4+1}\right) = 2{,}17.$$

Коэффициент давления за скачком (на грани OC)

$$\bar{p}_{OC} = \frac{2}{kM_\infty^2}\left(\frac{p_{OC}}{p_\infty} - 1\right) = \frac{2}{1{,}4 \cdot 2{,}13^2}(2{,}17 - 1) = 0{,}369.$$

Расчет числа Маха и давления на грани CB проводился следующим образом. По числу $M_{OC} = 1{,}55$ из табл. 5.3.1 [20] определен угол $\omega_{OC} = 13{,}5$, а по величине $\omega_{CB} = \omega_{OC} + 2\beta = 13{,}5° + 2 \cdot 6° = 25{,}5°$ из табл. 10 [13] — число Маха $M_{CB} = 1{,}97$. Этим числам соответствуют отношение давлений

$$\frac{p_{CB}}{p_{OC}} = \left[\frac{1 + (k-1)M_{OC}^2/2}{1 + (k-1)M_{CB}^2/2}\right]^{k/(k-1)} = \left[\frac{1 + (1{,}4-1)1{,}55^2/2}{1 + (1{,}4-1)1{,}97^2/2}\right]^{1{,}4/(1{,}4-1)} = 0{,}530$$

и коэффициент давления

$$\bar{p}_{CB} = \frac{2}{kM_\infty^2}\left(\frac{p_{CB}}{p_{OC}} \cdot \frac{p_{OC}}{p_\infty} - 1\right) = \frac{2}{1{,}4 \cdot 2{,}13^2}(0{,}53 \cdot 2{,}17 - 1) = 0{,}0473.$$

Результаты определения чисел Маха и коэффициентов давления на гранях профиля по измеренным углам скачка уплотнения и линий Маха, а также расчета по методу сочетания теории скачков уплотнения и течения разрежения приведены в табл. А.

Таблица А

Параметры	M_{OA}	$\bar{p}_{OA}$	M_{AB}	$\bar{p}_{AB}$	M_{OC}	$\bar{p}_{OC}$	M_{CB}	$\bar{p}_{CB}$
Экспериментальные данные	2,20	—0,0331	2,67	—0,180	1,59	0,378	2,00	0,0558
Теоретический расчет	2,21	—0,0379	2,72	—0,189	1,55	0,369	1,97	0,0473

Работа 4.1.6

Исследование влияния скольжения крыла на обтекание профиля

Цель работы — найти распределение давления по профилю прямого и скользящего крыльев бесконечного размаха и определить по ним соответствующие аэродинамические коэффициенты; путем сравнения полученных результатов оценить влияние скольжения на обтекание профиля; экспериментально проверить возможность расчета аэродинамических коэффициентов профиля скользящего крыла по известным их значениям для такого же профиля, принадлежащего прямому крылу.

Общие сведения

Прямоугольное крыло бесконечного размаха, передняя кромка которого не перпендикулярна направлению скорости набегающего потока, называется скользящим крылом, а угол между вектором скорости $\bar{V}_\infty$ и его нормальной к передней кромке составляющей — углом скольжения χ (рис. 4.1.65). Такая передняя кромка называется также скользящей, или стреловидной.

Рассмотрим некоторые особенности обтекания скользящих крыльев. Поток около таких крыльев можно разделить на два течения: одно из

них —продольное (вдоль размаха крыла), характеризующееся скоростью $V_{\infty\tau} = V_\infty \sin\chi$, параллельной передней кромке, а другое — поперечное течение, зависящее от величины нормальной к этой кромке составляющей скорости $V_{\infty n} = V_\infty \cos\chi$.

Распределение давлений по крылу не зависит от продольного течения, а обусловлено лишь поперечным обтеканием со скоростью $V_{\infty n} = V_\infty \cos\chi$. Характер этого обтекания, а следовательно, и распределение давления изменяются в зависимости от формы профиля, совпадающего с сечением крыла плоскостью, нормальной к передней кромке, и угла атаки, измеряемого в этой плоскости. В соответствии с этим аэродинамические характеристики этого профиля будут такими же, как профиля, принадлежащего прямому (нестреловидному) крылу, обтекаемому со скоростью набегающего потока $V_{\infty n}$ под указанным углом атаки. Отсюда следует также вывод, согласно которому аэродинамические характеристики скользящего крыла можно определить, если известны соответствующие их значения для прямого крыла.

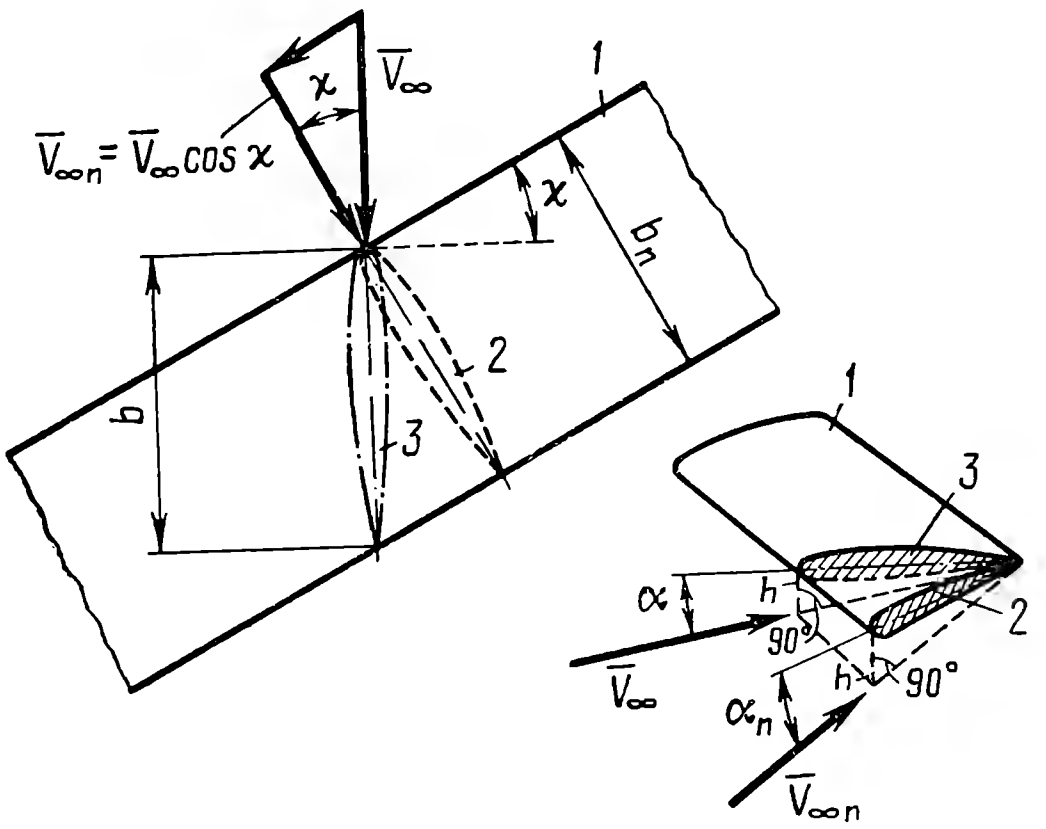


Рис. 4.1.65. Скользящее крыло:

1 — поверхность крыла; *2* — профиль в сечении по нормали; *3* — профиль в сечении по потоку

Несжимаемый поток. При определении аэродинамических характеристик скользящее крыло можно рассматривать как прямое, повернутое на угол скольжения χ. В этом случае, очевидно, у скользящего крыла в нормальном сечении профиль такой же, как у прямого крыла.

Профиль и угол атаки в плоскости, нормальной к передней кромке, отличаются от профиля и угла атаки в сечении по потоку (см. рис. 4.1.65). Хорда в нормальном сечении b_n и хорда b вдоль потока связаны соотношением

$$b_n = b\cos\chi. \tag{4.1.132}$$

Угол атаки α_n в нормальном сечении определяется из выражения

$$\sin\alpha_n = h/b_n = h/(b\cos\chi) = \sin\alpha/\cos\chi, \tag{4.1.133}$$

в котором α — угол атаки в плоскости потока (см. рис. 4.1.65).

Если известен коэффициент давления $\bar{p}$ в некоторой точке на профиле крыла при прямом обтекании (без скольжения) со скоростью $\bar{V}_\infty$, то при повороте крыла на угол χ коэффициент давления $\bar{p}_\chi$ в той же точке (при сохранении угла атаки в нормальном сечении, равным углу атаки профиля прямого крыла) будет определяться по формуле

$$\bar{p}_\chi = \bar{p}\cos^2\chi, \tag{4.1.134}$$

а соответствующие аэродинамические коэффициенты подъемной силы, момента тангажа и сопротивления от давления:

$$c_{y\chi} = c_y\cos^2\chi; \tag{4.1.135}$$

$$m_{z\chi} = m_z\cos^2\chi; \tag{4.1.136}$$

$$c_{xp\chi} = c_{xp}\cos^3\chi. \tag{4.1.137}$$

Причем эти коэффициенты, как и коэффициент давления, определены для скоростного напора $q_\infty = \rho_\infty V_\infty^2/2$.

Из формул (4.1.135) и (4.1.136) следует, что коэффициент центра давления, рассчитанный по выражению $c_{ц.д} = -m_{z\chi}/c_{y\chi}$, соответствующему малым углам атаки, не зависит от угла скольжения.

Сжимаемый поток. Согласно линеаризованной теории коэффициент давления на профиле скользящего крыла в дозвуковом сжимаемом потоке можно получить из соответствующего коэффициента для

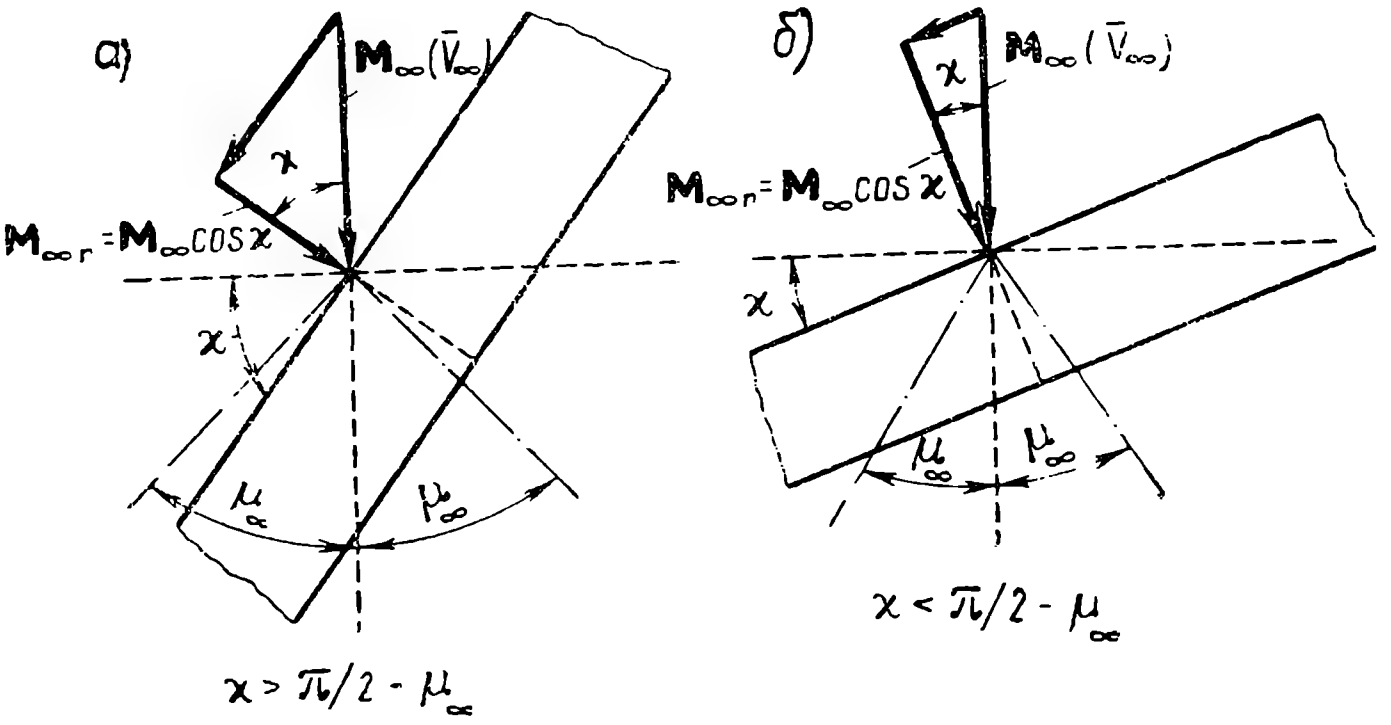


Рис. 4.1.66. Скользящее крыло с дозвуковой (*а*) и сверхзвуковой (*б*) передними кромками

того же крыла в несжимаемой жидкости, пользуясь формулой Прандтля — Глауэрта (4.1.32), в которой число M_∞ заменено на $M_\infty \cos\chi$:

$$\bar p_{\chi сж} = \bar p_{\chi несж}/\sqrt{1 - M_\infty^2 \cos^2\chi} \qquad (4.1.138)$$

или с учетом (4.1.134)

$$\bar p_{\chi сж} = \bar p_{несж} \cos^2\chi/\sqrt{1 - M_\infty^2 \cos^2\chi}. \qquad (4.1.139)$$

Соответствующие аэродинамические коэффициенты определяются при помощи соотношений (4.1.38), (4.1.39) и (4.1.135), (4.1.136). В частности, коэффициент подъемной силы

$$c_{y\chi сж} = c_y \cos^2\chi/\sqrt{1 - M_\infty^2 \cos^2\chi}. \qquad (4.1.140)$$

Применение скользящего крыла вызывает такой эффект обтекания, который имел бы место при снижении скорости набегающего потока от значения V_∞ до $V_\infty \cos\chi$. При этом, естественно, уменьшаются и местные скорости на профиле скользящего крыла, что в свою очередь приводит к снижению разрежения и, как следствие, к увеличению критического числа Маха $M_{\infty кр\chi}$ невозмущенного потока для стреловидного крыла. Это число Маха может быть определено по известному его значению $M_{\infty кр}$ для профиля прямого крыла, имеющего ту же форму и угол атаки, что и профиль скользящего крыла в нормальном сечении:

$$M_{\infty кр\chi} = M_{\infty кр}/\cos^2\chi. \qquad (4.1.141)$$

Сверхзвуковые скорости. Сверхзвуковое обтекание скользящего крыла характеризуется «нормальной составляющей» числа Маха $M_{\infty n} = M_\infty \cos\chi$. В зависимости от величины этой составляющей возможны два случая обтекания (рис. 4.1.66).

1. Величина $M_{\infty n} = M_\infty \cos\chi < 1$. Это случай дозвукового обтекания профиля скользящего крыла. Очевидно, для значений $M_\infty \cos\chi < M_{\infty кр\chi}$ (докритические скорости) расчет такого обтекания ведется по теории дозвуковых течений, как было показано в работе 4.1.1. В соответствии

с этим передняя кромка такого скользящего крыла называется дозвуковой.

Из выражения $\mathbf{M}_\infty \cos\chi < 1$ следует, что $\cos\chi < 1/\mathbf{M}_\infty = \sin\mu_\infty$, откуда $\chi > \pi/2 - \mu_\infty$. Это неравенство означает, что линии Маха, внутри которых распространяются слабые возмущения от крыла, проходят перед его передней кромкой (рис. 4.1.66, *а*). Вследствие этого имеет место взаимодействие потоков на верхней и нижней сторонах крыла, проявляющееся в перетекании газа из области высокого давления в зону разрежения. Таким образом, в этом случае наблюдаются эффекты, соответствующие чисто дозвуковому обтеканию.

2. «Нормальная составляющая» числа Маха $\mathbf{M}_{\infty n} = \mathbf{M}_\infty \cos\chi > 1$. Отсюда следует, что $\cos\chi > 1/\mathbf{M}_\infty = \sin\mu_\infty$ и $\chi < \pi/2 - \mu_\infty$. Это соответствует тому, что линии Маха проходят позади передней кромки (рис. 4.1.66, *б*), на которую набегает сверхзвуковой поток с числом $\mathbf{M}_{\infty n} > 1$. Такая передняя кромка называется сверхзвуковой. В этом случае при сверхзвуковом обтекании скользящего крыла отсутствует взаимодействие между верхней и нижней поверхностями и расчет такого обтекания можно производить независимо для каждой поверхности. Расчет коэффициента давления можно осуществлять по формуле (4.1.134), а расчет аэродинамических коэффициентов — из выражений (4.1.135) ÷ ÷ (4.1.137). Причем входящие в соответствующие формулы коэффициент давления $\bar{p}$, а также аэродинамические коэффициенты c_y, m_z, $c_{xp} = c_{x\text{в}}$ определяются по теории сверхзвукового обтекания при условии замены числа $\mathbf{M}_\infty$ на $\mathbf{M}_\infty \cos\chi$. В частности, коэффициент подъемной силы, отнесенный к скоростному напору $q_\infty = \rho_\infty V_\infty^2/2$, равен согласно данным линеаризованной теории

$$c_y = 4\alpha \cos^2\chi / \sqrt{\mathbf{M}_\infty^2 \cos^2\chi - 1},$$

где α — угол атаки профиля скользящего крыла в нормальном к передней кромке сечении.

Измерение давления на профилях стреловидных крыльев. Целью экспериментального исследования стреловидных крыльев является, с одной стороны, измерение распределения давления и расчет по этому распределению аэродинамических коэффициентов профиля и, с другой, опытная проверка возможности определения таких коэффициентов по известным их значениям для прямого крыла. Экспериментальные исследования осуществляются в аэродинамических трубах на дренированных моделях, которые могут быть использованы одновременно в качестве стреловидных или прямых крыльев.

Схемы экспериментальных установок показаны на рис. 4.1.67 и 4.1.68. Модель крыла в открытой рабочей части дозвуковой аэродинамической трубы (см. рис. 4.1.67) закрепляется при помощи приспособления, которое позволяет устанавливать ее под углом атаки и одновременно располагать в потоке как прямое или скользящее крыло. Модели крыла, установленной в закрытой рабочей части сверхзвуковой аэродинамической трубы (см. рис. 4.1.68), также придаются различные углы атаки и скольжения с помощью специального приспособления. Все дренажные отверстия соединяются с батарейным жидкостным манометром, как показано на рис. 4.1.67, или с групповым регистрирующим манометром (ГРМ) (см. рис. 4.1.68), по показаниям которых находятся давления, а затем вычисляются соответствующие коэффициенты давлений.

При испытаниях в дозвуковой аэродинамической трубе скоростной напор $\rho_\infty V_\infty^2/2$ и скорость V_∞ определяются с помощью трубки Пито, помещенной в набегающий поток и связанной резиновым шлангом с U-об-

разным жидкостным манометром; при этом плотность определяется по (4.1.52).

В сверхзвуковой трубе с закрытой рабочей частью штуцеры трубки Пито, помещенной в форкамере, и отверстия в рабочей части (приемник

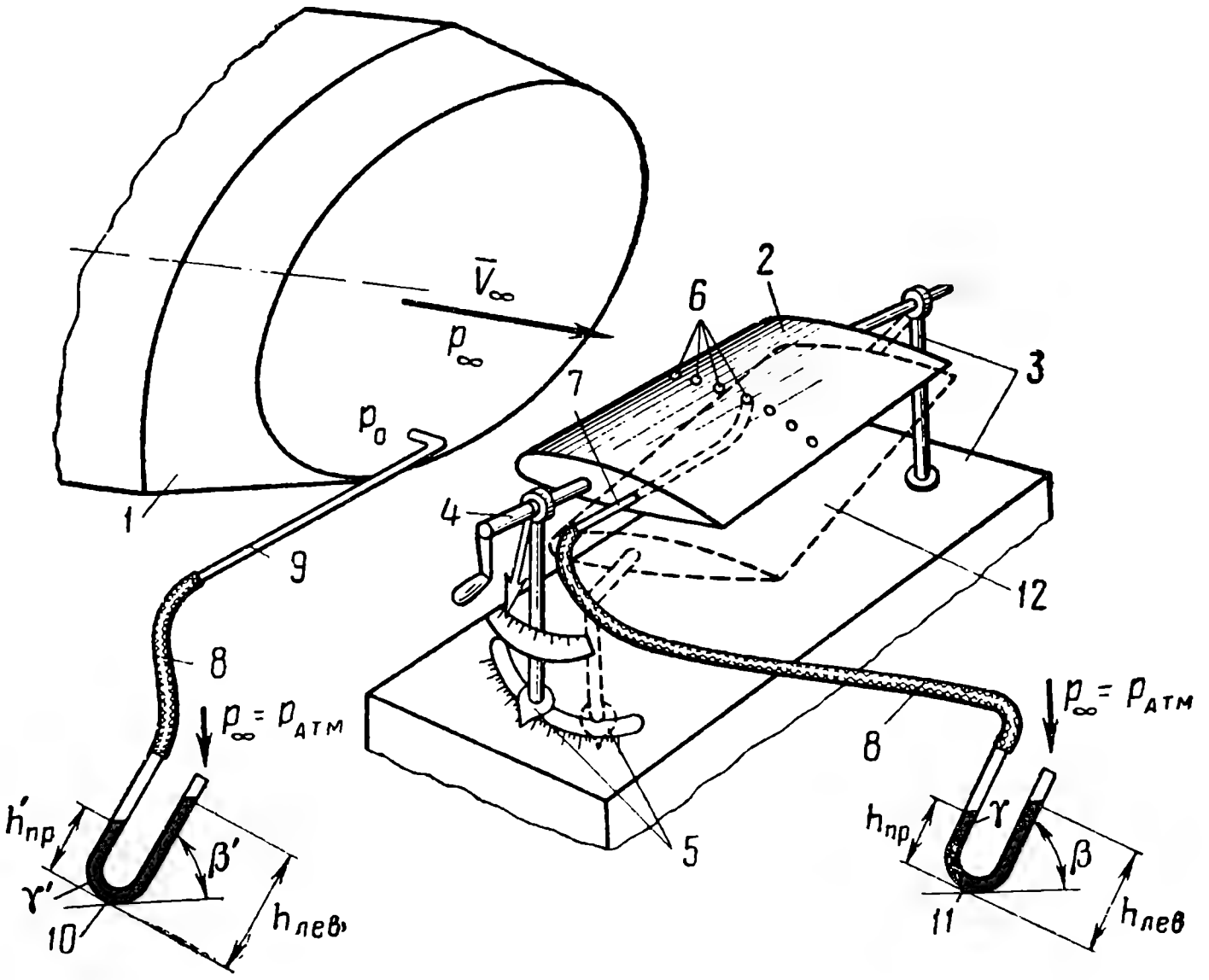


Рис. 4.1.67. Схема установки для проведения дренажных испытаний модели прямого и скользящего крыльев в дозвуковом потоке:

1 — сопло дозвуковой аэродинамической трубы; *2* — модель крыла; *3* — приспособление для установки модели в рабочей части; *4*—устройство для изменения угла атаки; *5* — механизм изменения угла скольжения; *6* — дренажные отверстия; *7* — медная трубка; *8*—резиновый шланг; *9* — трубка Пито; *10*, *11* — U-образные жидкостные манометры для замера соответственно скоростного напора и статического давления на поверхности модели; *12* — модель крыла под углом скольжения ($\chi \neq 0$)

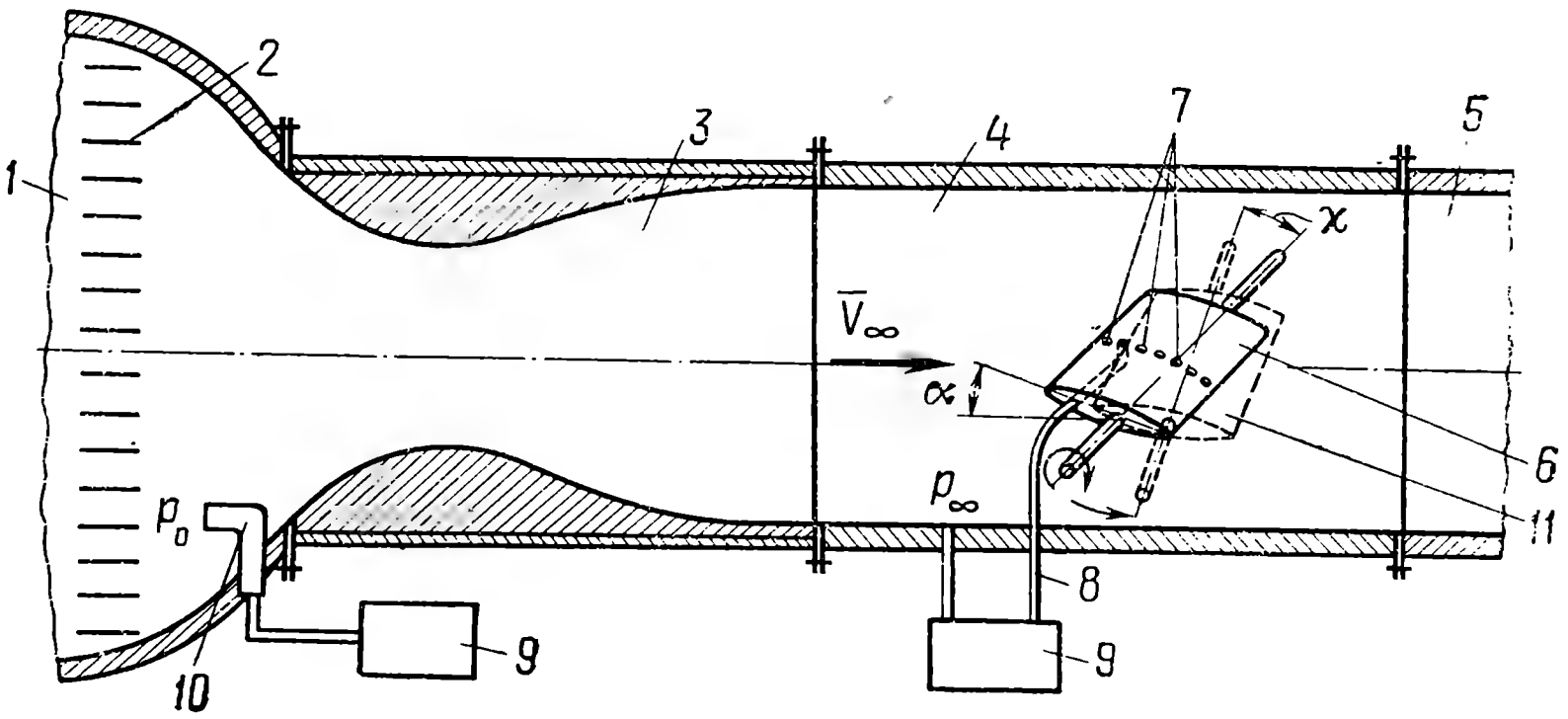


Рис. 4.1.68. Схема установки модели крыла и измерительных приборов в сверхзвуковой аэродинамической трубе для исследования влияния скольжения:

1 — форкамера; *2* — спрямляющая решетка; *3* — сопло; *4* — рабочая часть; *5* — диффузор; *6* — модель крыла; *7* — дренажные отверстия; *8* — дренажная трубка; *9* — ГРМ; *10* — трубка Пито; *11* — модель крыла под углом скольжения ($\chi \neq 0$)

давления) связаны с ГРМ, что позволяет измерить давление торможения p_0 и статическое давление в рабочей части p_∞. Записи давлений на бумажной ленте ГРМ, как и записи статических давлений на поверхно-

сти дренированной модели, расшифровываются по формуле (2.1.14). По значениям величин p_0 и p_∞ рассчитываются число $\mathbf{M}_\infty$ в рабочей части трубы (см. работу 4.1.4), а также скоростной напор $q_\infty = 0{,}5\, k p_\infty \mathbf{M}_\infty^2$.

При проведении исследований в дозвуковой аэродинамической трубе с открытой рабочей частью вначале измеряется давление на профиле крыла, которое устанавливается в потоке как прямое под заданным углом атаки α_n. Затем эта же модель поворачивается на угол скольжения χ и закрепляется под углом атаки $\alpha = \alpha_n \cos\chi$ (при этом, очевидно, в нормальной к передней кромке плоскости угол атаки остается равным α_n, как и при прямом обтекании профиля).

Измерив и сравнив давления p и p_χ в соответственных точках профиля при прямой и косой его обдувке, можно проверить достоверность предпосылки, в соответствии с которой распределение давления зависит только от нормальной составляющей скорости $V_{\infty n} = V_\infty \cos\chi$. Коэффициенты давления в этих точках, рассчитанные по нормальным к передней кромке скоростям, т. е. по V_∞ и $V_\infty \cos\chi$ соответственно, должны быть равны, так как они зависят от формы профиля, положения точки на нем и угла атаки (что в обоих случаях одинаково), но не зависят от скорости. Таким образом,

$$\bar{p} = \frac{p - p_\infty}{\rho_\infty V_\infty^2/2} = \bar{p}_\chi = \frac{p_\chi - p_\infty}{\rho_\infty V_\infty^2 \cos^2\chi/2},$$

откуда

$$(p_\chi - p_\infty) = (p - p_\infty)\cos^2\chi.$$

Если далее определить по результатам измерения давления их коэффициенты $\bar{p}$ и $\bar{p}_\chi$ на профиле соответственно при прямом его обтекании и со скольжением, а затем сопоставить их, то тем самым будет проконтролировано правило, согласно которому обтекание скользящего крыла может быть рассчитано по известным параметрам прямого крыла бесконечного размаха того же профиля, в частности, например, по формуле (4.1.134).

Подтвердить предположение о зависимости распределения давления при прочих равных условиях только от нормальной составляющей скорости можно также путем смены выходного насадка на сопле дозвуковой аэродинамической трубы, подобрав его таким образом, чтобы труба давала скорость набегающего потока, равную $V_\infty \cos\chi$. Очевидно, при правильности рассматриваемого предположения результаты продувки прямого крыла в этом случае должны совпадать с результатами косой обдувки под углом χ того же крыла при скорости невозмущенного потока, даваемого трубой, равной V_∞. Расчет аэродинамических характеристик профиля при прямой или косой его обдувке по известному распределению коэффициентов давления производится соответственно по формулам (4.1.12), (4.1.18) и (4.1.20).

Исследования в сверхзвуковой трубе будут аналогичными. При этом приспособление, на котором модель закрепляется в рабочей части трубы, должно позволять в ходе эксперимента устанавливать модель под различными углами атаки и скольжения.

Методика экспериментального исследования может быть иной. После продувки модели, расположенной как прямое крыло под некоторым углом атаки α, потоком с числом $\mathbf{M}_\infty$ останавливают трубу и поворачивают модель на угол скольжения, наклоняя ее одновременно на угол атаки $\alpha = \alpha_n \cos\chi$ (где α_n — угол атаки в плоскости потока при прямой обдувке крыла). При этом также производят смену соплового вкладыша с целью получения числа Маха в рабочей части трубы, равного $\mathbf{M}_\infty/\cos\chi$. Результаты продувки в этом случае должны, очевидно, совпа-

дать с соответствующими результатами для того же крыла без скольжения в потоке с числом M_∞. Расчет аэродинамических характеристик профиля по известному распределению давления ведется при помощи графического интегрирования с использованием формул (4.1.12), (4.1.18) и (4.1.20).

При испытаниях моделей со скольжением проверяются также допустимые величины «загромождения» рабочей части моделью, а при сверхзвуковых скоростях еще и расположение дренажных отверстий вне конусов возмущений, проходящих через передние кромки концевых сечений (см. рис. 4.1.51). Кроме того, отраженные от стенок трубы ударные волны должны пересекаться за моделью (см. рис. 4.1.50).

Порядок проведения работы

Ознакомиться с устройством и проверить готовность к работе экспериментальных установок на базе дозвуковой или сверхзвуковой трубы.

Дозвуковая труба.

1. Закрепить в рабочей части трубы при помощи приспособления дренированную модель как прямое крыло под заданным углом атаки α.

2. Записать показания лабораторных барометра ($p_{атм}=p_\infty$), термометра ($T_{атм}=T_\infty$) и психрометра (T').

3. Произвести запуск трубы и после выхода ее на режим установившегося обтекания ввести трубку Пито и снять показания с колен связанного с ней манометра ($h'_{пр}$, $h'_{лев}$; $\Delta h'=h'_{пр}-h'_{лев}$).

4. Зафиксировать показания отсчетных колен манометров, связанных с дренажными отверстиями на модели ($h_{пр}$; $h_{лев}$), путем непосредственного наблюдения или фотографирования.

5. Прекратить работу трубы и установить модель под углом атаки $\alpha\cos\chi$, повернув ее на угол скольжения χ (в этом случае, очевидно, угол атаки α_n в нормальном сечении будет равен углу атаки α прямого крыла); включить трубу и зафиксировать показания батарейного манометра.

6. По показаниям манометра, предназначенного для измерения скоростного напора, вычислить величину $q_\infty=\rho_\infty V_\infty^2/2$, а затем определить скорость V_∞.

7. После фотографирования панели батарейного манометра проявить фотопленку и с помощью прибора «Микрофот» расшифровать его показания ($h_{пр}$; $h_{лев}$).

8. По этим показаниям определить разности уровней $\Delta h=h_{пр}-h_{лев}$ и вычислить по ним коэффициенты давлений $\bar{p}=(p-p_\infty)/(\rho_\infty V_\infty^2/2)$ и $\bar{p}'_\chi=(p_\chi-p_\infty)/(\rho_\infty V_\infty^2/2)$.

9. По результатам измерений для ряда дренажных точек найти величину $\bar{p}'_\chi=(p_\chi-p_\infty)/(\rho_\infty V_\infty^2\cos^2\chi/2)=\bar{p}_\chi/\cos\chi$ и вычислить относительную разность $\Delta\bar{p}=|\bar{p}-\bar{p}'_\chi|/\bar{p}$.

10. Построить диаграммы $\bar{p}=f_1(\bar{x})$ и $\bar{p}_\chi=f_2(\bar{x})$ и графическим интегрированием определить соответственно коэффициенты подъемной силы прямого (c_y) и скользящего ($c_{y\chi}$) крыльев.

11. Сравнить значения $c_{y\chi}$ и $c'_{y\chi}=c_y\cos^2\chi$ и определить относительную разницу; найти для прямого крыла по формуле (4.1.21) теоретический коэффициент c'_y подъемной силы, вычислить значение $c''_{y\chi}=c'_y\cos^2\chi$ и сравнить его с экспериментальной величиной.

Сверхзвуковая труба.

1. Закрепить модель в закрытой рабочей части трубы на державке и с помощью координатника придать ей некоторые углы атаки α и

скольжения χ. При этом α и χ должны быть такими, чтобы поток около профиля в нормальном сечении был сверхзвуковым ($M_\infty \cos\chi > 1$) и маловозмущенным (линеаризованным).

2. Записать показания лабораторного барометра ($p_{атм}$).

3. Записать начальные показания на печатающем устройстве групповых регистрирующих манометров по каждому измерительному каналу.

4. Включить трубу и после выхода ее на режим установившегося обтекания записать показания ГРМ, а затем остановить трубу.

5. Расшифровать показания на бумажной ленте ГРМ, регистрирующей давление торможения p_0 в форкамере и статическое давление p_∞ в рабочей части; определить число M_∞ в рабочей части трубы.

6. Расшифровать показания ГРМ, соответствующие измеряемому статическому давлению p_χ на поверхности модели, и вычислить коэффициенты давления $\bar{p}'_\chi = (p_\chi - p_\infty)/(0{,}5 \cdot k p_\infty M_\infty^2 \cos^2\chi)$ на профиле в плоскости, нормальной к передней кромке крыла.

7. Определить коэффициенты давления в тех же точках профиля по формуле $\bar{p}''_\chi = \pm 2\theta \sqrt{M_\infty^2 \cos^2\chi - 1}$ и сравнить их с соответствующими значениями $\bar{p}'_\chi$; вычислить относительную разность $\Delta\bar{p} = |\bar{p}'_\chi - \bar{p}''_\chi|/\bar{p}'_\chi$.

Пример. Рассмотрим результаты лабораторной работы по исследованию обтекания стреловидных крыльев прямоугольной формы в плане в дозвуковой и сверхзвуковой аэродинамических трубах.

Дозвуковая труба.

Для исследований в дозвуковой трубе была использована та же модель, что и в работе 4.1.1. В нормальном сечении это крыло имело профиль с хордой $b_n = 0{,}1$ *м*, изображенной на рис. 4.1.69, где цифрами отмечены дренажные отверстия.

Модель располагалась в открытой рабочей части малоскоростной аэродинамической трубы как прямое крыло под углом атаки $\alpha = 6°$ (см. рис. 4.1.67).

Величина «загромождения» потока при $\alpha = 6°$ определялась отношением

$$\frac{S_м}{S_т} \approx \frac{b_n \sin\alpha D}{\pi D^2/4} = \frac{0{,}1 \sin 6° \cdot 0{,}8}{\pi \cdot 0{,}8^2/4} = 0{,}0167.$$

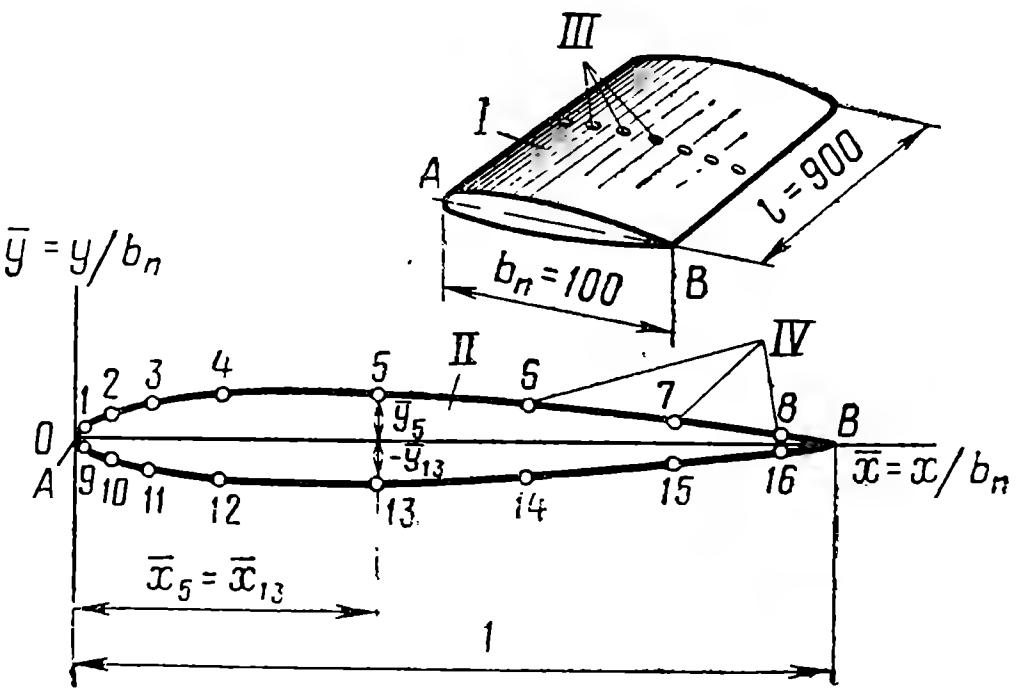


Рис. 4.1.69. Скользящее крыло:

I — крыло; *II* — форма профиля в нормальном сечении; *III* — дренажные отверстия; *IV* — маркировка дренажных отверстий; *A* — точка передней кромки; *B* — точка задней кромки профиля

Расчет этого отношения проводился по диаметру выходного сечения сопла, равному $D = 0{,}8$ *м*.

Измерения давлений и скоростного напора осуществлялись с помощью U-образных жидкостных манометров, как показано на рис. 4.1.67, причем $\sin\beta = \sin\beta' = 0{,}246$ и $\gamma = \gamma' = 0{,}805$ *кГ/дм*^{3}. Перепад уровней $\Delta h' = h'_{пр} - h'_{лев}$ оказался равным 300 *мм*. Результаты определения параметров потока приведены в табл. А к работе 4.1.1. По показаниям манометров было найдено распределение по контуру профиля коэффициентов давления, помещенных в табл. А. В этой табл. А указаны также значения безразмерной координаты $\bar{x} = x/b_n$ дренажных точек.

Дальнейшая продувка осуществлялась под углом атаки модели, равном $\alpha \cos\chi = 0{,}105 \cos 30° = 0{,}0906$ (5°12′), при повороте ее на угол скольжения $\chi = 30°$. При этом угол атаки профиля в нормальном к передней кромке сечении оставался равным 6° (как и при прямой обдувке). Полученное распределение коэффициентов давления $\bar{p}_\chi$ представлено в табл. Б.

В табл. Б коэффициент давления рассчитывался по формуле

$$\bar{p}_\chi = \frac{p_\chi - p_\infty}{\rho_\infty V_\infty^2/2} = \frac{\Delta h \gamma \sin\beta}{\Delta h' \gamma' \sin\beta'} = \frac{\Delta h}{\Delta h'}.$$

Таблица А

Номера дренажных точек	Верхняя поверхность								Нижняя поверхность							
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*
$\bar{x}=x/b_n$	0,01	0,05	0,10	0,20	0,40	0,60	0,80	0,95	0,01	0,05	0,10	0,20	0,40	0,60	0,80	0,95
$h_{пр}$, *мм*	53	106	124	150	184	209	238	265	385	309	271	245	236	240	250	265
$h_{лев}$, *мм*	447	394	376	350	316	291	262	235	115	191	229	255	264	260	250	235
$\Delta h=h_{пр}-h_{лев}$, *мм*	—394	—288	—252	—200	—132	—82	—24	30	270	118	42	—10	—28	—20	0	30
$\bar{p}=\Delta h/\Delta h'$	—1,31	—0,96	—0,84	—0,67	—0,44	—0,27	—0,08	0,10	0,90	0,39	0,14	—0,03	—0,09	—0,06	0	0,10

Таблица Б

Номера дренажных точек	Верхняя поверхность								Нижняя поверхность							
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*
$\bar{x}=x/b_n$	0,01	0,05	0,10	0,20	0,40	0,60	0,80	0,95	0,01	0,05	0,10	0,20	0,40	0,60	0,80	0,95
$h_{пр}$, *мм*	100	140	154	173	200	218	241	262	354	295	267	247	240	242	248	262
$h_{лев}$, *мм*	400	360	346	327	300	282	259	238	146	205	233	253	260	258	252	238
$\Delta h=h_{пр}-h_{лев}$, *мм*	—300	—220	—192	—154	—100	—64	—18	24	208	90	34	—6	—20	—16	—4	24
$\bar{p}_{\chi}=\Delta h/\Delta h'$	—1,00	—0,73	—0,64	—0,51	—0,33	—0,21	—0,06	0,08	0,69	0,30	0,11	—0,02	—0,07	—0,05	—0,01	0,08

Теперь рассмотрим вычисления коэффициента $\bar{p}'_\chi = (p_\chi - p_\infty)/(\rho_\infty V_\infty^2 \cos^2\chi/2)$. В частности, для точки *5*

$$\bar{p}'_{\chi 5} = 0{,}5\,\frac{p_{\chi 5} - p_\infty}{\rho_\infty V_\infty^2 \cos^2\chi} = \frac{\bar{p}_{\chi 5}}{\cos^2\chi} = -\frac{0{,}33}{\cos^2 30^\circ} = -0{,}445.$$

Соответствующая относительная разность

$$\Delta\bar{p}_5 = \frac{|\bar{p}_5 - \bar{p}'_{\chi 5}|}{|\bar{p}_5|} = \frac{|-0{,}44 + 0{,}445|}{|0{,}44|} = 0{,}0113.$$

Эта величина, как видно, весьма небольшая. Аналогичные результаты получаются и для других точек.

На рис. 4.1.70 и 4.1.71 приведены координатные диаграммы соответственно функций $\bar{p} = f_1(\bar{x})$ и $\bar{p}_\chi = f_2(\bar{x})$, построенные по данным измерений коэффициентов давлений прямого и скользящего крыльев. При построении этих диаграмм положение на профиле критической точки, в которой коэффициент давления равен единице, а также

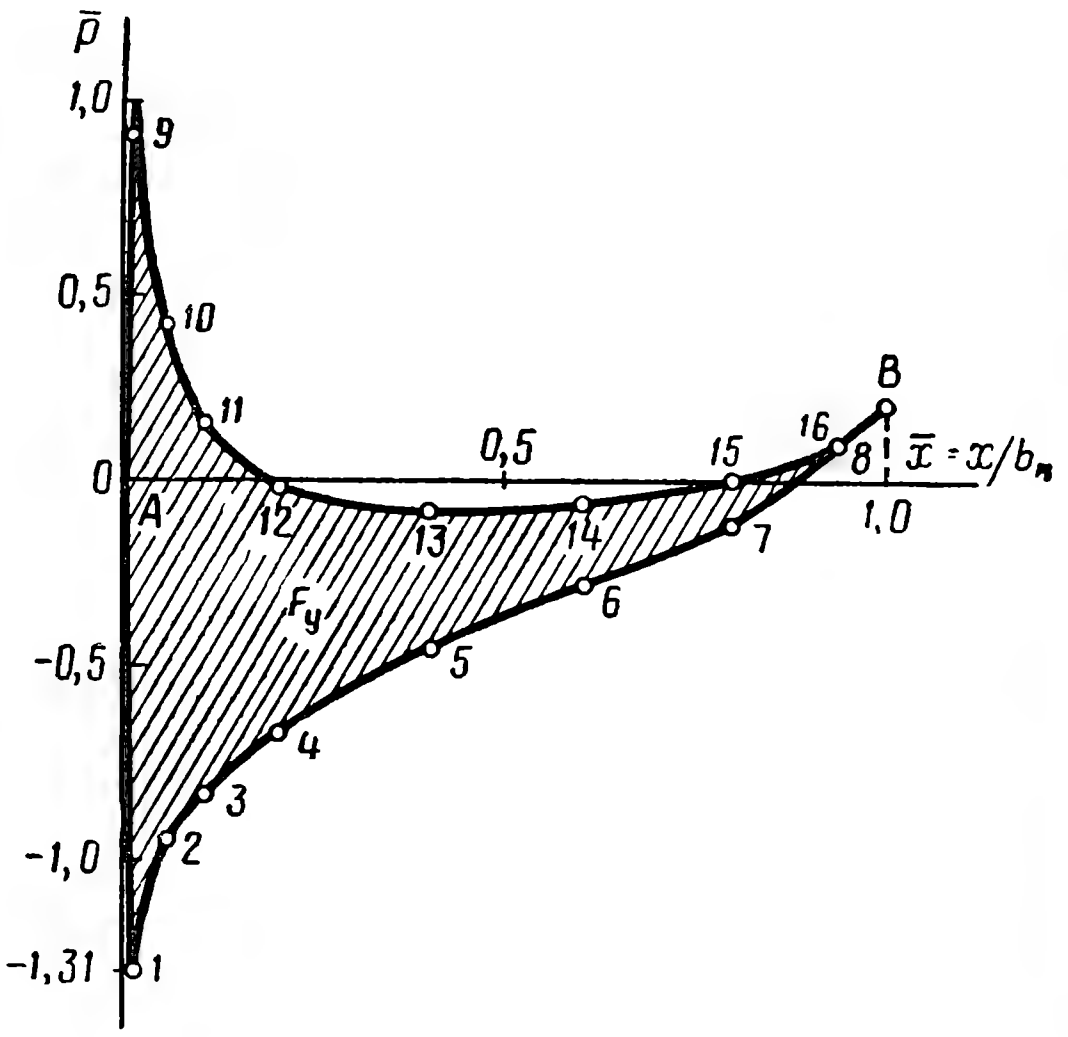


Рис. 4.1.70. Координатная диаграмма $\bar{p} = f_1(\bar{x})$ для профиля прямого крыла

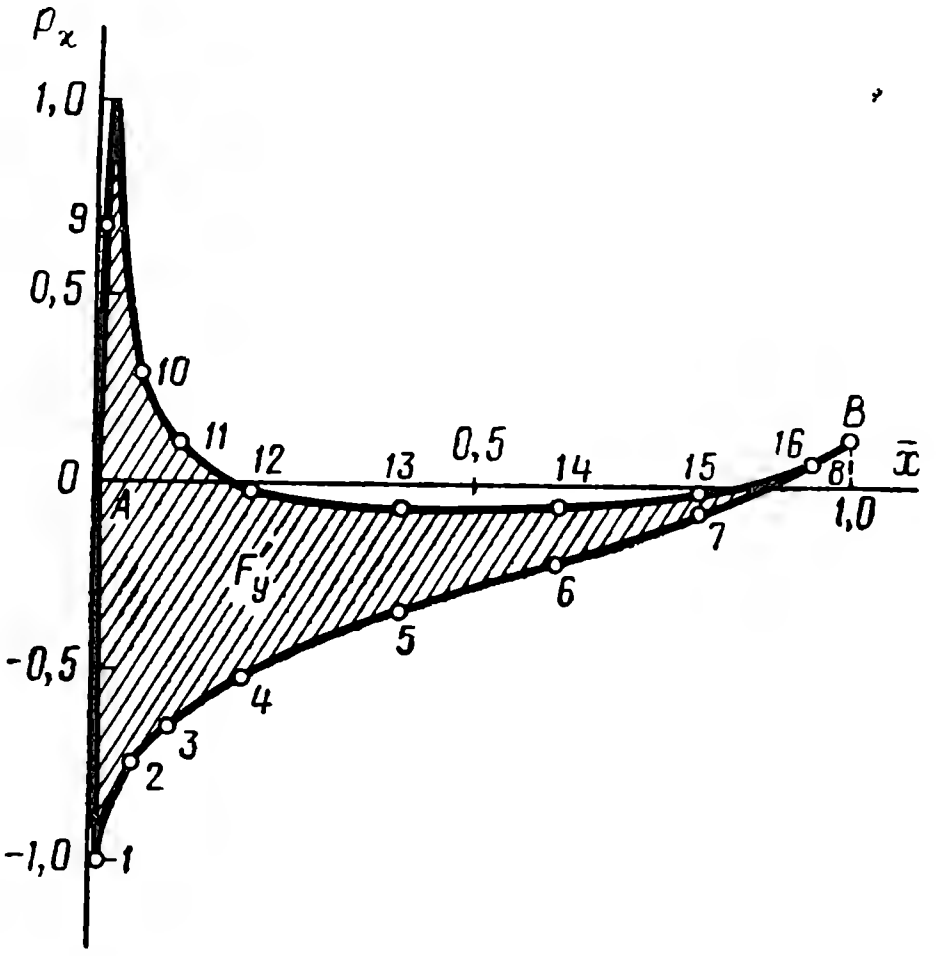


Рис. 4.1.71. Координатная диаграмма $\bar{p}_\chi = f_2(\bar{x})$ для профиля скользящего крыла

значение коэффициентов давления в точке B задней кромки находились интерполяцией (или экстраполяцией), как показано на этих рисунках.

В соответствии с диаграммами масштаб коэффициента давления выбран равным $\mu_{\bar{p}} = 2\cdot 10^{-2}$, $1/мм$, а масштаб относительной координаты $\mu_{\bar{x}} = 10^{-2}$, $1/мм$. На рис. 4.1.70 площадь, ограниченная замкнутым контуром и измеренная планиметром, $F_y = 1900$ $мм^2$. Поэтому согласно формуле (4.1.55) коэффициент подъемной силы

$$c_y = F_y \mu_{\bar{p}} \mu_{\bar{x}} = 1900\cdot 2\cdot 10^{-2}\cdot 10^{-2} = 0{,}380.$$

Аналогичная площадь на рис. 4.1.71 $F'_y = 1450$ $мм^2$ и, следовательно,

$$c_{y\chi} = F'_y \mu_{\bar{p}} \mu_{\bar{x}} = 1450\cdot 2\cdot 10^{-2}\cdot 10^{-2} = 0{,}290.$$

Соответствующее значение

$$c'_{y\chi} = c_y \cos^2\chi = 0{,}38\cos^2 30^\circ = 0{,}282,$$

а относительная разность

$$\left(c_{y\chi} - c'_{y\chi}\right)/c_{y\chi} = (0{,}290 - 0{,}282)/0{,}290 = 0{,}0275.$$

Эта разность мала и находится практически в пределах точности эксперимента.

Воспользовавшись формулой (4.1.27), в которой $a = 0{,}08$ [21] и $\alpha_0 = 0$, находим при $\alpha = 6^\circ$ значение $c'_y = 0{,}48$, а затем определяем $c''_{y\chi} = c'_y \cos^2\chi = 0{,}48\cos^2 30^\circ = 0{,}36$.

В этом случае расхождение между экспериментальной величиной $c_{y\chi}$ и полученной в результате теоретического расчета $c''_{y\chi}$ составляет

$$\left(c''_{y\chi} - c_{y\chi}\right)/c''_{y\chi} = (0{,}36 - 0{,}29)/0{,}36 = 0{,}195.$$

Такое значительное расхождение объясняется тем, что зависимость (4.1.27) дает завышенные значения коэффициента подъемной силы профиля прямого крыла.

Следует заметить, что распределения коэффициентов давления $\bar{p}_\chi$ и $\bar{p}$ соответственно по профилю скользящего и прямого крыла при одинаковых углах атаки в нормальном сечении, полученные опытным путем (см. табл. А и Б), хорошо согласуются с данными, полученными по формуле (4.1.134).

Из диаграммы на рис. 4.1.70 можно видеть, что $\bar{p}_{\min\, нсж} = -1{,}31$. Этой величине соответствует критическое число Маха $M_{\infty кр} = 0{,}50$ (см. график на рис. 4.1.15). Воспользовавшись (4.1.141), находим критическое число Маха набегающего потока для того же профиля, принадлежащего скользящему крылу с углом скольжения $\chi = 30^\circ$ (при угле атаки $\alpha_n = 6^\circ$ профиля в плоскости, нормальной передней кромке):

$$M_{\infty кр\chi} = M_{\infty кр}/\cos^2\chi = 0{,}50/\cos^2 30^\circ = 0{,}67.$$

Коэффициент подъемной силы $c_{y\chi сж}$ с учетом сжимаемости определялся по (4.1.140) и (4.1.135). В частности, для $M_\infty = 0{,}6$

$$c_{y\chi сж} = \frac{c_{y\chi нсж}}{\sqrt{1 - M_\infty^2 \cos^2\chi}} = \frac{0{,}29}{\sqrt{1 - 0{,}6^2 \cos^2 30^\circ}} = 0{,}34.$$

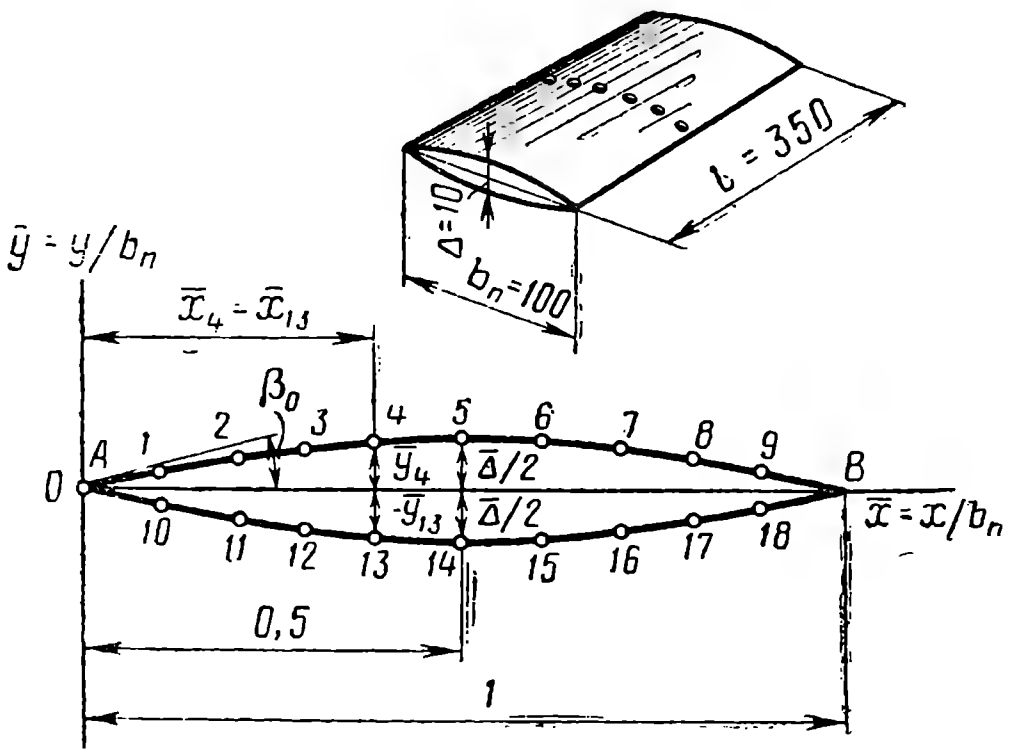


Рис. 4.1.72. Модель крыла для исследования влияния скольжения в сверхзвуковой трубе

Сверхзвуковая труба.

В сверхзвуковой аэродинамической трубе с закрытой рабочей частью был установлен сопловой вкладыш, рассчитанный на номинальное число Маха в рабочей части $M_\infty = 2$. Модель крыла с размахом $l = 0{,}35$ *м* прямоугольной формы в плане (рис. 4.1.72) имела заостренный криволинейный симметричный профиль, образованный дугами окружности. Хорда этого профиля $b_n = 0{,}1$ *м*, максимальная толщина $\Delta = 0{,}01$ *м*, полуугол заострения носка $\beta_0 = 11^\circ$. Модель устанавливалась в рабочей части аэродинамической трубы (см. рис. 4.1.49 или 4.1.68) под углом атаки $\alpha = 7^\circ$ и углом скольжения $\chi = 30^\circ$. Соответствующий угол атаки в нормальной к передней кромке крыла плоскости равнялся

$$\alpha_n = \alpha/\cos\chi = 0{,}12/\cos 30^\circ = 0{,}139\ (8^\circ).$$

«Загромождение» потока моделью при $\alpha_n = 8^\circ$ определялось отношением $S_м/S_т$ ($S_м$ — площадь проекции модели крыла на плоскость, нормальную к вектору скорости V_∞; $S_т = l_т^2$ — площадь поперечного сечения рабочей части; $l_т = 0{,}8$ *м* — расстояние между стенками трубы):

$$\frac{S_м}{S_т} \approx \frac{b_n l \sin\alpha}{l_т^2} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}35 \sin 30^\circ}{0{,}8^2} = 0{,}03,$$

что согласно графику на рис. 1.4.15 находится в допустимых пределах.

Приближенный расчет волновой картины обтекания профиля при $M_\infty = 2$ показал, что отраженные скачки не попадают на модель и плоскость дренажных отверстий лежит вне конусов возмущения (см. рис. 4.1.50 и 4.1.54).

Для замера давления торможения p_0 с помощью трубки Пито, установленной в форкамере, как показано на рис. 4.1.68, был выбран групповой регистрирующий манометр (ГРМ) со шкалой избыточных давлений 0÷5 *атм*, а для измерения статических давлений в рабочей части p_∞ и на поверхности крыла — аналогичный манометр со шкалой 0÷—1 *атм*. Коэффициенты k шкал этих манометров соответственно равнялись +0,05 и —0,05. Измеренные значения $p_{атм}$, p_0 и p_∞, а также число M_∞ и другие параметры потока были такие же, как в примере к работе 4.1.4.

«Нормальная составляющая» числа Маха

$$M_{\infty n} = M_\infty \cos\chi = 2{,}13 \cdot \cos 30^\circ = 1{,}84,$$

а соответствующий скоростной напор

$$q_{\infty n} = \frac{k}{2} p_\infty M_\infty^2 \cos^2 \chi = \frac{1{,}4}{2} 0{,}353 \cdot 10^4 \cdot 2{,}13^2 \cdot \cos^2 30^\circ = 0{,}83 \cdot 10^4 \ кГ/м^2.$$

Так как $M_{\infty n} > 1$, то следует считать переднюю кромку крыла сверхзвуковой и вести расчет профиля по теории сверхзвукового обтекания.

По результатам расшифровки записи ГРМ были вычислены коэффициенты давления $\bar{p}'_\chi = (p_\chi - p_\infty)/q_{\infty n}$ на поверхности модели (см. рис. 4.1.72) и внесены в табл. В.

В табл. В приведены: значения местных углов атаки $\theta = \alpha - dy/dx$ для отмеченных на рис. 4.1.72 дренажных точек; результаты расчета коэффициента давления $\bar{p}''_\chi = \pm 2\theta / \sqrt{M_\infty^2 \cos^2\chi - 1}$; относительная разность $\Delta\bar{p} = (\bar{p}'_\chi - \bar{p}''_\chi)/\bar{p}'_\chi$.

§ 4.2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КРЫЛА

Работа 4.2.1

Исследование распределения давления по крылу

Цель работы — в результате продувок в дозвуковой аэродинамической трубе найти распределение давления по крылу в различных сечениях по размаху, вычислить по этому распределению аэродинамические коэффициенты крыла и сравнить с соответствующими теоретическими данными.

Общие сведения

Распределение давления и аэродинамические коэффициенты. Рассмотрим задачу о нахождении коэффициентов подъемной силы, сопротивления и момента крыла произвольной формы в плане по известному распределению давления.

Обычно в результате продувок в аэродинамических трубах находят распределение давления по ряду поперечных сечений (профилей) крыла, расположенных вдоль его размаха и параллельных вектору V_∞ (рис. 4.2.1). Полагая, что нормальная сила создается в основном давлением,

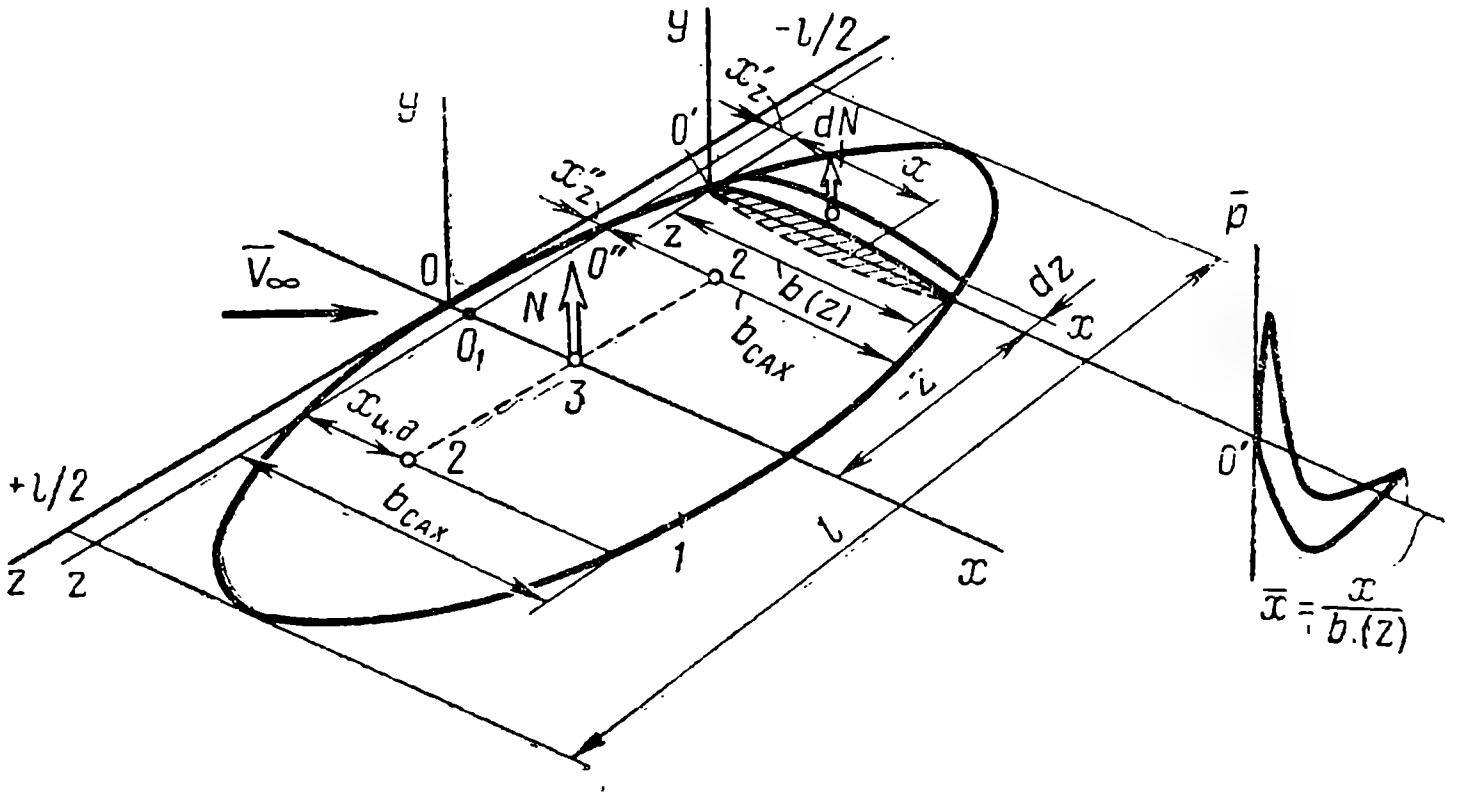


Рис. 4.2.1. К определению аэродинамических коэффициентов крыла по известному распределению давления:

1 — крыло; *2* — центр давления одной консоли крыла; *3* — центр давления крыла

Номера дренажных точек	Верхняя поверхность								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p_\chi - p_{атм}$, $кГ/см^2$	—0,650	—0,665	—0,710	—0,750	—0,770	—0,795	—0,835	—0,830	—0,825
p_χ, $кГ/см^2$	0,353	0,338	0,293	0,253	0,233	0,208	0,168	0,173	0,178
$p_\chi - p_\infty$, $кГ/см^2$	0	—0,015	—0,060	—0,100	—0,120	—0,145	—0,185	—0,180	—0,175
$\bar{p}'_\chi$	0	—0,019	—0,074	—0,123	—0,148	—0,179	—0,228	—0,222	—0,216
θ, *рад*	0	0,02	0,07	0,11	0,14	0,17	0,21	0,26	0,28
$\bar{p}''_\chi$	0	—0,022	—0,076	—0,120	—0,152	—0,181	—0,228	—0,283	—0,304
$\Delta\bar{p}$	0	0,158	0,027	0,025	0,027	0,011	0	0,274	0,407

напишем выражение для элементарной нормальной силы крыла с одним из таких профилей и с размахом dz:

$$dN = q_\infty b(z)\, dz \oint \bar{p} d\bar{x}.$$

Интегрируя это выражение по всей поверхности, т. е. вдоль размаха, найдем полную нормальную силу крыла:

$$N = q_\infty \int_{-l/2}^{+l/2} b(z)\, dz \oint \bar{p} d\bar{x}, \qquad (4.2.1)$$

где l и z — соответственно размах и координата сечения, отсчитываемая от середины крыла (корневой хорды); $b(z)$ — хорда сечения; $\bar{x} = x/b(z)$.

Записывая нормальную силу в виде

$$N = c_N q_\infty S_{кр},$$

где $S_{кр}$ — площадь крыла в плане, и учитывая (4.2.1), получим

$$c_N = \frac{1}{S_{кр}} \int_{-l/2}^{+l/2} b(z)\, dz \oint \bar{p} d\bar{x},$$

откуда, принимая во внимание (4.1.9) и вводя обозначение $c'_N = \oint \bar{p} d\bar{x}$ для коэффициента нормальной силы профиля, находим

$$c_N = \frac{1}{S_{кр}} \int_{-l/2}^{+l/2} c'_N b(z)\, dz. \qquad (4.2.2)$$

При небольших углах атаки можно принять $c_N = c_y$ и $c'_N = c'_y$ [формула (4.1.18)].

Таблица В

Нижняя поверхность								
10	11	12	13	14	15	16	17	18
—0,400	—0,415	—0,465	—0,495	—0,520	—0,555	—0,585	—0,630	—0,650
0,603	0,588	0,538	0,508	0,483	0,448	0,418	0,373	0,353
0,250	0,235	0,185	0,155	0,130	0,095	0,065	0,020	0
—0,308	0,290	0,228	0,191	0,160	0,117	0,080	0,025	0
0,28	0,26	0,21	0,17	0,14	0,11	0,07	0,02	0
0,304	0,283	0,228	0,181	0,152	0,120	0,076	0,022	0
0,013	0,024	0	0,052	0,050	0,025	0,050	0,120	0

Для того же крыла продольная составляющая аэродинамической силы от давления

$$R_p = q_\infty \int_{-l/2}^{+l/2} b(z)\,dz \oint \bar{p}\,d\bar{y},$$

а коэффициент этой силы

$$c_{Rp} = \frac{1}{S_{\text{кр}}} \int_{-l/2}^{+l/2} b(z)\,dz \oint \bar{p}\,d\bar{y},$$

где относительная координата $\bar{y} = y/b(z)$. Учитывая (4.1.12) и обозначая коэффициент продольной силы профиля через $c'_{Rp} = \oint \bar{p}\,d\bar{y}$, напишем

$$c_{Rp} = \frac{1}{S_{\text{кр}}} \int_{-l/2}^{+l/2} c'_{Rp}\, b(z)\,dz. \qquad (4.2.3)$$

Элементарная величина продольного момента, с достаточной точностью определяемого только распределением давления по крылу, для профиля относительно оси $O'z$, проходящей через переднюю кромку, равна

$$dM'_z = -q_\infty b^2(z)\,dz \oint \bar{p}\bar{x}\,d\bar{x} + q_\infty b^2(z)\,dz \oint \bar{p}\bar{y}\,d\bar{y},$$

а соответствующее значение для элементарного момента относительно некоторой произвольной оси O_1z будет (см. рис. 4.2.1)

$$dM_z = x'_z\,dN + dM'_z = q_\infty b(z)\,x'_z\,dz \oint \bar{p}\,d\bar{x} - q_\infty b^2(z)\,dz \oint \bar{p}\bar{x}\,d\bar{x} +$$

$$+ q_\infty b^2(z)\,dz \oint \bar{p}\bar{y}\,d\bar{y}.$$

Интегрируя по размаху, найдем полный момент:

$$M_z = q_\infty \int_{-l/2}^{+l/2} x_z' b(z)\, dz \oint \bar{p} d\bar{x} - q_\infty \int_{-l/2}^{+l/2} b^2(z)\, dz \oint \bar{p}\bar{x} d\bar{x} + \\ + q_\infty \int_{-l/2}^{+l/2} b^2(z)\, dz \oint \bar{p}\bar{y} d\bar{y}.$$

Известно, что средней аэродинамической хордой $b_{САХ}$ крыльев произвольной формы в плане называют хорду равновеликих прямоугольных крыльев, имеющих те же моментные характеристики. Тогда можно найти такую точку O'' на передней кромке с координатой x_z'' относительно оси Oz, что первый член в последнем выражении для момента M_z окажется равным нулю. Эта координата определяет точку передней кромки профиля со средней аэродинамической хордой, а ось $O''z$ совпадает с передней кромкой аэродинамически эквивалентного прямоугольного крыла.

Таким образом, момент относительно оси, проходящей через точку O'',

$$M_z = -q_\infty \int_{-l/2}^{+l/2} b^2(z)\, dz \oint \bar{p}\,\bar{x} d\bar{x} + q_\infty \int_{-l/2}^{+l/2} b^2(z)\, dz \oint \bar{p}\,\bar{y} d\bar{y},$$

а соответствующий коэффициент, рассчитанный по средней аэродинамической хорде $b_{САХ}$ и площади крыла в плане,

$$m_z = -\frac{1}{2S_{кр} b_{САХ}} \int_{-l/2}^{+l/2} b^2(z)\, dz \oint \bar{p} d\bar{x}^2 + \frac{1}{2S_{кр} b_{САХ}} \int_{-l/2}^{+l/2} b^2(z)\, dz \oint \bar{p} d\bar{y}^2. \qquad (4.2.4)$$

Для тонких малоизогнутых профилей, обычно применяющихся в аэродинамике, второй член в правой части (4.2.4) невелик, поэтому им можно пренебречь; тогда

$$m_z = -\frac{1}{2S_{кр} b_{САХ}} \int_{-l/2}^{+l/2} b^2(z)\, dz \oint \bar{p} d\bar{x}^2.$$

Вводя здесь с учетом (4.1.20) обозначение для коэффициента момента профиля $m_z' = -(1/2) \oint \bar{p} d\bar{x}^2$, получим

$$m_z = \frac{1}{S_{кр} b_{САХ}} \int_{-l/2}^{+l/2} m_z' b^2(z)\, dz. \qquad (4.2.5)$$

Очевидно, для прямоугольного крыла в написанных формулах следует принять: $S_{кр} = bl$; $b(z) = b = \text{const}$; $b_{САХ} = b$.

Коэффициенты сопротивления от давления c_{xp} и подъемной силы $c_y = c_{yp}$ определяются по найденным значениям c_{Rp} и $c_N = c_{Np}$ при помощи выражений (4.1.13). При малых углах атаки можно принять, как указывалось, $c_y = c_N$, а коэффициент c_{xp} найти по (4.1.14). Коэффициент центра давления, координата $x_{ц.д}$ которого отсчитывается от начала хорды $b_{САХ}$ (см. рис. 4.2.1), будет равен $c_{ц.д} = x_{ц.д}/b_{САХ} = -m_z/c_N$ или при малых углах атаки $c_{ц.д} = -m_z/c_y$.

Для вычисления $b_{САХ}$ можно пользоваться формулой

$$b_{САХ} = \frac{1}{S_{кр}} \int_{-l/2}^{+l/2} b^2(z)\, dz. \qquad (4.2.6)$$

Расчет коэффициентов подъемной силы, момента и сопротивления по известному распределению давления с использованием формул (4.2.2) ÷ (4.2.5) осуществляется обычно путем графического определения соответствующих двойных интегралов. Все эти формулы применимы как для сверхзвуковых, так и для дозвуковых скоростей обтекания. При этом распределение давления по крылу, т. е. по ряду его сечений вдоль размаха, может быть получено либо теоретическим расчетом, либо в результате продувок соответствующих дренированных моделей в аэродинамических трубах.

Таблица 4.2.1

Форма крыла в плане	$(1+\tau)/\pi$	$(1+\delta)/\pi$
Эллиптическая	0,318	0,318
Трапециевидная	0,318	0,318
Прямоугольная	0,375	0,335
Прямоугольная со скругленными концами	0,365	0,318

Расчет аэродинамических коэффициентов крыла в несжимаемом потоке. Рассмотрим приближенный расчет обтекания нестреловидных крыльев произвольной формы в плане малоскоростным потоком воздуха.

Коэффициент подъемной силы крыла, набранного из профилей одного семейства,

$$c_y = \frac{a(\alpha - \alpha_0)}{1 + a(1+\tau)/(\pi\lambda_{кр})}, \qquad (4.2.7)$$

где $a = c_y^{\alpha}$ — коэффициент, определяемый для профиля по формулам (4.1.23) ÷ (4.1.25) или опытным путем [21]; α_0 — «угол нулевой подъемной силы», определяемый формой профиля [см., например, (4.1.26)]; $\lambda_{кр} = l^2/S_{кр}$ — удлинение крыла.

Значения параметра $(1+\tau)/\pi$ для крыльев различной формы в плане приведены в табл. 4.2.1.

Следует отметить, что при определении величин α_0 и c_y^{α} в (4.2.7) выбирается профиль, хорда которого равна средней аэродинамической хорде $b_{САХ}$.

Полный коэффициент сопротивления

$$c_x = c_{x\text{пр}} + c_{xi}, \qquad (4.2.8)$$

где $c_{x\text{пр}}$ и c_{xi} — соответственно коэффициенты профильного и индуктивного сопротивлений.

Имея в виду, что профильное сопротивление состоит из сопротивления от давления при $c_y = 0$ $(\alpha = \alpha_0)$ и сопротивления от трения, можно написать для коэффициента этого сопротивления

$$c_{x\text{пр}} = c'_{xp} + c_{xf}. \qquad (4.2.9)$$

Обычно величина c'_{xp} значительно меньше c_{xf}. Поэтому, пренебрегая этой величиной, можно принять коэффициент $c_{x\text{пр}} = c_{xf}$ и определять его по формулам (4.1.28) ÷ (4.1.31) для профиля с хордой, равной $b_{САХ}$.

Коэффициент индуктивного сопротивления крыла в несжимаемом потоке

$$c_{xi} = \frac{c_y^2}{\pi\lambda_{кр}}(1+\delta), \qquad (4.2.10)$$

где параметр $(1+\delta)/\pi$ находится по табл. 4.2.1 в зависимости от формы крыла в плане.

Коэффициент продольного момента определяется по формуле (4.1.22), в которой $m_{z0}=-\pi\bar{f}$ и $m_z^{c_y}=-(0{,}22\div 0{,}25)$, причем кривизна $\bar{f}$ берется для профиля с хордой, равной $b_{САХ}$.

Для крыльев, обычно используемых при малых дозвуковых скоростях (эллиптические, прямоугольные, трапециевидные), коэффициент центра давления, как правило, является постоянной величиной, равной 0,22÷0,25. При этом считается, что центр давления крыла расположен на корневой хорде на расстоянии от начала САХ, равном $x_{ц.д}=c_{ц.д}\times$ $\times b_{САХ}$ (см. рис. 4.2.1).

Измерение давления на поверхности крыла и вычисление соответствующих аэродинамических коэффициентов. Для нахождения распределения давления по крылу при помощи продувок в малоскоростных аэродинамических трубах используются дренированные модели с отверстиями, располагающимися на контурах нескольких сечений вдоль размаха. При этом ввиду продольной симметрии крыла измерение давления на нем осуществляется для одной (правой или левой) консоли. Модель этой консоли устанавливается в рабочей части аэродинамической трубы на боковой державке, закрепляемой в специальном устройстве, при помощи которого производится изменение ее углов атаки (рис. 4.2.2).

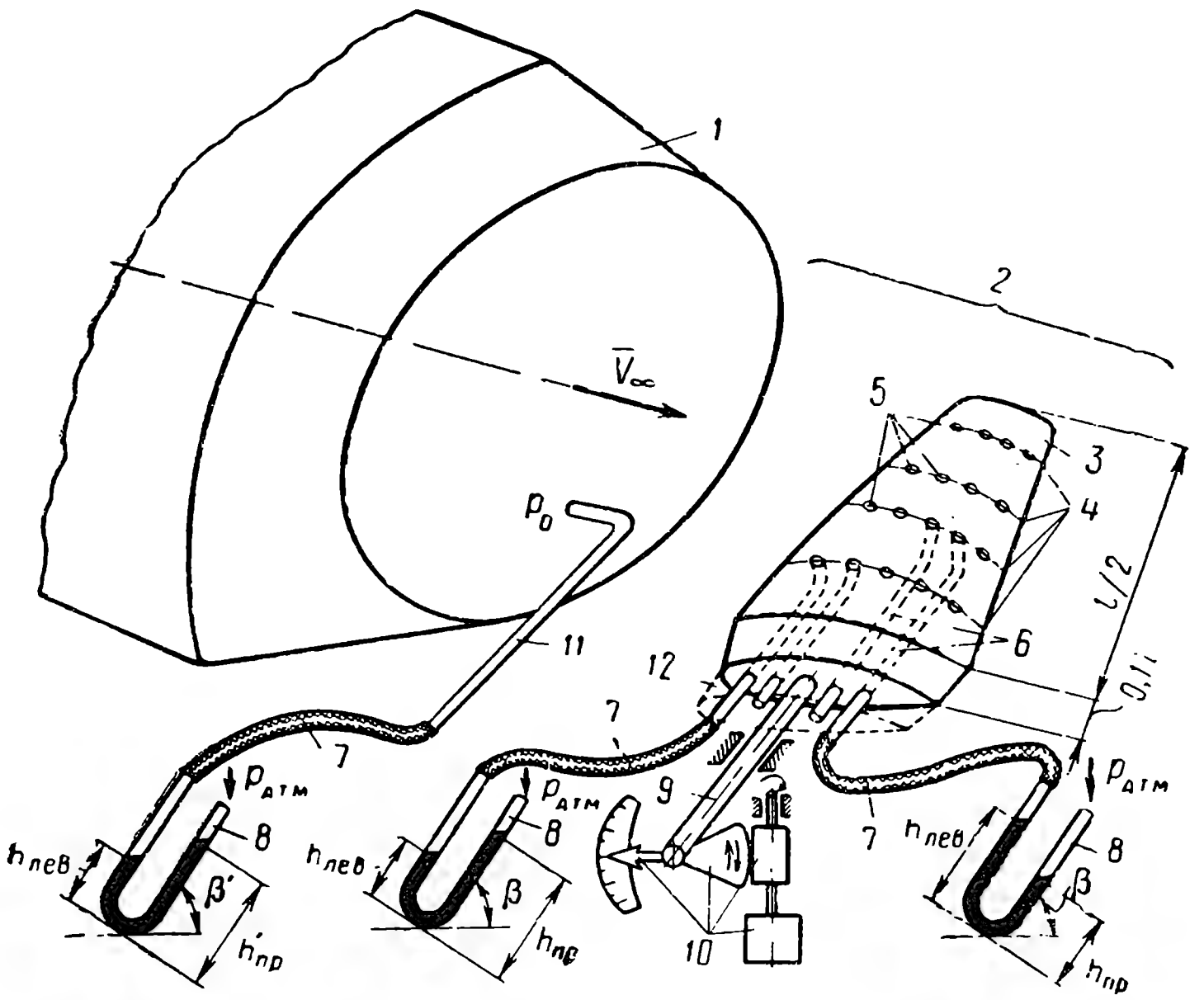


Рис. 4.2.2. Схема установки для исследования распределения давлений по крылу в дозвуковом потоке:

1 — сопло аэродинамической трубы; *2* — открытая рабочая часть; *3*—модель консоли крыла; *4* — сечения крыла; *5* — дренажные отверстия; *6* — медные трубки; *7* — соединительные резиновые шланги; *8* — U-образные жидкостные манометры; *9* — боковая державка; *10* — механизм изменения углов атаки; *11* — трубка Пито; *12* — обтекатель

Каждое дренажное отверстие на модели связано со своим жидкостным манометром, регистрирующим избыточное давление в соответствующей точке сечения. Эти манометры, размещенные на одной подставке, образуют так называемый батарейный манометр. По показаниям отсчетных колен маномеров, используя формулы (4.1.49), (4.1.53), (4.1.54), находятся в дренажных отверстиях коэффициенты давления, по которым рассчитываются соответствующие аэродинамические коэффициенты профиля c'_N, c'_{Rp}, m'_z.

Метод этого расчета, основанный на графическом интегрировании, изложен в § 4.1. По найденным значениям этих коэффициентов, как функций расстояния z вдоль размаха, можно определить по формулам (4.2.2), (4.2.3) и (4.2.5), используя тот же метод графического интегрирования, величины c_N, c_{Rp} и m_z для крыла.

На рис. 4.2.3 показан общий вид кривых, соответствующих подынтегральным функциям $F'_y = c'_N b(z)$, $F'_x = c'_{Rp} b(z)$ и $F'_{my} = m'_z b^2(z)$ формул (4.2.2), (4.2.3) и (4.2.5).

Обозначим площадь между кривой и осью абсцисс на рис. 4.2.3, *а* через S_y, *мм*^{2}, а масштабы F'_y и z — соответственно через $\mu_{F'_y}$ *м/мм*, и μ_z, *м/мм*. Тогда, очевидно, коэффициент нормальной силы крыла

$$c_N = S_y \mu_{F'_y} \mu_z / S_{\text{кр}}. \quad (4.2.11)$$

Площадь S_x, *мм*^{2}, между кривой и осью абсцисс на рис. 4.2.3, *б* представляет собой в некотором масштабе коэффициент продольной силы крыла. Этот масштаб равен произведению $\mu_{F'_x} \mu_z$, *м*^{2}*/мм*^{2}, масштабов соответственно F'_x и z. Таким образом, коэффициент продольной силы

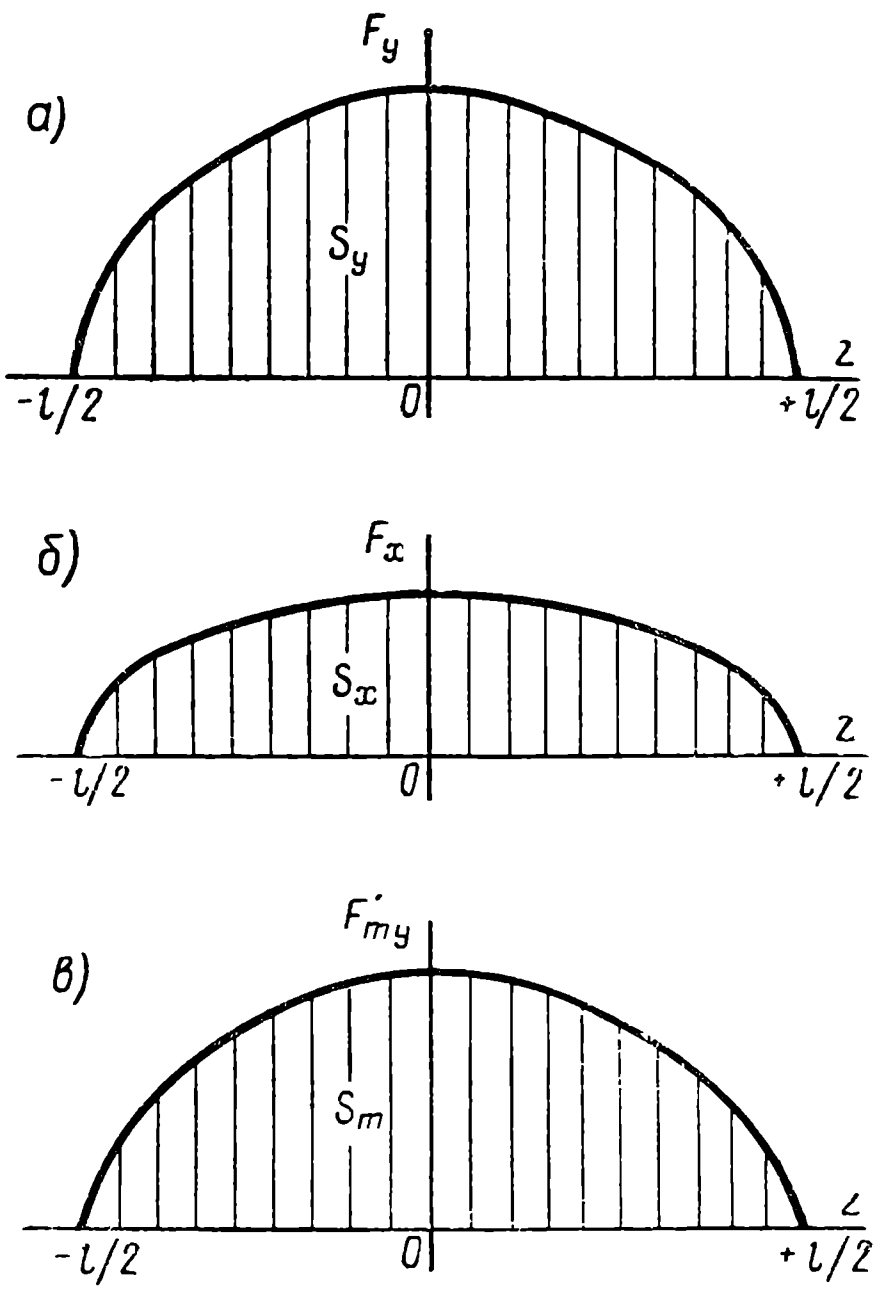


Рис. 4.2.3. Кривые изменения аэродинамических характеристик вдоль размаха крыла:

а) $F'_y = c'_y b(z)$; б) $F'_x = c'_{Rp} b(z)$;

в) $F'_{my} = m'_z b^2(z)$

$$c_{Rp} = S_x \mu_{F'_x} \mu_z / S_{\text{кр}}. \quad (4.2.12)$$

Вычисляя по рис. 4.2.3, *в* площадь S_m, *мм*^{2}, между кривой и осью абсцисс и определяя масштабы $\mu_{F'_{my}}$, *м*^{2}*/мм*, и μ_z, *м/мм*, соответственно величин F'_{my} и z, находим коэффициент продольного момента крыла;

$$-m_z = S_m \mu_{F'_{my}} \mu_z / (S_{\text{кр}} b_{\text{САХ}}). \quad (4.2.13$$

Порядок проведения работы

1. Ознакомиться с экспериментальной установкой и измерительной аппаратурой и проверить готовность их к работе.

2. Закрепить модель консоли крыла в открытой рабочей части дозвуковой аэродинамической трубы на боковой державке и с помощью специального механизма повернуть ее на необходимый угол атаки.

3. Соединить с помощью резиновых шлангов дренажные трубки модели с левыми коленами U-образных трубок батарейного манометра, а также насадок полного напора (трубку Пито) с U-образным жидкостным манометром.

4. Записать показания лабораторных барометра ($p_{\text{атм}} = p_\infty$), термометра ($T_{\text{атм}} = T_\infty$) и психрометра ($T'$).

5. Включить трубу и после выхода ее на режим установившегося

обтекания ввести в поток трубку Пито и снять показания с колен связанного с ней U-образного манометра ($\Delta h' = h'_{\text{пр}} - h'_{\text{лев}}$).

6. Записать (или сфотографировать) показания уровней жидкости ($h_{\text{пр}}$, $h_{\text{лев}}$) в коленах U-образных манометров для каждой дренажной точки выбранных сечений (после фотографирования расшифровка показаний осуществляется по негативу на аппаратах «Микрофот»).

7. Определить параметры набегающего потока в аэродинамической трубе.

8. По показаниям манометров определить величины $\Delta h = h_{\text{пр}} - h_{\text{лев}}$ и соответствующие значения коэффициентов давления для каждой дренажной точки.

9. Для каждого из выбранных сечений построить координатные диаграммы $\bar{p} = f_1(\bar{x})$, $\bar{p} = f_2(\bar{y})$ и $\bar{p} = f_3(\bar{x}^2)$ и графическим интегрированием найти коэффициенты $c'_y = c'_N$, c'_{Rp}, m'_z соответствующих профилей сечений.

10. Определить функции $F'_y = c'_y b(z)$, $F'_x = c'_{Rp} b(z)$, $F'_{my} = m'_z b^2(z)$ для каждого сечения и построить соответствующие графики $F'_y = \varphi_1(z)$, $F'_x = \varphi_2(z)$, $F'_{my} = \varphi_3(z)$.

11. Определив по этим графикам площади S_y, S_x, S_m и масштабы $\mu_{F'_y}$, $\mu_{F'_x}$, $\mu_{F'_{my}}$, μ_z, вычислить по формулам (4.2.11)÷(4.2.13) коэффициенты c_y, c_{Rp} и m_z крыла.

12. По формуле (4.1.14) найти для заданного угла атаки коэффициент c_{xp}, из выражений (4.1.28)÷(4.1.31) — величину c_{xf}, а затем подсчитать коэффициенты $c_x = c_{xp} + c_{xf}$, $c_{\text{ц.д}} = -m_z/c_y$ и $K = c_y/c_x$.

13. Рассчитать аэродинамические коэффициенты крыла по теоретическим зависимостям и сравнить их с полученными экспериментальными данными.

14. Аналогичные измерения и вычисления осуществить для различных углов атаки модели крыла в аэродинамической трубе и получить зависимости $c_y(\alpha)$, $c_x(\alpha)$ и $m_z(\alpha)$.

Пример. Рассмотрим дренажные испытания в малоскоростной дозвуковой аэродинамической трубе при угле атаки $\alpha = 2°$ модели полукрыла, изображенной на рис. 4.2.4. Основные геометрические характеристики крыла: размах $l/2 = 0{,}36$ *м*; корневая и концевая хорды соответственно $b_{\text{кр}} = 0{,}13$ *м* и $b_{\text{кц}} = 0{,}05$ *м*; сужение $\eta = b_{\text{кр}}/b_{\text{кц}} = 2{,}6$; средние геометрическая и аэродинамическая хорды соответственно $b_{\text{ср}} = 0{,}089$ *м*, $b_{\text{САХ}} = 0{,}096$ *м*; площадь в плане $S_{\text{кр}}/2 = 0{,}0324$ *м*^{2}; удлинение $\lambda_{\text{кр}} = l^2/S_{\text{кр}} = 8$.

Для того чтобы характер обтекания полукрыла в области корневого сечения был такой же, как при обтекании целого изолированного крыла, выбранная модель представляла собой соединение этого полукрыла и части другой консоли с размахом 0,07 *м* (примерно 10% от всего размаха; см. рис. 4.2.2).

Величина «загромождения» потока моделью при диаметре выходного сечения сопла трубы $D = 0{,}6$ *м* равнялась

$$\frac{S_{\text{м}}}{S_{\text{т}}} \approx \frac{(S_{\text{кр}}/2 + S_{\text{кр}}/10)}{\pi D^2/4} = \frac{(0{,}0324 + 0{,}0065)}{\pi \cdot 0{,}6^2/4} = 0{,}005.$$

Определение давления производилось по измерениям в дренажных отверстиях для пяти сечений консоли, как показано на рис. 4.2.4, где приведены также значения хорд $b(z)$ и координаты z этих сечений. Для иллюстрации на рис. 4.2.5 показана форма профиля в сечении *3* (см. рис. 4.2.4), а также маркировка дренажных отверстий на этом профиле.

По измеренным с помощью лабораторных барометра, термометра и психрометра соответственно величинам $p_{\text{атм}} = p_\infty = 760$ *мм рт. ст.* (1,03 *кГ/см*^{2}), $T_{\text{атм}} = T_\infty = 288$ K и $T' = 286$ K находились по табл. 2.2.1 и 2.2.2 величины относительной влажности и давления насыщенного пара: $x = 0{,}80$ и $p_{\text{н:п}} = 12{,}79$ *мм рт. ст.* ($\approx 0{,}0174$ *кГ/см*^{2}), а также плотность воздуха $\rho_{\text{атм}} = \rho_\infty$ с учетом влажности [по (4.1.52)]. Показания U-образного жидкостного манометра ($\gamma' = 0{,}805$ *кГ/дм*^{3}; $\sin\beta' = 0{,}246$; $\xi_{\text{т}} = k'_{\text{т}} = 1{,}0$), соединенного с трубкой Пито, $\Delta h' = h'_{\text{пр}} - h'_{\text{лев}} = 800$ *мм*.

Таблица А

Номера дренажных точек	Верх / Низ	A	1	2	3	4	5	6	7
			15	16	17	18	19	20	21
$\bar{p}$	Верх	1,00	—0,78	—0,96	—1,09	—1,26	—1,30	—1,20	—0,96
	Низ		—0,80	—0,60	—0,46	—0,28	—0,19	—0,12	—0,06
$\bar{x}=x/b_3$		0	0,02	0,04	0,06	0,10	0,15	0,20	0,30
$\bar{y}=y/b_3$	Верх	0,070	0,100	0,120	0,130	0,150	0,160	0,172	0,174
	Низ	0,07	0,05	0,04	0,03	0,01	0	0	0

Продолжение табл. А

Номера дренажных точек	Верх / низ	A	8	9	10	11	12	13	14	B
			22	23	24	25	26	27	28	
$\bar{p}$	Верх	1,00	—0,76	—0,61	—0,48	—0,34	—0,22	—0,08	—0,04	0
	Низ		—0,02	0	0	0	0	0	0	
$\bar{x}=x/b_3$		0	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	0,95	1,00
$\bar{y}=y/b_3$	Верх	0,070	0,168	0,156	0,134	0,107	0,075	0,040	0,020	0
	Низ	0,07	0	0	0	0	0	0	0	0

Указанные измерения позволили определить параметры набегающего потока в рабочей части трубы: $\rho_\infty = 0{,}125$ *кГ·сек*^{2}/*м*^{4}; $\mu_\infty = 1{,}82 \cdot 10^{-6}$ *кГ·сек/м*^{2}; $\nu_\infty = 1{,}46 \cdot 10^{-5}$ *м*^{2}*/сек*; $q_\infty = 160$ *кГ/м*^{2}; $V_\infty = 50{,}4$ *м/сек*.

По результатам измерений уровней жидкости в коленах манометров $(h_{\text{пр}}, h_{\text{лев}})_i$ определялась для каждого дренажного отверстия разность $\Delta h_i = (h_{\text{пр}} - h_{\text{лев}})_i$ и вычислялся коэффициент давления p_i по формуле (4.1.53).

Для примера в табл. А приведены значения этого коэффициента для сечения *3* (см. рис. 4.2.4 и 4.2.5).

В табл. А приведены также относительные координаты $\bar{x}=x/b_3$ и $\bar{y}=y/b_3$ дренажных отверстий, а также точек *A* и *B* передней и задней кромок.

По полученному распределению коэффициента давления для каждого сечения (профиля) консоли крыла были построены координатные диаграммы $\bar{p}=f_1(\bar{y})$, $\bar{p}=f_2(\bar{x})$, $\bar{p}=f_3(\bar{x}^2)$.

В частности, для сечения *3* такие диаграммы показаны на рис. 4.2.6. При построении этих диаграмм были выбраны масштабы (в 1/*мм*): $\mu_{\bar{p}} = 2 \cdot 10^{-2}$, $\mu_{\bar{x}} = 2 \cdot 10^{-2}$, $\mu_{\bar{y}} = 4 \cdot 10^{-3}$ и $\mu_{\bar{x}^2} = 2 \cdot 10^{-2}$. Измерения с помощью планиметра площадей фигур на рис. 4.2.6. дали следующие значения: $F_x = 100$, $F_y = 2300$ и $F_{my} = 1150$ *мм*^{2}.

Воспользовавшись формулами (4.1.55), (4.1.56), (4.1.58), находим для этого сечения:

$$c_y' = F_y \mu_{\bar{p}} \mu_{\bar{x}} = 2300 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 0{,}92;$$

$$c_{Rp}' = F_x \mu_{\bar{p}} \mu_{\bar{y}} = 100 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 0{,}0080;$$

$$-m_z' = 0{,}5 \cdot F_{my} \mu_{\bar{p}} \mu_{\bar{x}^2} = 0{,}5 \cdot 1150 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 0{,}23.$$

Аналогичные результаты были получены для других сечений, что позволило для каждого сечения определить значения функций $F_y'=c_y' b(z)$, $F_x'=c_{Rp}' b(z)$ и $F_{my}'=m_z' b^2(z)$ и построить соответствующие графики $F_y'=\varphi_1(z)$, $F_x'=\varphi_2(z)$, $F_{my}'=\varphi_3(z)$, аналогичные приведенным на рис. 4.2.3. При построении этих графиков были взяты следующие масштабы:

$$\mu_{F_y'}=2\cdot10^{-3},\quad \mu_{F_x'}=2\cdot10^{-5}\ \text{и}\ \mu_z=2\cdot10^{-2},\ м/мм;\quad \mu_{F_{my}'}=2\cdot10^{-4},\ м^2/мм.$$

Измерения площадей на этих графиках дали значения: $S_y=1300\ мм^2$, $S_x=810\ мм^2$ и $S_m=280\ мм^2$. Воспользовавшись формулами (4.2.11)÷(4.2.13), находим аэродинамические коэффициенты крыла:

$$c_y=\frac{S_y\mu_{F_y'}\mu_z}{2\,(S_{кр}/2)}=$$

$$=\frac{1300\cdot2\cdot10^{-3}\cdot2\cdot10^{-2}}{2\cdot0{,}0324}=0{,}80;$$

$$c_{Rp}=\frac{S_x\mu_{F_x'}\mu_z}{2\,(S_{кр}/2)}=$$

$$=\frac{810\cdot2\cdot10^{-5}\cdot2\cdot10^{-2}}{2\cdot0{,}0324}=0{,}0050;$$

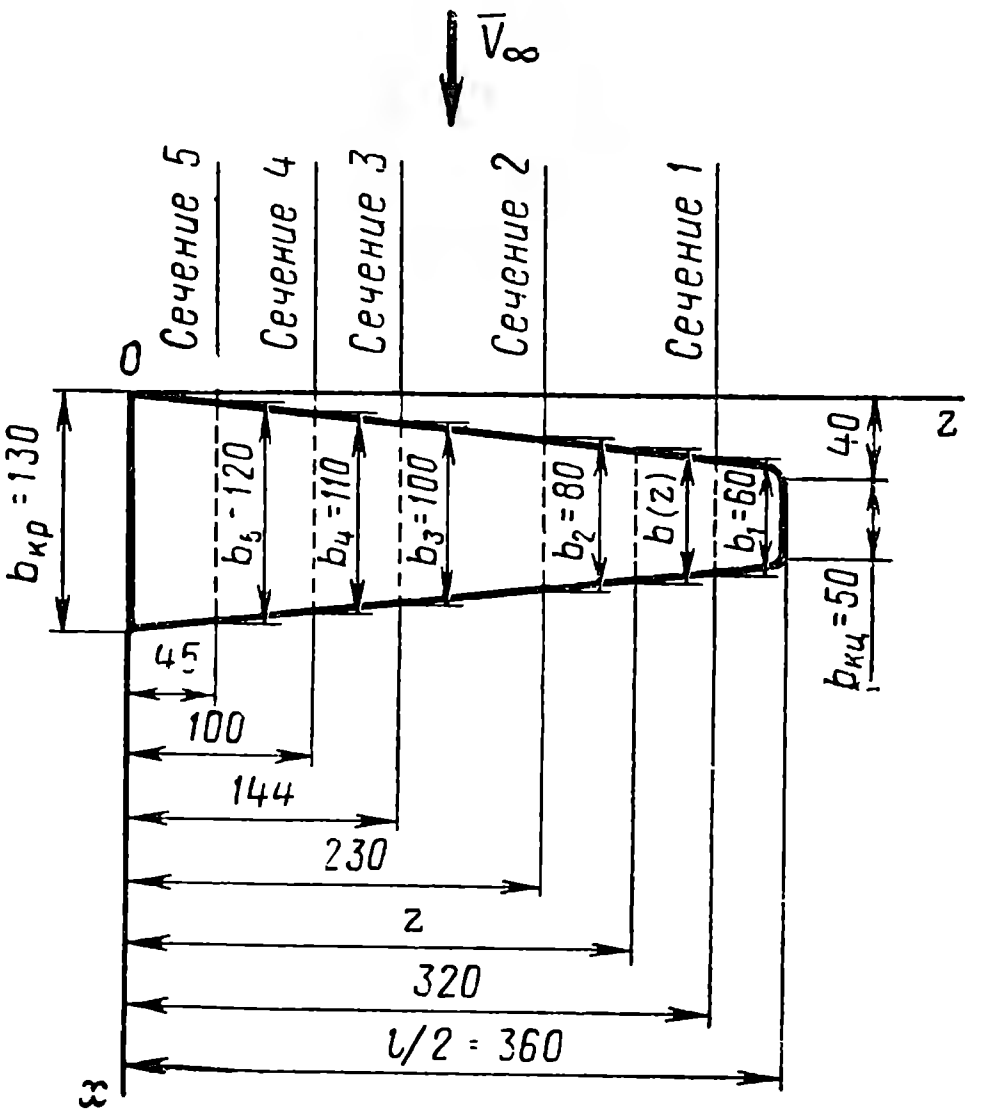


Рис. 4.2.4. Модель консоли (полукрыла)

$$-m_z=\frac{S_m\mu_{F_{my}'}\mu_z}{2\,(S_{кр}/2)\,b_{САХ}}=\frac{280\cdot2\cdot10^{-4}\cdot2\cdot10^{-2}}{2\cdot0{,}0324\cdot0{,}096}=0{,}18.$$

По значениям c_{Rp} и c_y определяем при помощи (4.1.14) коэффициент сопротивления от давления

$$c_{xp}=c_y\frac{\alpha^\circ}{57{,}3^\circ}+c_{Rp}=0{,}80\frac{2^\circ}{57{,}3}+0{,}0050=0{,}033.$$

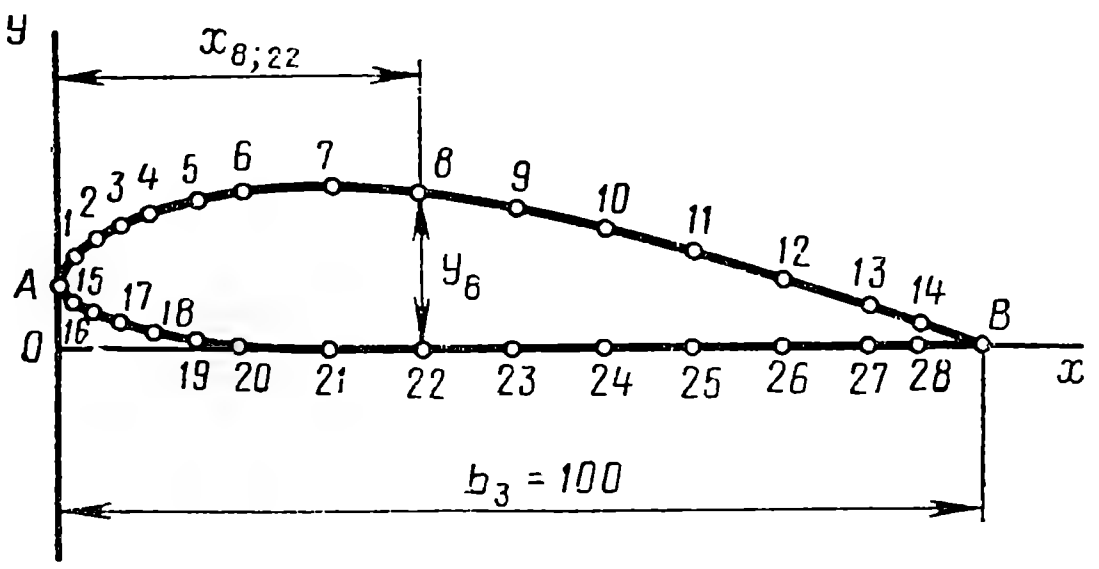


Рис. 4.2.5. Форма профиля консоли крыла в сечении *3* и маркировка дренажных точек (относительная максимальная толщина профиля $\bar{\Delta}=y_7/b_3=0{,}174$; относительная координата $\bar{x}_c=x_7/b_3=0{,}3$)

Теперь определим составляющую сопротивления от трения. Число Рейнольдса, подсчитанное по средней аэродинамической хорде,

$$\mathbf{Re}_\infty=V_\infty b_{САХ}/\nu_\infty=$$

$$=50{,}4\cdot0{,}096/(1{,}46\cdot10^{-5})=$$

$$=3{,}3\cdot10^5.$$

Если принять критическое число Рейнольдса $\mathbf{Re}_{кр}=5\cdot10^5$, то можно сделать вывод, что на крыле всюду будет ламинарный пограничный слой ($\mathbf{Re}_\infty<\mathbf{Re}_{кр}$). Поэтому воспользуемся формулами (4.1.28) и (4.1.29), полагая $\eta_{\bar{\Delta}}=1$, и найдем

$$c_{xf}=2\cdot1{,}29/\sqrt{\mathbf{Re}_\infty}=$$

$$=2\cdot1{,}29/\sqrt{3{,}3\cdot10^5}=0{,}005.$$

В соответствии с этим полный коэффициент сопротивления крыла

$$c_x=c_{xp}+c_{xf}=0{,}033+0{,}005=0{,}038.$$

Коэффициент центра давления

$$c_{\text{ц.д}} = -m_z/c_y = 0{,}18/0{,}80 = 0{,}23.$$

Теперь рассмотрим расчет аэродинамических коэффициентов заданного крыла при $\alpha = 2°$ по теоретическим зависимостям.

Для профиля, хорда которого $b_{\text{САХ}} = 0{,}096$ *м*, а относительные толщина и кривизна соответственно $\bar{\Delta} = 0{,}154$ и $\bar{f} = 0{,}077$, находим «угол нулевой подъемной силы»

$$\alpha_0 = -1{,}6 \cdot \bar{f} = -1{,}6 \cdot 0{,}077 = -0{,}115 \text{ рад}.$$

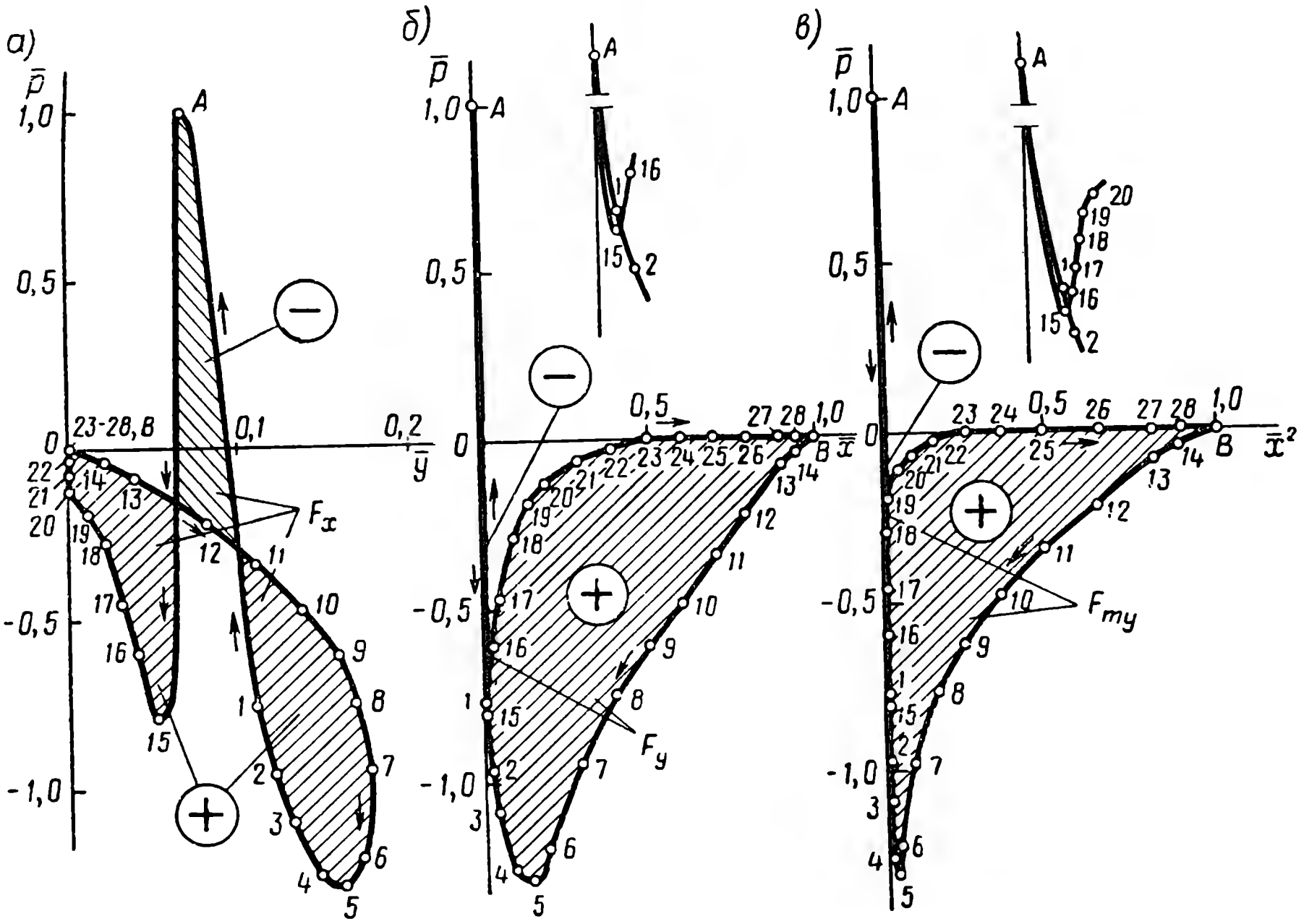


Рис. 4.2.6. Координатные диаграммы для профиля в сечении *3* при угле атаки $\alpha = 2°$:

а — диаграмма $\bar{p} = f_1(\bar{y})$; *б* — диаграмма $\bar{p} = f_2(\bar{x})$; *в* — диаграмма $\bar{p} = f_3(\bar{x}^2)$ (стрелки показывают направление обхода контура профиля при определении знака площадей)

Считая, что крыло имеет трапециевидную форму, определяем для него по табл. 4.2.1 значения параметров $(1+\tau)/\pi = 0{,}318$ и $(1+\delta)/\pi = 0{,}318$. Воспользовавшись зависимостью (4.1.23), находим

$$c_y^\alpha = 2\pi\,(1 + 0{,}77 \cdot 0{,}154)\sqrt{1 + (0{,}077/2)^2} = 7{,}05.$$

Определяем для $\alpha = 2°$ (0,0349 *рад*) коэффициент подъемной силы:

$$c_y = \frac{c_y^\alpha(\alpha - \alpha_0)}{1 + c_y^\alpha(1+\tau)/(\pi\lambda_{\text{кр}})} = \frac{7{,}05\,[0{,}0349 - (-0{,}115)]}{1 + 7{,}05 \cdot 0{,}318/8} = 0{,}83\,(0{,}80),$$

а затем коэффициент индуктивного сопротивления:

$$c_{xi} = c_y^2(1+\delta)/(\pi\lambda_{\text{кр}}) = 0{,}83^2 \cdot 0{,}318/8 = 0{,}027.$$

Полагая, что $c_{x\text{пр}} = c_{xf} = 0{,}005$, получаем согласно (4.2.8)

$$c_x = c_{xi} + c_{xf} = 0{,}027 + 0{,}005 = 0{,}032\,(0{,}038).$$

В скобках приведены значения c_y и c_x, полученные экспериментальным путем.

Работа 4.2.2

Измерение аэродинамических сил и моментов, действующих на крыло

Цель работы — определение аэродинамических коэффициентов стреловидного крыла по значениям подъемной силы, силы сопротивления и момента, измеренным трехкомпонентными тензометрическими весами в сверхзвуковой аэродинамической трубе.

При помощи тензометрических весовых устройств измеряются суммарные аэродинамические характеристики, такие как подъемная сила, сопротивление, момент. Эти измерения дополняют изучение обтекания, связанное с нахождением распределения давления и касательных напряжений, и позволяют проверить теоретические методы расчета суммарных аэродинамических коэффициентов летательных аппаратов, в частности их крыльев. Настоящая лабораторная работа посвящена экспериментальному исследованию треугольного крыла — одного из распространенных видов несущих поверхностей современных летательных аппаратов.

Аэродинамические коэффициенты треугольного крыла. Рассмотрим основные выводы линеаризованной теории обтекания тонких треугольных крыльев сверхзвуковым потоком под малым углом атаки.

Расчет аэродинамических коэффициентов треугольного крыла в сверхзвуковом потоке зависит от характера передних кромок. При этом для сверхзвуковой передней кромки полный коэффициент сопротивления крыла

$$c_x = c'_{xp} + c_{xi} + c_{xf}, \tag{4.2.14}$$

а для дозвуковой

$$c_x = c'_{xp} + c_{xi} + c_{xf} - c_{xт}. \tag{4.2.15}$$

В этих выражениях: c'_{xp} — коэффициент сопротивления от давления при нулевом угле атаки (при $c_y=0$); c_{xi} — добавочное сопротивление, обусловленное подъемной силой и вычисляемое для крыла нулевой толщины при $c_y\neq 0$; $c_{xт}$ — коэффициент подсасывающей силы крыла.

Сверхзвуковые передние кромки. Расчет коэффициентов c_y, c_{xi} ведется соответственно по формулам:

$$c_y = 4c_1\alpha; \tag{4.2.16}$$

$$c_{xi} = c_y\alpha = 4c_1\alpha^2, \tag{4.2.17}$$

где c_1 определяется по (4.1.92).

Центр давления треугольного крыла совпадает с центром тяжести треугольника и находится на расстоянии 2/3 корневой хорды от вершины, т. е. коэффициент центра давления

$$c_{ц.д} = x_{ц.д}/b_{кр} = 2/3. \tag{4.2.18}$$

Коэффициент продольного момента относительно оси Oz, проходящей через вершину,

$$-m_z = (2/3)\,c_y = (8/3)\,c_1\alpha. \tag{4.2.19}$$

Сопротивление, обусловленное толщиной, т. е. составляющая c'_{xp}, рассчитывается по методу источников. Результаты этого расчета представлены на рис. 4.2.7. По приведенным графикам величина коэффициента c'_{xp} может быть найдена, если известны величины $\alpha'=\sqrt{M_\infty^2-1}$, $\bar{\Delta}=\Delta/b_{кр}$, $\bar{r}=\frac{1}{2}(l/b_{кр})\operatorname{tg}\chi_2$, $n_1=\operatorname{tg}\chi_1/\alpha'$. При этом следует иметь в виду, что для сверхзвуковой передней кромки величина $n_1<1$.

Дозвуковые передние кромки. В соответствии с методом диполей [20] коэффициент подъемной силы треугольного крыла

$$c_y = 2\pi\alpha/[E(k)\operatorname{tg}\chi_1], \tag{4.2.20}$$

а коэффициент момента

$$-m_z = (2/3)\, c_y. \qquad (4.2.21)$$

Согласно этим данным коэффициент центра давления

$$c_{\text{ц.д}} = x_{\text{ц.д}}\, b_{\text{кр}} = -m_z / c_y = 2/3, \qquad (4.2.22)$$

а коэффициент индуктивного сопротивления

$$c_{x\,i} = c_y \alpha = 2\pi\alpha^2 / [E(k) \operatorname{tg} \chi_1]. \qquad (4.2.23)$$

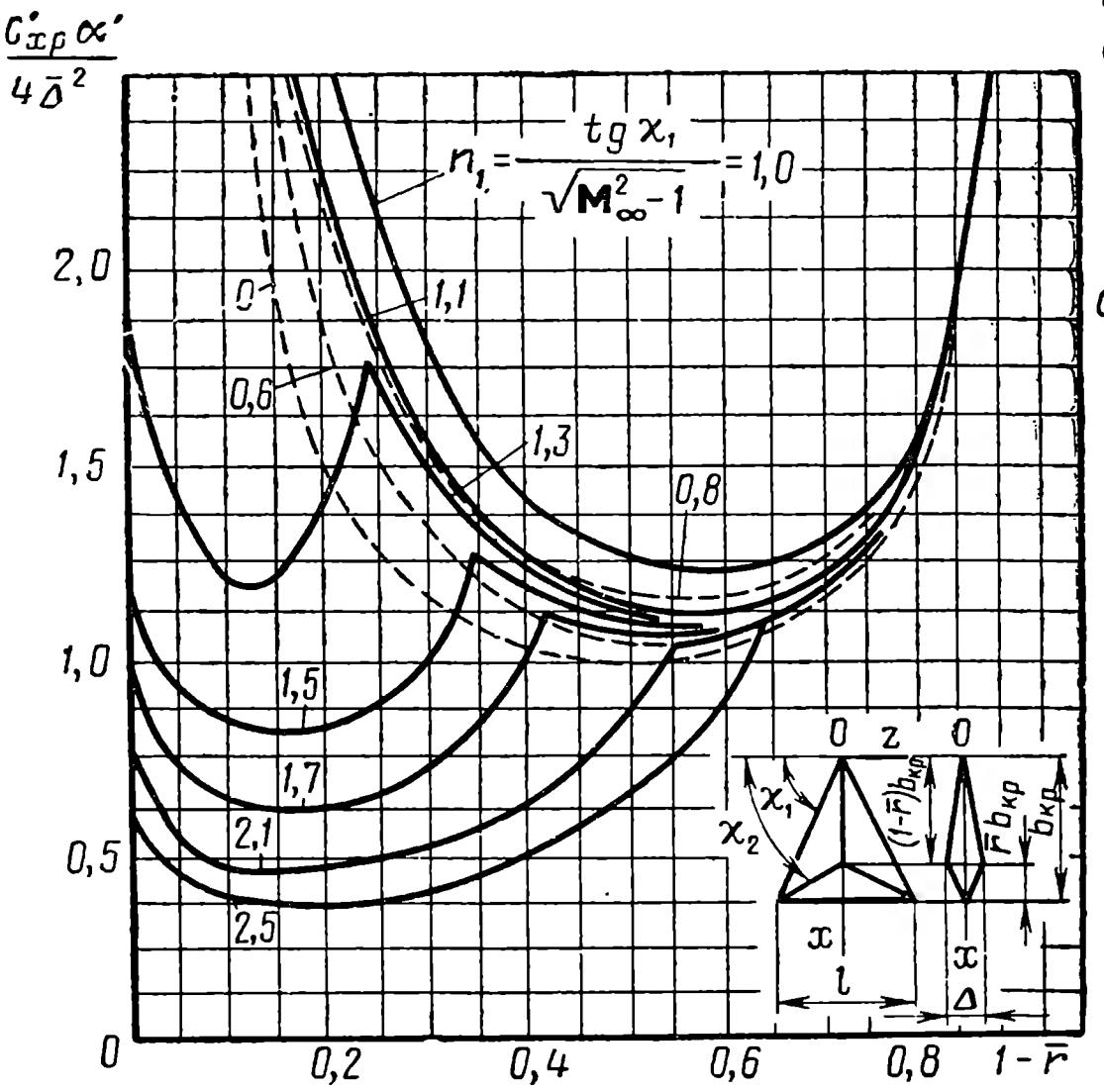


Рис. 4.2.7. Составляющая c'_{xp} коэффициента сопротивления треугольных крыльев с симметричным четырехугольным профилем, обтекаемых сверхзвуковым потоком

$$\left(\bar{\Delta} = \Delta / b_{\text{кр}};\ n_1 = \operatorname{tg}\chi_1 / \alpha';\ \alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1}\right)$$

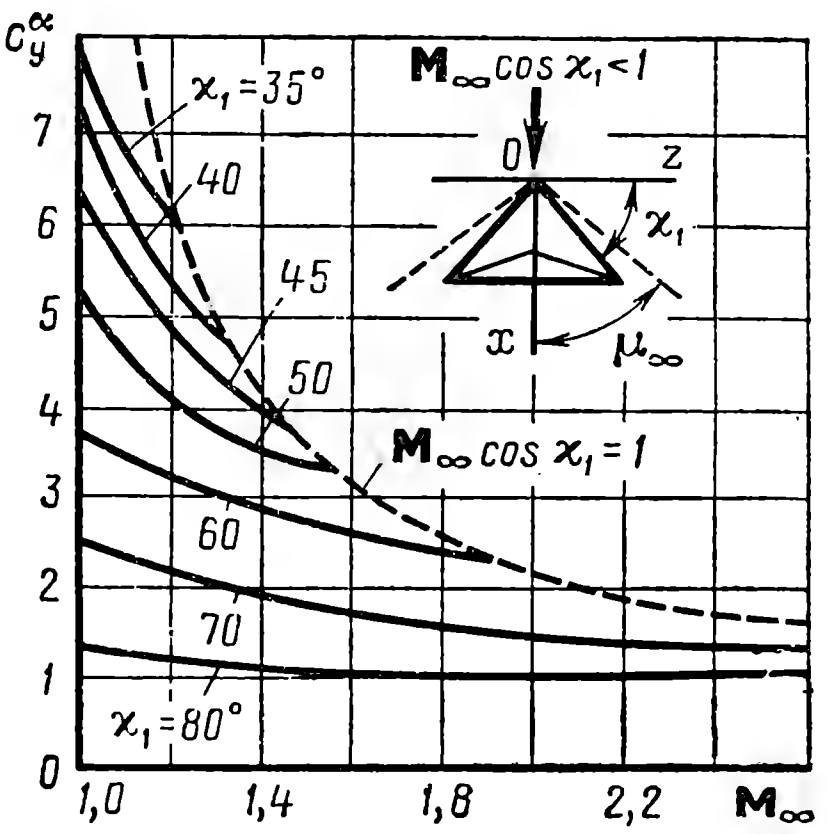


Рис. 4.2.8. Изменение производной c_y^α коэффициента подъемной силы треугольного крыла в зависимости от угла стреловидности χ_1 и числа M_∞

Таблица 4.2.2

$1/n_1$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$E(k)$	1,00	1,05	1,14	1,28	1,42	$\pi/2 = 1{,}57$

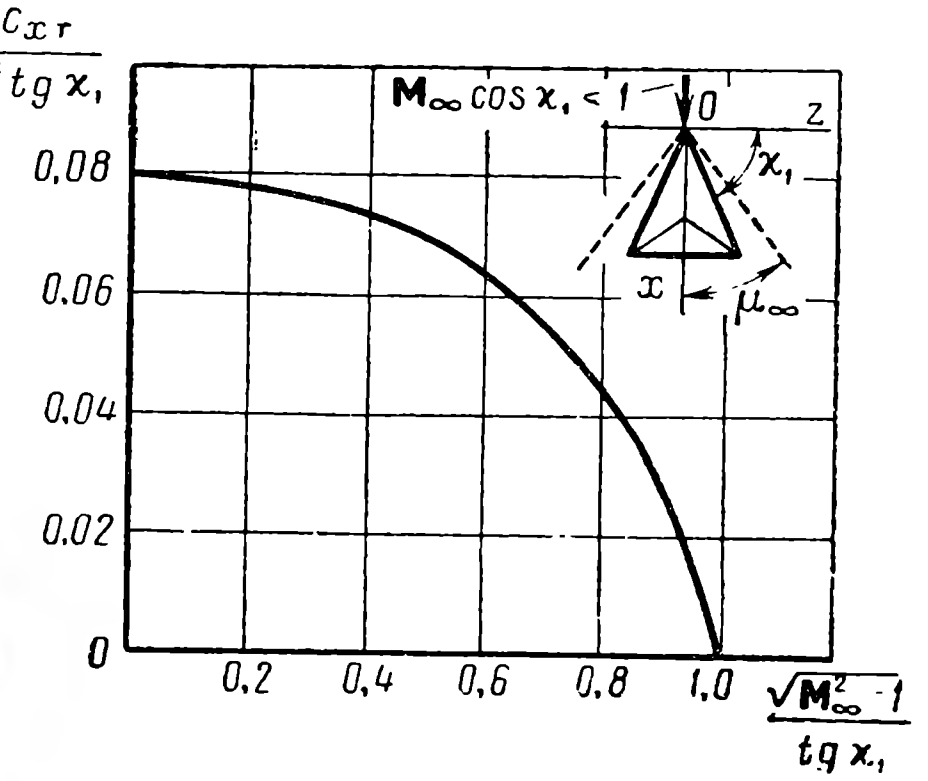


Рис. 4.2.9. К определению коэффициента c_{xt} подсасывающей силы треугольного крыла

Величина $E(k)$ представляет собой эллиптический интеграл второго рода с параметром $k = \sqrt{1 - (1/n_1)^2}$. Эту величину можно определить в функции $1/n_1$ $(n_1 > 1)$ из табл. 4.2.2.

Зависимость $c_y^\alpha = \partial c_y / \partial\alpha = c_y/\alpha$ [см. (4.2.20)] от числа M_∞ и угла стреловидности χ_1 приведена на рис. 4.2.8. На рисунке штриховая кри-

вая соответствует звуковой передней кромке, когда c_y^α, как и c_y, перестает зависеть от угла стреловидности χ_1.

У крыльев с дозвуковой передней кромкой эту кромку обычно скругляют, что обусловливает возникновение подсасывающей силы, умень-

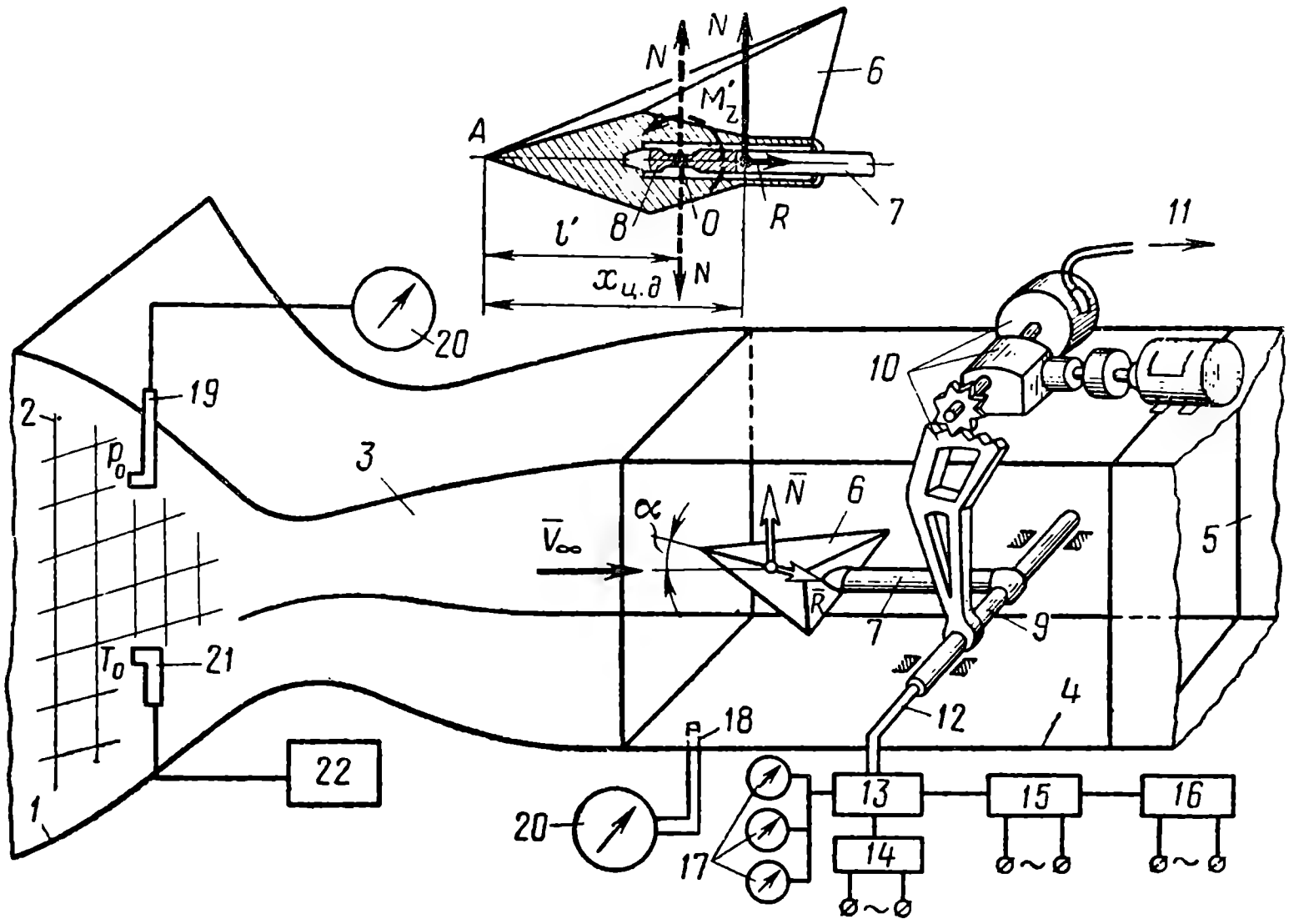


Рис. 4.2.10. Схема экспериментальной установки для тензометрических измерений аэродинамических сил в сверхзвуковом потоке:

1 — форкамера сверхзвуковой трубы; *2* — спрямляющая решетка; *3*—сопло; *4* — рабочая часть; *5* — диффузор; *6* — модель крыла; *7* — тензодержавка; *8* — упругий элемент весов; *9* — боковая державка; *10* — механизм изменения углов атаки; *11* — к пульту управления; *12* — провода от тензодатчиков; *13* — тензостанция; *14* — блок питания тензостанции; *15* — осциллограф; *16* — отметчик времени; *17* — гальванометры; *18* — отверстие в стенке рабочей части трубы, воспринимающее статическое давление потока; *19* — трубка Пито; *20* — образцовый манометр; *21* — датчик температуры; *22* — милливольтметр

шающей сопротивление. Как показывают исследования [21], коэффициент этой силы

$$c_{x\text{т}} = \frac{c_y^2}{4\pi} \operatorname{tg} \chi_1 \sqrt{1-\left(\frac{1}{n_1}\right)^2}. \qquad (4.2.24)$$

Зависимости (4.2.24) соответствует кривая на рис. 4.2.9.

Коэффициент c'_{xp} в (4.2.15) определяется методом источников. Результаты расчета по этому методу представлены на рис. 4.2.7, где значения c'_{xp} соответствуют параметру $n_1 = \operatorname{tg} \chi_1 / \alpha' > 1$.

Составляющая коэффициента сопротивления от трения c_{xf} не зависит от характера передней кромки и с достаточной степенью точности может рассчитываться по (4.1.112). При этом расчет ведется для крыла с профилем, хорда которого равна средней аэродинамической хорде.

Тензометрические измерения. На рис. 4.2.10 представлена схема экспериментальной установки для измерения нормальной силы, осевой силы и момента тангажа с помощью трехкомпонентных тензометрических весов. Эти весы смонтированы внутри модели крыла, закрепленной на державке, которая в свою очередь соединена с механизмом изменения углов атаки.

По измерениям давлений p_0, p_∞, $p_{\text{атм}}$, а также температуры T_0 находились параметры сверхзвукового потока.

Для определения по величине электрического сигнала соответствующей аэродинамической силы или момента используют результаты тарировки тензометрических весов (см. § 2.4). При осуществлении измерений этими весами продольный момент M_z' определяется относительно поперечной оси, проходящей через середину шейки упругого элемента весов (точку O на рис. 4.2.10).

Величина этого момента

$$-M_z' = N(x_{\text{ц.д}} - l'), \tag{4.2.25}$$

где l' — расстояние между точками A и O. Из выражения (4.2.25) можно определить координату центра давления, отсчитываемую от вершины крыла,

$$x_{\text{ц.д}} = l' - M_z'/N. \tag{4.2.26}$$

Соответствующий коэффициент центра давления

$$c_{\text{ц.д}} = \frac{x_{\text{ц.д}}}{b_{\text{кр}}} = \frac{l'}{b_{\text{кр}}} - \frac{m_z'}{c_N}, \tag{4.2.27}$$

где аэродинамические коэффициенты:

$$c_N = \frac{N}{q_\infty S_{\text{кр}}} = \frac{k_N n_N}{q_\infty S_{\text{кр}}}; \tag{4.2.28}$$

$$m_z' = \frac{M_z'}{q_\infty S_{\text{кр}} b_{\text{кр}}} = \frac{k_M n_M}{q_\infty S_{\text{кр}} b_{\text{кр}}}. \tag{4.2.29}$$

Соответствующий коэффициент осевой силы

$$c_R = \frac{R}{q_\infty S_{\text{кр}}} = \frac{k_R n_R}{q_\infty S_{\text{кр}}}. \tag{4.2.30}$$

В формулах (4.2.28) ÷ (4.2.30) n_N, n_R и n_M представляют собой электрические сигналы, регистрируемые измерительными приборами, от воздействий на крыло соответственно нормальной и продольной сил (N, R) и момента ($\mathbf{M}_z'$), а k_N, k_R и k_M — тарировочные коэффициенты. При этом при тарировке тензовесов момент, имеющий такое же направление, как на рис. 4.2.10, вызывает отклонение стрелки измерительного прибора вправо. В соответствии с принятым знаком продольного момента величина электрического сигнала n_M в этом случае принимается отрицательной.

Поскольку углы атаки, при которых проводится эксперимент, небольшие, коэффициент подъемной силы c_y будет таким же, как величина c_N. Для определения коэффициента сопротивления (в поточных координатах) необходимо воспользоваться формулой, аналогичной (4.1.14), но записанной для полных коэффициентов.

Момент относительно поперечной оси, проходящей через вершину крыла (точка A на рис. 4.2.10),

$$-M_z = N x_{\text{ц.д}}, \tag{4.2.30'}$$

а коэффициент момента

$$-m_z = c_N \frac{x_{\text{ц.д}}}{b_{\text{кр}}} = c_N c_{\text{ц.д}}. \tag{4.2.30'}$$

Производя измерения и соответствующие расчеты для различных чисел Маха и углов атаки, получают аэродинамические коэффициенты в функции $\mathbf{M}_\infty$ и α. Одновременно можно при необходимости осуществить исследования при условии изменения чисел Рейнольдса потока в рабочей части. Тогда найденные коэффициенты будут отражать более сложную их зависимость от $\mathbf{M}_\infty$, α и $\mathbf{Re}$. При проведении замеров аэро-

динамическими весами следует предусмотреть дополнительные исследования, связанные с выявлением и устранением влияния конструкции державки на результаты измерения сил и моментов. Вообще говоря, это влияние для одной и той же конструкции будет неодинаковым при различных M_∞ и α. Поэтому нахождение необходимых поправок к измеряемым величинам должно было быть предметом соответствующих методических исследований для каждого значения M_∞ и α и их сочетания. Однако для простоты исследований, имея также в виду их приближенный характер, можно ограничиться нахождением поправок к весовым данным за счет влияния державки при каком-нибудь значении M_∞ и α. При проведении таких методических исследований можно исходить из рекомендаций, изложенных в § 3.1.

Весовые испытания крыла с ромбовидным профилем, имеющего «нулевые» толщины кромок, приводят к некоторым искажениям результатов ввиду необходимости некоторого изменения формы крыла в задней части центрального сечения для размещения донной тензодержавки (см. рис. 4.2.10). Наличие этого цилиндрического «наплыва» практически не изменяет подъемной силы и продольного момента крыла и сказывается в основном на сопротивлении. Проведя дренажные исследования двух моделей крыла, одна из которых имеет указанный «наплыв» и устанавливается на той же державке, на которой проводятся весовые исследования, можно найти поправки к измеренному сопротивлению и тем самым определить его действительную величину. Дренаж осуществляется в обоих случаях по верхней поверхности крыла, а для получения результатов по нижней поверхности модели придается равный по величине, но отрицательный по знаку угол атаки. Дренажные трубки выводятся из модели через нижнюю поверхность. С нижней же стороны осуществляется также крепление «идеальной» модели (без «наплыва» и донной державки).

Порядок проведения работы

1. Ознакомиться со схемой экспериментальной установки, конструкцией трехкомпонентных тензовесов, моделью, измерительными приборами.
2. Провести тарировку тензовесов (определить тарировочные коэффициенты k_R, k_N, k_M).
3. Установить тензодержавку с моделью в рабочей части трубы на боковой державке под заданным углом атаки.
4. Включить тензостанцию (а при необходимости и осциллограф) и настроить ее, произведя балансировку мостов.
5. Соединить образцовые манометр и вакуумметр соответственно со штуцерами насадка полного напора, установленного в форкамере, и отверстия приемника статического давления в рабочей части трубы.
6. Замерить лабораторным барометром атмосферное давление $p_{атм}$.
7. Включить трубу и после выхода ее на режим установившегося обтекания снять показания n_R, n_N, n_M с гальванометров или записать их на осциллограмме. Одновременно зафиксировать показания датчика температуры T_0, замерить давление в форкамере p_0 и статическое давление в рабочей части p_∞. После выполнения этих операций прекратить работу трубы и отключить измерительную аппаратуру.
8. По результатам измерения p_0, p_∞, T_0 определить параметры сверзвукового потока в рабочей части аэродинамической трубы.
9. Вычислить по формулам (4.2.27) ÷ (4.2.30), (4.2.30″) аэродинамические коэффициенты $c_{ц.д}$, c_N, c_R, m_z крыла при заданном угле атаки, по формуле (4.2.14) — коэффициент c_x, а также качество крыла $K = c_y/c_x$.
10. Повторить измерения и соответствующие расчеты для несколь-

ких углов атаки и по полученным данным построить характеристические диаграммы $c_y(\alpha)$, $c_x(\alpha)$, $m_z(\alpha)$, $c_{\text{ц.д}}(\alpha)$, $K(\alpha)$ изолированного треугольного крыла при заданном числе Маха набегающего потока.

Пример. Рассмотрим результаты лабораторной работы по измерению трехкомпонентными тензометрическими весами аэродинамических характеристик треугольного крыла в сверхзвуковой трубе с закрытой рабочей частью и сопловым вкладышем, рассчитанным на номинальное число $\mathbf{M}_\infty = 2{,}7$. На рис. 4.2.11 показано треугольное кры-

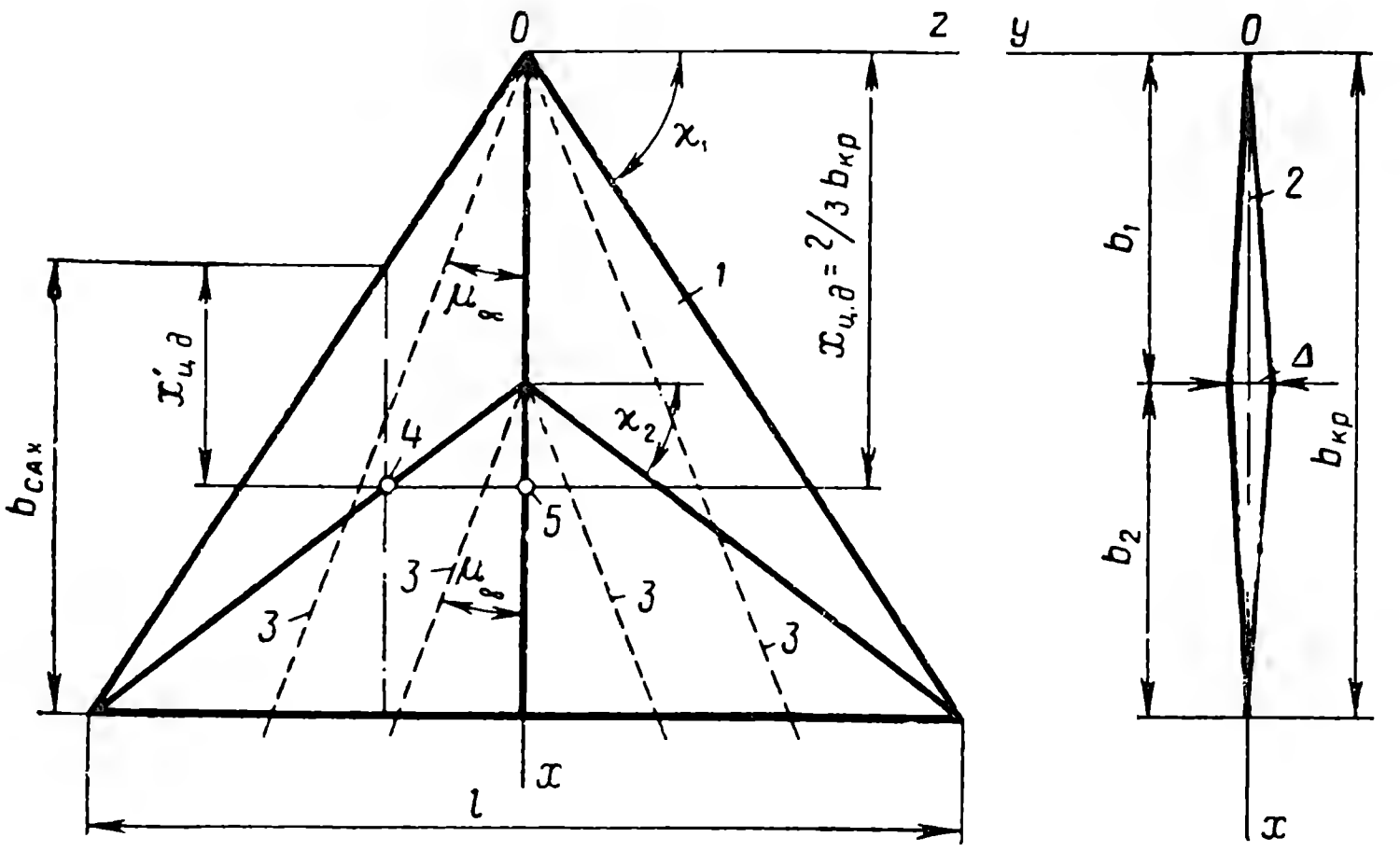


Рис. 4.2.11. Треугольное крыло с симметричным ромбовидным профилем:

1 — форма в плане; *2* — профиль в корневом сечении; *3* — линии Маха; *4* — центр давления консоли крыла; *5* — центр давления крыла

ло с симметричным ромбовидным профилем. Основные размеры крыла (в *мм*): $l = 124$; $l_{кр} = 94$, $b_{кц} = 0$, $b_1 = 47$, $b_2 = 47$, $b_{ср} = 47$, $b_{САХ} = 63$, $\Delta = 6$, $\chi_1 = 56°18'$, $\chi_2 = 37°20'$. Площадь модели крыла в плане $S_{кр} = 5{,}83 \cdot 10^3$ *мм*^{2}; ее удлинение $\lambda = l^2/S_{кр} = 2{,}64$; сужение $\eta = b_{кр}/b_{кц} = \infty$; относительная толщина профиля в корневом сечении $\bar{\Delta} = \Delta/b_{кр} = 0{,}0639$.

Общий вид модели с весовой державкой показан на рис. 4.2.12. Расстояние от вершины крыла до середины шейки упругого элемента весов $l' = 24$ *мм*.

Угол атаки, при котором проводилась продувка, был равен 5°. В этом случае «загромождение» моделью рабочей части составило

$$\frac{S_м}{S_т} = \frac{S_{кр} \sin\alpha}{S_т} = \frac{5{,}83 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}0872}{0{,}16} = 0{,}0032,$$

что при $\mathbf{M}_\infty = 2{,}7$ согласно рис. 1.4.15 вполне допустимо.

Расчет волновой картины обтекания крыла при этом же числе Маха показал, что отраженные от стенок трубы скачки уплотнения не попадают на модель. Практически такая же картина сохранилась в рабочей части в реальном случае, которому соответствовало измеренное число $\mathbf{M}_\infty = 2{,}68$.

В измерительный комплекс тензовесов входили универсальная тензометрическая станция, каналы которой использовались для измерения величин N, R и M_z, а также три гальванометра, каждый из которых был подключен к соответствующему каналу тензостанции (см. рис. 4.2.10). По шкалам этих гальванометров производилась регистрация величин электрического разбаланса мостов, пропорциональных N, R и M_z.

По результатам тарировки весов найдены следующие значения тарировочных коэффициентов: $k_N = 10^{-1}$ *кГ/мв*; $k_R = 10^{-1}$ *кГ/мв*; $k_M = 10^{-2}$ *кГ·м/мв*.

После установки модели под углом атаки $\alpha = 5°$ была проведена балансировка всех трех мостов тензостанции, при этом стрелки регистрирующих приборов гальванометров были установлены на нуле (на середине шкалы). Давление в форкамере p_0 измерялось образцовым манометром, рассчитанным на 5 *атм*, а статическое давление в рабочей части p_∞ — образцовым вакуумметром, предназначенным для регистрации давлений до 760 *мм рт. ст.* Измерения показали, что $p_0 - p_{атм} = 1{,}47$ *кГ/см*^{2}, а $p_{атм} - p_\infty = 0{,}919$ *кГ/см*^{2}. Замеренное барометром давление в лаборатории $p_{атм} = 1{,}03$ *кГ/см*^{2}. Таким образом, $p_0 = 2{,}50$ *кГ/см*^{2} и $p_\infty = 0{,}111$ *кГ/см*^{2}. Термопара в кожухе, установленная в форкамере, показала температуру $T_0 = 293$ К.

По этим параметрам для значений $k=c_p/c_v=1{,}4$; $R=287$ *дж/(кг·град)* был проведен расчет параметров воздушного потока в рабочей части. В частности, были определены числа $\mathbf{M}_\infty=2{,}68$ и $\mathbf{Re}_\infty=V_\infty b_{САХ}/\nu_\infty=12{,}1\cdot10^5$.

После включения трубы и выхода ее на режим установившегося обтекания были зарегистрированы следующие показания гальванометров:

$$n_R=7{,}50\ мв,\quad n_N=45{,}7\ мв,\quad n_M=-18{,}7\ мв.$$

Согласно этим данным осевая сила

$$R=k_R n_R=10^{-1}\cdot7{,}50=0{,}750\ кГ,$$

Таблица А

α, *град*	c_y	c_x	$-m_z$	K	$c_{ц.д}$
0	0	0,023	0	0	0
1	0,028	0,024	0,019	1,17	0,68
2	0,056	0,025	0,038	2,24	0,68
3	0,084	0,027	0,056	3,10	0,67
4	0,110	0,030	0,075	3,67	0,68
5	0,140	0,035	0,094	3,97	0,68

а коэффициент этой силы

$$c_R=\frac{k_R n_R}{q_\infty S_{кр}}=$$

$$=\frac{10^{-1}\cdot7{,}50}{0{,}56\cdot10^4\cdot5{,}83\cdot10^{-3}}=0{,}023.$$

Нормальная сила

$$N=k_N n_N=10^{-1}\times$$

$$\times45{,}7=4{,}57\ кГ,$$

а ее коэффициент

$$c_N=\frac{k_N n_N}{q_\infty S_{кр}}=\frac{10^{-1}\cdot45{,}7}{0{,}56\cdot10^4\cdot5{,}83\cdot10^{-3}}=0{,}14.$$

И, наконец, момент тангажа

$$M_z'=k_M n_M=10^{-2}(-18{,}7)=-0{,}187\ кГ\cdot м$$

и соответствующий коэффициент

$$m_z'=\frac{k_M n_M}{q_\infty S_{кр} b_{кр}}=\frac{10^{-2}\cdot(-18{,}7)}{0{,}56\cdot10^4\cdot5{,}83\cdot10^{-3}\cdot0{,}094}=-0{,}061.$$

По значениям $c_y=c_N=0{,}14$ и $c_R=0{,}023$ был найден коэффициент сопротивления:

$$c_x=c_y\frac{\alpha^\circ}{57{,}3^\circ}+c_R=0{,}14\frac{5}{57{,}3}+0{,}023=0{,}035.$$

Соответствующая величина аэродинамического качества

$$K=c_y/c_x=0{,}14/0{,}035=3{,}97.$$

По значениям $m_z'=-0{,}061$ и $c_N=0{,}14$ определен коэффициент центра давления [см. формулу (4.2.27)]

$$c_{ц.д}=\frac{24}{94}+\frac{0{,}061}{0{,}14}=0{,}68.$$

В соответствии с (4.2.30″)

$$-m_z=0{,}14\cdot0{,}68=0{,}094.$$

Аналогично были получены аэродинамические характеристики крыла для углов атаки 0÷4° (с интервалом через 1°). Результаты соответствующих измерений и расчетов представлены в табл. А.

Теперь сравним полученные экспериментальные результаты с данными расчетов по линеаризованной теории сверхзвукового обтекания тонкого треугольного крыла. Так как число $\mathbf{M}_\infty=2{,}68$, то соответствующий угол наклона линий возмущения $\mu_\infty=\arcsin(1/\mathbf{M}_\infty)=\arcsin(1/2{,}68)=22^\circ$. Проведя под этим углом линии Маха (см. рис. 4.2.11), можно убедиться в том, что эти линии проходят за передней и средней кромками, которые, таким образом, являются сверхзвуковыми. Для расчета аэродинамических коэффициентов необходимо воспользоваться соответствующими этому виду кромок зависимостями (4.2.14), (4.2.16)÷(4.2.19). Входящий в эти зависимости коэффициент $c_1=1/\sqrt{2{,}68^2-1}=0{,}402$. В соответствии с этим значением коэффициент подъемной силы

$$c_y=\frac{4\cdot0{,}402}{57{,}3}\alpha^\circ=0{,}0281\cdot\alpha^\circ,\qquad(4.2.31)$$

а коэффициент индуктивного сопротивления

$$c_{xi} = \frac{4 \cdot 0{,}402}{57{,}3^2} (\alpha^\circ)^2 = 0{,}00049\,(\alpha^\circ)^2.$$

Составляющая c'_{xp} коэффициента сопротивления [см. (4.2.14)] определяется из графика на рис. 4.2.7 по значениям:

$$\bar{\Delta} = \Delta / b_{кр} = 6/94 = 0{,}0639;$$

$$1 - \bar{r} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{l/b_{кр}}{\operatorname{tg} \chi_2} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{124/94}{\operatorname{tg} 37^\circ 20'} = 0{,}135;$$

$$n_1 = \operatorname{tg} \chi_1 / \sqrt{M_\infty^2 - 1} = \operatorname{tg} 56^\circ 18' / \sqrt{2{,}68^2 - 1} = 0{,}178.$$

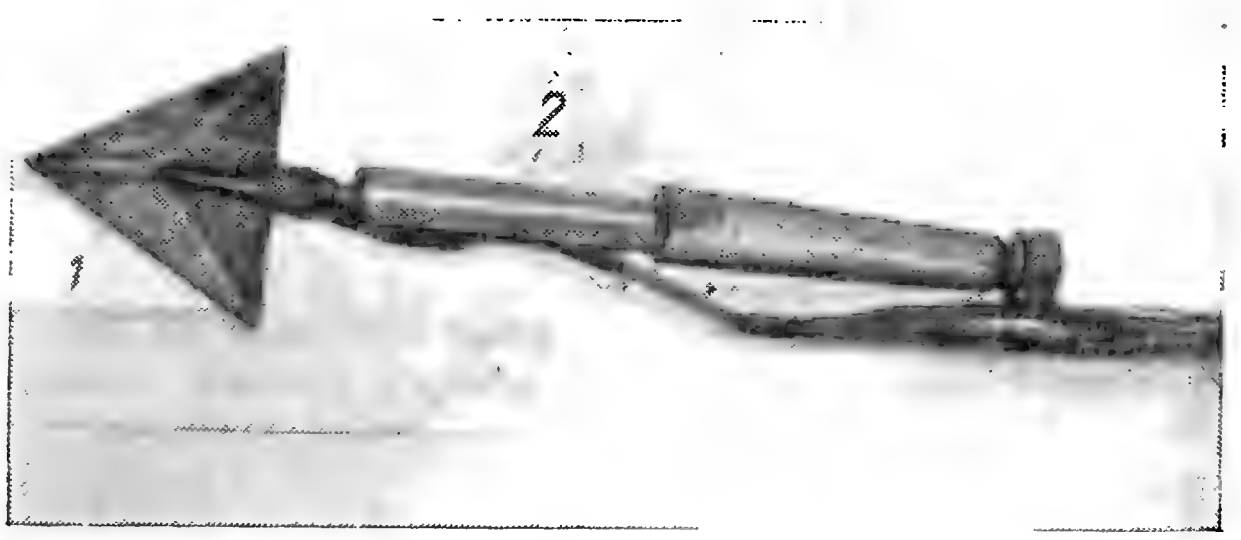


Рис. 4.2.12. Модель треугольного крыла с тензодержавкой:

1 — модель крыла; *2* — тензодержавка

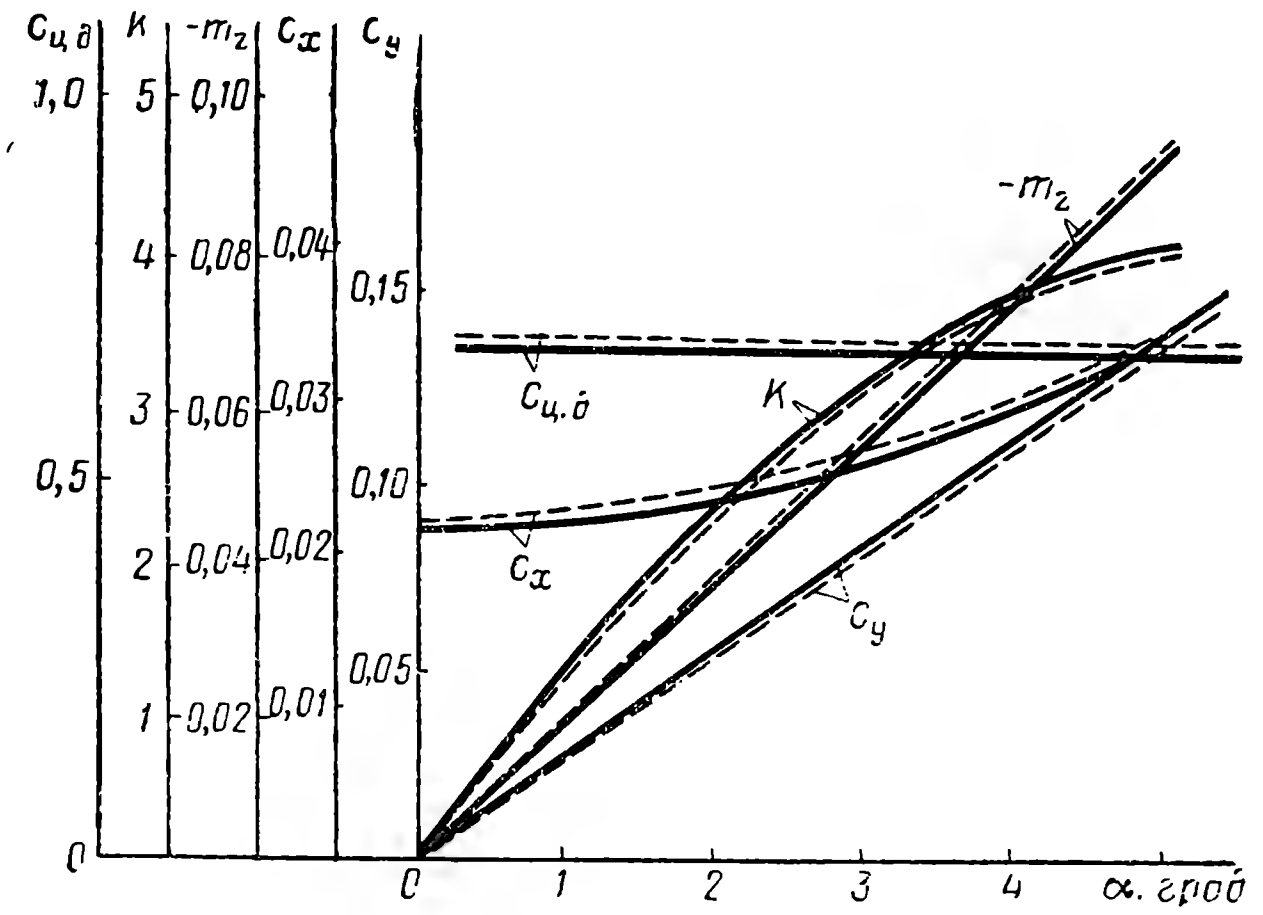


Рис. 4.2.13. Характеристические диаграммы треугольного крыла, изображенного на рис. 4.2.11, при $M_\infty = 2{,}68$:

———— — теоретический расчет; — — — — эксперимент

Из этого графика находим $c'_{xp}\alpha'/(4\bar{\Delta}^2) = 3{,}0$, откуда

$$c'_{xp} = 3{,}0 \frac{4\bar{\Delta}^2}{\alpha'} = \frac{3{,}0 \cdot 4 \cdot 0{,}0639^2}{\sqrt{2{,}68^2 - 1}} = 0{,}0199.$$

Составляющая от трения c_{xf} коэффициента сопротивления определяется следующим образом. Полагая $Re_{кр} = 3 \cdot 10^6$, устанавливаем, что на крыле имеет место однородный ламинарный пограничный слой, поскольку число Рейнольдса, рассчитанное по максимальной хорде $b_{кр}$ [$Re_\infty = V_\infty b_{кр}/\nu_\infty = 590 \cdot 0{,}094/(3{,}06 \cdot 10^{-5}) = 18{,}1 \cdot 10^5$], меньше

критического числа $\mathbf{Re}_{кр}$. В этом случае относительную координату точки перехода принимаем равной единице ($\bar{x}_t = 1$). Из графика на рис. 4.1.48 по $\mathbf{M}_\infty = 2{,}68$ и $\bar{x}_t = 1$ находим коэффициент $\eta_м = 0{,}95$.

Приняв коэффициент $\eta_{\bar{\Delta}} = 1$ и используя формулы (4.1.112), (4.1.29), вычисляем

$$c_{xf} = 2\frac{1{,}29}{\sqrt{\mathbf{Re}_\infty}}\eta_м = 2\frac{1{,}29}{\sqrt{9{,}65\cdot 10^5}}0{,}95 = 0{,}0025,$$

причем в этом выражении число Рейнольдса $\mathbf{Re}_\infty = V_\infty b_{ср}/\nu_\infty$.

Таким образом, в соответствии с формулой (4.2.14) коэффициент сопротивления крыла

$$c_x = 0{,}0199 + 0{,}00049\,(\alpha^\circ)^2 + 0{,}0025 = 0{,}022 + 0{,}00049\,(\alpha^\circ)^2. \qquad (4.2.32)$$

Коэффициент момента в соответствии с формулой (4.2.19)

$$-m_z = 0{,}0187\cdot\alpha^\circ. \qquad (4.2.33)$$

Используя формулы (4.2.31) и (4.2.32), определим качество крыла:

$$K = \frac{c_y}{c_x} = \frac{0{,}0281\cdot\alpha^\circ}{0{,}022 + 0{,}00049\,(\alpha^\circ)^2}. \qquad (4.2.34)$$

Коэффициент центра давления треугольного крыла равен $c_{ц:д} = 2/3$.

Результаты этих расчетов показаны в графическом виде на рис. 4.2.13. Там же приведены кривые, построенные по экспериментальным данным. Сравнение теоретических и экспериментальных данных указывает на их хорошее согласование.

ГЛАВА V

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ АЭРОДИНАМИКА ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

Корпус (фюзеляж) в виде тела вращения или близкий по форме к нему представляет собой наряду с крыльями, управляющими и стабилизирующими элементами важнейшую часть многих летательных аппаратов. Вместе с тем отдельные типы ракетных систем имеют корпус как единственный элемент аэродинамической схемы. Вот почему в аэродинамических исследованиях большое место занимает изучение обтекания тел вращения.

Результаты этого изучения могут непосредственно использоваться для оценки аэродинамических свойств летательного аппарата, если он представляет собой по форме тело вращения, или же применяются вместе с соответствующими данными для несущих поверхностей (крылья, рули, стабилизаторы) и интерференционными поправками как отдельные составляющие при аэродинамическом расчете комбинации «корпус+крыло+оперение».

Современная аэродинамика тел вращения благодаря развитию математики и вычислительной техники достигла больших успехов. Вместе с тем возросла роль и экспериментальных исследований обтекания корпусов, что вызвано значительным усложнением аэродинамических задач и повышением требований к проверке правильности их решения опытным путем. К тому же многие проблемы аэродинамики тел вращения могут быть пока достаточно надежно разрешены лишь в экспериментальных условиях.

Экспериментальное изучение обтекания тел вращения связано в основном с исследованием потока около их моделей, так как использование натурных образцов не всегда возможно из-за ограниченных размеров аэродинамических труб и неоправданно больших затрат на проведение исследований с такими образцами. При этом опытное определение аэродинамических характеристик на моделях дает достаточно хорошие результаты, которые могут быть перенесены на натурное изделие, если при проведении экспериментов выполнены условия аэродинамического подобия модельного и натурного потоков.

Как и для крыльев (профилей), экспериментальное исследование аэродинамических свойств тел вращения можно проводить либо путем измерения распределения давления и касательных напряжений с последующим расчетом необходимых аэродинамических параметров, либо при помощи весовых испытаний, позволяющих находить суммарные аэродинамические силы и моменты.

На практике широко используются комбинированные методы аэродинамических исследований, согласно которым одни составляющие силового воздействия на обтекаемое тело вращения определяются экспериментально (в частности, силы от давления), а другие (силы трения) — расчетом.

Рассматриваемые в этой главе лабораторные работы позволяют ознакомиться с современными методами, приборами и аппаратурой, которые используются в экспериментальной аэродинамике тел вращения.

Одновременно для них приводятся теоретические зависимости, при помощи которых ведется расчет отдельных аэродинамических коэффициентов.

Работа 5.1.1

Исследование распределения давления по обтекаемой поверхности тела вращения

Цель работы — найти путем измерений распределение давления по поверхности тела вращения, обтекаемого воздушным потоком в аэродинамической трубе под некоторым углом атаки, и определить по этому распределению соответствующие аэродинамические коэффициенты.

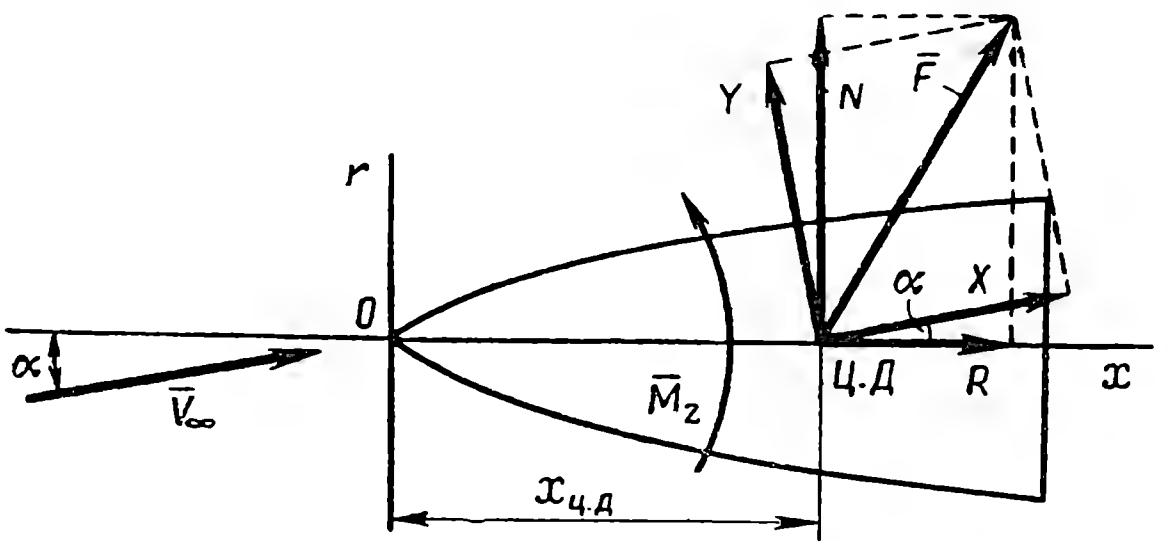


Рис. 5.1.1. Схема аэродинамических сил и момента, действующих на тело вращения (двухмерное обтекание)

Общие сведения

Аэродинамические коэффициенты тел вращения. На тело вращения, расположенное в потоке под углом атаки α (рис. 5.1.1), действует аэродинамическая сила $\bar{F}=Ri+Nj$, где R, N — соответственно осевая и нормальная силы; i, j — единичные векторы по осям связанной системы координат. Одновременно на это тело действует момент тангажа $\bar{M}_z$.

Рассмотрим отдельно каждую составляющую R и N, а также момент M_z. В соответствии с физической природой аэродинамической силы составляющая R может быть представлена в виде суммы:

$$R = R_p + R_{дон} + R_f, \qquad (5.1.1)$$

где R_p, $R_{дон}$, R_f — составляющие осевой силы соответственно от распределения давления по боковой поверхности, донного давления и трения.

Аэродинамический коэффициент осевой силы $c_R=R/(q_\infty S_{мид})$ может быть представлен в виде суммы коэффициентов соответствующих составляющих:

$$c_R = c_{Rp} + c_{Rдон} + c_{Rf}, \qquad (5.1.2)$$

где $S_{мид}$ — миделевое сечение тела вращения; $q_\infty=\rho_\infty V_\infty^2/2$ — скоростной напор.

По аналогии с (5.1.1) нормальную силу, как и момент тангажа, можно представить в виде соответствующих сумм составляющих от давления (по боковой поверхности и донному срезу) и трения. Однако, как показывают исследования, для сравнительно недлинных тел вращения, которые обычно применяются на практике, составляющие нормальной силы и момента, обусловленные трением, невелики. Также малы и те составляющие, которые возникают за счет донного давления. Это обусловлено тем, что распределение давления за дном обычно незначительно отличается от равномерного и поэтому почти не дает составляющих суммарной силы N и момента M_z. В соответствии с этим полагаем, что сила и момент вызваны воздействием только давления на боковую поверхность и равны:

$$N_p = c_{Np}\, q_\infty\, S_{мид},\ M_{zp} = m_{zp}\, q_\infty\, S_{мид}\, x_к, \qquad (5.1.3)$$

где c_{Np}, m_{zp} — аэродинамические коэффициенты соответственно нормальной силы и момента тангажа за счет давления; $x_к$ — длина тела вращения.

Получим формулы, позволяющие вычислить по известному распределению давления аэродинамические коэффициенты c_{Rp}, c_{Np} и m_{zp}. Выделим элемент поверхности тела вращения шириной dx, расположенный на расстоянии x от носка (рис. 5.1.2). На участок этого элемента

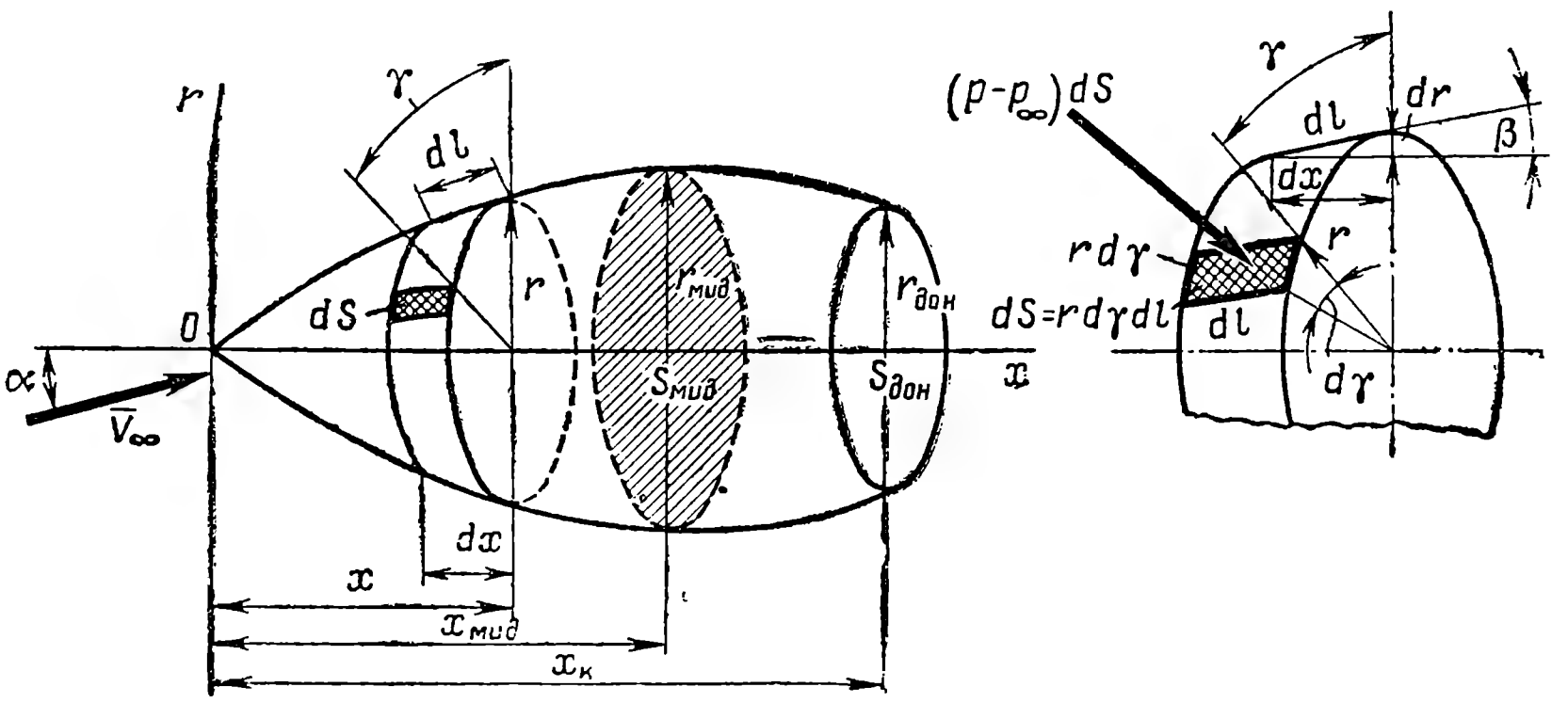


Рис. 5.1.2. Расчетная схема для определения аэродинамических коэффициентов тела вращения

площадью $rd\gamma dl$ действует сила от избыточного давления, равная $(p - p_\infty) rd\gamma dl$. Так как длина образующей dl определяется из соотношения $dx = dl\cos\beta$ (где β — угол между осью и касательной к образующей в данной точке), то элементарная сила $dF = (p - p_\infty)\ (rd\gamma dx/\cos\beta)$. Проектируя эту силу на ось тела, найдем элементарную величину осевой силы, действующей на выделенный участок, $dR_p = (p - p_\infty) \times \times (rd\gamma dx/\cos\beta)\sin\beta$. Интегрируя по поверхности и принимая во внимание симметричный характер распределения давления по обе стороны от нулевой меридиональной плоскости, в которой расположен вектор скорости V_∞, получим для осевой силы $R_p = 2\int_0^{x_к} r\,\mathrm{tg}\beta dx \int_0^{\pi} (p - p_\infty) d\gamma$. Имея в виду при этом, что $R_p = c_{Rp} q_\infty S_{мид}$, где $S_{мид} = \pi r_{мид}^2$, найдем следующее выражение для коэффициента осевой силы от давления:

$$c_{Rp} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{d\bar{r}^2}{d\tilde{x}}\, d\tilde{x} \int_0^{\pi} \bar{p}\, d\gamma, \qquad (5.1.4)$$

где $\bar{r} = r/r_{мид}$; $\tilde{x} = x/x_к$ (см. рис. 5.1.2).

Из рис. 5.1.2 видно, что элементарная величина нормальной силы $dN_p = -(p - p_\infty) rd\gamma dx\cos\gamma$, а полное значение этой силы $N_p = -2\int_0^{x_к} rdx \int_0^{\pi} (p - p_\infty)\cos\gamma d\gamma$. Соответствующий аэродинамический коэффициент

$$c_{Np} = \frac{N_p}{q_\infty S_{мид}} = -\frac{4\lambda_к}{\pi} \int_0^1 \bar{r}\, d\tilde{x} \int_0^{\pi} \bar{p}\cos\gamma d\gamma, \qquad (5.1.5)$$

где $\lambda_к = x_к/2r_{мид}$ — удлинение тела вращения.

Рассмотрим выражение для момента тангажа M_{zp}, вычисленного относительно поперечной оси, проходящей через носок тела. Из

рис. 5.1.2 видно, что элементарная величина этого момента, действующего на площадку dS, расположенную на расстоянии x от носка,

$$dM_{zp} = x(p - p_\infty) r d\gamma dx \cos\gamma + r^2 (p - p_\infty) d\gamma dx \cos\gamma \operatorname{tg}\beta.$$

Учитывая симметричность распределения давления, после интегрирования найдем полный момент:

$$M_{zp} = 2\int_0^{x_к} xr\,dx \int_0^{\pi} (p - p_\infty)\cos\gamma d\gamma + 2\int_0^{x_к} r^2 \operatorname{tg}\beta dx \int_0^{\pi} (p - p_\infty)\cos\gamma d\gamma,$$

откуда коэффициент момента

$$m_{zp} = \frac{4\lambda_к}{\pi}\int_0^1 \bar{r}\tilde{x}d\tilde{x}\int_0^{\pi}\bar{p}\cos\gamma d\gamma + \frac{2}{\pi}\int_0^1 \bar{r}^2 \operatorname{tg}\beta d\tilde{x}\int_0^{\pi}\bar{p}\cos\gamma d\gamma. \qquad (5.1.6)$$

Если тело вращения тонкое ($r \ll x_к$), то вторым членом в правой части (5.1.6) можно пренебречь.

По известным значениям m_{zp} и c_{Np} можно определить коэффициент центра давления (см. рис. 5.1.1):

$$c_{ц.д} = \frac{x_{ц.д}}{x_к} = -\frac{m_{zp}}{c_{Np}}. \qquad (5.1.7)$$

Зависимости (5.1.4), (5.1.5), (5.1.6) определяют аэродинамические коэффициенты тела вращения в связанной системе координат. В поточных координатах (см. рис. 5.1.1) соответствующие коэффициенты могут быть вычислены при помощи формул (3.I.8) ÷ (3.I.12).

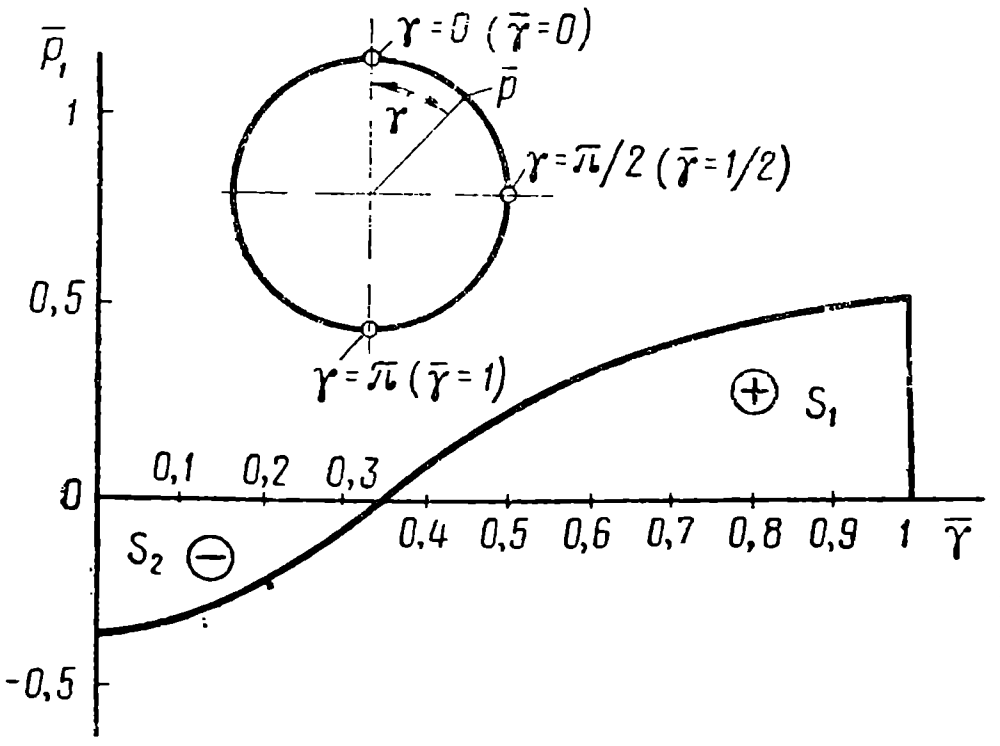


Рис. 5.1.3. К вычислению интеграла $D = \int_0^1 \bar{p}d\bar{\gamma}$

Порядок расчета аэродинамических коэффициентов. Рассмотрим методику вычисления аэродинамических коэффициентов по приведенным выше зависимостям при условии, что распределение давления по поверхности тела вращения заданной формы известно. Такое распределение может быть найдено либо теоретическими расчетами, либо путем экспериментальных исследований. В результате этих расчетов и исследований находится функция $\bar{p} = \bar{p}(\gamma, x)$, характеризующая закон изменения коэффициента давления в зависимости от меридионального угла γ и осевой координаты x тела вращения. Такая функция определяет коэффициент осевой силы от давления в соответствии с выражением (5.1.4), которое можно представить в виде

$$c_{Rp} = \int_0^{\bar{r}^2_{дон}} D d\bar{r}^2, \qquad (5.1.8)$$

где

$$D = \int_0^1 \bar{p}d\bar{\gamma}, \qquad (5.1.9)$$

а значения $\bar{r}_{дон} = r_{дон}/r_{мид}$; $\bar{\gamma} = \gamma/\pi$. Нетрудно видеть, что функция D зависит только от одной переменной, а именно координаты x или, учиты-

вая известный вид уравнения образующей $r=r(x)$, от соответствующего радиуса поперечного сечения r. Если распределение коэффициента давления найдено, то функция D вычисляется при помощи однократного интегрирования для каждого из выбранных сечений тела вращения, а затем согласно (5.1.8) производится *повторное* интегрирование.

На рис. 5.1.3 показан характер распределения коэффициента давления по одному из поперечных сечений тела вращения. Измерив площади S_1 и S_2 между кривой и горизонтальной осью, с учетом их знака можно определить в соответствии с (5.1.9) величину

$$D = (S_1 + S_2)\,\mu_{SD},$$

где $\mu_{SD}=\mu_{\bar{p}}\mu_{\bar{\gamma}}$ — масштаб площади, равный произведению соответствующих масштабов значений $\bar{p}$ и $\bar{\gamma}$. Кривые $\bar{p}=\bar{p}(\bar{\gamma})$, аналогичные графику на рис. 5.1.3, должны быть построены для ряда сечений, в точках которых известны давления, с тем чтобы осуществить повторное интегрирование в соответствии с (5.1.8). Количество этих сечений должно быть таким, чтобы можно было осуществить интегрирование и обеспечить при этом необходимую точность.

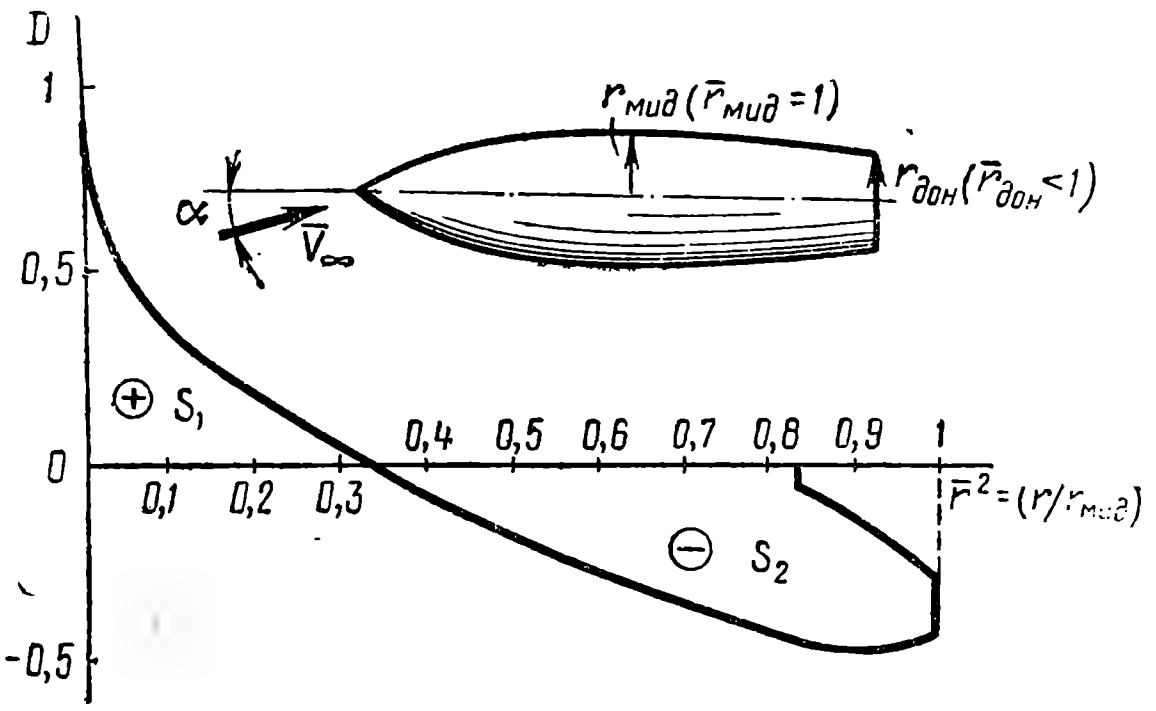


Рис. 5.1.4. Графическое вычисление c_{Rp} тела вращения

В соответствии с рис. 5.1.4, на котором изображен график функции $D=D(\bar{r}^2)$, коэффициент осевой силы от давления

$$c_{Rp} = (S_1 + S_2)\,\mu_{Sc},$$

где S_1 и S_2 — площади между кривой и осью $\bar{r}^2$ с учетом знака; $\mu_{Sc}=\mu_D\mu_{\bar{r}^2}$ — масштаб площади, равный произведению соответствующих масштабов величин D и $\bar{r}^2$.

Для расчета коэффициента нормальной силы воспользуемся формулой (5.1.5), которую перепишем в виде

$$c_{Np} = -4\lambda_к \int_0^1 \bar{r}\,d\tilde{x} \int_0^1 \bar{p}\cos(\bar{\gamma}\pi)\,d\bar{\gamma}.$$

Вводя обозначение

$$\Pi = \int_0^1 \bar{p}\cos(\bar{\gamma}\,\pi)\,d\bar{\gamma}, \qquad (5.1.10)$$

получим

$$c_{Np} = -4\lambda_к \int_0^1 \Pi\bar{r}\,d\tilde{x}. \qquad (5.1.11)$$

В соответствии с этой формулой коэффициент нормальной силы определяется путем двукратного интегрирования. При этом сначала находятся графическим интегрированием значения Π, соответствующие нескольким сечениям тела вращения. В качестве иллюстрации такое интегри-

рование для одного сечения показано на рис. 5.1.5. В соответствии с этим рисунком для рассматриваемого сечения функция

$$П = \mu_{SП}(S_1 + S_2),$$

где S_1 и S_2 — площади под кривой (с учетом знака); $\mu_{SП} = \mu_{\bar{p}\cos\bar{\gamma}}\,\mu_{\bar{\gamma}}$ — масштаб площади, равный произведению соответствующих масштабов величин $\bar{p}\cos\bar{\gamma}$ и $\bar{\gamma}$.

Затем по найденным значениям $П$ подсчитывают для выбранных сечений функции $П_1 = 4\lambda_к \bar{r} П$ и строят график $П_1 = П_1(\tilde{x})$ (рис. 5.1.6).

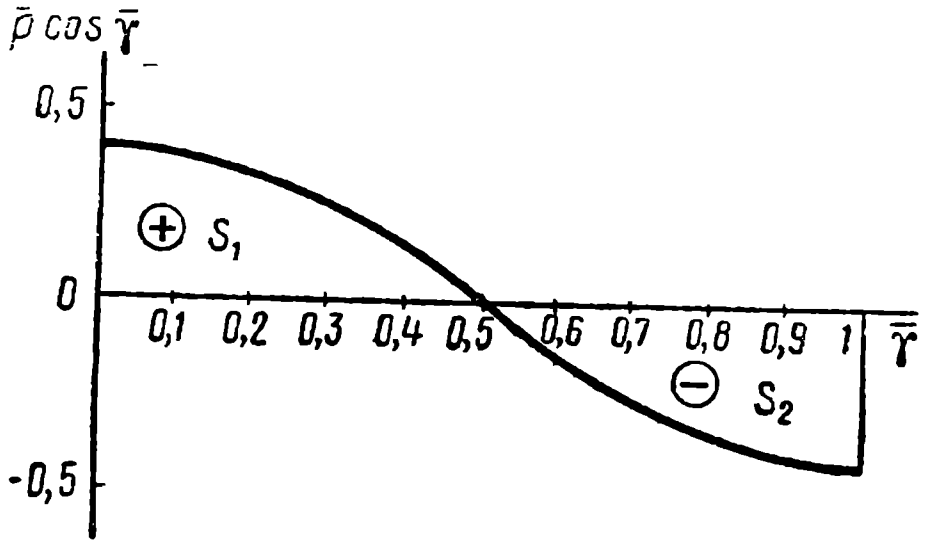


Рис. 5.1.5. Вспомогательный график для вычисления коэффициента нормальной силы от давления

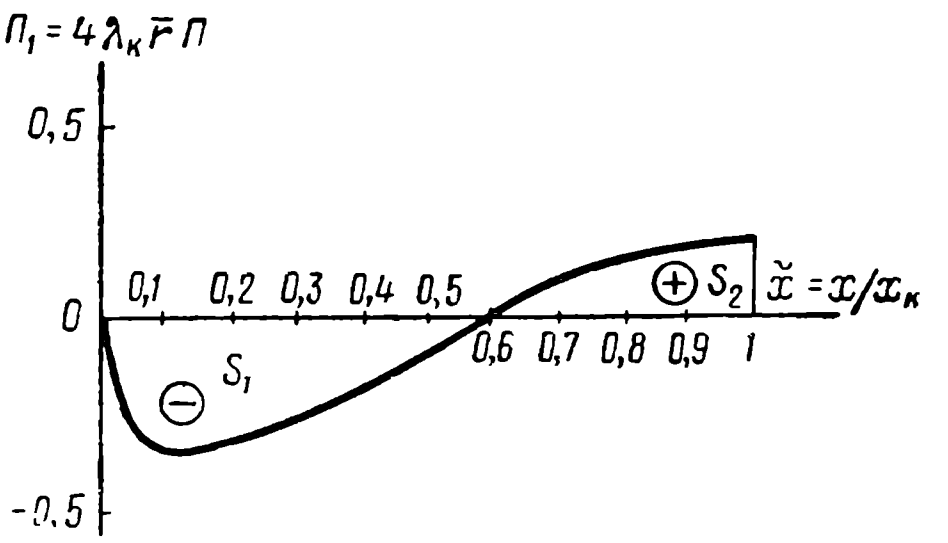


Рис. 5.1.6. График для вычисления c_{Np} тела вращения

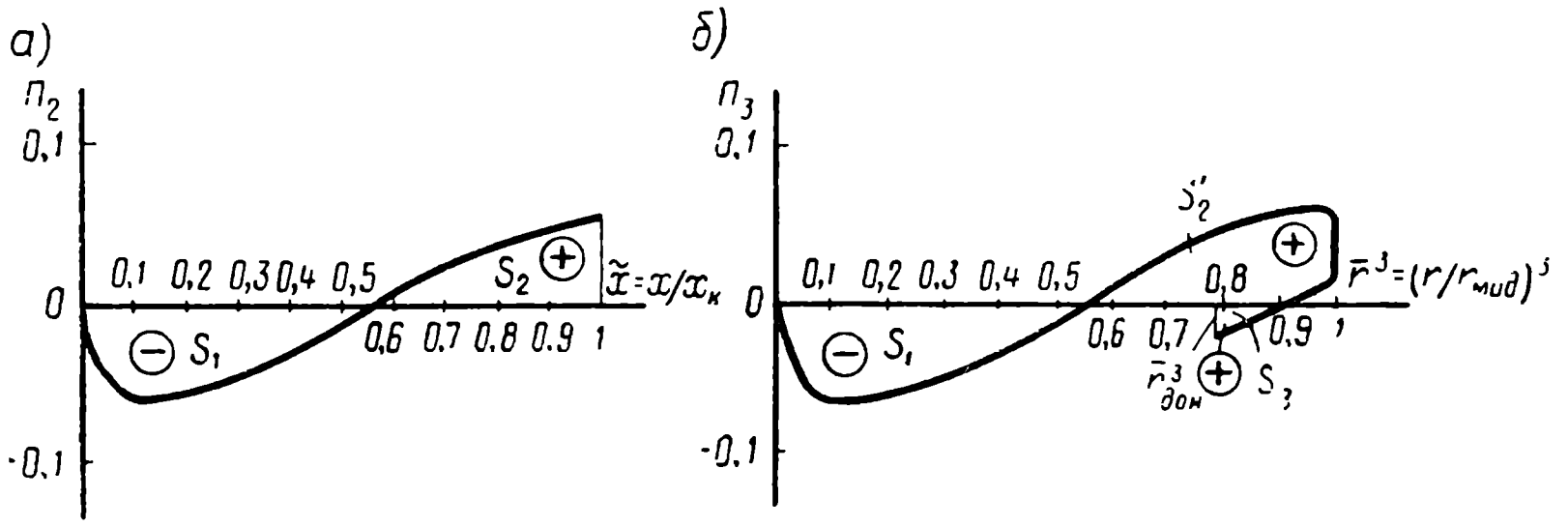


Рис. 5.1.7. К определению коэффициента m_{zp}

Площади S_1 и S_2 под кривой с учетом знака определяют коэффициент нормальной силы:

$$c_{Np} = -\mu_{SN}(S_1 + S_2),$$

где $\mu_{SN} = \mu_{\tilde{x}}\,\mu_{П1}$ — масштаб площади, равный произведению соответствующих масштабов значений $\tilde{x}$ и $П_1$.

Вычисление коэффициента момента ведется на основе формулы (5.1.6), которую представим в следующем виде:

$$m_{zp} = \int_0^1 П_2 d\tilde{x} + \int_0^{\bar{r}^3_{дон}} П_3 d\bar{r}^3, \qquad (5.1.12)$$

где

$$П_2 = 4\lambda_к \tilde{x}\bar{r}П, \quad П_3 = \lambda_к П/3. \qquad (5.1.13)$$

Эти функции $П_2$ и $П_3$ определяются по значениям $П$, известным из расчетов коэффициента нормальной силы, а затем строятся графики $П_2 = П_2(\tilde{x})$ и $П_3 = П_3(\bar{r}^3)$ (рис. 5.1.7). Если площади под кривой функции

$\Pi_2(\tilde{x})$ будут S_1 и S_2 (с учетом знака, рис. 5.1.7, *а*), а под кривой $\Pi_3(\bar{r}^3)$ будут S_1' и S_2' и S_3' (рис. 5.1.7, *б*), то коэффициент момента

$$m_{zp} = (S_1 + S_2)\,\mu_S + (S_1' + S_2' + S_3')\,\mu_S',$$

где $\mu_S = \mu_{\Pi 2}\mu_{\tilde{x}}$; $\mu_s' = \mu_{\Pi 3}\mu_{\bar{r}^3}$ — масштабы площадей на рис. 5.1.7,*а* и 5.1.7, *б*, равные соответственно произведению масштабов значений Π_2, $\tilde{x}$ и Π_3, $\bar{r}^3$.

Осевая сила, обусловленная давлением на дно (рис. 5.1.8), определяется в общем виде из выражения

$$R_{\text{дон}} = -2q_\infty \int_0^{r_{\text{дон}}} \int_0^{\pi} (p_{\text{дон}} - p_\infty)_n\, r\,dr\,d\gamma,$$

а соответствующий коэффициент этой силы

$$c_{R\,\text{дон}} = \frac{R_{\text{дон}}}{q_\infty S_{\text{мид}}} = -2 \int_0^{\bar{r}_{\text{дон}}} \bar{r}\,d\bar{r} \int_0^{1} \bar{p}_{\text{донп}}\,d\bar{\gamma},$$

где $\bar{p}_{\text{донп}} = \bar{p}_{\text{донп}}(\bar{r}, \bar{\gamma})$ — функция, характеризующая распределение коэффициента давления на донной поверхности. В экспериментальных условиях эта функция находится по измерению давления в дренажных отверстиях, просверленных на донном срезе тела вращения.

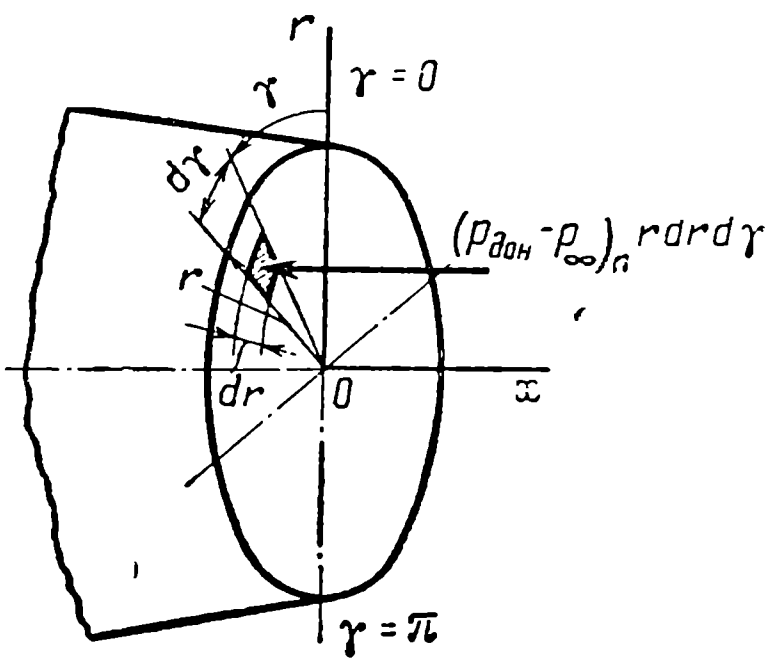


Рис. 5.1.8. К вычислению донного сопротивления

Исследования показывают, что достаточно удовлетворительные результаты при определении донной силы получаются, если давление за дном измерить в нескольких точках и последующий расчет такой силы вести по средней величине этого давления $p_{\text{дон}}$ и соответствующему среднему коэффициенту донного давления $\bar{p}_{\text{дон}}$. В этом случае

$$c_{R\text{дон}} = -\bar{p}_{\text{дон}}\,\bar{r}^2_{\text{дон}}. \qquad (5.1.14)$$

Если донное сечение такое же, как миделевое ($r_{\text{дон}} = r_{\text{мид}}$), то

$$c_{R\text{дон}} = -\bar{p}_{\text{дон}}.$$

Приближенный аэродинамический расчет.

Сопротивление трения. При упрощенных расчетах сопротивления трения корпусов могут быть использованы зависимости для плоской пластинки. Если c_{xf} представляет собой коэффициент сопротивления пластинки с длиной, равной длине корпуса, то сила сопротивления трения $X_f = c_{xf}\,q_\infty S_{\text{бок}}$, где $S_{\text{бок}}$ — боковая поверхность корпуса.

Пограничный слой около корпуса в реальных условиях, как правило, оказывается смешанным: на передней части он ламинарный, на остальной турбулентный (рис. 5.1.9). В соответствии с этим средний коэффициент сопротивления трения корпуса, отнесенный к миделевому сечению (в связанной системе координат),

$$c_{Rf} = c''_{Rf_{\text{к}}} \frac{S_{\text{бок}}}{S_{\text{мид}}} - c''_{Rf_{\text{л}}} \frac{S_{\text{л}}}{S_{\text{мид}}} + c'_{Rf_{\text{л}}} \frac{S_{\text{л}}}{S_{\text{мид}}}, \qquad (5.1.15)$$

где $c''_{R_{f\text{к}}}$ и $c''_{R_{f\text{л}}}$ — коэффициенты турбулентного трения пластинки (первый из них находится по числу Рейнольдса $\mathbf{Re}_\infty = V_\infty x_{\text{к}}/\nu_\infty$, подсчитанному по длине корпуса, второй — по значению критического числа Рейнольдса $\mathbf{Re}_{\text{кр}}$, вычисленному по длине ламинарного участка); вели-

чина $c'_{R_{fл}}$ равна коэффициенту ламинарного трения пластинки, длина которой соответствует протяженности ламинарного слоя на корпусе; значения $S_{бок}$ и $S_л$ представляют собой соответственно полную боковую поверхность корпуса и часть этой поверхности с ламинарным слоем.

Таким образом, для вычислений по зависимости (5.1.15) необходимо знать длину ламинарного слоя на передней части корпуса. Определение этой длины производят по критическому числу Рейнольдса, которое для продолговатого корпуса, обтекаемого несжимаемым потоком в первом приближении, $\mathbf{Re}_{кр} \approx 10^6$.

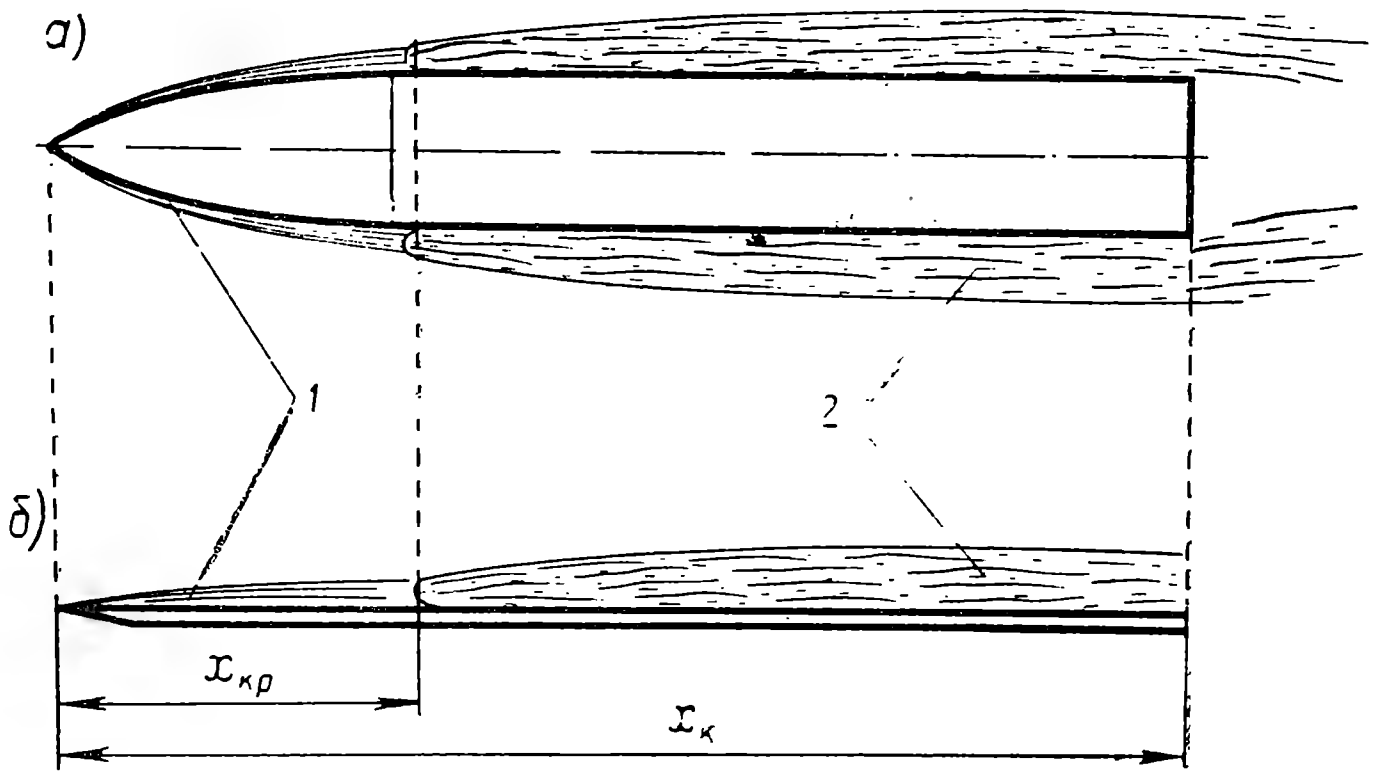


Рис. 5.1.9. Тело вращения (*а*), на поверхности которого имеется ламинарный *1* и турбулентный *2* участки пограничного слоя, и эквивалентная ему по площади ($S_{бок} = S_{пл}$) пластинка (*б*)

Коэффициенты трения (5.1.15) определяются как функции числа $\mathbf{Re}_\infty$ следующим образом:

л а м и н а р н ы й п о г р а н и ч н ы й с л о й

$$c'_{Rf_л} = 1{,}32/\mathbf{Re}_\infty^{1/2}; \tag{5.1.16}$$

т у р б у л е н т н ы й п о г р а н и ч н ы й с л о й:

$$c''_{Rf_л} = 0{,}074/\mathbf{Re}_\infty^{0{,}2} \text{ — для } \mathbf{Re}_\infty \leqslant 10^6; \tag{5.1.17}$$

$$c''_{Rf_к} = 0{,}032\mathbf{Re}_\infty^{-0{,}145} \text{ — для } 2\cdot 10^6 \leqslant \mathbf{Re}_\infty \leqslant 10^{10}. \tag{5.1.18}$$

Учитывая, что для $\mathbf{Re}_\infty = \mathbf{Re}_{кр}$ коэффициент $c''_{R_{fл}} = 0{,}074/(10^6)^{0{,}2} = 0{,}0047$, а $c'_{R_{fл}}$ и $c''_{R_{fк}}$ вычисляются соответственно по (5.1.16) и (5.1.18), получим после подстановки в (5.1.15)

$$c_{Rf} = \left[1{,}32\cdot 10^{-3}\frac{S_л}{S_{бок}} + \left(0{,}032\mathbf{Re}_\infty^{-0{,}145} + 0{,}0047\frac{S_л}{S_{бок}}\right)\right]\frac{S_{бок}}{S_{мид}}, \tag{5.1.19}$$

Чтобы учесть влияние сжимаемости газа (как при дозвуковых, так и при сверхзвуковых скоростях), можно воспользоваться формулой

$$c_{Rf} = \left[\frac{4{,}96\cdot 10^{-4}}{\sqrt[3]{1+0{,}03\mathbf{M}_\infty^2}}\cdot\frac{S_л}{S_{бок}} + \frac{0{,}032}{\sqrt{1+0{,}12\mathbf{M}_\infty^2}}\left(\frac{1}{\mathbf{Re}_\infty^{0{,}145}} - \frac{0{,}1S_л}{S_{бок}}\right)\right]\frac{S_{бок}}{S_{мид}}. \tag{5.1.20}$$

Эта формула получена из выражения (5.1.19), в которое введены поправки на сжимаемость, зависящие от числа $\mathbf{M}_\infty$.

Донное давление. Исследования показывают, что коэффициент давления за дном тела вращения при дозвуковых скоростях ($\mathbf{M}_\infty < 1$)

$$\bar{p}_{\text{дон}} = (p_{\text{дон}} - p_\infty)/q_\infty = -\left(0{,}029/\sqrt{\bar{c}_{Rf}}\right)\bar{r}_{\text{дон}}, \qquad (5.1.21)$$

а соответствующий коэффициент донной силы

$$c_{R\text{дон}} = \left(0{,}029/\sqrt{\bar{c}_{Rf}}\right)\bar{r}^3_{\text{дон}}, \qquad (5.1.22)$$

где c_{Rf} определяется с учетом сжимаемости для заданного числа $\mathbf{M}_\infty$ из (5.1.20).

При сверхзвуковых скоростях давление за дном заостренного тела вращения

$$\bar{p}_{\text{дон}} = -1{,}144\mathbf{K}_1(2-\mathbf{K}_1)\mathbf{M}_\infty^{-2}; \qquad (5.1.23)$$

здесь $\mathbf{K}_1 = \mathbf{M}_\infty/\lambda_{\text{эф}}$, где эффективное удлинение $\lambda_{\text{эф}} = \lambda_{\text{к}}/\bar{r}^2_{\text{дон}}$. В соответствии с (5.1.14) коэффициент донной силы

$$c_{R\text{дон}} = 1{,}144\mathbf{K}_1(2-\mathbf{K}_1)\mathbf{M}_\infty^{-2}\bar{r}^2_{\text{дон}}. \qquad (5.1.24)$$

Приведенные формулы, учитывающие влияние хвостового сужения, дают удовлетворительные результаты для $\bar{r}^2_{\text{дон}} \geqslant 0{,}4 \div 0{,}5$ и сравнительно небольшого угла наклона образующей хвостовой части (до $8 \div 10°$). Применяя эти формулы, следует также учитывать, что они пригодны для значений $\mathbf{K}_1 \leqslant 1$. Если же $\mathbf{K}_1 > 1$, то расчет надо вести по формулам

$$\bar{p}_{\text{дон}} = -1{,}43\mathbf{M}_\infty^{-2}; \quad c_{R\text{дон}} = 1{,}43\mathbf{M}_\infty^{-2}\bar{r}^2_{\text{дон}}. \qquad (5.1.25)$$

Давление на боковой поверхности. В настоящее время отсутствуют теоретические методы, которые позволяли бы с удовлетворительной точностью рассчитывать давление на боковой поверхности тел вращения с донным срезом, обтекаемых дозвуковым потоком жидкости. Хорошие результаты получаются лишь в результате экспериментального исследования этого давления. При этом, как показали такие исследования, для удлиненных тел вращения различие между давлениями в несжимаемом и сжимаемом потоках невелико. Это различие становится больше по мере утолщения тонкого тела вращения или возрастания чисел $\mathbf{M}_\infty$.

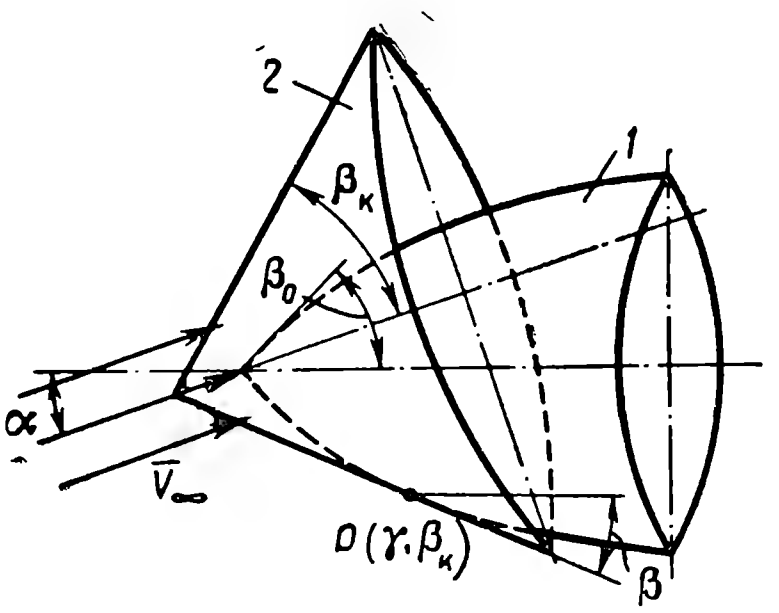


Рис. 5.1.10. Построение «местного конуса» *2* при несимметричном обтекании тела вращения *1*

Согласно имеющимся данным для нахождения коэффициента давления $\bar{p}_{\text{сж}}$ при дозвуковых скоростях обтекания можно воспользоваться значениями коэффициента давления $\bar{p}_{\text{нсж}}$ для несжимаемой жидкости и формулой пересчета, пригодной для значений $\mathbf{M}_\infty \leqslant 0{,}5 \div 0{,}6$, и при условии, что числа Маха меньше критических величин $\mathbf{M}_{\text{кр}}$ (4.1.32).

При расчете распределения давления около заостренного тела вращения, обтекаемого сверхзвуковым потоком под углом атаки α, можно воспользоваться методом «местных конусов». В соответствии с этим методом в данной точке обтекаемой поверхности скорость будет такой, как на «местном конусе» с половиной угла при вершине:

$$\beta_{\text{к}} = \beta - \alpha\cos\gamma + (\alpha^2/2)\operatorname{ctg}\beta\sin^2\gamma, \qquad (5.1.26)$$

обтекаемом потоком с заданным числом $\mathbf{M}_\infty > 1$ под нулевым углом атаки. Построение такого местного конуса приведено на рис. 5.1.10. На этом же рисунке показаны углы $\beta_{\text{к}}$, β и β_0.

Для известного угла α можно по (5.1.26) подсчитать для заданного сечения (угла β наклона касательной к оси) угол $\beta_к$ как функцию γ. Затем по таблицам или графикам найти, зная M_∞ и $\beta_к$, соответствующие коэффициенты давления на конусе $\bar{p}_д$, по которым определить при помощи формулы

$$\bar{p} = \bar{p}_д \bar{\nu} + 2(\bar{\nu} - 1)/(kM_\infty^2) \qquad (5.1.27)$$

местный коэффициент давления. В этой формуле величина $\bar{\nu} = \nu_0/\nu$, где коэффициент $\nu = p_0''/p_0$ рассчитан по давлению торможения p_0'' для «местного конуса» с углом $\beta_к$ (5.1.26), а $\nu_0 = p_0'/p_0$ определяется по давлению торможения p_0' для конуса с углом .

$$\beta_{к0} = \beta_0 - \alpha\cos\gamma + (\alpha^2/2)\operatorname{ctg}\beta_0\sin^2\gamma. \qquad (5.1.28)$$

Если угол $\beta_к$ для какого-то сечения отрицательный, то расчет коэффициента давления $\bar{p}_д$ следует вести для условного «местного конуса» с «отрицательным» углом $\beta_к$. Тогда этот коэффициент давления, найденный по абсолютной величине $\beta_к$, надо рассматривать для данной точки отрицательным по знаку, а значение $\bar{\nu}$ в (5.1.27) следует принимать равным ν_0.

По известной функции $\bar{p} = \bar{p}(x, \gamma)$ можно вычислить при помощи графического интегрирования соответствующие аэродинамические коэффициенты.

Порядок проведения работы

Дозвуковая труба (с открытой рабочей частью).

1. Ознакомиться с устройством аэродинамической трубы и схемой всей экспериментальной установки; проверить готовность к работе оборудования и измерительных устройств.

2. Осуществить тарировку каждого жидкостного манометра с применением для этого эталонного манометра.

3. Установить в рабочей части трубы модель, соединить ее резиновыми дренажными трубками с манометрами и проверить герметичность соединения.

4. Измерить барометрическое давление $p_{атм}$, температуру воздуха $T_{атм}$ и снять показания с психрометра.

5. Включить аэродинамическую трубу и после выхода ее на режим установившегося обтекания осуществить фотосъемку панели манометра, с тем чтобы зафиксировать показания левых и правых отсчетных трубок $h_{n\,лев}$ и $h_{n\,пр}$. Аналогичные измерения провести для нескольких углов атаки.

6. Вместо модели установить насадок полного давления и измерить скоростной напор трубы $q_\infty = \rho_\infty V_\infty^2/2$. Если позволяют размеры поперечного сечения трубы, то насадок целесообразно разместить вместе с моделью и измерение скоростного напора провести одновременно с определением давления на обтекаемой поверхности. При этом расположение насадка и модели должно быть таким, чтобы исключить их взаимное влияние.

7. По негативным фотографическим пленкам определить показания манометров $h_{n\,лев}$ и $h_{n\,пр}$, вычислить разность этих показаний $\Delta h = h_{n\,лев} - h_{n\,пр}$, найти по ним соответствующие избыточные давления $\Delta p_n = p_n - p_\infty$, а затем определить коэффициенты давления в соответствующих точках поверхности $\bar{p}_n = \Delta p_n/q_\infty$.

8. По найденному распределению значений $\bar{p}_n$ вычислить для каждого угла атаки аэродинамические коэффициенты и построить соответствующие графики.

Сверхзвуковая труба (с закрытой рабочей частью).

1. Ознакомиться с общей схемой экспериментальной установки, устройством трубы и измерительных приборов; проверить их готовность к работе.

2. Установить сменные сопловые вкладыши, рассчитанные на получение заданного (номинального) числа $\mathbf{M}_\infty > 1$.

3. Закрепить на державке модель тела вращения и установить ее в рабочей части под необходимым углом атаки.

4. Соединить резиновыми трубками дренажные отверстия модели с групповым регистрирующим манометром ГРМ. С этим же манометром соединить приемник давления в стенке трубы, воспринимающий статическое давление p_∞ в рабочей части, и проверить герметичность соединений.

5. Установить манометр и термопару для измерения давления p_0 и температуры T_0 в форкамере трубы.

6. Измерить барометрическое давление $p_{\text{атм}}$.

7. Снять все начальные показания группового регистрирующего манометра N_0.

8. Включить трубу и после выхода ее на режим установившегося обтекания осуществить измерение давлений, зафиксировав на печатающем устройстве ГРМ соответствующие показания N. Одновременно замерить давление p_0 и температуру T_0 в форкамере трубы. Аналогичные измерения провести для нескольких углов атаки.

9. По разности показаний $\Delta N_\infty = N - N_0$ вычислить статическое давление $p_\infty = p_{\text{атм}} + \Delta N_\infty k$ (где k — коэффициент шкалы ГРМ), а по отношению p_∞/p_0 найти, используя [17], соответствующее число $\mathbf{M}_\infty$.

10. Определить по значениям $\Delta N_n = N_n - N_0$ давления в дренажных точках модели $p_n = p_{\text{атм}} + \Delta N_n k$, вычислить избыточные давления $\Delta p_n = p_n - p_\infty$ и, зная скоростной напор $q_\infty = k p_\infty \mathbf{M}_\infty^2/2$, найти коэффициенты давления $\bar{p}'_n = \Delta p_n/q_\infty$ в этих точках.

11. По найденному распределению $\bar{p}_n$ для каждого из углов атаки определить соответствующие аэродинамические коэффициенты.

Пример. Рассмотрим результаты проведения лабораторной работы в дозвуковой трубе. В такой трубе, имеющей небольшую скорость движения воздуха в рабочей части (несжимаемый поток), измерялось распределение давления на модели тела вращения, общий вид которой показан на рис. 5.1.11. Размеры модели, *мм*: $r_{\text{мид}} = 45$; $x_{\text{г}} = 92$; $x_{\text{ц}} = 46$; $x_{\text{к}} = 182$; $r_{\text{дон}} = 34$. На этом же рисунке показано размещение дренажных отверстий в семи поперечных сечениях модели. Относительные координаты $\tilde{x} = x/x_{\text{к}}$ этих сечений, а также координаты дренажных отверстий $\bar{r} = r/r_{\text{мид}}$, $\bar{\gamma} = \gamma/\pi$ приведены в табл. А.

В соответствии с размерами модели отношения боковой поверхности $S_{\text{бок}}$ и площади донного среза $S_{\text{дон}}$ к миделеву сечению $S_{\text{мид}}$ соответственно равны: $\bar{S}_{\text{бок}} = S_{\text{бок}}/S_{\text{мид}} = 6{,}62$ и $\bar{S}_{\text{дон}} = S_{\text{дон}}/S_{\text{мид}} = 0{,}573$.

Таблица А

$\bar{\gamma}$	Номера дренажных отверстий								
0	—	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	—
1/3	—	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	—
2/3	—	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*	*21*	—
1	—	*22*	*23*	*24*	*25*	*26*	*27*	*28*	—

Продолжение табл. А

Размеры	Номера сечений								
	I	*II*	*III*	*IV*	*V*	*VI*	*VII*	*VIII*	*IX*
$\bar{r}$	0	0,311	0,601	0,800	0,956	1,00	1,00	0,922	0,756
$\tilde{x}$	0	0,088	0,187	0,296	0,401	0,505	0,758	0,885	1,00

Измерение давлений в дренажных отверстиях, а также полного давления (скоростного напора) производилось при помощи батарейного манометра, состоящего из двадцати восьми U-образных стеклянных трубок, заполненных спиртом с удельным весом $\gamma=0{,}82$ *кГ/дм*^{3}. Угол наклона панели манометра $\beta=90°$, а тарировочные коэффициенты каждой U-образной трубки принимались равными единице. Скоростной напор измерялся комбинированным насадком Пито — Прандтля с тарировочным коэффициентом $\xi_т=1{,}01$. Углы атаки модели устанавливались при помощи координатника, на котором эта модель закреплялась.

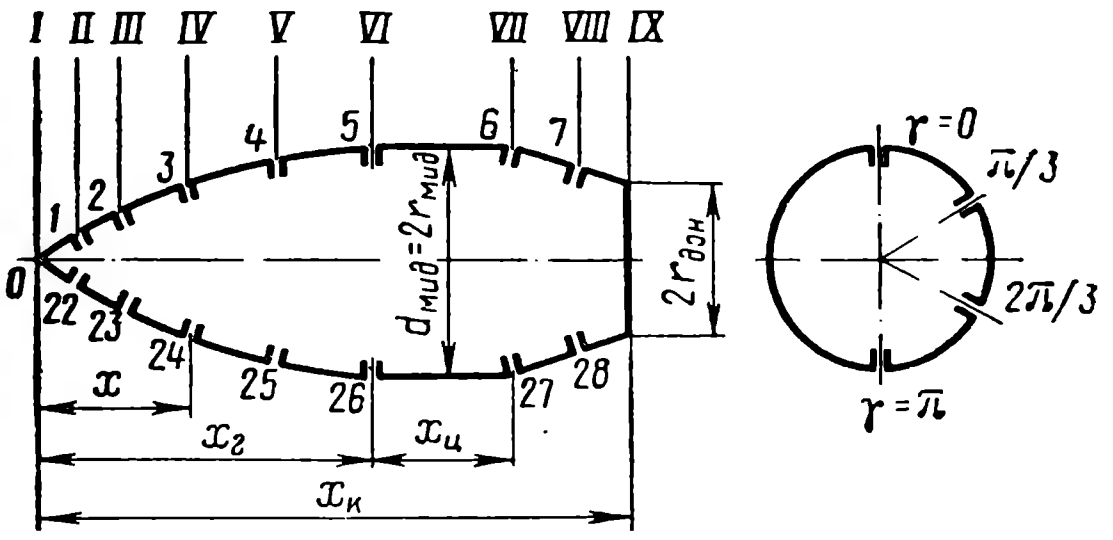


Рис. 5.1.11. Схема испытываемой модели тела вращения

Схема и общий вид измерительной установки показаны на рис. 5.1.12 и 5.1.13. Перед пуском этой установки в лаборатории были измерены атмосферное давление и температура ($p_{атм}=760$ *мм рт. ст.*, $T_{атм}=293$ К). Одновременно была определена разность показаний термометров психрометра, оказавшаяся равной 4° С, а по табл. 2.2.1 и 2.2.2 найдены соответственно относительная влажность ($x=0{,}6$) и давление насыщенных паров ($p_{н:п}=30$ *мм рт. ст.*).

После включения трубы был зафиксирован перепад уровней жидкости $\Delta h=267$ *мм* в манометре, связанном с насадком полного напора. В результате получен скоростной

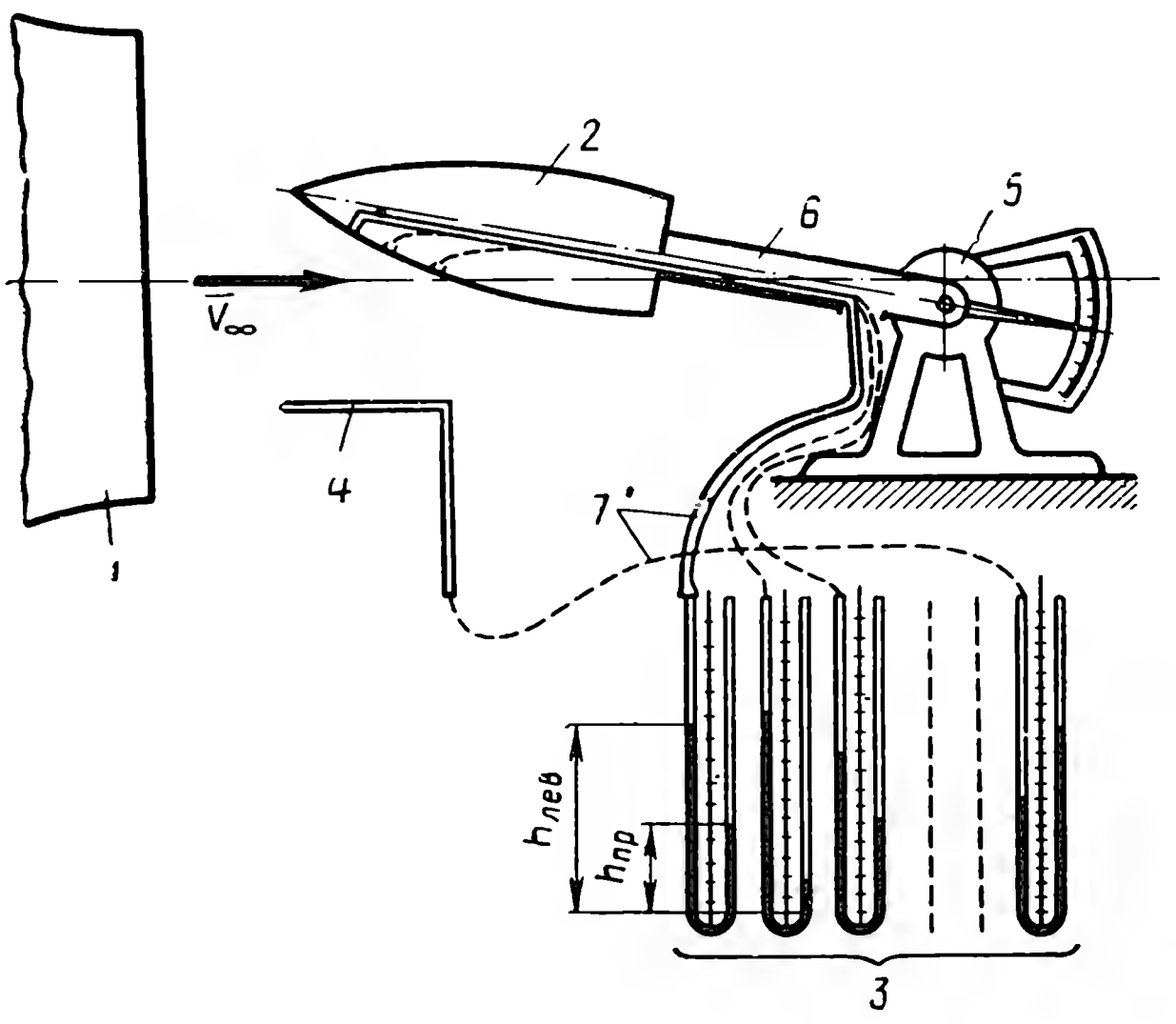


Рис. 5.1.12. Схема установки для испытания дренажной модели тела вращения:

1 — дозвуковая аэродинамическая труба; *2* — дренированная модель; *3* — жидкостные манометры; *4* — трубка полного напора; *5* — механизм углов атаки; *6* — державка модели; *7* — соединительные трубки

напор $q_\infty = \rho_\infty V_\infty^2/2 = \Delta h \gamma \xi_т k_т = 267 \cdot 0{,}82 \cdot 1{,}01 \cdot 1 = 220$ *кГ/м²*. По этой величине скоростного напора при помощи (3.2.2) определялась скорость

$$V_\infty = \sqrt{42{,}2 \frac{293}{760} \cdot \frac{1}{1 - 0{,}378 \cdot 0{,}6 \dfrac{18}{0{,}6 \cdot 760}} 220 \cdot 1{,}01 \cdot 1} = 59 \text{ м/сек.}$$

Результаты измерения уровней $h_{n\,лев}$ и $h_{n\,пр}$ в отчетных коленах манометров, расчета разностей этих уровней $\Delta h_n = h_{n\,лев} - h_{n\,пр}$, избыточных давлений $\Delta p_n = p_n - p_\infty = \Delta h_n \gamma k_т = \Delta h_n \cdot 0{,}82 \cdot 1 = 0{,}82 \Delta h_n$, а также коэффициентов давлений в дренажных точках при осесимметричном обтекании модели (угол атаки $\alpha = 0$) приведены в **табл. Б.**

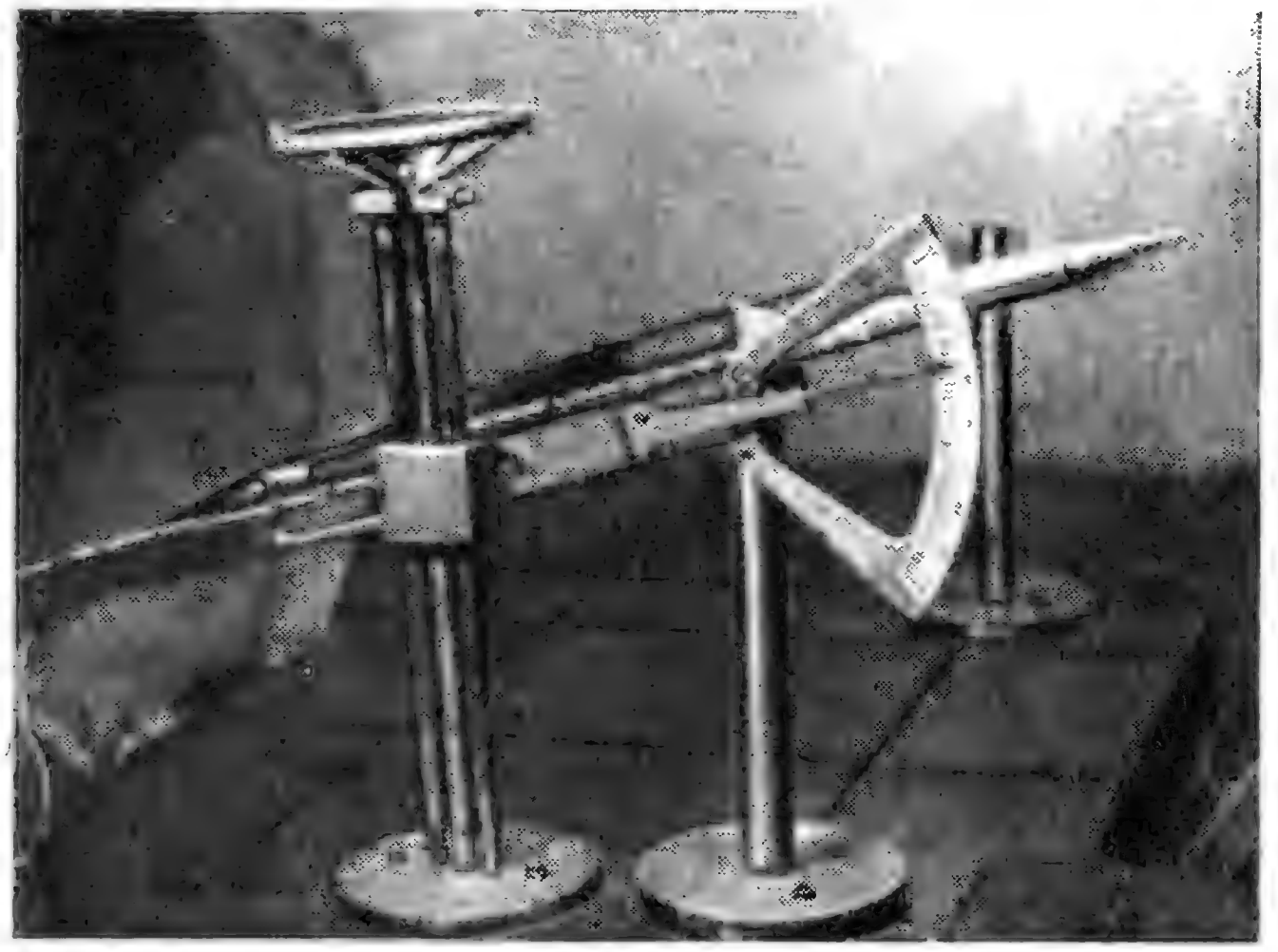


Рис. 5.1.13. Установка модели летательного аппарата в открытой рабочей части аэродинамической трубы

Таблица Б

Номера отверстий и сечений	(*I*)	*1* (*II*)	*2* (*III*)	*3* (*IV*)	*4* (*V*)	*5* (*VI*)	*6* (*VII*)	*7* (*VIII*)	(*IX*)
$h_{n\,лев}$, *мм*	—	47	—4	—7	—7	—7	0	2	—
$h_{n\,пр}$, *мм*	—	—46	4	6	7	7	0	—1	—
Δh_n, *мм*	—	93	—8	—13	—14	—14	0	3	—
Δp_n, *кГ/м²*	—	77	—6,6	—10	—11	—11	0	2,2	—
q_∞, *кГ/м²*	220								
$\bar{p}_n$	1	0,35	—0,03	—0,04	—0,05	—0,05	0	0,01	—
$\bar{r}^2$	0	0,097	0,360	0,640	0,913	1,000	1,000	0,850	0,572

Принимая во внимание симметричный характер обтекания тела вращения, давления, приведенные в табл. Б, измерялись только в дренажных отверстиях, расположенных на верхней образующей (см. рис. 5.1.11). В сечениях *I* (острие) и *IX* (донный срез)

давления не измерялись, а определялись приближенно путем графической экстраполяции. В табл. Б приведены для соответствующих сечений значения $\bar{r}^2=(r/r_{\text{дон}})^2$, которые будут использованы в дальнейших расчетах.

Измерения давлений осуществлялись также при углах атаки $\alpha=4, 6, 8°$. В частности, для $\alpha=4°$ и $q_\infty=220$ $кГ/м^2$ результаты этих измерений приведены в табл. В.

Таблица В

Номера сечений	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
			$\bar{\gamma}=0$				
Номера отверстий	1	2	3	4	5	6	7
$h_{п\text{лев}}$, мм	30,6	—5	—9,5	—12	—12,2	—4,1	—1,7
$h_{п\text{пр}}$, мм	—31	4,8	10	12,2	12	4	1
$\Delta h_п$, мм	61,6	—9,8	—19,5	—24,2	—24,2	—8,1	—2,7
$\Delta p_п$, $кГ/м^2$	50,6	—8	—16	—19,8	—19,8	—6,6	—2,2
$\bar{p}_п$	0,23	—0,04	—0,08	—0,09	—0,09	—0,03	—0,01
			$\bar{\gamma}=1,3$				
Номера отверстий	8	9	10	11	12	13	14
$h_{п\text{лев}}$, мм	37	—1,7	—9	—11	—11	—5,4	0
$h_{п\text{пр}}$, мм	—38	1	10	11	11	3	0
$\Delta h_п$, мм	75	—2,7	—19	—22	—22	—5,4	0
$\Delta p_п$, $кГ/м^2$	61,6	—2,2	—15,4	—17,6	—17,6	—4,4	0
$\bar{p}_п$	0,28	—0,01	—0,07	—0,08	—0,08	—0,02	0
			$\bar{\gamma}=2/3$				
Номера отверстий	15	16	17	18	19	20	21
$h_{п\text{лев}}$, мм	42	1,7	—2,4	—3	—3	—1,7	0
$h_{п\text{пр}}$, мм	—43	—1	3	2,4	2,4	1	0
$\Delta h_п$, мм	85	2,7	—5,4	—5,4	—5,4	—2,7	0
$\Delta p_п$, $кГ/м^2$	70	2,2	—4,4	—4,4	—4,4	—2,2	0
$\bar{p}_п$	0,318	0,01	—0,02	—0,02	—0,02	—0,01	0
			$\bar{\gamma}=1$				
Номера отверстий	22	23	24	25	26	27	28
$h_{п\text{лев}}$, мм	47	—5,4	—1,7	—1,4	—1	0	1,7
$h_{п\text{пр}}$, мм	—48	5	1	1	1,4	0	—1
$\Delta h_п$, мм	95	10,8	—2,7	—2,4	—2,4	0	2,7
$\Delta p_п$, $кГ/м^2$	78	8,8	—2,2	—2	—2	0	2,2
$\bar{p}_п$	0,35	0,04	—0,1	—0,091	—0,091	0	0,1

Рассмотрим результаты вычисления по полученным экспериментальным данным аэродинамических коэффициентов. При осесимметричном обтекании ($\alpha=0$) коэффициент осевой силы от давления

$$c_{Rp}=c_{xp}=\int_0^{\bar{r}^2_{\text{дон}}}\bar{p}\,d\bar{r}^2,$$

где функция $\bar{p}=\bar{p}(\bar{r}^2)$ определяется по табл. Б. График этой функции построен на рис. 5.1.14, где масштабы значений $\bar{p}$ и $\bar{r}^2$ составляют соответственно $\mu_{\bar{p}}=10^{-2}$ и $\mu_{\bar{r}^2}=10^{-2}$ $1/мм$. Измеренная площадь под кривой $\bar{p}(\bar{r}^2)$ равна $S=150$ $мм^2$. В соответствии с этим коэффициент осевой силы

$$c_{Rp}=S\mu_{\bar{p}}\,\mu_{\bar{r}^2}=150\cdot 10^{-2}\cdot 10^{-2}=0{,}015.$$

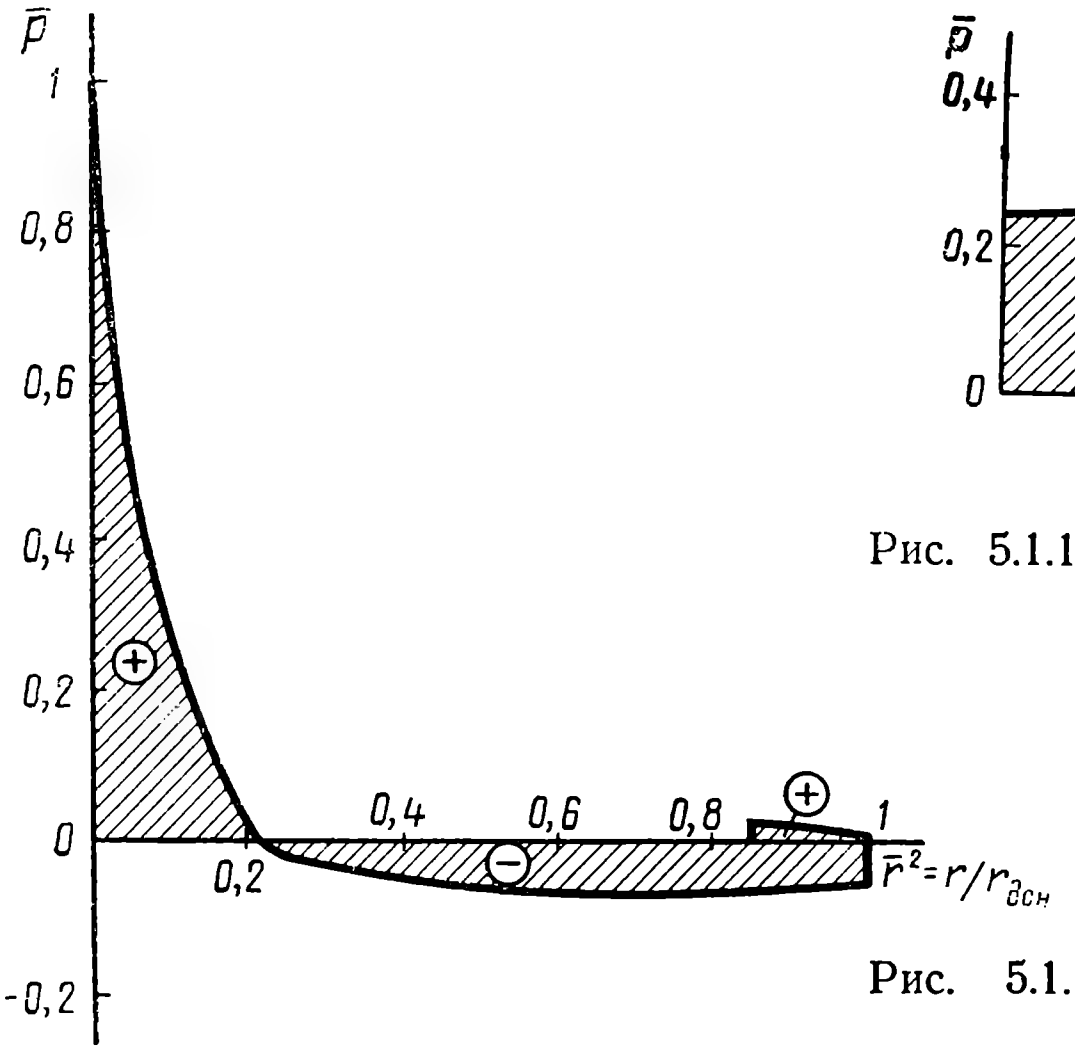


Рис. 5.1.14. Графическое определение c_{Rp} при $\alpha=0$

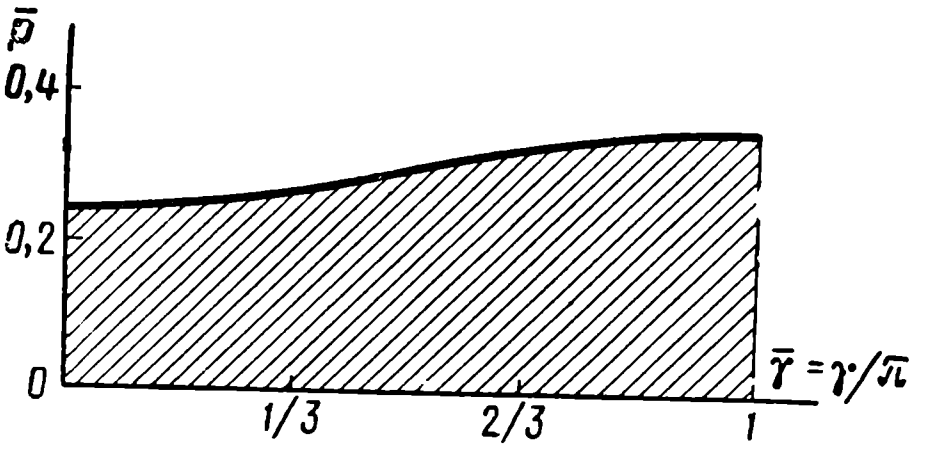


Рис. 5.1.15. Вычисление интеграла $D=\int_0^1 \bar{p}\,d\bar{\gamma}$

Используя такое же графическое интегрирование, найдем по результатам измерения давлений соответствующие аэродинамические коэффициенты при угле атаки $\alpha=4°$. По данным табл. В для сечения *II* строим график функции $\bar{p}=\bar{p}(\bar{\gamma})$ (рис. 5.1.15) с масштабами $\mu_{\bar{p}}=10^{-2}$ и $\mu_{\bar{\gamma}}=10^{-2}$ $1/мм$. Площадь под кривой $S=2960$ $мм^2$, поэтому величина D [см. (5.1.9)] будет

$$D=S\mu_{\bar{p}}\,\mu_{\bar{\gamma}}=2960\cdot 10^{-2}\cdot 10^{-2}=0{,}296.$$

Проведя аналогичные расчеты для других сечений, поместим полученные данные в табл. Г.

Таблица Г

Номера сечений	*I*	*II*	*III*	*IV*	*V*	*VI*	*VII*	*VIII*	*IX*
D	—	0,296	0,010	—0,115	—0,178	—0,130	—0,082	—0,03	—

По данным табл. Г на рис. 5.1.16 построена кривая для функции $D=D(\bar{r}^2)$ с масштабами по осям координат $\mu_D=10^{-2}$, $\mu_{\bar{r}^2}=10^{-2}$ $1/мм$.

В соответствии с (5.1.9) площадь под этой кривой $S=200$ $мм^2$ определяет коэффициент осевой силы от давления при $\alpha=4°$:

$$c_{Rp}=S\mu_D\,\mu_{\bar{r}^2}=200\cdot 10^{-2}\cdot 10^{-2}=0{,}02.$$

Для определения коэффициента нормальной силы воспользуемся данными табл. В. По этим данным в качестве иллюстрации для сечения *II* построен график функции $\bar{p}\cos(\bar{\gamma}\pi)=f(\bar{\gamma})$ (рис. 5.1.17) при условии, что масштабы значений $f(\bar{\gamma})$ и $\bar{\gamma}$ соответственно $\mu_f=10^{-2}$, $\mu_{\bar{\gamma}}=10^{-2}$ $1/мм$. Измеренные площади под кривой оказались равными $S_1=831$, $S_2=-1053$ $мм^2$, а соответствующая величина интеграла $П=\int_0^1 f(\bar{\gamma})\,d\bar{\gamma}$

$$П=(S_1+S_2)\,\mu_f\,\mu_{\bar{\gamma}}=[831+(-1053)]\,10^{-2}\cdot 10^{-2}=-222\cdot 10^{-4}.$$

Аналогично были найдены значения $П$ для других сечений (см. табл. Д).

Таблица Д

Номера сечений	*I*	*II*	*III*	*IV*	Номера сечений	*V*	*VI*	*VII*	*VIII*	*IX*
$П \cdot 10^4$	—	—222	—208	—225	$П \cdot 10^4$	—160	—125	—93	0	—
$П_1 \cdot 10^4$	0	—574	—1010	—1451	$П_1 \cdot 10^4$	—1236	—1010	—749	0	—

В табл. Д внесены также значения $П_1 = 4\lambda_к П \bar{r}$, где $\lambda_к = x_к/(2r_{мид}) = 182/90 = 2{,}02$, а $\bar{r}$ взято из табл. Б.

По данным табл. Д на рис. 5.1.18 построен график функции $П_1 = П_1(\tilde{x})$, на котором масштабы $П_1$ и $\tilde{x}$ соответственно $\mu_{П_1} = 5 \cdot 10^{-3}$ и $\mu_{\tilde{x}} = 10^{-2}$ 1/*мм*, а площади под кривой $S_1 = -1475$ *мм*^{2} и $S_2 = 115$ *мм*^{2}. В соответствии с (5.1.11) коэффициент нормальной силы

$$c_{Np} = -\left(S_1 + S_2\right) \mu_{П1} \mu_{\tilde{x}} = -(-1475 + 115)\, 5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-2} = 0{,}068.$$

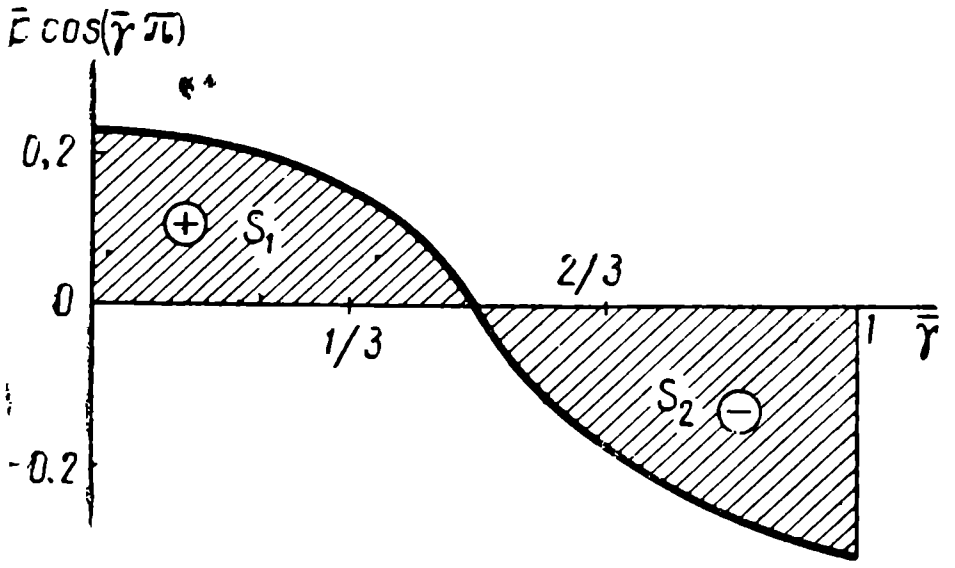


Рис. 5.1.17. Вспомогательный график для вычисления c_{Np} тела вращения

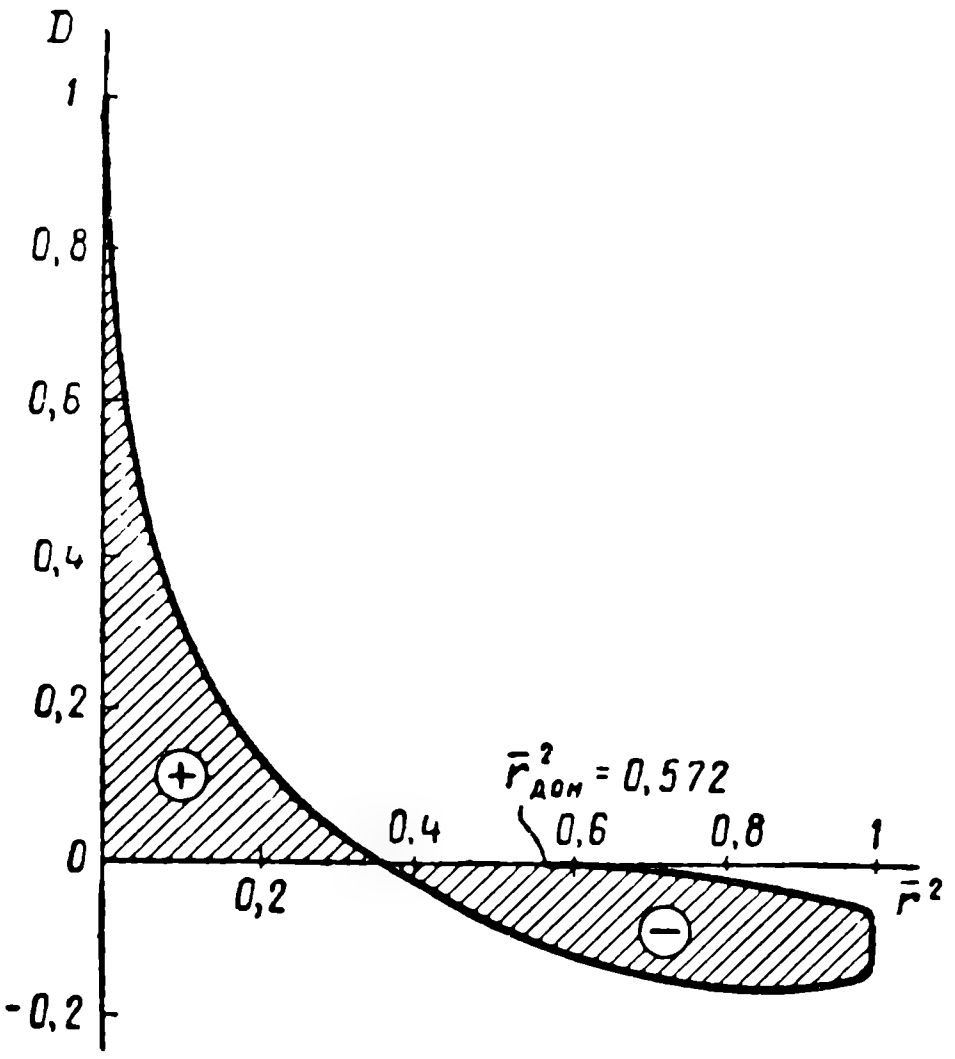


Рис. 5.1.16. График для определения c_{Rp}

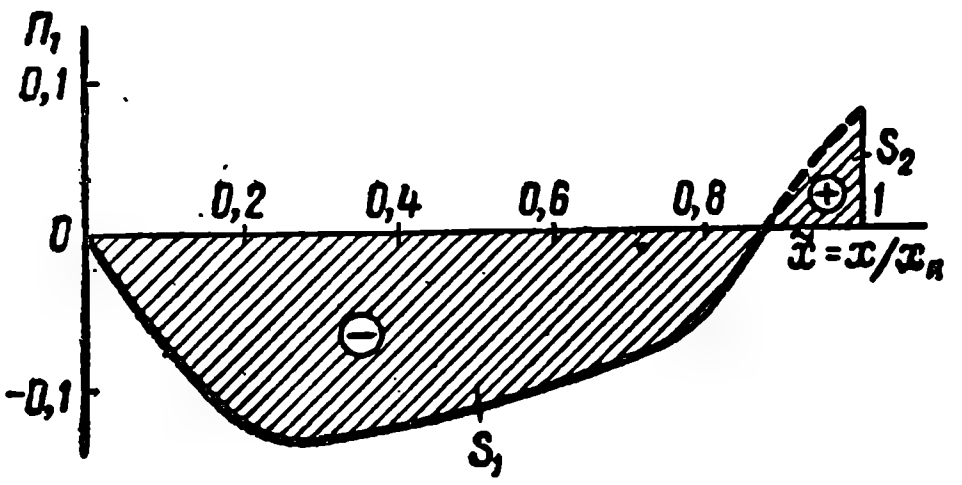


Рис. 5.1.18. График для вычисления c_{Np} тела вращения

Для вычисления коэффициента момента воспользуемся полученными выше значениями $П$ и для каждого сечения найдем

$$П_2 = 4\lambda_к \tilde{x}\bar{r} П = \tilde{x} П_1 \text{ и } П_3 = \frac{1}{3\lambda_к} П = 0{,}165 П \text{ (см. табл. Е).}$$

Таблица Е

Номера сечений	*I*	*II*	*III*	*IV*	*V*	*VI*	*VII*	*VIII*	*IX*
$П_2 \cdot 10^4$	0	—51,7	—189	—430	—496	—510	—567	0	800
$П_3 \cdot 10^4$	—	—36,6	—34,3	—37,2	—26,4	—20,6	—15,4	0	—
$\tilde{x}$	0	0,088	0,187	0,296	0,401	0,505	0,758	0,885	1
$\bar{r}^3$	0	0,0271	0,218	0,513	0,875	1	1	0,788	0,435

В табл. Е значение $П_2=800\cdot10^{-4}$ для сечения *IX* взято по графику на рис. 5.1.18. В табл. Е помещены наряду с величинами $\tilde{x}$ также значения $\bar{r}^3$, вычисленные по данным табл. Б.

Построенные графики функций $П_2=П_2(\tilde{x})$ и $П_3=П_3(\bar{r}^3)$ показаны на рис. 5.1.19 *а* и *б*. При этом на рис. 5.1.19, *а* масштабы $П_2$ и $\tilde{x}$ соответственно $\mu_{П_2}=2{,}5\cdot10^{-3}$ и $\mu_{\tilde{x}}=10^{-2}$ 1/*мм*, площади под кривой $S_1=-1250$ и $S_2=150$ *мм*², а на рис. 5.1.19, *б* $\mu_{П_3}=2{,}5\cdot10^{-4}$ и $\mu_{\bar{r}^3}=10^{-2}$ 1/*мм*, $S_1'=-1130$ и $S_2'=-70$ *мм*².

В соответствии с этими данными и согласно формуле (5.1.12) коэффициент момента

$$m_{zp}=(S_1+S_2)\,\mu_{П_2}\mu_{\tilde{x}}+\left(S_1'+S_2'\right)\mu_{П_3}\,\mu_{\bar{r}^3}=(-1250+150)\,2{,}5\cdot10^{-3}\cdot10^{-2}+$$
$$+(-1130-70)\,2{,}5\cdot10^{-4}\cdot10^{-2}=-0{,}03.$$

Аналогично был осуществлен расчет аэродинамических коэффициентов в связанных координатах для других углов атаки (см. табл. Ж).

Таблица Ж

α, *град*	0	4	6	8
c_{Rp}	0,015	0,020	0,031	0,039
c_{Np}	0	0,068	0,093	0,125
$-m_{zp}$	0	0,030	0,047	0,061

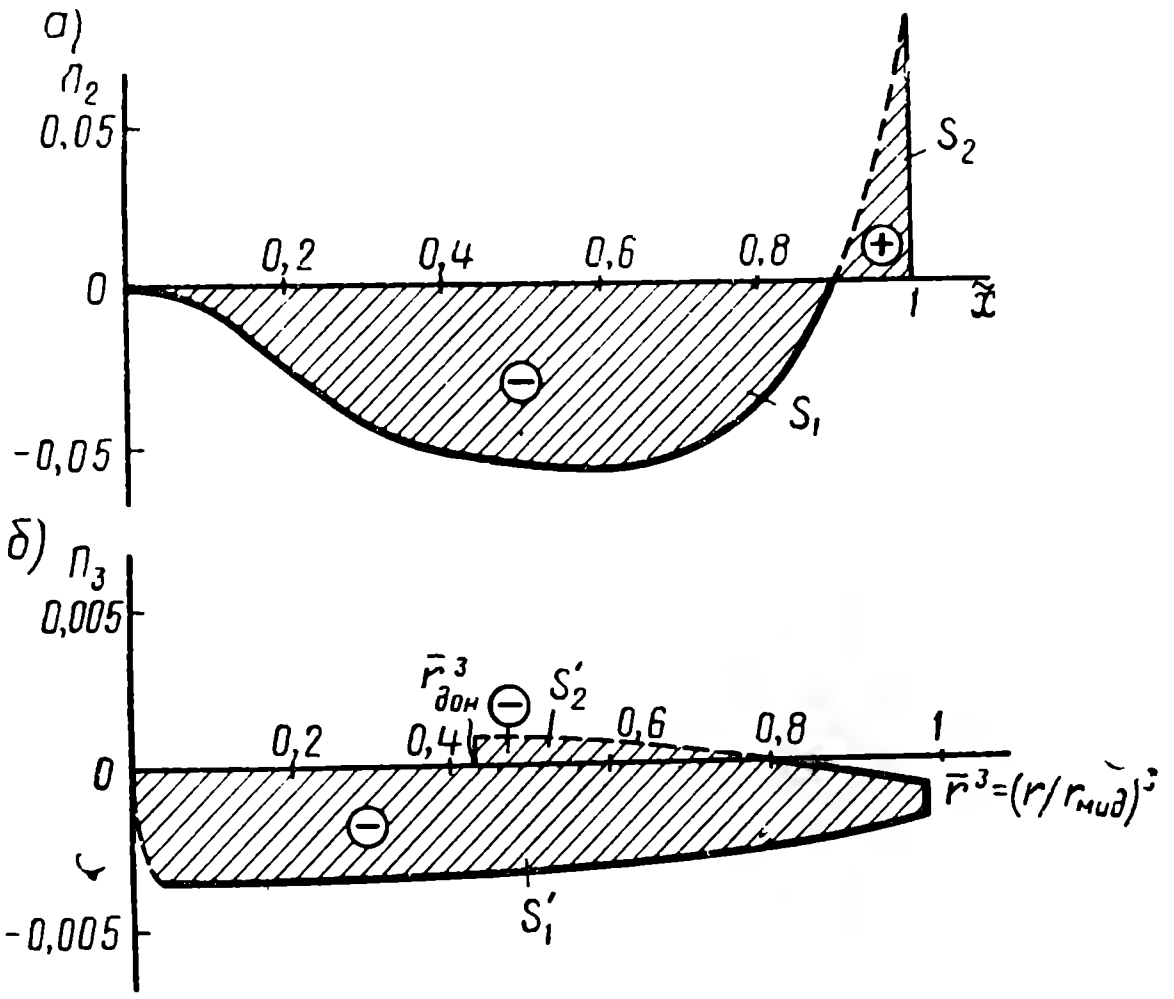


Рис. 5.1.19. Графики для вычисления слагаемых в формуле для коэффициента момента

Суммарные коэффициенты нормальной силы и момента принимаются такими, как соответствующие их значения, зависящие от давления, т. е. $c_N=c_{Np}$, $m_z=m_{zp}$. Для определения полной величины коэффициента осевой силы к значению c_{Rp} надо добавить значения коэффициентов сил трения c_{Rf} и донной силы $c_{R\,дон}$.

С целью выбора расчетной формулы для c_{Rf} найдем число Рейнольдса $\mathbf{Re}_\infty=V_\infty\rho_\infty x_к/\mu_\infty$, где величина $V_\infty\rho_\infty=2q_\infty/V_\infty=7{,}46$ *кГ·сек/м*³, а коэффициент динамической вязкости $\mu_\infty=\mu_н(T_\infty/T_н)^{0{,}76}$. Так как $\mu_н=1{,}82\cdot10^{-6}$ *кГ·сек/м*² при $T_н=288$ К, а в нашем случае $T_\infty=293$ К, то

$$\mu_\infty=1{,}82\cdot10^{-6}\,(293/288)^{0{,}76}=1{,}84\cdot10^{-6}\ кГ\cdot сек/м^2.$$

Следовательно,

$$\mathbf{Re}_\infty=\rho_\infty V_\infty x_к/\mu_\infty=7{,}46\cdot0{,}182/(1{,}84\cdot10^{-6})=7{,}38\cdot10^5.$$

Это значение меньше критического числа $\mathbf{Re}_{кр}=10^6$, поэтому коэффициент трения

$$c_{Rf}=\frac{1{,}32}{\sqrt{\mathbf{Re}_\infty}}\cdot\frac{S_{бок}}{S_{мид}}=\frac{1{,}32}{\sqrt{7{,}38\cdot10^5}}\,6{,}62=0{,}0102.$$

По этому значению c_{Rf} можно найти коэффициент донной силы:

$$c_{R\,дон}=\frac{0{,}029}{\sqrt{c_{Rf}}}\cdot\frac{d_{дон}}{d_{мид}}=\frac{0{,}029}{\sqrt{0{,}0102}}\left(\frac{68}{90}\right)^3=0{,}124.$$

Таким образом, суммарные коэффициенты осевой силы:

$$c_R=c_{Rp}+c_{Rf}+c_{R\,дон}=0{,}015+0{,}0102+0{,}124=0{,}149\ (\text{при}\ \alpha=0°);$$
$$c_R=0{,}02+0{,}0102+0{,}124=0{,}154\ (\text{при}\ \alpha=4°).$$

Коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы (в поточных координатах) вычислялись соответственно по формулам (при $\alpha=4°$):

$$c_x = c_R \cos\alpha + c_N \sin\alpha = 0{,}154 \cdot 0{,}998 + 0{,}068 \cdot 0{,}07 = 0{,}159;$$

$$c_y = c_N \cos\alpha - c_R \sin\alpha = 0{,}068 \cdot 0{,}998 - 0{,}154 \cdot 0{,}07 = 0{,}057.$$

Центр давления определялся по формуле (5.1.7), согласно которой для $\alpha=4°$

$$c_{\text{ц.д}} = -m_z/c_N = 0{,}03/0{,}068 = 0{,}44.$$

Рассмотрим результаты измерения давления в сверхзвуковой трубе. Экспериментальное исследование давления проводилось в сверхзвуковой трубе с закрытой рабочей частью и сопловыми вкладышами, рассчитанными на номинальное число $M_\infty=2{,}68$. Это исследование осуществлялось на модели тела вращения с параболической образующей при $\alpha=0$ и 5° в пяти дренажных отверстиях, расположенных в сечении, удаленном от острия на расстояние $x_c=0{,}5 \cdot x_{\text{мид}}$ ($\bar{x}_c=0{,}5$). Относительный радиус сечения $\bar{r}_c = \bar{x}(2-\bar{x}) = 0{,}5(2-0{,}5) = 0{,}75$, а меридиональный угол, соответствующий углу между двумя соседними отверстиями, принимался равным $\gamma=45°$ ($\bar{\gamma}=\gamma/\pi=0{,}25$). Форма модели и расположение дренажных отверстий показаны на рис. 5.1.20. Размеры модели: $x_{\text{мид}}=200$ *мм*; $r_{\text{мид}}=40$ *мм*; $\beta_0=24°48'$; $x_c=100$ *мм*.

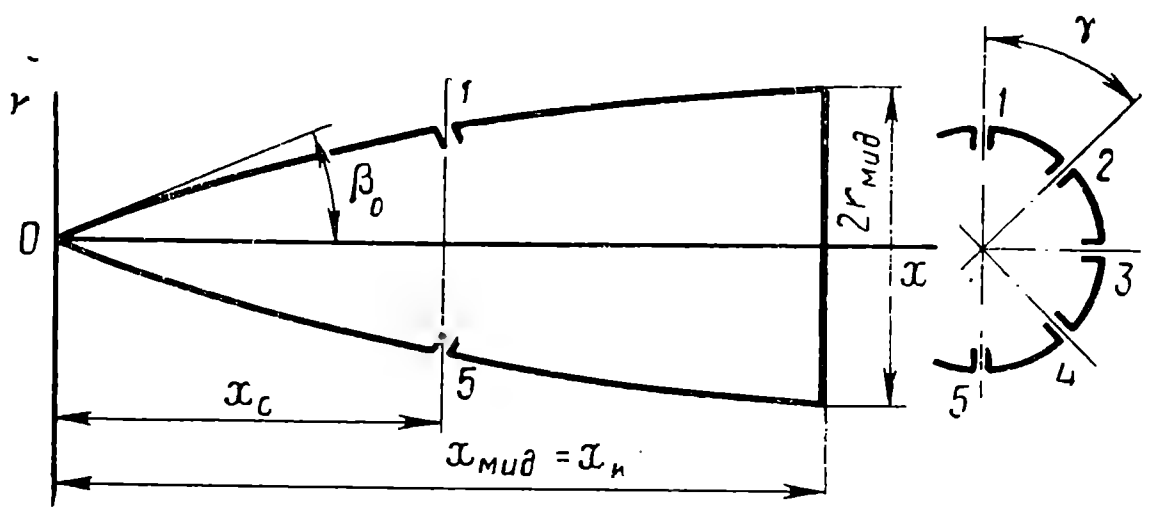


Рис. 5.1.20. Дренированная модель тела вращения с параболической образующей:

$\bar{r}=\bar{x}(2-\bar{x})$; $\bar{r}=r/r_{\text{мид}}$; $\bar{x}=x/x_{\text{мид}}$

Давление на модели, а также в рабочей части трубы измерялось групповым регистрирующим манометром ГРМ, коэффициент шкалы которого $K=0{,}05$.

Общая схема экспериментальной установки показана на рис. 5.1.21.

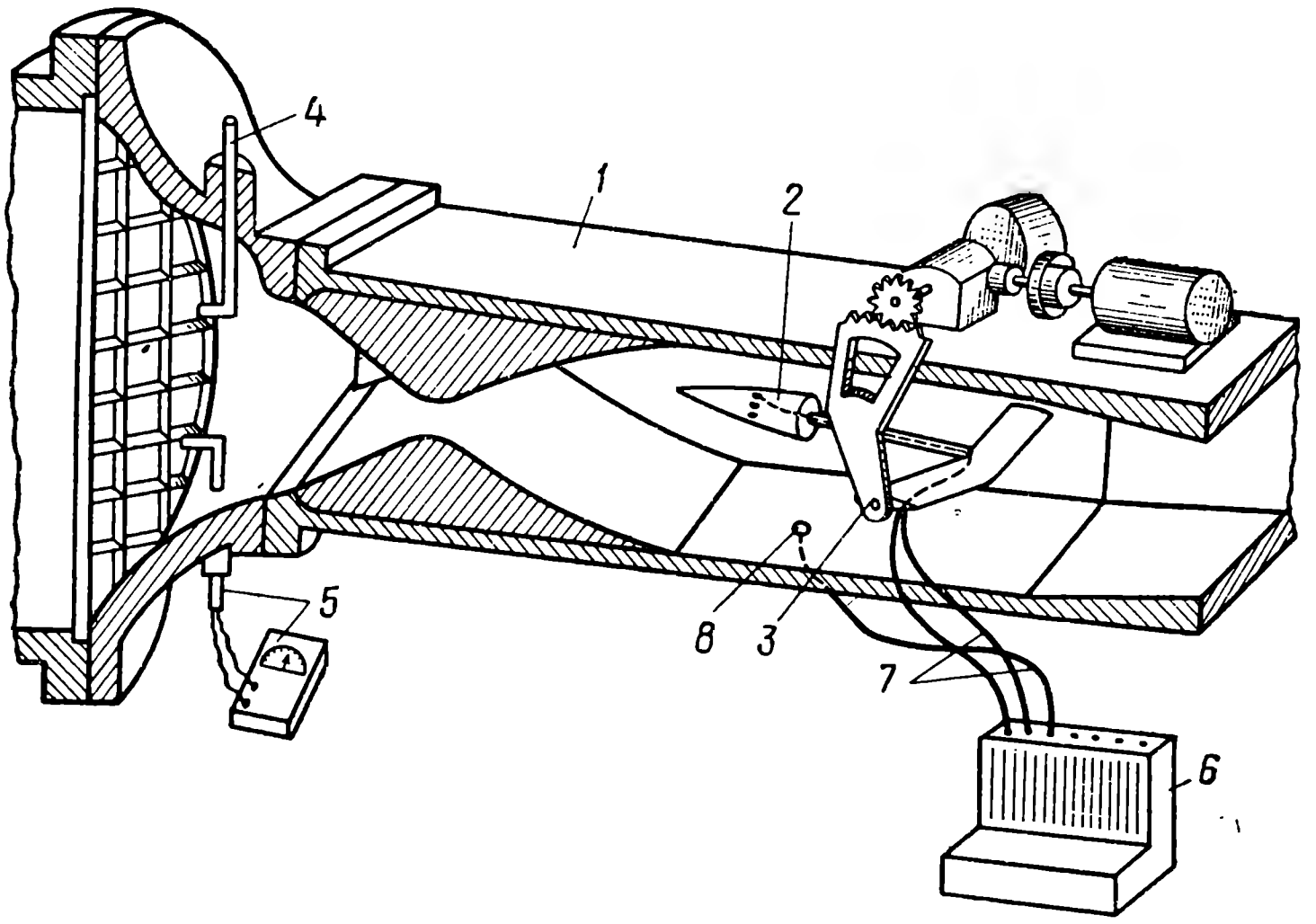


Рис. 5.1.21. Схема установки для иследования дренированной модели тела вращения:

1 — сверхзвуковая аэродинамическая труба; *2* — дренированная модель; *3* — механизм углов атаки; *4* — трубка полного напора; *5* — термопара с гальванометром; *6* — ГРМ; *7* — соединительные трубки; *8* — приемник давления

До начала продувки было измерено барометрическое давление $p_{\text{атм}}=755$ *мм рт. ст.* (1,025 *кГ/см²*). Одновременно на бумажной ленте группового регистрирующего манометра фиксировались начальные показания $N_0=101{,}6$ (для приемника статического дав-

ления) и N_{0n} (для дренажных отверстий), а после включения трубы записывались соответствующие показания манометра ($N=84{,}2$), а также N_n (последовательно для $\alpha=0$ и $\alpha=5°$). Так как для приемника статического давления разность $\Delta N=N-N_0=$ $=84{,}2-101{,}6=-17{,}4$, а $K=0{,}05$, то статическое давление в рабочей части $p_\infty=p_{атм}+$ $+K\Delta N=1{,}025-0{,}05\cdot 17{,}4=0{,}155$ *кГ/см²*. Давление в форкамере, измеренное пружинным манометром, было равно $p_0=2{,}48$ *кГ/см²*. По отношению $p_\infty/p_0=0{,}155/3{,}48=0{,}0445$ из таблиц газодинамических функций [17] найдено число $\mathbf{M}_\infty=2{,}68$. Следовательно, скоростной напор трубы

$$q_\infty = kp_\infty \mathbf{M}_\infty^2/2 = 1{,}4\cdot 0{,}155\cdot 2{,}68^2/2 = 0{,}78 \text{ кГ/см}^2.$$

Температура T_0, измеренная в форкамере, оказалась равной 293 К. Этой величине соответствует найденная по $\mathbf{M}_\infty=2{,}68$ при помощи таблиц [17] температура $T_\infty=$ $=120$ К.

При нулевом угле атаки ($\alpha=0$) измерение давления проводилось только в дренажном отверстии *1* (см. рис. 5.1.20), для которого начальное показание $N_{0n}=115{,}8$, а конечное (при включенной трубе) $N_n=100$. Величина этого давления $p=p_{атм}+K\Delta N_n=$ $=1{,}025-0{,}05\cdot 15{,}8=0{,}235$, а разность $p-p_\infty=0{,}235-0{,}155=0{,}080$. Соответствующий коэффициент давления $\bar{p}=(p-p_\infty)/q_\infty=(0{,}235-0{,}155)/0{,}78=0{,}102$.

Для угла атаки $\alpha=5°$ начальные и конечные показания ГРМ, а также результаты вычисления коэффициентов давления в дренажных отверстиях приведены в табл. 3.

Таблица 3

Номера отверстий	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
N_0	111,9	117,7	119,4	114,4	117,2
N	95	101	103	99	102
ΔN	—16,9	—16,7	—16,4	—15,4	—15,2
p, *кГ/см²*	0,178	0,190	0,205	0,245	0,264
$p-p_\infty$, *кГ/см²*	0,023	0,0351	0,0506	0,090	0,109
$\bar{p}=(p-p_\infty)/q_\infty$	0,03	0,045	0,065	0,115	0,140

Произведем приближенный расчет распределения давления по теоретическим зависимостям, и полученные данные сравним с экспериментальными результатами.

При $\alpha=0$ величину коэффициента давления в точке *1* определяем по методу «местных конусов» при помощи формулы

$$\bar{p}_д = \left(0{,}0016 + 0{,}002\mathbf{M}_\infty^{-2}\right)\beta_1^{1{,}7}.$$

В этой формуле коэффициент $\bar{p}_д$ определяется по числу $\mathbf{M}_\infty=2{,}68$ и углу конуса

$$\beta_1 = \operatorname{arctg}(dr/dx) = \operatorname{arctg}\left[(1/\lambda_{мид})(1-\bar{x}_c)\right] = \operatorname{arctg}\left[(1/2{,}5)(1-0{,}5)\right] = 11°\,18'.$$

Таким образом,

$$\bar{p}_д = (0{,}0016 + 0{,}002\cdot 2{,}68^{-2})(11°\,18')^{1{,}7} = 0{,}117.$$

По углу $\beta_1=11°18'$ и числу $\mathbf{M}_\infty=2{,}68$ определим из [22] величину $\nu=0{,}99$, а по углу $\beta_0=\operatorname{arctg}(1/2{,}5)=21°50'$ и числу $\mathbf{M}_\infty=2{,}68$ находим $\nu_0=0{,}92$. В соответствии с этим $\bar{\nu}=\nu_0/\nu=0{,}92/0{,}99=0{,}93$. Таким образом, согласно (5.1.27)

$$\bar{p} = 0{,}117\cdot 0{,}93 + 2(0{,}93-1)/(1{,}4\cdot 2{,}68^2) = 0{,}108\cdot$$

Эта величина, как видим, незначительно отличается от экспериментального значения.

Для расчета коэффициентов давления в дренажных точках при $\alpha=5°$ воспользуемся тем же методом «местных конусов», основанным на гипотезе одинаковых скоростей, и соответствующей формулой (5.1.26). По этой формуле местный угол конуса, например в точке 2 ($\gamma=\pi/4$),

$$\frac{\beta_к}{57{,}3} = \frac{\beta_1}{57{,}3} - \frac{\alpha}{57{,}3}\cos\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{57{,}3}\right)^2 \operatorname{ctg}\beta_1 \sin^2\frac{\pi}{4} = \frac{11{,}3°}{57{,}3} -$$

$$- \frac{5°}{57{,}3}0{,}707 + \frac{1}{2}\left(\frac{5°}{57{,}3}\right)^2 5{,}005\cdot 0{,}707^2 = 0{,}149 \text{ рад } (8°\,34').$$

Аналогично вычисляются местные углы конуса $\beta_к$ для остальных дренажных точек, по которым из (5.1.27) определяются соответствующие коэффициенты давления $\bar{p}_д$ (см. табл. И).

По значениям углов α, γ и β_0 определяются соответствующие углы $\beta_{к0}$ «местных конусов» у острия. Например, для $\alpha=5°$, $\gamma=\pi/4$ и $\beta_0=21{,}83°$

$$\frac{\beta_{к0}}{57{,}3}=\frac{21{,}83°}{57{,}3}-\frac{5°}{57{,}3}\,0{,}707+\frac{1}{2}\left(\frac{5°}{57{,}3}\right)^2 2{,}496\cdot 0{,}707^2=0{,}325\ \textit{рад}\ (18°\,38').$$

Таблица И

Номера отверстий	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
γ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$(3/4)\pi$	π
$\beta_к$	5°44′	8°34′	12°24′	15°37′	16°18′
$p_д$	0,037	0,074	0,138	0,204	0,218

Аналогично находятся остальные углы $\beta_{к0}$. По найденным значениям $\beta_к$ и $\beta_{к0}$, а также числу $M_\infty=2{,}68$ определяем из [22] соответственно ν и ν_0 и вычисляем коэффициенты давления (см. табл. К).

Таблица К

Номера отверстий	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
$\beta_{к0}$	16°50′	18°38′	22°24′	25°42′	26°50′
$\nu=p_0''/p_0$	0,997	0,995	0,986	0,97	0,965
$\nu_0=p_0'/p_0$	0,96	0,95	0,915	0,88	0,865
$\bar{\nu}=\nu_0/\nu$	0,961	0,955	0,927	0,91	0,896
$\bar{p}$	0,028	0,062	0,113	0,168	0,174

Сравнивая полученные расчетные значения коэффициента давления с соответствующими экспериментальными данными, можно видеть известное различие между ними, обусловленное приближенным характером расчетов и также в какой-то мере погрешностями эксперимента. Это различие сравнительно невелико для дренажных точек, расположенных на верхней части поверхности, и возрастает для точек, расположенных на нижней поверхности.

Работа 5.1.2

Исследование влияния инжекции газа на обтекание затупленного тела вращения

Цель работы — исследовать аэродинамический спектр при сверхзвуковом обтекании тела вращения со сферическим затуплением в случае вдува (инжекции) газа через отверстие в точке полного торможения. Найти также путем измерений распределение давления по сферической поверхности и сравнить это распределение с тем, которое имеет место без инжекции. Определить изменение коэффициента волнового сопротивления за счет влияния инжекции.

Общие сведения

Влияние инжекции на течение газа около затупленных тел. Летательные аппараты с затупленными головными частями нашли широкое применение в случае очень больших сверхзвуковых скоростей их движения, когда необходимо обеспечить условия, при которых такие аппараты успешно противостоят действию высоких температур обтекаю-

щего газа. Вместе с тем при небольших скоростях в силу различных конструктивных требований летательные аппараты могут иметь затупленную головную часть.

Некоторые возможные формы затуплений представлены на рис. 5.1.22. Сферический касательный носок *2* и плоский торец *1*, показанные на этом рисунке, являются двумя наиболее характерными формами затуплений, которые можно рассматривать как границы своеобразного интервала, содержащего другие возможные формы. Этим двум формам затуплений соответствуют кривые волнового сопротивления, изображенные на рис. 5.1.23. Из рисунка видно, что за счет изменения формы носка $c_{xв}$ возрастает в среднем почти в два раза. Такая разница в величине сопротивления объясняется изменением характера обтекания затупления газом.

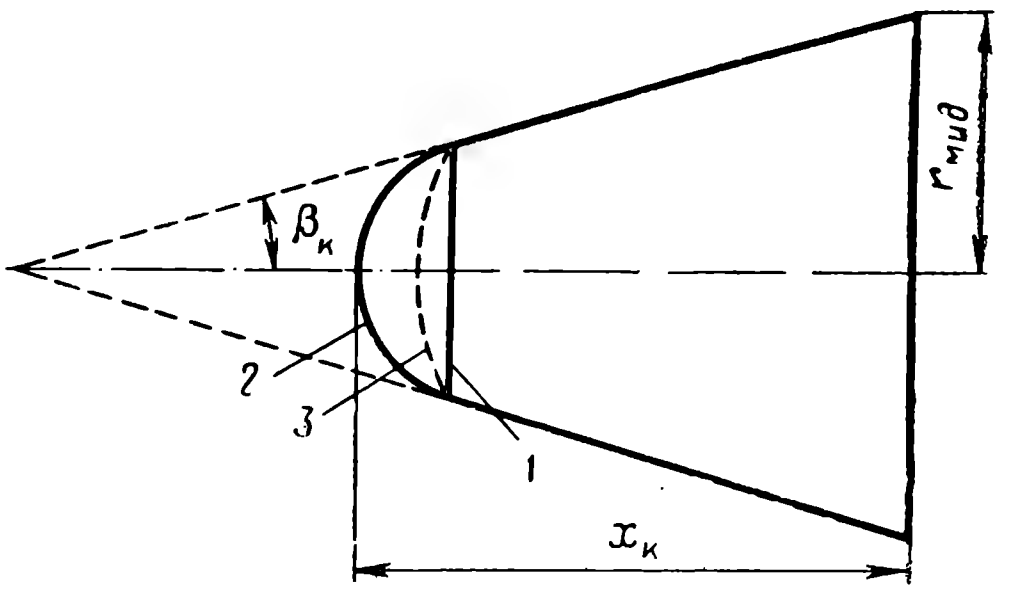


Рис. 5.1.22. Формы затуплений конической головной части:

1 — в виде плоского торца; *2* — сферическое касательное; *3* — сферическое секущее

На рис. 5.1.24 приведены две фотографии, полученные в сверхзвуковой трубе. Тела вращения одинаковой формы имеют в одном случае очень малое затупление (рис. 5.1.24, *а*), а в другом — затупление в виде плоского торца (рис. 5.1.24, *б*). Изменение вида затупления привело к резкому изменению характера расположения, интенсивности и количества скачков. Это в свою очередь обусловило изменение распределения давления газа не только в окрестности затупления, но и на большей части тела (рис. 5.1.25).

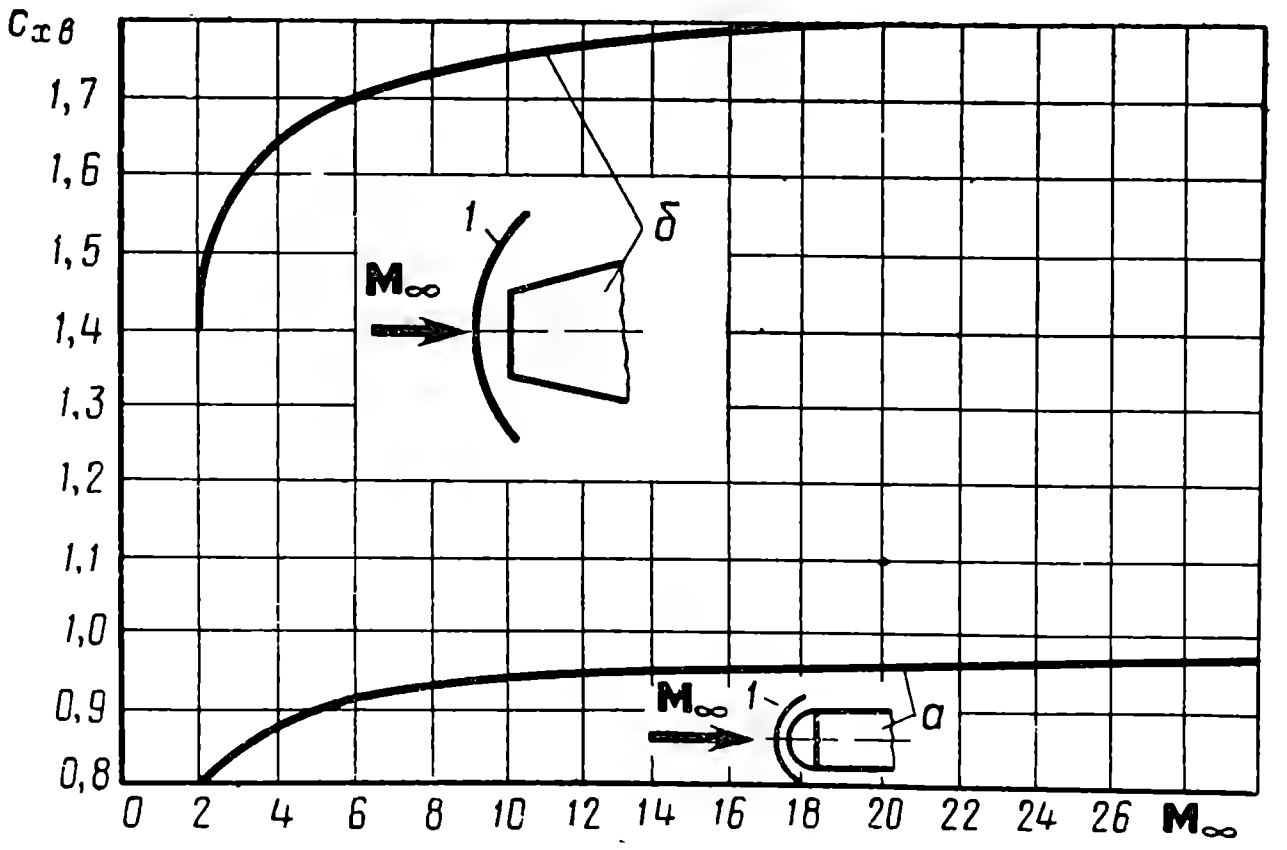


Рис. 5.1.23. Кривые изменения волнового сопротивления двух тел вращения, имеющих сферическое (*а*) и плоское (*б*) затупления:

1 — скачки уплотнения

Исследования показали, что характер обтекания тела, распределение давления, скорости, температуры по поверхности, величина аэродинамических коэффициентов изменяются также и при осуществлении вдува газа через переднюю точку в направлении против потока, обте-

кающего тело. Картина такого течения газа около тела вращения в виде цилиндра со сферическим затуплением изображена на рис. 5.1.26. Вдуваемая струя газа A приобретает сверхзвуковую скорость после того, как покинет канал, по которому она подводится к передней критической точке тела. При установившемся течении внешний поток и струя затормаживаются на оси в точке F. Здесь давление равно величине p_0, т. е. давлению торможения за прямым скачком уплотнения. Газ вдуваемой струи растекается по поверхности сферического затупления в области, ограниченной линией тока B, исходящей из точки F, образуя при этом застойную зону с возвратным течением C. В области D (на рисунке она заштрихована) газ движется по направлению к поверхности тела вращения. При этом в точках E на этой поверхности создаются условия, способствующие возникновению косого скачка G, который пересекается с головной ударной волной H.

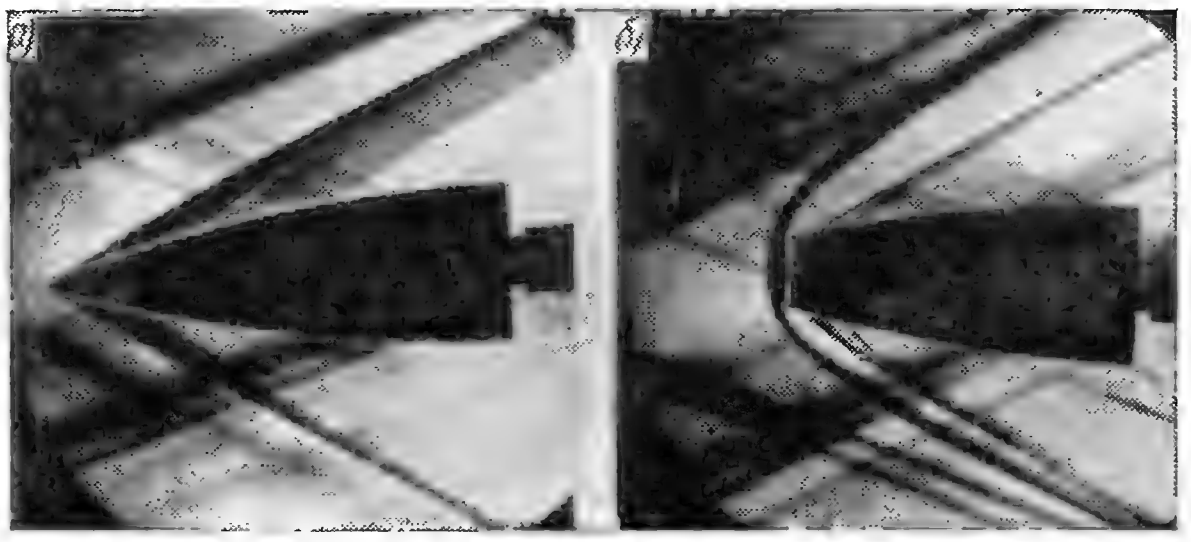


Рис. 5.1.24. Характер обтекания сверхзвуковым потоком ($\mathbf{M}_\infty = 2{,}5$) тел вращения с очень малым затуплением носка ($а$) и плоским затуплением ($б$)

Исследования показали, что образование застойной зоны снижает давление на затупленной поверхности по сравнению с течением без вдува, в результате чего волновое сопротивление тела уменьшается.

Коэффициент волнового сопротивления. Для расчета коэффициента волнового сопротивления затупленного тела воспользуемся выражением (5.1.4), написав его в виде

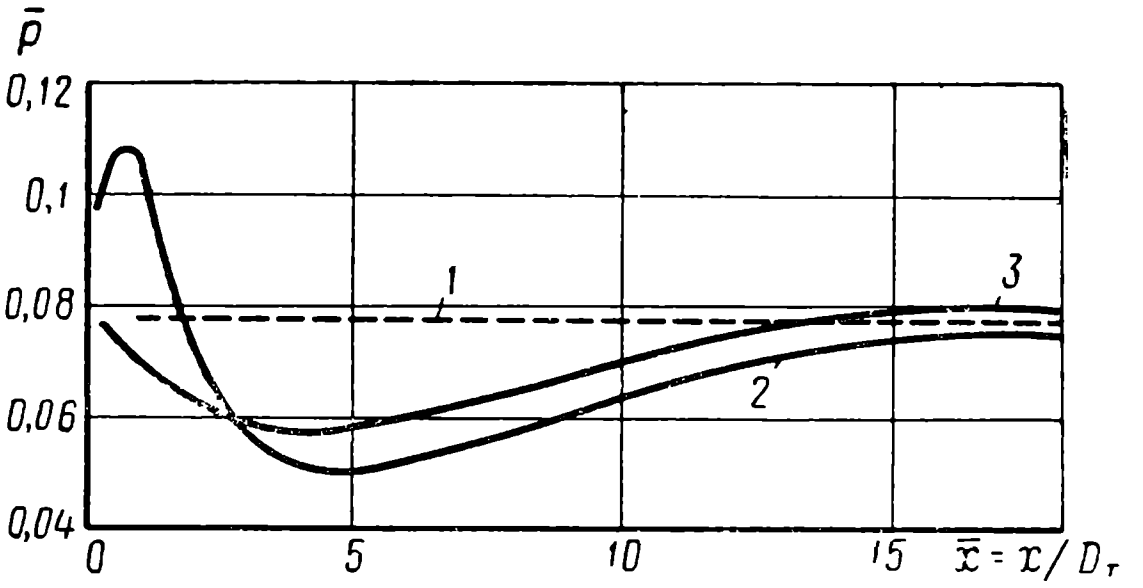


Рис. 5.1.25. Распределение давления при $\mathbf{M}_\infty = 6$ по конусам:

острому (*1*), со сферическим носком (*3*) и плоским затуплением (*2*)

$$c_{x\text{в}} = c_{Rp} = \int_0^1 \bar{p}\, d\,\bar{r}^2, \tag{5.1.29}$$

где $\bar{r} = r/R_т$ (рис. 5.1.27). Наличие инжекции существа расчета не изменяет, так как надо знать лишь распределение давления по затупленной поверхности.

Коэффициент $c_{x\text{в}}$ вычисляется при помощи графического интегрирования, как показано на рис. 5.1.27, по формуле

$$c_{x\text{в}} = S\mu_s, \tag{5.1.30}$$

где $\mu_s = \mu_{\bar{p}}\,\mu_{\bar{r}^2}$ — масштаб площади.

В выражении (5.1.30) для нахождения $c_{x\text{в}}$ следует в соответствии с рис. 5.1.27 брать площадь S_1 (заштрихована вертикально), если вычисляется коэффициент волнового сопротивления без вдува газа через критическую точку затупления, и S_2, если определяется этот коэффи-

циент с учетом вдува. Масштабы $\mu_{\bar{p}}$, $\mu_{\bar{r}^2}$, μ_s и в том и в другом случае одни и те же.

Расчет давления на затупленной поверхности и расстояния от нее до ударной волны (без инжекции). Для расчета давления в некоторой точке на поверхности затупления может быть использована модифицированная формула Ньютона

$$\bar{p} = \bar{p}_0 \cos^2 \eta, \tag{5.1.31}$$

в которой η — угол между вектором скорости $\bar{V}_\infty$ и нормалью к поверхности в рассматриваемой точке; $\bar{p}_0$ — коэффициент давления в точке полного торможения (см. рис. 5.1.27); этот коэффициент при очень

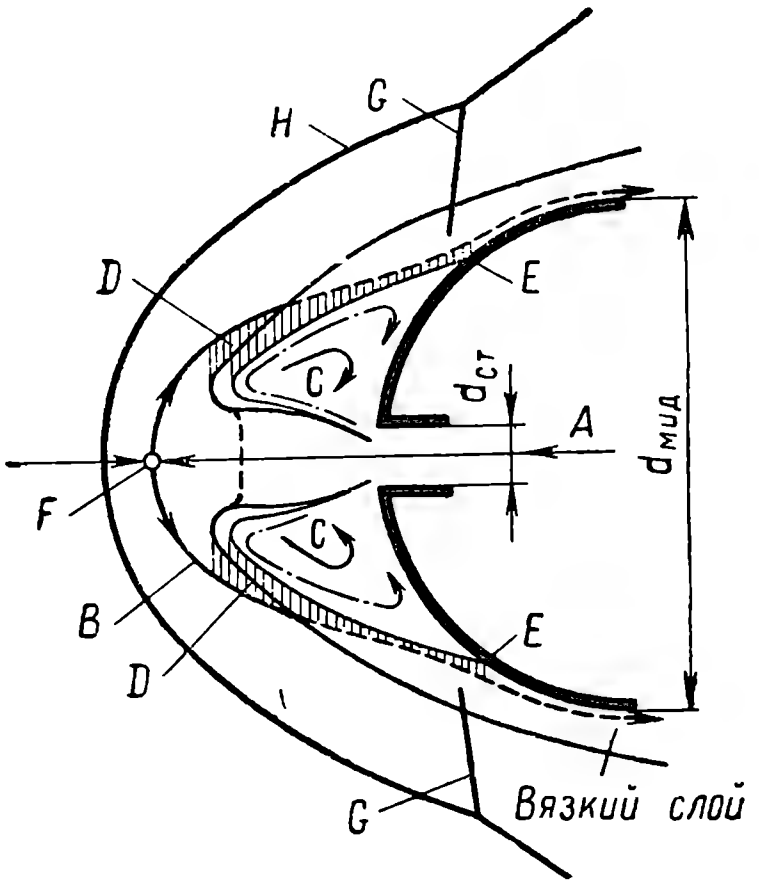


Рис. 5.1.26. Схема потока около затупленного по сфере цилиндра при вдуве в этот поток воздуха

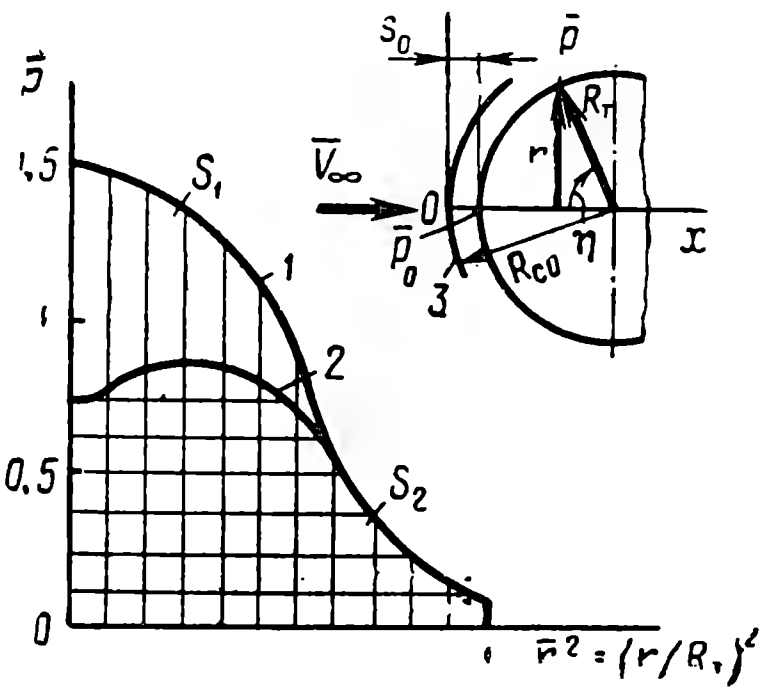


Рис. 5.1.27. Графическое определение величины $c_{xв} = \int_0^1 \bar{p} d\bar{r}^2$:

1 — кривая $\bar{p} = \bar{p}(\bar{r}^2)$ соответствует обтеканию без вдува; *2* — то же, но со вдувом; *3* — скачок уплотнения

больших скоростях обтекания определяется с учетом диссоциации воздуха.

Обтекание затупленного тела сопровождается образованием перед ним отсоединенной головной ударной волны. Ее форма и расположение относительно тела вращения могут быть определены по фотографиям, полученным при помощи различных оптических методов (см. § 2.5). Это же можно сделать, используя соответствующие приближенные зависимости, найденные в результате теоретических исследований или экспериментальным путем. В частности, расстояние s_0 от волны сферического затупления, отнесенное к радиусу $R_т$ этого затупления (см. рис. 5.1.27), определяется по формуле [20]

$$\bar{s}_0 = 0{,}52\,[\bar{\rho}/(1-\bar{\rho})]^{0{,}86}, \tag{5.1.32}$$

где $\bar{\rho} = \rho_\infty/\rho_c$ (ρ_c — плотность газа за «прямой» частью скачка уплотнения).

Радиус кривизны R_{c0} волны на оси, отнесенный к радиусу сферы $R_т$, находят из выражения

$$\bar{R}_{c0} = R_{c0}/R_т = 1/(1-\tilde{s}_0)^{2,5}, \tag{5.1.33}$$

в котором

$$\tilde{s}_0 = [\bar{\rho}/(1-\bar{\rho})^2]\,[1-(2\bar{\rho}-\bar{\rho}^2)^{1/2}]. \tag{5.1.34}$$

Как показали расчеты и экспериментальные исследования сверхзвукового обтекания сферической поверхности, образующую ударной волны можно приближенно представить в виде гиперболы

$$(x + a)^2/a^2 - r^2/b^2 = 1, \tag{5.1.35}$$

где

$$a = R_{c0}(\mathbf{M}_\infty^2 - 1),\ b = R_{c0}\sqrt{\mathbf{M}_\infty^2 - 1}. \tag{5.1.36}$$

Порядок проведения работы

1. Ознакомиться с устройством аэродинамической трубы, приспособлением для вдува воздуха и схемой экспериментальной установки в целом; проверить готовность к работе оборудования и измерительных устройств.

2. Закрепить модель на державке в рабочей части аэродинамической трубы и соединить дренажные отверстия, а также приемник статического давления в рабочей части дренажными трубками с манометрами. Проверить герметичность соединений.

3. Измерить барометрическое давление $p_{атм}$.

4. Зафиксировать начальные показания N_0 группового регистрирующего манометра.

5. С помощью редуктора установить необходимое давление вдуваемого воздуха.

6. Включить аэродинамическую трубу и после выхода ее на режим установившегося обтекания осуществить измерение давлений, зафиксировав на печатающем устройстве ГРМ соответствующие показания N_n. Одновременно измерить давление p_0 в форкамере трубы и сфотографировать картину обтекания тела вращения.

7. Выключить редуктор, прекратив тем самым подачу вдуваемого воздуха, и произвести снова запись показаний всех манометров ГРМ.

8. По разности показаний $\Delta N_\infty = N - N_0$ вычислить статическое давление $p_\infty = p_{атм} + \Delta N_\infty k$ и по отношению p_∞/p_0 найти соответствующее число $\mathbf{M}_\infty$.

9. Определить по показаниям манометра $\Delta N_n = N_n - N_0$ для каждой дренажной точки давления $p_n = p_{атм} + \Delta N_n k$, вычислить затем избыточные давления $\Delta p_n = p_n - p_\infty$ и, зная скоростной напор $q_\infty = k p_\infty \mathbf{M}_\infty^2/2$, найти соответствующие коэффициенты давления $\bar{p}_n = \Delta p_n/q_\infty$. При этом коэффициенты p_n находятся дважды — при вдуве и без него.

10. По найденному распределению коэффициента давления определить $c_{xв}$ в каждом из этих случаев.

11. Проявить фотопленку и отпечатать снимки форматом, удобным для обработки; найти по этим снимкам отход s_0 и кривизну волны R_{c0}.

Пример. Рассмотрим результаты исследования обтекания затупленного тела вращения, которое проводилось в сверхзвуковой трубе с закрытой рабочей частью. Сопловые вкладыши этой трубы были рассчитаны на номинальное число $\mathbf{M}_\infty = 3$.

Общая схема экспериментальной установки, включая приспособление для вдува воздуха, показана на рис. 5.1.28. Модель тела вращения (рис. 5.1.29) помещалась в рабочей части трубы на державке под углом атаки $\alpha = 0$. Во время испытаний измерялось распределение давления по сферическому носку этой модели, статическое давление в рабочей части трубы, давление вдуваемого воздуха, а также производилось фотографирование картины обтекания с помощью теневого оптического прибора ИАБ-451.

Для обеспечения вдува воздуха (инжекции) использовалось специальное приспособление (см. рис. 5.1.28). Сжатый воздух из баллонов поступал через вентиль *9* к редуктору 10. Вращением регулировочного винта этого редуктора устанавливалось необходимое давление, которое контролировалось манометром *11*, расположенным на трубопроводе сразу за редуктором. Воздух, необходимый для формирования струи, по трубчатой державке *3*, попадая во внутреннюю полость модели, через отверстие в точ-

ке полного торможения истекает в окружающее пространство. Трубка полного напора *4* позволяет измерить полное давление вдуваемого воздуха, которое регистрируется манометром *6* (см. рис. 5.1.28). Закрытием вентиля *9* создавались условия, необходимые для обеспечения обтекания модели без вдува.

До начала эксперимента было зафиксировано барометрическое давление $p_{атм}=735$ *мм рт. ст.* Одновременно на бумажной ленте ГРМ были отмечены начальные

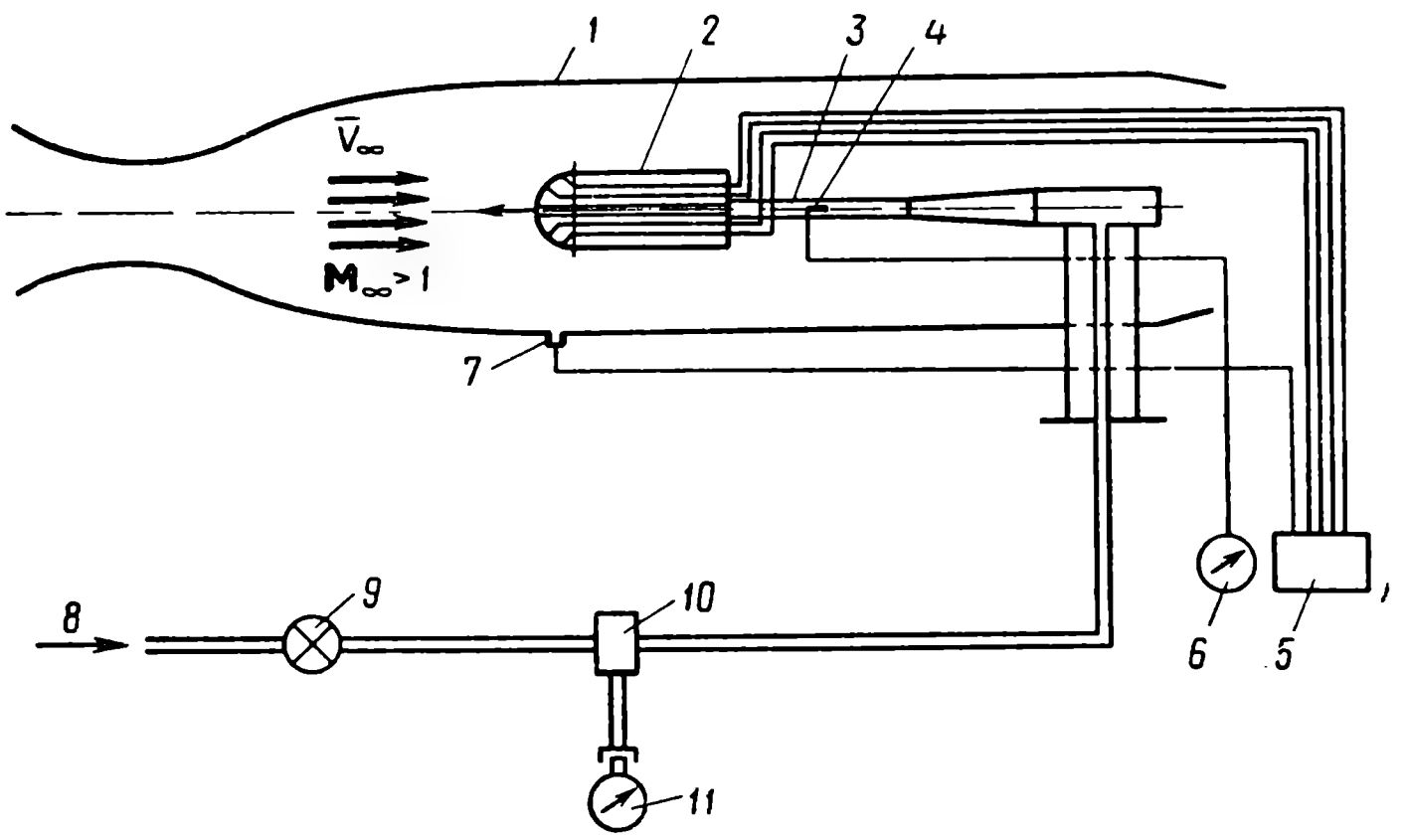


Рис. 5.1.28. Схема установки для исследования обтекания тела вращения сверхзвуковым потоком при вдуве в него воздуха:

1 — аэродинамическая труба; *2* — модель тела вращения; *3* — полая державка; *4* — трубка Пито; *5* — ГРМ; *6* — манометр; *7* — приемник статического давления; *8* — воздух из баллонов; *9* — вентиль; *10*—редуктор; *11* — манометр редуцированного воздуха

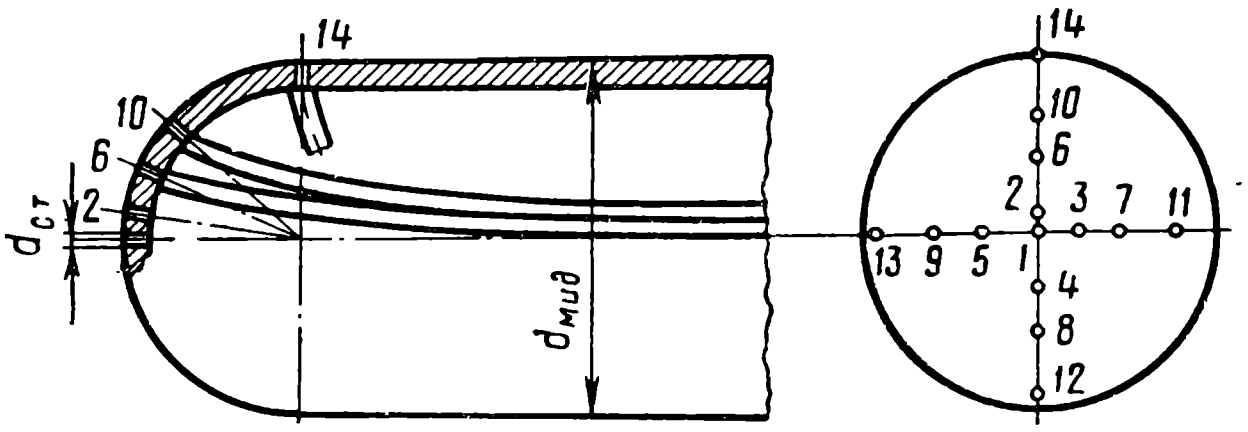


Рис. 5.1.29. Модель тела вращения для исследования течения со вдувом воздуха в набегающий поток

показания $N_0=100{,}1$ (для приемника статического давления на стенке трубы) и N_{0n} (для дренажных отверстий). После включения трубы регистрировались соответствующие показания манометра $N=83{,}2$ и N_n. Таким образом, статическое давление в рабочей части аэродинамической трубы

$$p_\infty = p_{атм} + \kappa (N - N_0) = 1 + 0{,}05\,(83{,}2 - 100{,}1) = 0{,}155\ кГ/см^2,$$

а давление в выбранной дренажной точке $p_n = p_{атм} + \kappa(N_n - N_{0n})$.

Так как давление в форкамере было $p_0=4{,}7\ кГ/см^2$, то число Маха в рабочей части аэродинамической трубы

$$\mathbf{M}_\infty = \left\{\frac{2}{k-1}\left[\left(\frac{p_0}{p_\infty}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right]\right\}^{1/2} = \left\{\frac{2}{1{,}4-1}\left[\left(\frac{5{,}7}{0{,}155}\right)^{\frac{1{,}4-1}{1{,}4}} - 1\right]\right\}^{1/2} = 3.$$

Соответствующий скоростной напор

$$q_\infty = \frac{k p_\infty \mathbf{M}_\infty^2}{2} = \frac{1{,}4 \cdot 0{,}155 \cdot 3^2}{2} = 0{,}975\ кГ/см^2.$$

Давление вдуваемого воздуха, зафиксированное манометром *6* (см. рис. 5.1.28), было равно 50 $кГ/см^2$.

По измеренным давлениям в дренажных точках сферического носка тела вращения были подсчитаны коэффициенты давления $\bar{p}''$ и $\bar{p}'$ (соответственно со вдувом и без вдува), приведенные в табл. А.

Таблица А

Номера дренажных отверстий	2	3	4	5	6	7
$\bar{p}''=(p''-p_\infty)/q_\infty$	0,376	0,384	0,396	0,435	0,620	0,772
$\bar{p}'=(p'-p_\infty)/q_\infty$	1,742	1,632	1,525	1,400	1,292	1,175
$\bar{r}^2$	0,030	0,067	0,117	0,179	0,250	0,329

Продолжение табл. А

Номера дренажных отверстий	8	9	10	11	12	13	14
$\bar{p}''=(p''-p_\infty)/q_\infty$	0,832	0,788	0,725	0,632	0,395	0,138	0,039
$\bar{p}'=(p'-p_\infty)/q_\infty$	1,040	0,912	0,775	0,652	0,400	0,139	0,039
$\bar{r}^2$	0,414	0,501	0,575	0,672	0,822	0,935	1,000

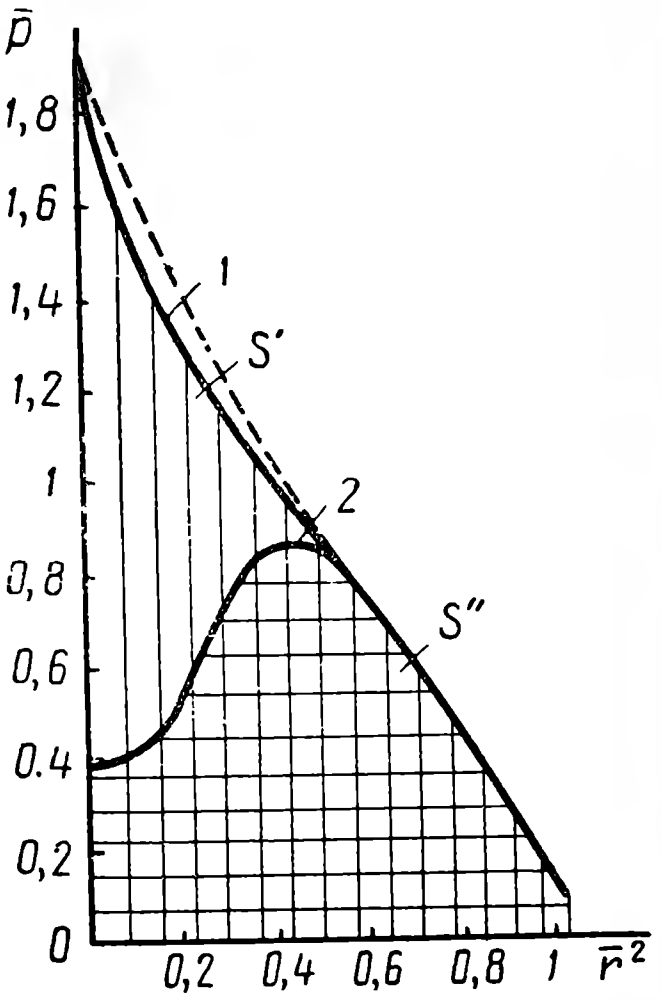


Рис. 5.1.30. Графики для вычисления $c_{x\text{в}}$ затупленного по сфере тела вращения:

1 — распределение давления по затуплению без инжекции; *2* — то же, с инжекцией; — — — — — по формуле $\bar{p}=\bar{p}_0\cos^2\eta$

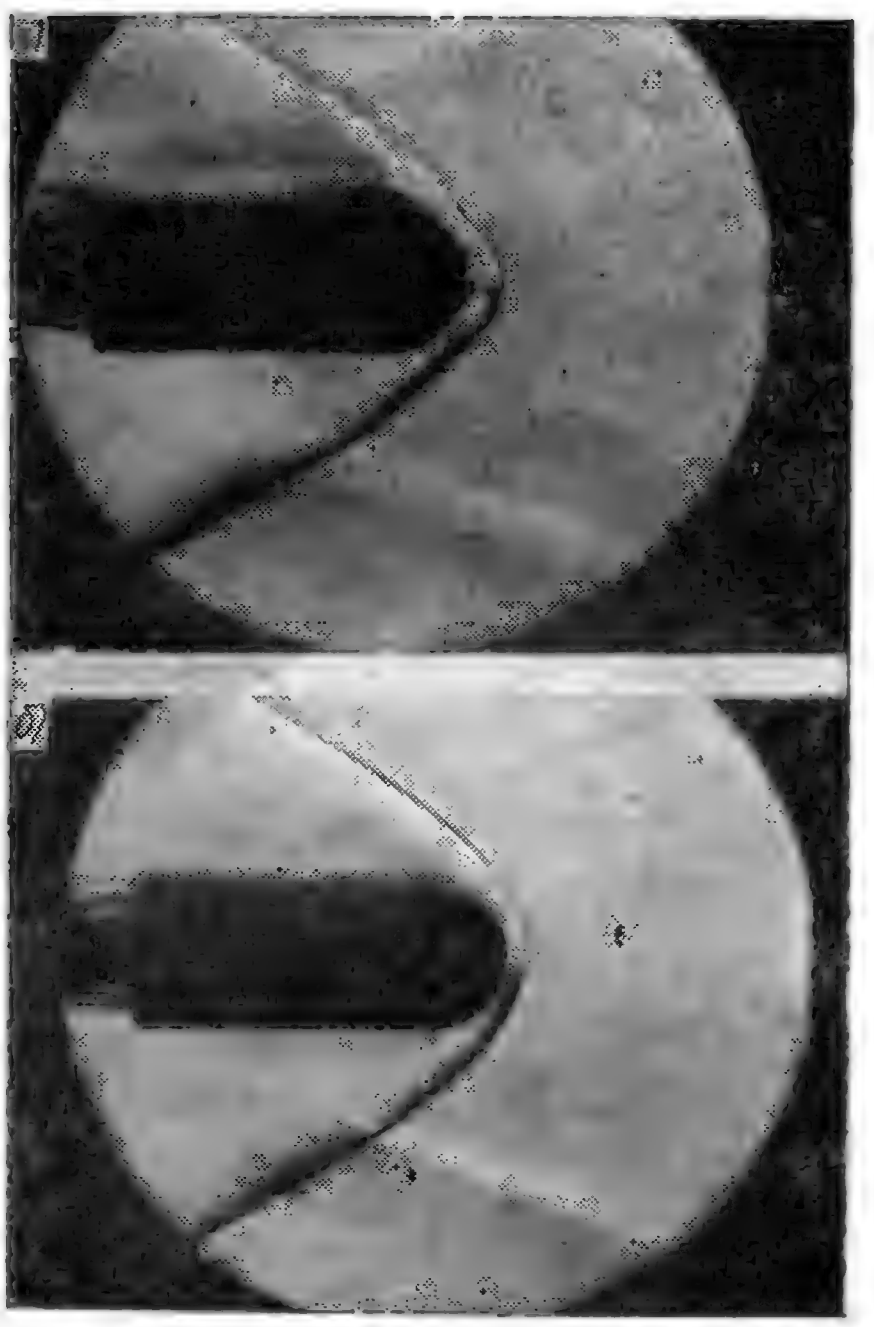


Рис. 5.1.31. Фотографии обтекания затупленного тела вращения сверхзвуковым потоком воздуха ($M_\infty = 3$):

а — с инжекцией воздуха через отверстие в передней критической точке; *б* — без инжекции

По данным табл. А были вычислены коэффициенты волнового сопротивления $c''_{x\text{в}}$ (со вдувом) и $c'_{x\text{в}}$ (без вдува). При этом использовалась формула (5.1.29), в которой функция $\bar{p}=\bar{p}(\bar{r}^2)$ определялась по табличным данным. График этой функции постро-

ен на рис. 5.1.30, где масштабы значений $\bar{p}$ и $\bar{r}^2$ равны соответственно $\mu_{\bar{p}}=0{,}5\cdot10^{-2}$ и $\mu_{\bar{r}^2}=0{,}5\cdot10^{-2}$ $1/мм$; $\mu_s=\mu_{\bar{p}}\cdot\mu_{\bar{r}^2}=0{,}25\cdot10^{-4}$ $1/мм^2$. На этом рисунке площадь под кривой *1* $S'=31300$, а площадь под кривой *2* $S''=18620$ $мм^2$. По этим значениям определялись коэффициенты волнового сопротивления полусферы:

$$c''_{x\text{в}}=\int_0^1 \bar{p}''\,d\bar{r}^2=S''\,\mu_s=18620\cdot0{,}25\cdot10^{-4}=0{,}466;$$

$$c'_{x\text{в}}=\int_0^1 \bar{p}'\,d\bar{r}^2=S'\,\mu_s=31300\cdot0{,}25\cdot10^{-4}=0{,}783.$$

Во время продувки модели тела вращения в аэродинамической трубе были сделаны две фотографии обтекания (рис. 5.1.31). На одной из этих фотографий (рис. 5.1.31, *а*) показана форма головной ударной волны при обтекании со вдувом, а на другой (рис. 5.1.31, *б*) — при обычном обтекании (без вдува). Как видно, вдув воздуха в омывающий поток значительно отодвинул ударную волну от поверхности тела вращения.

По измерениям на фотографии рис. 5.1.31, *б* (без вдува) расстояние до ударной волны от носка $s_0=4{,}65$ $мм$. Учитывая, что радиус сферы $R_\text{т}=0{,}023$ $м$, величина относительного отхода $\bar{s}_0=s_0/R_\text{т}=4{,}65/23=0{,}202$. Рассчитаем эту величину по теоретической зависимости. Зная число $\mathbf{M}_\infty=3$, определим сначала относительную плотность за «прямой» частью скачка:

$$\bar{\rho}=\frac{\rho_\infty}{\rho_\text{c}}=\left(\frac{\frac{k+1}{2}\mathbf{M}_\infty^2}{1+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\infty^2}\right)^{-1}=\left(\frac{\frac{1{,}4+1}{2}3^2}{1+\frac{1{,}4-1}{2}3^2}\right)^{-1}=0{,}259;$$

с учетом этого значения по (5.1.32) находим

$$\bar{s}_0=\frac{s_0}{R_\text{т}}=0{,}52\left(\frac{0{,}259}{1-0{,}259}\right)^{0{,}86}=0{,}21.$$

По формулам (5.1.34), (5.1.33) были рассчитаны величины относительного отхода $\tilde{\bar{s}}_0=s_0/R_{\text{c}0}$ и радиуса кривизны скачка на оси $\bar{R}_{\text{c}0}=R_{\text{c}0}R_\text{т}$:

$$\tilde{\bar{s}}_0=\frac{0{,}259}{(1-0{,}259)^2}\left[1-(2\cdot0{,}259-0{,}259^2)^{1/2}\right]=0{,}154;$$

$$\bar{R}_{\text{c}0}=1/(1-0{,}154)^{2{,}5}=1{,}5.$$

По измерениям на фотографии рис. 5.1.31, *б* величина $R_{\text{c}0}=36$ $мм$, следовательно, $\bar{R}_{\text{c}0}=R_{\text{c}0}/R_\text{т}=36/23=1{,}56$. Как видно, разница между экспериментальным и теоретическим значениями относительного отхода и радиуса кривизны волны оказалась незначительной.

По формуле Ньютона (5.1.31) было найдено распределение коэффициента давления по сферическому затуплению. В этой формуле значение $\bar{p}_0$ принималось равным 1,82 в соответствии с графиком на рис. 5.1.30. Полученные результаты, показанные пунктирной линией на рис. 5.1.30, хорошо совпадают с экспериментальными данными.

§ 5.2. ИССЛЕДОВАНИЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ВЕСОВ

Работа 5.2.1

Применение тензометрических весов для измерения аэродинамических сил и моментов

Цель работы — определение коэффициентов нормальной силы и момента тангажа, действующих на тело вращения, движущееся со сверхзвуковой скоростью.

Общие сведения

Наряду с определением аэродинамических коэффициентов по результатам дренажных испытаний моделей тел вращения в экспериментальной практике широко применяются также весовые методы этого

определения, основанные на применении аэродинамических весов, которыми измеряются действующие аэродинамические силы и моменты. По измеренным величинам этих сил и моментов рассчитываются затем соответствующие аэродинамические коэффициенты. Особенностью таких весовых измерений является нахождение суммарных аэродинамических характеристик тела вращения, учитывающих одновременное воздействие силы трения и давления.

Для определения коэффициентов c_N и m_z воспользуемся двухкомпонентными внутримодельными тензометрическими весами.

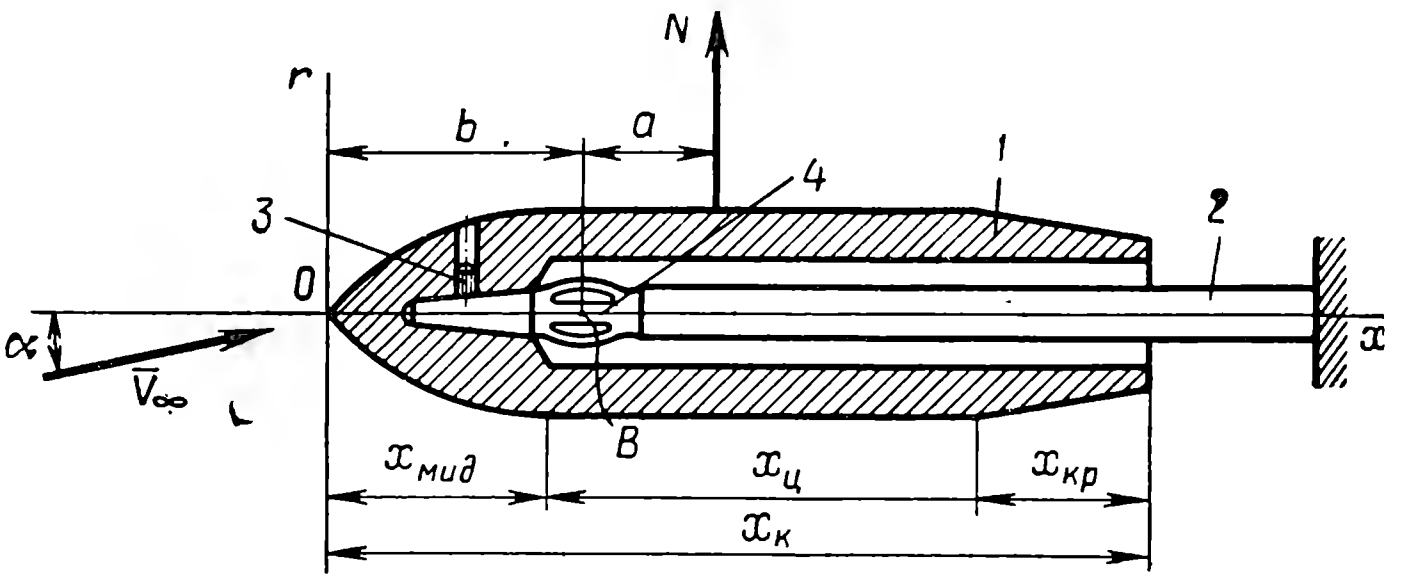


Рис. 5.2.1. Схема измерения коэффициента момента тангажа:

1 — модель тела вращения; *2* — тензодержавка; *3* — винт, крепящий модель на тензодержавке; *4* — чувствительный элемент

Порядок расчета аэродинамических коэффициентов по данным весовых испытаний. Нормальная сила и момент тангажа, действующие на тело вращения (рис. 5.2.1), измеренные при помощи аэродинамических весов, могут быть представлены в виде

$$N = c_N q_\infty S_{мид},\ M_{zB} = m_{zB} q_\infty S_{мид} x_к.$$

Этим значениям N и M_{zB} соответствуют аэродинамические коэффициенты

$$c_N = N/(q_\infty S_{мид}),\ m_{zB} = M_{zB}/(q_\infty S_{мид} x_к), \qquad (5.2.1)$$

где m_{zB} — коэффициент момента M_{zB}, который рассчитан по данным весовых измерений относительно так называемой моментной точки B (рис. 5.2.1).

На практике бывает необходимо определить момент M_z (и соответствующий коэффициент m_z) относительно какой-либо точки, не совпадающей с точкой B, для которой момент M_{zB} был определен во время эксперимента. В соответствии с рис. 5.2.1, точка B расположена от носка модели на расстоянии b, которое определяется для каждой конструкции тензовесов экспериментально. По результатам измерения этими весами

$$M_{zB} = -Na = -c_N q_\infty S_{мид} a,$$

где a — расстояние между точкой приложения нормальной силы N и точкой B. С другой стороны, можно написать

$$M_{zB} = m_{zB} q_\infty S_{мид} x_к.$$

Приравнивая эти значения для моментов, получим

$$m_{zB} = -c_N a' x_к.$$

Относительно другой точки, совпадающей, в частности, с носком модели O, момент

$$M_z = m_z q_\infty S_{мид} x_к \text{ или } M_z = -N(a+b) = -c_N q_\infty S_{мид}(a+b).$$

Следовательно, коэффициент момента

$$m_z = m_{zB} - c_N\, b/x_к. \qquad (5.2.2)$$

Приближенный аэродинамический расчет тела вращения. Исследования показывают, что коэффициенты нормальной силы и момента тангажа тонких тел при малых углах атаки почти не зависят от числа M_∞ и определяются в соответствии с линейной теорией выражениями:

$$c_N = 2\alpha \bar{S}_{дон}; \qquad (5.2.3)$$

$$m_{zp} = -2\alpha(\bar{S}_{дон} - W_т/W_ц), \qquad (5.2.4)$$

где $W_т$ — объем тела вращения; $W_ц = x_к S_{мид}$ — объем цилиндра, основание которого равно площади миделевого сечения, а высота — длине тела.

При сверхзвуковых скоростях полета эти формулы хорошо подтверждаются экспериментальными данными при небольшом хвостовом сужении $S_{дон} \approx 1$ и сравнительно малой длине. В случае значительной длины корпуса формулы (5.2.3) и (5.2.4) могут давать существенную погрешность, так как они не учитывают возрастающего влияния на аэродинамические коэффициенты отрыва потока на подветренной стороне тела при обтекании под углом атаки.

Согласно исследованиям такого обтекания тел вращения с большим удлинением их коэффициенты нормальной силы и момента тангажа (относительно носка) могут быть определены по следующим формулам:

$$c_N = 2\alpha \bar{S}_{дон} + (4/\pi)\, c\alpha^2 (\lambda_ц + \lambda_{кр}); \qquad (5.2.5)$$

$$m_{zp} = -2\alpha(\bar{S}_{дон} - W_т/W_ц) - (2/\pi)\, c\alpha^2 (\lambda_к - \lambda^2_{мид}/\lambda_к), \qquad (5.2.6)$$

где $\lambda_к = x_к/d_{мид}$; $\lambda_{мид} = x_{мид}/d_{мид}$; $\lambda_ц = x_ц/d_{мид}$; $\lambda_{кр} = x_{кр}/d_{мид}$ — соответственно удлинения всего тела, а также головной, цилиндрической и хвостовой частей (см. рис. 5.2.1). Коэффициент c в формулах (5.2.5) и (5.2.6) зависит, как показали экспериментальные исследования, от вида пограничного слоя на поверхности тела вращения. При этом если пограничный слой ламинарный (в этом случае принимается $Re_\infty = V_\infty \sin\alpha \cdot d_{мид}\, \rho_\infty/\mu_\infty < 3\cdot 10^5$), то $c \approx 1{,}2$, если же течение турбулентное, то $c \approx 0{,}3$.

Порядок проведения работы

1. Ознакомиться с устройством аэродинамической трубы и схемой экспериментальной установки; проверить готовность к работе оборудования и измерительных устройств.

2. Установить в трубе сменные сопловые вкладыши, обеспечивающие получение заданного (номинального) числа M_∞ в рабочей части.

3. Тензометрические весы вместе с закрепленной на них моделью тела вращения поместить в рабочей части трубы на траверсе механизма углов атаки.

4. Произвести сборку схемы измерительных устройств, соединив между собой в соответствии с электрической схемой датчики тензовесов, тензостанцию и гальванометры.

5. Осуществить тарировку тензовесов и найти их рабочую формулу.

6. Установить в форкамере манометр и термопару (термометр сопротивления) для измерения давления p_0 и температуры T_0.

7. Соединить приемник статического давления p_∞ на стенке рабочей части трубы с U-образным манометром. Проверить герметичность этого соединения.

8. Зафиксировать начальные показания гальванометров, регистрирующих сигналы тензодатчиков для каналов нормальной силы h_{0N} и момента h_{0M}.

9. Измерить барометрическое давление $p_{атм}$.

10. Включить трубу и после выхода ее на режим установившегося обтекания осуществить запись показаний гальванометров h_N и h_M. Одновременно измерить давление p_0 и температуру T_0 в форкамере трубы, а также зафиксировать показания $h_{пр}$ и $h_{лев}$ в отсчетных коленах U-образного ртутного манометра, измеряющего давление в рабочей части.

11. Вычислить статическое давление в рабочей части $p_\infty = p_{атм} + (h_{пр} - h_{лев})\gamma_{рт}$ и по отношению p_∞/p_0 найти соответствующее число $\mathbf{M}_\infty$ и скоростной напор q_∞.

12. Определить при помощи «рабочей формулы» тензовесов по измеренным значениям разностей $h_N - h_{0N}$ и $h_M - h_{0M}$ нормальную силу N и момент M_{zB}, рассчитать соответствующие аэродинамические коэффициенты c_N и m_{zB} и, наконец, найти по (5.2.2) коэффициент m_z.

13. Построить графики $c_N = c_N(\alpha)$ и $m_z = m_z(\alpha)$.

Пример. Определим коэффициенты нормальной силы и момента тангажа тела вращения в сверхзвуковой аэродинамической трубе с закрытой рабочей частью квадратного сечения размером 400×400 *мм*. Сменные вкладыши, образующие сопло трубы, рассчитаны на номинальное число $\mathbf{M}_\infty = 2{,}7$.

Общий вид установки показан на рис. 5.2.2. На этой установке испытывалась модель тела вращения (рис. 5.2.3) со следующими размерами: полная длина $x_к = 360$ *мм*; длина параболической головной части $x_{мид} = 120$ *мм*; диаметр миделевого сечения $d_{мид} = 40$ *мм*; $b = 190$ *мм*. Модель закреплялась на тензометрических весах путем посадки ее на коническую поверхность чувствительного элемента и фиксировалась гайкой. Размеры модели и углы атаки α ее во время эксперимента были выбраны в соответствии с допустимым «загромождением» рабочей части, а также с учетом расположения в ней скачков уплотнения.

В соответствии со сказанным модель должна находиться внутри «рабочего ромба», ограниченного линиями слабых возмущений, образующих с направлением вектора скорости набегающего потока угол $\mu_\infty = \arcsin(1/\mathbf{M}_\infty) = \arcsin(1/2{,}7) = 21{,}7°$. Кроме того, на нее не должны падать скачки уплотнения, отраженные от стенок трубы. Модель также не должна взаимодействовать с пограничным слоем, образовавшимся на стенках сопла и рабочей части (толщина его, как показали исследования, равна примерно 8 *мм*).

После произведенных построений скачков уплотнения (см. рис. 1.4.13) было определено, что угол атаки α не должен превышать 15° при выбранных размерах модели. При этом степень «загромождения» для нулевого угла атаки ($\alpha = 0$)

$$(S_{мид}/S_{раб.части})\,100\% = \frac{\pi 40^2 \cdot 100\%}{4 \cdot 400^2} = 0{,}8\%,$$

а для $\alpha = 15°$

$$(S_{мид}/S_{раб.части})\,100\% = 3300 \cdot 100\%/400^2 = 2\%;$$

в последней формуле $S_{мид}$ — площадь проекции модели на поперечное сечение рабочей части трубы.

Для измерений N и M_z были выбраны двухкомпонентные внутримодельные тензометрические весы (см. рис. 5.2.3). Рассмотрим тарировку этих весов, в результате которой получена их «рабочая формула» (см. гл. II).

Общий вид тарировочной установки показан на рис. 3.1.18. Эта установка состоит из тензовесов с закрепленной на них тарировочной втулкой, вдоль которой перемещается подвеска с гирями.

Электрическая часть тензовесов состояла из тензостанции УТС-1ВТ-12 и гальванометров. Во время эксперимента использовались два канала этой станции — один для измерения нормальной силы, другой для измерения момента.

При тарировке сначала было найдено положение «моментной точки» B (рис. 5.2.4, *а*), характерной тем, что приложенная в ней сила не вызывает деформации балочки весов, фиксирующей момент тангажа. При нагружении в точке B силой $Q = -4$ *кГ* стрелка гальванометра, работающего в канале момента тангажа, не отклонилась (так как $M_{zB} = 0$), а стрелка другого гальванометра переместилась с отметки $h_{0N} = 0$ на $h_N = 7{,}4$. Таким образом, разность показаний $h_N - h_{0N} = 7{,}4 - 0 = 7{,}4$. Соответствующие точки $1'$ (с координатами $N = -4$, $h_N - h_{0N} = 7{,}4$) и 1 (с координатами $M_z = 0$, $h_M - h_{0M} = 0$) показаны соответственно на рис. 5.2.4, *б* и 5.2.4, *в*. Затем та же

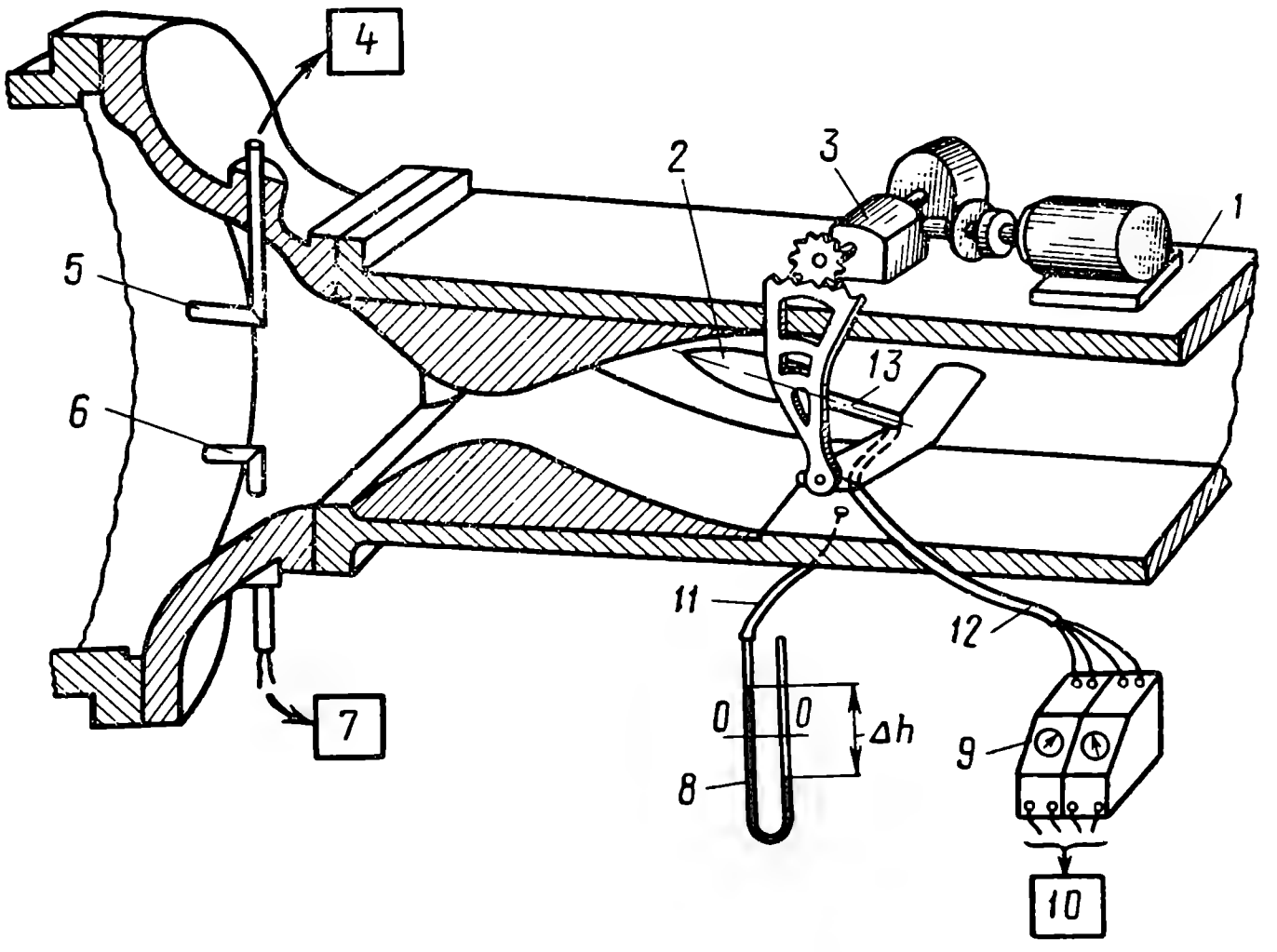


Рис. 5.2.2. Схема установки для определения аэродинамических коэффициентов тел вращения с помощью внутримодельных тензометрических весов:

1 — сверхзвуковая труба; *2* — модель; *3* — механизм углов атаки; *4* — манометр; *5* — трубка полного напора; *6* — термопара; *7* — гальванометр; *8* — жидкостной манометр; *9* — тензостанция; *10* — гальванометры; *11* — соединительная трубка; *12* — провода, идущие от тензовесов к тензостанции; *13* — державка

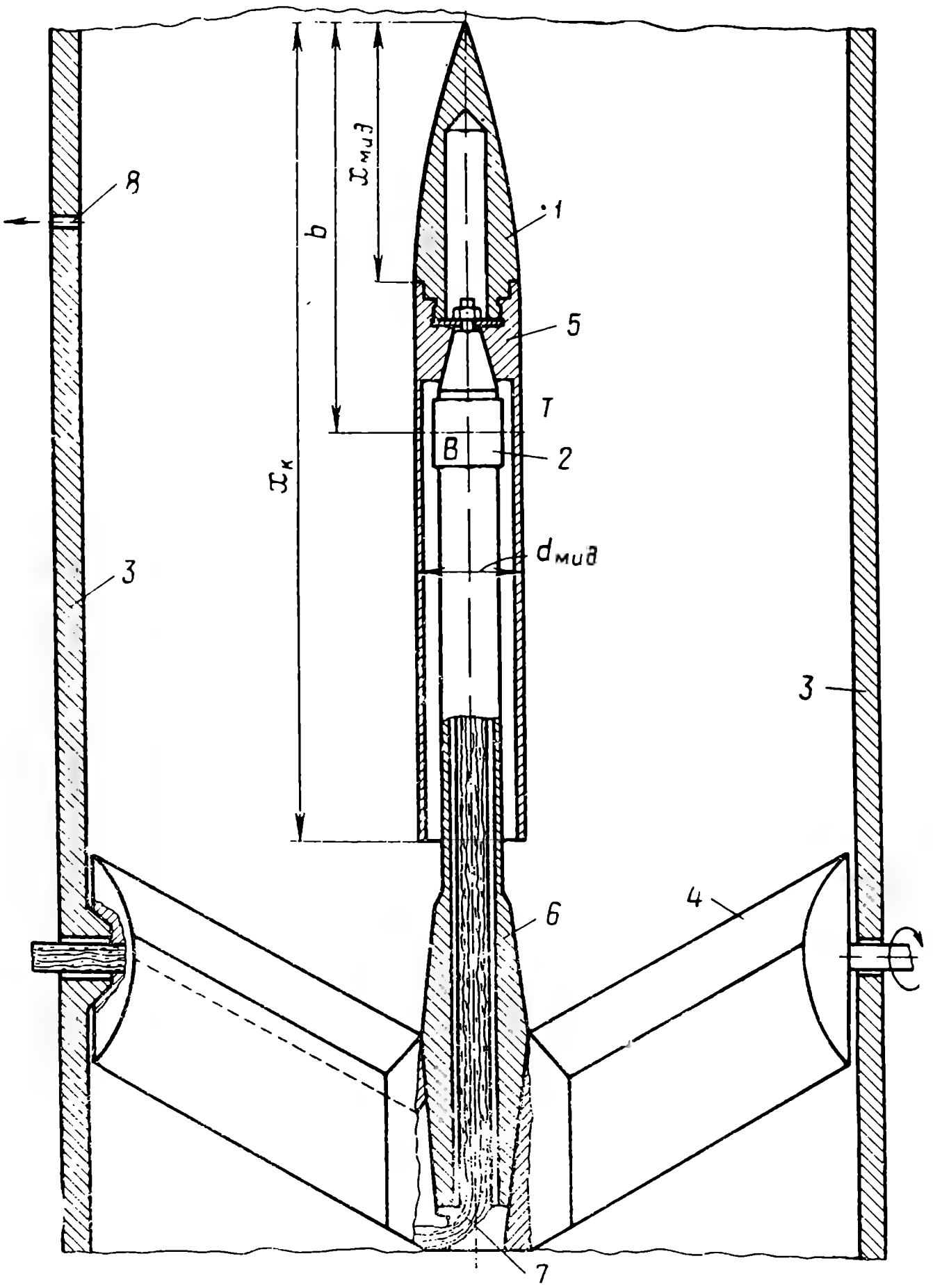


Рис. 5.2.3. Схема закрепления модели на тензовесах:

1 — съемная головная часть модели; *2* — тензовесы; *3* — стенки аэродинамической трубы; *4* — траверса; *5*— модель; *6* — державка; *7* — провода, идущие от тензодатчиков к тензостанции; *8* — приемник статического давления

сила $Q=-4$ *кГ* была приложена в точке, расположенной на расстоянии $f=50$ *мм* справа от первоначально выбранной. При этом по-прежнему величина $N=-4$ *кГ*, а момент возрос от нуля до значения $M_{zB}=4\cdot0{,}05=0{,}2$ *кГ·м*. На шкалах гальванометров стрелки зафиксировали показания $h_N=7$ ($h_N-h_{0N}=7-0=7$) и $h_M=8{,}6$ ($h_M-h_{0M}=8{,}6-0=8{,}6$). По этим данным нанесены точки *2* и *2′*, а затем построены прямые *1—2*, *0—1′* и *0—2′* (см. рис. 5.2.4). Прямая *0—1′* представляет собой тарировочный график для силы N при $M_{zB}=0$, а прямая *0—2′* — для той же силы N, но с учетом воздействия момента $M_{zB}=0{,}2$ *кГ·м*.

Для каждого нового значения момента (например, $M_{zB}=A$) будет своя прямая на рис. 5.2.4, *б*. Таким образом, наличие момента, равного 0,2 *кГ·м*, вызвало смещение тарировочной прямой на величину $\Delta_{тар}=0{,}027$ при разности показаний $h_N-h_{0N}=7$. Этому смещению соответствует разность $(h_M-h_{0M})_{тар}=r=8{,}6$.

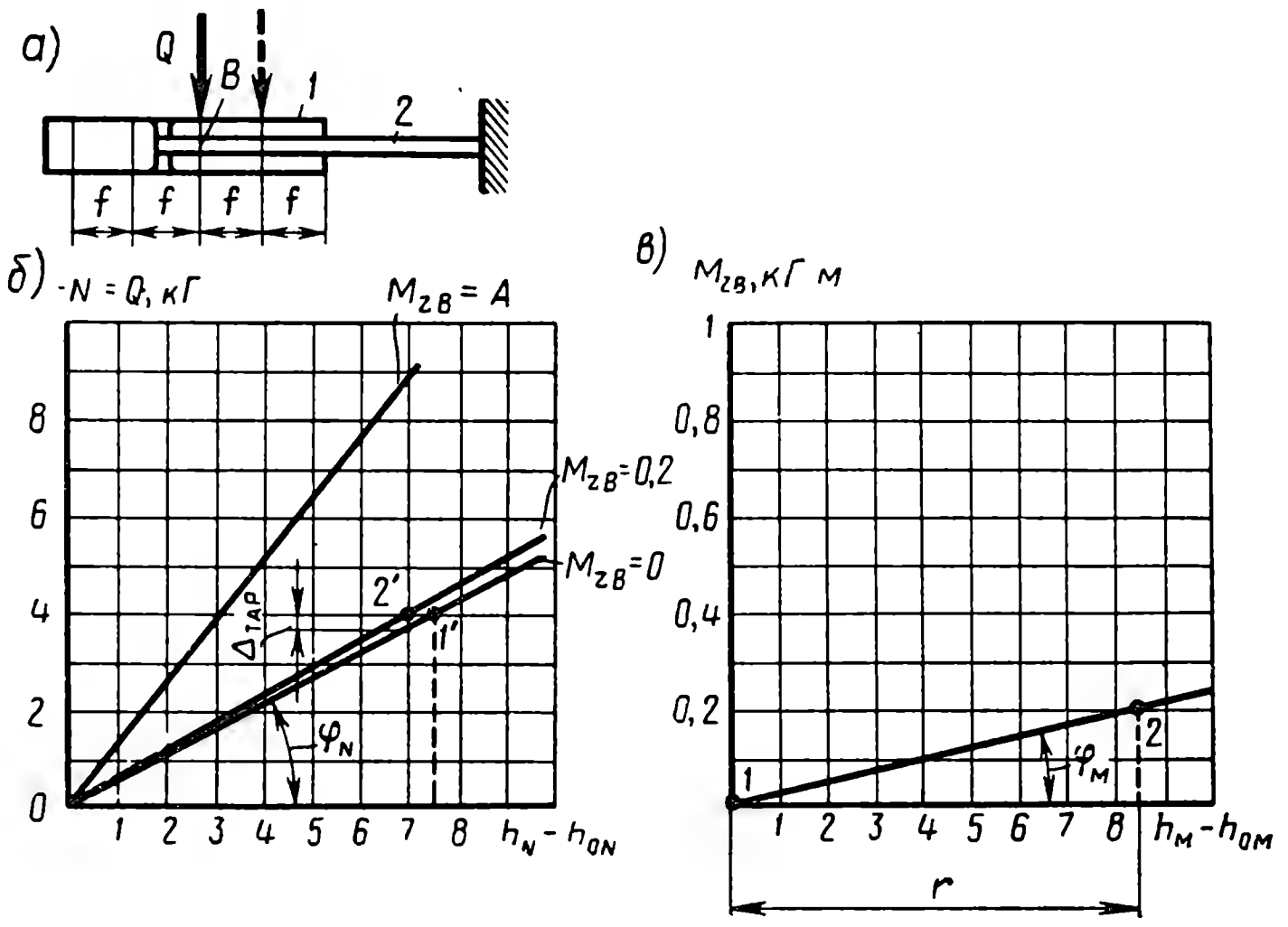


Рис. 5.2.4. Схема тарировки внутримодельных тензовесов (*а*) и тарировочные графики для каналов нормальной силы (*б*) и момента (*в*):

1 — тарировочная втулка; *2* — тензодержавка; *B* — точка, относительно которой момент силы Q равен нулю; f — фиксированное расстояние между точками приложения силы Q при тарировке

Если во время эксперимента на гальванометре в канале момента получена разность h_M-h_{0M}, то ей на координатной сетке будет соответствовать смещение

$$\frac{\Delta_{тар}}{r}(h_M-h_{0M})=\frac{0{,}027}{8{,}6}(h_M-h_{0M})=0{,}0031\,(h_M-h_{0M}).$$

Из сказанного следует, что «рабочая формула» для силы N, представляющая собой уравнение тарировочной прямой на плоскости N, h_N-h_{0N}, будет (с учетом знака силы N)

$$N=0{,}542\,(h_N-h_{0N})-0{,}031\,(h_M-h_{0M}), \qquad (5.2.7)$$

где величина 0,542 равна тангенсу угла наклона прямой, соответствующей $M_{zB}=0$ ($\operatorname{tg}\varphi_N=4/7{,}4=0{,}542$).

Из рис. 5.2.4, *б* следует, что $M_{zB}=\operatorname{tg}\varphi_M\,(h_M-h_{0M})$. При этом так как $\operatorname{tg}\varphi_M=0{,}2/8{,}6=0{,}023$, то

$$M_{zB}=0{,}023\,(h_M-h_{0M}). \qquad (5.2.8)$$

Уравнение (5.2.8) представляет собой «рабочую формулу» для момента тангажа.

Во время испытаний были измерены атмосферное давление $p_{атм}=1$ *кГ/см²* и температура воздуха $T_{атм}=293$ К. После включения аэродинамической трубы и выхода ее на режим установившегося обтекания манометром было измерено давление в форкамере $p_0=3{,}5$ *кГ/см²*. Одновременно в отсчетных коленах U-образного манометра, соединенного с приемником статического давления в рабочей части трубы, был зафиксирован перепад уровней ртути $\Delta h=h_{пр}-h_{лев}=(-310)-(312)=-622$. Таким образом, давление в рабочей части

$$p_\infty=p_{атм}+\Delta h\gamma_{рт}=1\cdot10^4-0{,}622\cdot13600=1550\ кГ/м^2.$$

По отношению $p_\infty/p_0 = 0{,}155/3{,}5 = 0{,}0443$ из табл. 1 [17] определено число Маха в рабочей части $\mathbf{M}_\infty = 2{,}7$. Соответствующий скоростной напор

$$q_\infty = \frac{kp_\infty \mathbf{M}_\infty^2}{2} = \frac{1{,}4 \cdot 0{,}155 \cdot 2{,}7^2}{2} = 0{,}78 \ кГ/см^2.$$

Температура в форкамере, найденная установленной в ней термопарой, $T_0 = 293$ К. Этой температуре соответствует при числе $\mathbf{M}_\infty = 2{,}7$ величина $T_\infty = 293 \cdot 0{,}4104 = 120$ К (см. табл. [17]).

Данные, полученные в результате испытания модели тела вращения при $\alpha = 8°$, приведены в табл. А.

Таблица А

h_{0N}	h_N	$h_N - h_{0N}$	h_{0M}	h_M	$h_M - h_{0M}$
0	8,5	8,5	0	15	15

Соответствующие этим данным сила N и момент M_{zB} определяются по формулам (5.2.7) и (5.2.8):

$$N = 0{,}542 \cdot 8{,}5 + 0{,}0031 \cdot 15 = 4{,}65 \ кГ;$$

$$M_{zB} = 0{,}023 \cdot 15 = 0{,}345 \ кГ \cdot м.$$

Коэффициенты силы N и момента M_{zB} соответственно равны:

$$c_N = \frac{N}{q_\infty S_{мид}} = \frac{4{,}65}{0{,}78 \cdot 10^4 \cdot 125 \cdot 10^{-5}} = 0{,}476;$$

$$m_{zB} = \frac{M_{zB}}{q_\infty S_{мид} x_к} = \frac{0{,}345}{0{,}78 \cdot 10^4 \cdot 125 \cdot 10^{-5} \cdot 0{,}36} = 0{,}098.$$

Согласно (5.2.2) коэффициент момента относительно вершины головной части

$$m_z = 0{,}098 - 0{,}476\,(190/360) = -0{,}155.$$

Найденным значениям m_z и c_N соответствует коэффициент центра давления

$$c_{ц.д} = -m_z/c_N = 0{,}155/0{,}476 = 0{,}326.$$

В табл. Б приведены аэродинамические коэффициенты для других углов атаки, найденные аналогичным образом.

Таблица Б

Коэффициенты \ α, град	0	2	4	6	8
c_N	0	0,120	0,240	0,370	0,476
m_z	0	—0,040	—0,080	—0,125	—0,155
$c_{ц.д}$	—	0,332	0,333	0,337	0,326

По данным табл. Б построены графики на рис. 5.2.5.

Сравним полученные экспериментальные величины с результатами расчета по формулам (5.2.5) и (5.2.6). Входящие в эти формулы геометрические параметры тела вращения имеют следующие значения: $\lambda_{мид} = 120/40 = 3$; $W_т/W_ц = 0{,}81$. Для выбора коэффициента c в формулах (5.2.5), (5.2.6) необходимо определить характер пограничного слоя на корпусе. С этой целью вычислим число $\mathbf{Re}_\infty = V_\infty \sin\alpha \rho_\infty d_{мид}/\mu_\infty$. Здесь скорость V_∞ находится для условий в рабочей части трубы:

$$V_\infty = \mathbf{M}_\infty a_\infty = \mathbf{M}_\infty \sqrt{kRT_\infty} = 2{,}7 \sqrt{1{,}4 \cdot 287 \cdot 120} = 590 \ м/сек.$$

Соответствующая плотность воздуха

$$\rho_\infty = \frac{p_\infty}{RT_\infty} = \frac{1550}{287 \cdot 120} = 0{,}045 \ кГ \cdot сек^2/м^4;$$

коэффициент динамической вязкости

$$\mu_\infty = \mu_н \left(T_\infty / T_н\right)^{0,76} = 1{,}82 \cdot 10^{-6} (120/288)^{0,76} = 0{,}544 \cdot 10^{-6}\ кГ \cdot сек/м^2.$$

С учетом этих данных число Рейнольдса

$$\mathbf{Re}_\infty = \frac{590 \cdot 0{,}139 \cdot 0{,}045 \cdot 0{,}04}{0{,}544 \cdot 10^{-6}} = 2{,}71 \cdot 10^5.$$

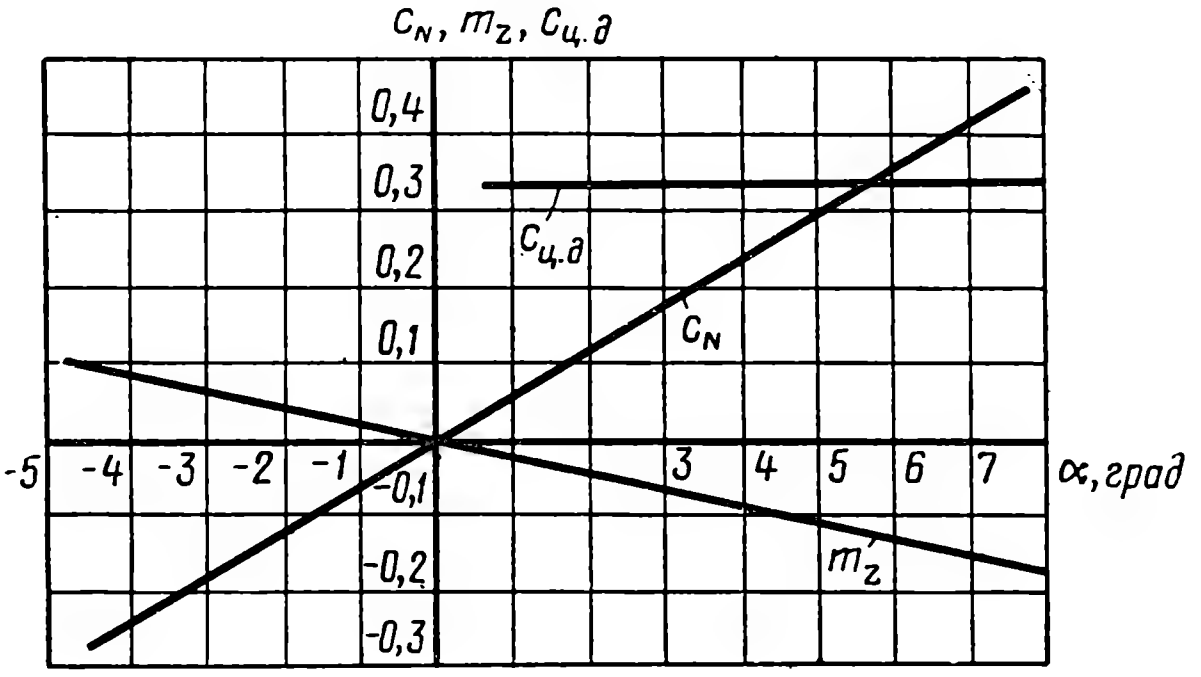


Рис. 5.2.5. Аэродинамические коэффициенты тела вращения при $\mathbf{M}_\infty = 2{,}7$

Так как это число $\mathbf{Re}_\infty < 3 \cdot 10^5$, то поперечное обтекание характеризуется ламинарным пограничным слоем и для такого обтекания можно принять коэффициент $c = 1{,}2$. С учетом этого по формулам (5.2.5) и (5.2.6) имеем:

$$c_N = 2 \cdot 0{,}139 \cdot 1 + 1{,}2 \cdot 0{,}139^2 \frac{4}{\pi} (6 + 0) = 0{,}42 \quad [0{,}476];$$

$$m_{zp} = -2 \cdot 0{,}139 (1 - 0{,}81) - \frac{2}{\pi} 1{,}2 \cdot 0{,}139^2 \left(9 - \frac{3^2}{9}\right) = -0{,}168 \quad [-0{,}155].$$

В квадратных скобках рядом с полученными расчетными результатами для сравнения показаны экспериментальные коэффициенты.

ГЛАВА VI

ИССЛЕДОВАНИЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

В данной главе рассматривается исследование аэродинамических параметров летательных аппаратов в целом, а также типичных органов управления их полетом. При этом для выявления эффектов взаимного влияния корпуса, крыла и оперения летательного аппарата на его аэродинамические характеристики приходится проводить как весовые, так и дренажные испытания моделей аппаратов в аэродинамических трубах, сопоставлять картины распределения давления по изолированным (отдельно взятым) элементам планера летательного аппарата и по этим же элементам, собранным в единую модель, подсчитывать коэффициенты интерференции, позволяющие по аэродинамическим параметрам отдельных элементов находить суммарные характеристики для их комбинаций. С вопросами интерференции тесно связано и исследование эффективности хвостового оперения летательного аппарата, обусловленного, в частности, скосом и торможением потока за расположенным перед оперением крылом.

Важнейшее значение в практике авиа- и ракетостроения имеет исследование устойчивости аппаратов, проводимое не только в статических, но и в динамических условиях, имитирующих полет.

Успех выполнения поставленных перед тем или иным летательным аппаратом задач во многом зависит от правильного функционирования органов управления. Поэтому применяемые в настоящее время виды исследования работы аэродинамических, газодинамических и комбинированных органов управления достаточно разносторонни и проводятся как в аэродинамических трубах, так и на специальных стендах.

Далее приводится описание некоторых типичных экспериментальных работ, отражающее упомянутые исследования.

§ 6.1. АЭРОДИНАМИЧЕСКАЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ

Работа 6.1.1

Экспериментальное исследование влияния интерференции на обтекание летательного аппарата

Цель работы — найти распределение давления по корпусу и крылу летательного аппарата при сверхзвуковых скоростях, сравнить его с соответствующим распределением по изолированным элементам этого аппарата и оценить точность расчета давления с учетом интерференции по аэродинамической теории тонкого тела.

Общие сведения

При обтекании потоком воздуха летательного аппарата в результате аэродинамической интерференции (взаимного влияния между корпусом и крылом) происходит перераспределение давления по сравнению со случаем обтекания изолированных друг от друга тех же крыльев и корпуса. При этом оказывается, что аэродинамические характеристики летательного аппарата не равны сумме соответствующих характеристик изолированного крыла и корпуса. Аэродинамическая интерференция

происходит также между корпусом и оперением, крылом и оперением и др.

Распределение коэффициента давления по наветренной (нижней) цилиндрической части заостренного корпуса с учетом влияния треугольного плоского крыла по теории тонкого тела [21] находится из формулы

$$\bar{p}^{\text{н}}_{\text{т(кр)}} = 2\alpha \operatorname{ctg}\chi \frac{1-r_s^4}{\left[\left(1+r_s^2\right)^2 - 4r_s^2\cos\theta\right]^{1/2}} + \alpha^2\left[1 - \frac{4r_s^2\sin^2 2\theta}{\left(1+r_s^2\right)^2 - 4r_s^2\cos\theta}\right], \quad (6.1.1)$$

где α — угол атаки в радианах; χ — угол стреловидности передней кромки крыла; $r_s = r/s$ — безразмерный параметр, представляющий собой отношение радиуса цилиндрической части корпуса r к полуразмаху крыла в рассматриваемом сечении s; θ —угловая координата точки на поверхности корпуса.

Зависимость (6.1.1) справедлива для полета без скольжения и для случая расположения крыла целиком на цилиндрической части корпуса.

Коэффициент давления на подветренной (верхней) части корпуса

$$\bar{p}^{\text{в}}_{\text{т(кр)}} = \bar{p}^{\text{н}}_{\text{т(кр)}} - 4\alpha \operatorname{ctg}\chi \frac{1-r_s^4}{\left[\left(1+r_s^2\right)^2 - 4r_s^2\cos^2\theta\right]^{1/2}}. \quad (6.1.2)$$

Распределение коэффициентов давления по нижней и верхней поверхностям консолей крыла с учетом влияния корпуса соответственно следующее:

$$\bar{p}^{\text{н}}_{\text{кр(т)}} = \frac{2\alpha \operatorname{ctg}\chi\left(1-r_s^4\right)}{\left[\left(1+r_s^2\right)^2 - \left(z_s + r_s^2/z_s\right)^2\right]^{1/2}} + \alpha^2\left[1 - \frac{\left(z_s + r_s^2/z_s^2\right)^2\left(1 - r_s^2/z_s^2\right)^2}{\left(1+r_s^2\right)^2 - \left(z_s + r_s^2/z_s\right)^2}\right]; \quad (6.1.3)$$

$$\bar{p}^{\text{в}}_{\text{кр(т)}} = \bar{p}^{\text{н}}_{\text{кр(т)}} - 4\alpha \operatorname{ctg}\chi \frac{1-r_s^4}{\left[\left(1+r_s^2\right)^2 - \left(z_s - r_s^2/z_s\right)\right]^{1/2}}, \quad (6.1.4)$$

где $z_s = z/s_m$ (z — поперечная координата точки на поверхности консоли; s_m — полуразмах крыла).

Зависимости (6.1.3) и (6.1.4) соответствуют условиям обтекания, при которых расстояние от начала цилиндрической части корпуса до бортовой хорды крыла превышает два диаметра корпуса, и такое крыло практически оказывается расположенным в зоне невозмущенного потока.

Исследование влияния интерференции на распределение давления по корпусу и крылу можно провести путем продувки дренированной модели летательного аппарата в аэродинамической трубе с последующим сравнением этого распределения давления по поверхности изолированных элементов модели (крыла и корпуса), полученных также из опыта в этой аэродинамической трубе при тех же режимах обтекания, т. е. при одинаковых числах $\mathbf{M}_\infty$ и углах атаки α.

Порядок проведения работы

1. Ознакомиться с описанием лабораторной работы и сверхзвуковой аэродинамической установкой, измерительной аппаратурой и приборами и проверить их готовность к работе.
2. Установить крылатую модель летательного аппарата на донной державке в рабочей части трубы под заданным углом атаки.
3. Замерить лабораторным барометром атмосферное давление $p_{\text{атм}}$.
4. Подвести дренажные трубки и шланги к прибору ГРМ и проверить герметичность их соединения.
5. Записать начальные показания на печатающем устройстве ГРМ, соответствующие всем каналам измерения давления, включая измере-

ние статического давления в рабочей части p_∞ и давления в форкамере p_0.

6. Осуществить запуск трубы и после выхода ее на режим установившегося движения воздуха в рабочей части включить печатающее устройство ГРМ, одновременно замерив температуру воздуха в форкамере.

7. Повторить испытания при заданных углах атаки.

8. Снять с модели летательного аппарата крыло, разместить заглушки, обеспечивающие гладкую поверхность изолированного корпуса, и провести продувки при тех же значениях углов атаки.

9. Провести аналогичное испытание на модели изолированного крыла, составленного из двух консолей.

10. Расшифровать показания ГРМ, найти значения коэффициентов давления по поверхности модели и построить соответствующие графики.

11. С помощью зависимостей (6.1.1)÷(6.1.4) рассчитать коэффициенты давления для корпуса и крыла в тех точках, где расположены дренажные отверстия.

12. По этим данным построить для характерных точек зависимости коэффициентов давления от угла атаки и сравнить с ними экспериментальные результаты.

Пример. Рассмотрим результаты испытаний модели летательного аппарата, показанной на рис. 6.1.1. Эти испытания проводились на сверхзвуковой аэродинамической установке с сопловыми вставками, обеспечивающими в рабочей части трубы число $M_\infty = 2{,}68$.

Модель представляет собой плоскую комбинацию, состоящую из цилиндрического корпуса и треугольного крыла. Если вместо консолей этого крыла установить специальные заглушки, то получится модель изолированного корпуса. В вертикальной плоскости симметрии на этом корпусе размещены между консолями крыла 12 дренажных отверстий (по шесть с каждой стороны). Такое расположение отверстий позволяет определять распределение давления в трех сечениях консоли вдоль хорд (рис. 6.1.2).

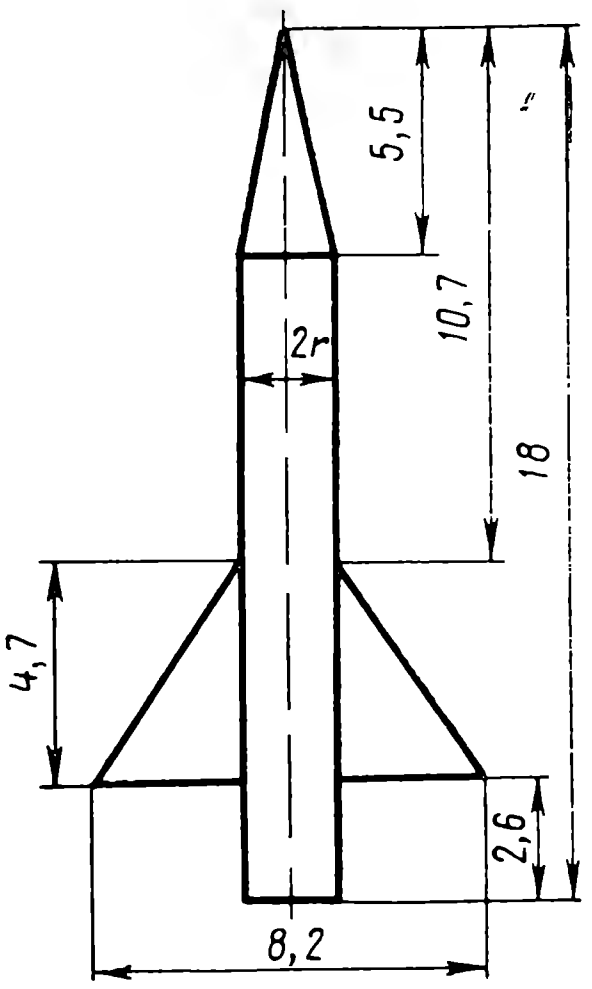


Рис. 6.1.1. Модель летательного аппарата (все размеры даны в долях радиуса корпуса r)

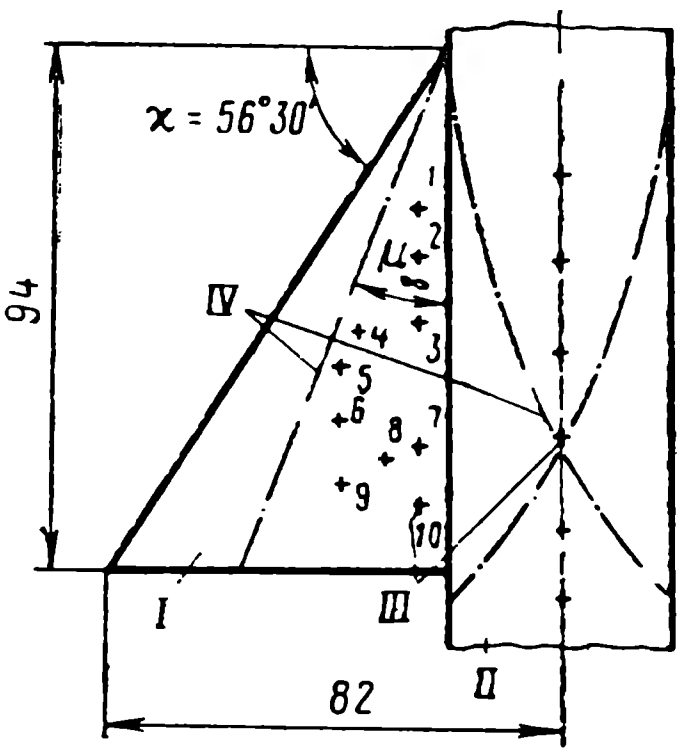


Рис. 6.1.2. Схема расположения дренажных отверстий на крыле и корпусе:

I — консоль крыла; *II* — корпус; *III* — дренажные отверстия; *IV* — линии Маха

Первоначально модели устанавливались в рабочей части трубы на донной державке под углом атаки $\alpha = 0$. Во время эксперимента угол атаки менялся автоматически в соответствии с выбранной программой в пределах от 0 до 12°. Для этой цели использовался дозатор углов атаки (см. § 1.4), управление которым осуществлялось дистанционно с общего пульта аэродинамической установки.

Площадь модели в плане $S_м = 19{,}0 \cdot 10^{-3}$ $м^2$. Загромождение потока этой моделью на максимальном угле атаки $\alpha_{max} = 12°$.

$$\bar{S} = S_м \sin \alpha_{max} / S_т,$$

где $S_т = (a - \delta^*)^2$ — площадь сечения рабочей части трубы с учетом участка площади, занятой пограничным слоем; $a = 0{,}400$ *м* — сторона квадрата рабочей части трубы; $\delta^* = 0{,}016$ *м* — толщина вытеснения турбулентного пограничного слоя в рабочей части трубы (эта величина рассчитана по расстоянию от критического сечения трубы до оси вращения механизма установки углов атаки).

После подстановки данных величина загромождения

$$\bar{S} = \frac{19{,}0 \cdot 10^{-3} \sin 12^\circ}{(0{,}400 - 0{,}016)^2} = 0{,}027,$$

т. е. согласно графику на рис. 1.4.15 вполне допустимая.

Была проведена проверка нахождения модели внутри «ромба невозмущенного потока». Из построения на рис. 6.1.3 видно, что при угле атаки $\alpha_{max} = 12^\circ$ вне ромба находится лишь незначительная часть консоли крыла, что, по-видимому, можно допу-

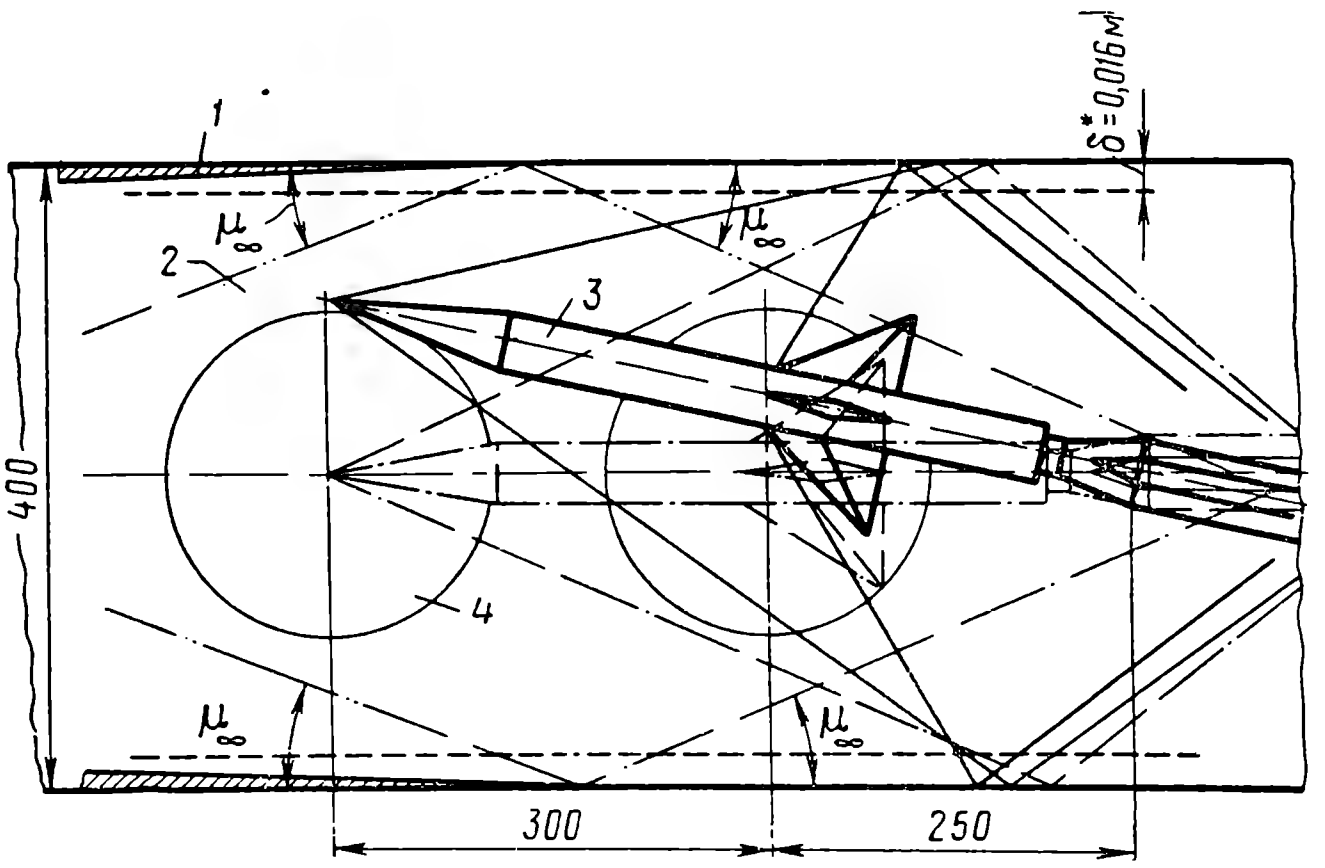


Рис. 6.1.3. Схема размещения модели внутри трубы:

1 — сопловой вкладыш; *2* — ромб равномерной части потока; *3* — положение модели при угле атаки $\alpha = 12^\circ$; *4* — смотровое окно

стить. На этом же рисунке построена система скачков уплотнения, возникающих перед носовой частью модели и крылом и отраженных от стенок рабочей части. Можно констатировать, что отраженные скачки на поверхность модели не попадают. Кроме того, выбранное расположение модели позволяет наблюдать через смотровые отверстия обтекание носовой части модели и крыла, что представляет интерес при проведении исследований аэродинамического спектра. По измеренным давлениям ($p_0 = 3{,}52$ *кГ/см²*, $p_\infty = 0{,}155$ *кГ/см²*) и температуре ($T_0 = 293$ К) были рассчитаны параметры в рабочей части трубы: $M_\infty = 2{,}68$; $T_\infty = 120$ К; $\rho_\infty = 0{,}0450$ *кГ·сек²/м⁴*; $a_\infty = 220$ *м/сек*; $V_\infty = 590$ *м/сек*; $q_\infty = 0{,}778 \cdot 10^4$ *кГ/м²*.

Давления фиксировались на бумажной ленте прибора ГРМ. После расшифровки показаний этого прибора были вычислены коэффициенты давления на изолированных корпусе и крыле, а также на модели всей комбинации. В табл. А приведены значения коэффициентов давления для корпуса, а в табл. Б — для крыла, соответствующие углу атаки $\alpha = 5^\circ$.

Таблица А

	r_s	0,565	0,442	0,362	0,306	0,266	0,234
$\bar{p}^{н}_{т(кр)}$	Изолированный корпус	0,042	0,038	0,036	0,033	0,032	0,032
	С учетом интерференции	0,040	0,039	0,037	0,045	0,050	0,049
$\bar{p}^{в}_{т(кр)}$	Изолированный корпус	—0,048	—0,041	—0,031	—0,025	—0,021	—0,012
	С учетом интерференции	—0,050	—0,045	—0,040	—0,036	—0,040	—0,038

Если сопоставить полученное из опыта распределение давления по корпусу и крылу в их комбинации с соответствующим распределением для изолированных элементов (крыло и корпус), то можно сделать вывод о существенном влиянии интерференции. В частности, давления в зонах взаимного влияния корпуса и крыла (эти зоны ограничены пунктирными линиями на рис. 6.1.2) значительно выше, чем на изолированных элементах. Поэтому эффект интерференции обязательно должен приниматься во внимание при осуществлении аэродинамического расчета летательных аппаратов.

Для сравнения с опытными данными рассмотрим некоторые результаты теоретического расчета интерференции для угла атаки $\alpha=5°$. Коэффициент давления на нижней половине корпуса в точке, для которой $r_s=0{,}266$ и $\theta=90°$, согласно (6.1.1)

$$\bar{p}^{н}_{т(кр)} = 2\frac{5}{57{,}3}\operatorname{ctg}56°30'\times$$

$$\times\frac{1-0{,}266^4}{[(1+0{,}266^2)^2-4\cdot0{,}266^2\cos 90°]^{1/2}}+$$

$$+\frac{5^2}{57{,}3^2}\left[1-\right.$$

$$\left.-\frac{4\cdot0{,}266^2\sin^2 2\cdot90°}{(1+0{,}266^2)^2-4\cdot0{,}266^2\cos 90°}\right]=0{,}112.$$

Соответствующее значение коэффициента на верхней стороне корпуса в точке с теми же данными по (6.1.2)

$$\bar{p}^{в}_{т(кр)} = 0{,}112-4\frac{5}{57{,}3}\operatorname{ctg}56°30'\times$$

$$\times\frac{1-0{,}266^4}{[(1+0{,}266^2)^2-4\cdot0{,}266^2\cos^2 90°]^{1/2}}=$$

$$=-0{,}101.$$

Используя формулы (6.1.3) и (6.1.4), получим следующие коэффициенты давления для крыла (в точке $r_s=0{,}284$ и $z_s=0{,}5$):

$$\bar{p}^{н}_{кр(т)} =$$

$$=\frac{2\frac{5}{57{,}3}\operatorname{ctg}56°30'(1-0{,}284^4)}{[(1+0{,}284^2)^2-(0{,}5+0{,}284^2/0{,}5)^2]^{1/2}}+$$

$$+\left(\frac{5}{57{,}3}\right)^2\left[1-\right.$$

$$\left.-\frac{(0{,}5+0{,}284^2/0{,}5)^2(1-0{,}284^2/0{,}5^2)^2}{(1+0{,}284^2)^2-(0{,}5+0{,}284^2/0{,}5)^2}\right]=$$

$$=0{,}144;$$

$$\bar{p}^{в}_{кр(т)} = 0{,}144-4\frac{5}{57{,}3}\operatorname{ctg}56°30'\times$$

$$\times\frac{1-0{,}284^4}{[(1+0{,}284^2)^2-(0{,}5-0{,}284^2/0{,}5)]^{1/2}}=$$

$$=-0{,}103.$$

Сопоставляя найденные результаты с полученными экспериментальными данными,

Таблица Б

Точки		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{p}^{н}_{кр(т)}$	r_s	0,502	0,446	0,397	0,376	0,350	0,320	0,307	0,295	0,254	0,273
Изолированное крыло		0,115	0,110	0,108	0,113	0,110	0,102	0,095	0,096	0,095	0,092
С учетом интерференции		0,140	0,133	0,130	0,137	0,131	0,124	0,115	0,117	0,116	0,112
$\bar{p}^{в}_{кр(т)}$											
Изолированное крыло		—0,092	—0,091	—0,089	—0,093	—0,092	—0,090	—0,083	—0,083	—0,085	—0,080
С учетом интерференции		—0,115	—	—0,110	—0,099	—	—0,111	—0,108	—0,107	—0,101	—0,105

можно отметить значительное различие. Это указывает на то, что аэродинамическая теория тонких тел, воспроизводя правильную качественную картину обтекания летательных аппаратов, дает возможность лишь весьма ориентировочно определить количественные характеристики такого обтекания и поэтому может использоваться только для грубой оценки этих характеристик.

Работа 6.1.2

Исследование аэродинамической интерференции летательного аппарата при помощи весовых испытаний

Цель работы — определить коэффициенты интерференции летательного аппарата в виде комбинации корпус — крыло и сравнить их с результатами расчета по аэродинамической теории тонкого тела.

Общие сведения

Подъемную силу летательного аппарата $Y_{т.кр}$ можно определить как сумму подъемных сил изолированных корпуса и крыла, а также интерференционных поправок, обусловленных взаимным влиянием корпуса и крыла, т. е.

$$Y_{т.кр} = Y_т + Y_{кр} + \Delta Y_{т(кр)} + \Delta Y_{кр(т)}, \qquad (6.1.5)$$

где $Y_т$ и $Y_{кр}$ — подъемные силы соответственно изолированного корпуса и изолированного крыла; $\Delta Y_{т(кр)}$ — дополнительная подъемная сила корпуса, обусловленная влиянием крыла; $\Delta Y_{кр(т)}$ — дополнительная подъемная сила крыла, обусловленная влиянием корпуса.

Переходя к коэффициентам подъемных сил и вводя понятия о коэффициентах интерференции, вместо (6.1.5) можно написать

$$c_{yт.кр} = Y_{т.кр}/(q_\infty S_{кр}) = (K_{т.и} + K_т + K_{кр})\, c_{yкр}, \qquad (6.1.6)$$

где $S_{кр}$ — площадь изолированных консолей крыла, а величина

$$K_{т.и} = Y_т/Y_{кр} \qquad (6.1.7)$$

представляет собой безразмерный параметр, связывающий подъемные силы (или соответствующие коэффициенты) изолированных корпуса и крыла; другие две величины

$$K_т = \Delta Y_{т(кр)}/Y_{кр}; \qquad (6.1.8)$$

$$K_{кр} = (Y_{кр} + \Delta Y_{кр(т)})/Y_{кр} \qquad (6.1.9)$$

являются коэффициентами интерференции. Для летательного аппарата с треугольным крылом на цилиндрическом корпусе аэродинамическая теория тонкого тела дает следующие формулы для определения этих коэффициентов:

$$K_т = \frac{2}{\pi(\bar{s}_m - 1)^2}\left[\frac{\bar{s}_m^2 - 1}{\bar{s}_m} + \frac{\pi}{2}\left(\bar{s}_m^2 + \frac{1}{\bar{s}_m^2}\right) - \frac{\bar{s}_m^2 + 1}{\bar{s}_m^2}\operatorname{arctg}\bar{s}_m\right]; \qquad (6.1.10)$$

$$K_{кр} = \frac{2}{\pi(\bar{s}_m - 1)^2}\left[\frac{\pi}{4}\,\frac{(\bar{s}_m^2 - 1)^2}{\bar{s}_m^2} - \frac{\bar{s}_m^2 - 1}{\bar{s}_m} + \frac{(\bar{s}_m^2 + 1)^2}{2\,\bar{s}_m^2}\arcsin\frac{\bar{s}_m^2 - 1}{\bar{s}_m^2 + 1}\right], \qquad (6.1.11)$$

где $\bar{s}_m = s_m/r$ — отношение полуразмаха крыла к радиусу цилиндрической части корпуса. Складывая (6.1.10) и (6.1.11), получим соотношение

$$K_т + K_{кр} = (\bar{s}_m + 1)^2/\bar{s}_m^2, \qquad (6.1.12)$$

которое дает возможность определить один из коэффициентов, если найдено значение другого.

Зависимости (6.1.6), (6.1.7) и (6.1.12) позволяют по известным коэффициентам подъемных сил изолированных корпуса и крыла найти коэффициент подъемной силы комбинации крыло—корпус. Причем, как показывают исследования, такой расчет возможен для любой формы крыла в плане. Эти же зависимости пригодны и для «нетонких» комбинаций.

Координата центра давления подъемной силы, индуцированной корпусом на крыле, отсчитываемая от носка бортового сечения консоли, определяется из условия

$$\left(x_{\text{ц.д}}\right)_{\alpha\text{кр(т)}} = -\Delta M_{z\text{кр(т)}}/\Delta Y_{\text{кр(т)}}, \qquad (6.1.13)$$

в котором $\Delta M_{z\text{кр(т)}}$ — момент тангажа (относительно носка бортового сечения консоли) от сил давления, обусловленных влиянием корпуса на крыло. Другая координата центра давления подъемной силы, индуцированной крылом на корпусе,

$$\left(x_{\text{ц.д}}\right)_{\alpha\text{т(кр)}} = -\Delta M_{z\text{т(кр)}}/\Delta Y_{\text{т(кр)}}, \qquad (6.1.14)$$

где $\Delta M_{z\text{т(кр)}}$ — момент тангажа (относительно того же носка бортового сечения консоли) от сил давления, обусловленных влиянием крыла на корпус.

Силы и моменты, входящие в (6.1.13) и (6.1.14), находятся по распределению давления, полученному с помощью (6.1.1) ÷ (6.1.4).

Переходя к безразмерным параметрам (коэффициентам) центров давления, напишем:

$$\left(c_{\text{ц.д}}\right)_{\alpha\text{кр(т)}} = \left(x_{\text{ц.д}}\right)_{\alpha\text{кр(т)}}/b_{\text{кр}}; \qquad (6.1.15)$$

$$\left(c_{\text{ц.д}}\right)_{\alpha\text{т(кр)}} = \left(x_{\text{ц.д}}\right)_{\alpha\text{т(кр)}}/b_{\text{кр}}, \qquad (6.1.16)$$

где $b_{\text{кр}}$ — бортовая хорда консоли крыла. Значения этих коэффициентов приводятся в табл. XV-1-1 [21].

Метод определения коэффициентов аэродинамической интерференции комбинации корпус—крыло путем весовых испытаний заключается в следующем. Модель летательного аппарата устанавливается на весовом элементе и подвергается продувке в аэродинамической трубе, в результате которой находятся ее аэродинамические коэффициенты подъемной силы и центра давления (c_y и $c_{\text{ц.д}}$). Таким же образом находятся значения соответствующих аэродинамических коэффициентов $c_{y\text{т}}$, $(c_{\text{ц.д}})_{\text{т}}$ и $c_{y\text{кр}}$, $(c_{\text{ц.д}})_{\text{кр}}$ для изолированного корпуса этой модели и изолированного крыла, составленного из двух консолей. Это дает, в частности, возможность определять по значениям (6.1.6) и (6.1.7) сумму этих коэффициентов интерференции ($K_{\text{т}}+K_{\text{кр}}$) и сравнивать ее с соответствующим расчетным значением. Для опытного определения каждого из коэффициентов, $K_{\text{т}}$ или $K_{\text{кр}}$, необходимо провести замер сил, приложенных только к корпусу или только к крылу модели комбинации, что вызывает большие технические трудности.

Опытное значение коэффициента центра давления всей комбинации можно сравнить с расчетным значением

$$c_{\text{ц.д}} = \frac{\left(c_{\text{ц.д}}\right)_{\alpha\text{кр(т)}} K_{\text{кр}}\, c_{y\text{кр}} + \left(c_{\text{ц.д}}\right)_{\alpha\text{т(кр)}} K_{\text{т}}\, c_{y\text{кр}} + \left(c_{\text{ц.д}}\right)_{\text{т}} c_{y\text{т}}}{K_{\text{кр}}\, c_{y\text{кр}} + K_{\text{т}}\, c_{y\text{кр}} + c_{y\text{т}}}. \qquad (6.1.17)$$

Входящие сюда коэффициенты $K_{\text{т}}$ и $K_{\text{кр}}$, а также $(c_{\text{ц.д}})_{\alpha\text{кр(т)}}$ и $(c_{\text{ц.д}})_{\alpha\text{т(кр)}}$ вычисляются по приведенным зависимостям (6.1.10), (6.1.11), (6.1.15), (6.1.16) или находятся по соответствующим таблицам.

Порядок проведения работы

1. Ознакомиться с устройством экспериментальной установки, измерительной аппаратурой и приборами.
2. Провести тарировку тензовесов.

3. Установить тензовесы с моделью в рабочей части трубы на донной державке под углом атаки $\alpha=0$.

4. Включить тензостанцию (а при необходимости и осциллограф) и настроить ее, произведя балансировку мостов.

5. Соединить образцовые манометр и вакуумметр соответственно со штуцерами насадка полного напора, установленного в форкамере, и приемника статического давления в рабочей части трубы.

6. Замерить лабораторным барометром атмосферное давление $p_{атм}$.

7. Включить трубу и после выхода ее на режим установившегося обтекания снять показания с гальванометров или записать их на осциллограмме. Одновременно зафиксировать показания датчиков температуры T_0 и давления в форкамере p_0, а также статического давления в рабочей части аэродинамической трубы p_∞.

8. Повторить испытания для заданных углов атаки, после чего прекратить работу трубы и отключить измерительную аппаратуру.

9. Снять с модели крыло, разместить на корпусе заглушки, обеспечивающие гладкую поверхность корпуса, и повторить эксперимент при тех же значениях углов атаки.

10. Установить в рабочей части вместо корпуса модель крыла и вновь провести продувки под прежними углами атаки.

11. По результатам измерений p_0, p_∞ и T_0 определить параметры сверхзвукового потока в рабочей части аэродинамической трубы.

12. Вычислить по результатам весовых испытаний коэффициенты подъемной силы, момента тангажа и центра давления (c_y, m_z и $c_{ц.д}$) крылатой модели, а также изолированных корпуса и крыла и соответствующие коэффициенты интерференции.

13. Сравнить величину суммы этих коэффициентов $K_т+K_{кр}$ с теоретическим значением, найденным по зависимости (6.1.12).

14. Вычислить по формуле (6.1.17) коэффициент $c_{ц.д}$ и сравнить его с экспериментальным значением.

Пример. Рассмотрим результаты лабораторной работы по определению коэффициентов интерференции плоской крылатой модели, форма и размеры которой изображены на рис. 6.1.1. Продувка модели осуществлялась в сверхзвуковой аэродинамической трубе при $M_\infty=2{,}68$ под углом атаки $\alpha=6°$.

По аналогии с лабораторной работой 6.1.1 была осуществлена проверка допустимого «загромождения» потока моделью, правильности расположения в «ромбе равномерной скорости», характера отраженных от стенок трубы скачков уплотнения и возможности вести наблюдения через смотровые окна.

Для замера сил, действующих на модель, применялись двухкомпонентные тензовесы, универсальная восьмиканальная тензостанция типа 8АНЧ-7М и шлейфовый осциллограф Н-700. Модель с тензовесами устанавливалась на донной державке в рабочей части трубы. В результате тарировки тензовесов были найдены соответствующие тарировочные коэффициенты для каналов нормальной (подъемной) силы и продольного момента: $k_N=10^{-1}$ *кГ/мв* и $k_M=10^{-2}$ *кГ·м/мв*.

Показания n_N и n_M, снятые с ленты осциллографа (в милливольтах), и рассчитанные по ним нормальная сила, продольный момент и координата центра давления приведены в табл. А.

По измеренным значениям давления и температуры в форкамере ($p_0=2{,}50$ *кГ/см²*, $T_0=293$ К),

Таблица А

	Крылатая модель (т. кр)	Изолированный корпус (т)	Изолированное крыло (кр)
n_N, *мв*	104	16	58
n_M, *мв*	273	9,2	36,3
$N=n_N k_N$, *кГ*	10,4	1,6	5,8
$-M_z=n_M k_M$, *кГ·м*	2,73	0,0921	0,363
$x_{ц.д}=-M_z/N$, *м*	0,263	0,0575	0,0625

а также статического давления в рабочей части ($p_\infty = 0{,}111$ *кГ/см*^{2}) были рассчитаны параметры набегающего потока:

$$M_\infty = 2{,}68;\ T_\infty = 120\ \text{K};\quad \rho_\infty = 0{,}0323\ \textit{кГ}\cdot\textit{сек}^2/\textit{м}^4;\quad a_\infty = 220\ \textit{м/сек};$$

$$V_\infty = 590\ \textit{м/сек};\quad q_\infty = 0{,}560\cdot 10^4\ \textit{кГ/м}^2.$$

Полагая, что ввиду малости угла атаки нормальные и подъемные силы будут отличаться несущественно, по (6.1.7) был найден безразмерный параметр

$$K_{т.и} = N_т/N_{кр} = 1{,}6/5{,}8 = 0{,}28,$$

а с помощью зависимости (6.1.6) определена сумма коэффициентов интерференции

$$K_т + K_{кр} = N_{т.кр}/N_{кр} - K_{т.и} = 10{,}4/5{,}8 - 0{,}28 = 1{,}5.$$

В соответствии с экспериментальной величиной $x_{ц.д} = 0{,}263$ *м* коэффициент центра давления

$$c_{ц.д} = x_{ц.д}/b_{кр} = 0{,}263/0{,}094 = 2{,}80.$$

Сравним полученные данные с результатами расчета. По формуле (6.1.12)

$$K_т + K_{кр} = (82/20 + 1)^2/(82/20)^2 = 1{,}53;$$

как видим, разница оказалась незначительной.

Прежде чем рассчитать значения коэффициента центра давления по соответствующей зависимости (6.1.17), отыщем входящие в эту зависимость вспомогательные величины. В частности, вычислим коэффициенты интерференции по (6.1.10) и (6.1.11). Учитывая при этом, что $\bar{s}_m = s_m/r = 82/20 = 4{,}1$, находим:

$$K_т = \frac{2}{\pi\,(4{,}1-1)^2}\left[\frac{4{,}1^2-1}{4{,}1} + \frac{\pi}{2}\left(4{,}1^2 + \frac{1}{4{,}1^2}\right) - \frac{4{,}1^2+1}{4{,}1^2}\operatorname{arctg} 4{,}1\right] = 0{,}339;$$

$$K_{кр} = \frac{2}{\pi\,(4{,}1-1)^2}\left[\frac{\pi}{4}\cdot\frac{(4{,}1^2-1)^2}{4{,}1^2} - \frac{4{,}1^2-1}{4{,}1} + \frac{(4{,}1^2+1)^2}{2\cdot 4{,}1^2}\arcsin\frac{4{,}1^2-1}{4{,}1^2+1}\right] = 1{,}19.$$

Аэродинамические характеристики для рассматриваемой модели берем из решения задачи XI.30: $c_{yт} = 0{,}045$; $c_{yкр} = 0{,}168$; $(x_{ц:д})_{\alpha кр(т)} = 13{,}8$; $(x_{ц.д})_{\alpha т(кр)} = 15{,}6$; $(x_{ц:д})_т = 2{,}78$. По координатам центров давления определяем соответствующие безразмерные коэффициенты: $(c_{ц.д})_{\alpha кр(т)} = 13{,}8/4{,}7 = 2{,}93$; $(c_{ц.д})_т = 2{,}78/4{,}7 = 0.591$; $(c_{ц.д})_{\alpha т(кр)} = 15{,}6/4{,}7 = 3{,}32$.

В соответствии с этими данными из (6.1.17) находим

$$c_{ц.д} = \frac{2{,}93\cdot 1{,}19\cdot 0{,}168 + 3{,}32\cdot 0{,}339\cdot 0{,}168 + 0{,}591\cdot 0{,}045}{1{,}19\cdot 0{,}168 + 0{,}339\cdot 0{,}168 + 0{,}045} = 2{,}7.$$

Сравнение показывает, что разница между теоретическим и экспериментальным значениями коэффициента центра давления составляет около 4%.

Работа 6.1.3

Аэродинамические исследования оперения

Цель работы — найти угол скоса потока, коэффициент торможения скорости у оперения, а также коэффициент эффективности оперения модели летательного аппарата.

Общие сведения

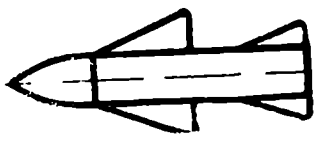
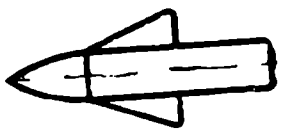
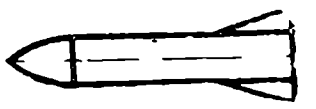
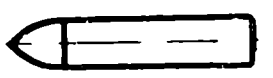
Скос и торможение потока у оперения вызываются влиянием крыла, расположенного на корпусе летательного аппарата перед таким оперением. Оба эти эффекта обусловлены действием закона сохранения количества движения воздуха, обтекающего летательный аппарат. Возникающие при таком обтекании подъемная сила и лобовое сопротивление вызывают отклонение потока в вертикальном направлении и его торможение за крылом.

Знать угол этого отклонения (угол скоса) и коэффициент торможения скорости необходимо для правильного определения аэродинамических характеристик оперения и других органов управления полетом, расположенных за крылом.

Непосредственное определение величины и направления скорости потока за крылом затруднительно. Кроме того, строго говоря, поле скоростей за крылом неравномерное. Поэтому угол скоса и коэффициент торможения скорости определяются косвенным путем и рассматриваются как некоторые средние величины в некоторой области потока у оперения.

Наиболее полно и достоверно скос потока и торможение скорости у оперения могут быть определены в результате систематических исследований интерференции, позволяющих опытным путем находить аэродинамические характеристики (в частности, коэффициенты продольного момента) летательного аппарата в виде плоской комбинации из корпуса, крыла и оперения, а также отдельных элементов, из которых эта комбинация состоит. Такая полная комбинация и ее элементы представлены в табл. А.

Таблица А

Название комбинации летательного аппарата	Корпус—крыло—оперение	Корпус—крыло	Корпус—оперение	Корпус
Форма комбинации				
Обозначение момента тангажа	$m_{z\text{т.кр.оп}}$	$m_{z\text{т.кр}}$	$m_{z\text{т.оп}}$	$m_{z\text{т}}$

Аэродинамические коэффициенты моментов тангажа для комбинаций летательных аппаратов, приведенных в табл. А, определяются следующим образом:

$$m_{z\text{т.кр.оп}} = m_{z\text{т}} + m_{z\text{т(кр)}} + m_{z\text{т(оп)}} + m_{z\text{кр(т)}} + m_{z\text{оп(т)}} + m_{z\text{(т.оп)в}}; \quad (6.1.18)$$

$$m_{z\text{т.кр}} = m_{z\text{т}} + m_{z\text{т(кр)}} + m_{z\text{кр(т)}}; \quad (6.1.19)$$

$$m_{z\text{т.оп}} = m_{z\text{т}} + m_{z\text{т(оп)}} + m_{z\text{оп(т)}}. \quad (6.1.20)$$

В этих формулах для соответствующих моментов введены те же индексы, что и для компонентов подъемной силы в работе 6.1.2 (например, $m_{z\text{т(кр)}}$ — коэффициент момента тангажа, возникающего на корпусе за счет интерференции с крылом, а $m_{z\text{(т:оп)в}}$ — коэффициент момента тангажа, вызванный интерференцией крыла с оперением, установленным позади его на корпусе и обусловленный взаимодействием вихревой пелены, сбегающей с крыла, как с оперением, так и с корпусом).

Из соотношений (6.1.18) ÷ (6.1.20) можно найти по экспериментальным значениям ($m_{z\text{т.кр.оп}}$, $m_{z\text{т.кр}}$, $m_{z\text{т.оп}}$, $m_{z\text{т}}$) лишь три величины: $m_{z\text{(т.оп)в}}$, $[m_{z\text{кр(т)}} + m_{z\text{т(кр)}}]$ и $[m_{z\text{оп(т)}} + m_{z\text{т(оп)}}]$. Определить же отдельные слагаемые в двух последних величинах не представляется возможным. Однако с помощью аэродинамической теории тонкого тела можно провести такое приближенное определение.

Последовательность расчета коэффициентов $m_{z\text{оп(т.кр)}}$ и $m_{z\text{оп(т)}}$, необходимых для нахождения угла скоса и коэффициента торможения потока, следующая. Из уравнений (6.1.18) ÷ (6.1.20) находим коэффициент

$$m_{z\text{(т.оп)в}} = m_{z\text{т.кр.оп}} - m_{z\text{т.кр}} + m_{z\text{т}} - m_{z\text{т.оп}}. \quad (6.1.21)$$

Далее подсчитываем значения

$$m_{z\text{оп(т)}} = \frac{m_{z\ \text{т.оп}} - m_{z\text{т}}}{1 + \dfrac{K_{\text{т}}\,(x_{\text{ц.д}}\,\alpha / b_{\text{кр}})_{\text{т(кр)}}}{K_{\text{кр}}\,(x_{\text{ц.д}}\alpha / b_{\text{кр}})_{\text{кр(т)}}}} \quad (6.1.22)$$

$$m_{z\text{оп(т.кр)}} = m_{z\text{оп(т)}} + m_{z\text{(т.оп)в}}. \qquad (6.1.23)$$

Для определения угла скоса потока ε и коэффициента торможения скорости $k_{\text{оп}}$ используется следующая зависимость:

$$m_{z\text{оп(т.кр)}} = k_{\text{оп}} m^{\alpha_{\text{оп}}}_{z\text{оп(т)}} (\alpha \pm \delta_{\text{оп}} - \varepsilon), \qquad (6.1.24)$$

в которой производная от коэффициента момента $\partial m_{z\text{оп(т)}}/\partial\alpha_{\text{оп}} = m^{\alpha_{\text{оп}}}_{z\text{оп(т)}}$ равняется (в линейном диапазоне изменения $m_{z\text{оп(т)}}$ от $\alpha_{\text{оп}}$) отношению $m_{z\text{оп(т)}}/\alpha_{\text{оп}}$ и определяется при том же значении угла установки оперения $\delta_{\text{оп}}$, что и коэффициент $m_{z\text{оп(т.кр)}}$.

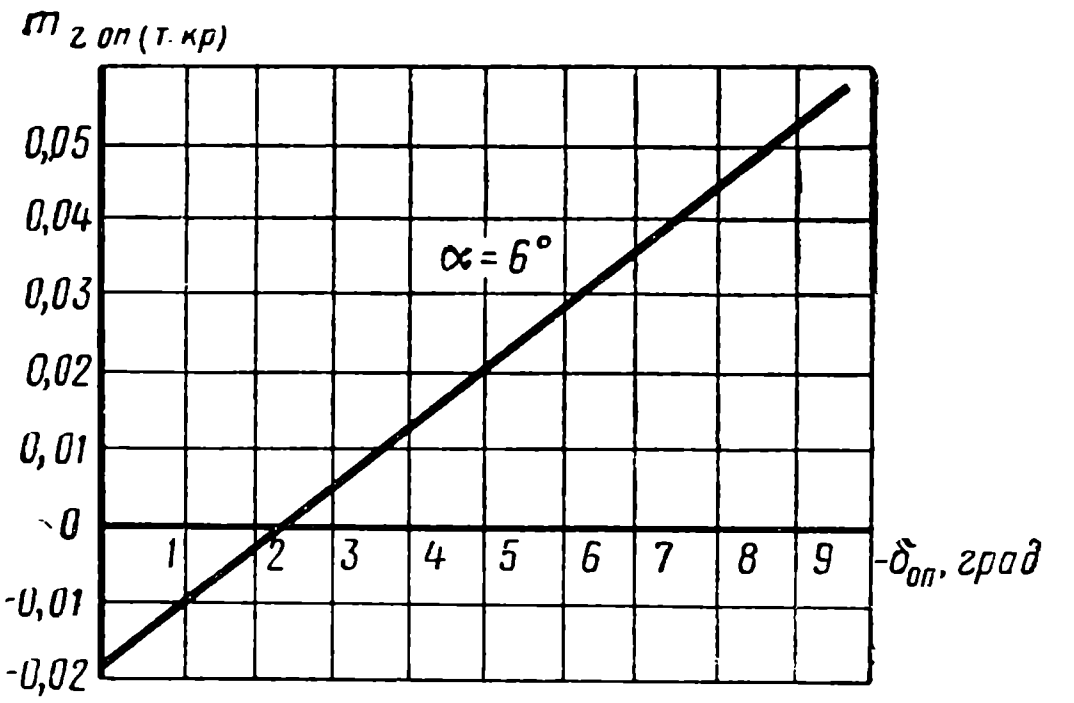


Рис. 6.1.4. График зависимости коэффициента $m_{z\text{оп(т:кр)}}$ при различных углах поворота оперения $\delta_{\text{оп}}$

Угол скоса потока ε находится из условия равенства нулю коэффициента $m_{z\text{оп(т.кр)}}$. Как следует из зависимости (6.1.24), в этом случае угол атаки оперения $\alpha_{\text{оп}} = \alpha \pm \delta_{\text{оп}} - \varepsilon = 0$, т. е.

$$\varepsilon = \alpha \pm \delta_{\text{оп}}, \qquad (6.1.25)$$

а поток, скошенный крылом, идет параллельно поверхности оперения.

Чтобы подсчитать ε из выражения (6.1.25), с помощью графического построения находится такая пара значений углов α и $\delta_{\text{оп}}$, при которых кривая зависимости коэффициента $m_{z\text{оп(т.кр)}} = f(\alpha, \delta_{\text{оп}})$ от этих углов пересекает ось абсцисс, где $m_{z\text{оп(т.кр)}} = 0$ (рис. 6.1.4). Построение серии графиков $m_{z\text{оп(т.кр)}} = f(\alpha, \delta_{\text{оп}})$ позволяет получить зависимость угла скоса потока ε от угла атаки α.

После определения ε возможно из (6.1.24) найти коэффициент торможения потока:

$$k_{\text{оп}} = \frac{m_{z\text{оп(т.кр)}}}{m^{\alpha_{\text{оп}}}_{z\text{оп(т)}} (\alpha \pm \delta_{\text{оп}} - \varepsilon)}. \qquad (6.1.26)$$

При этом в формулу (6.1.26) следует подставлять значения коэффициентов $m_{z\text{оп(т.кр)}}$ и $m^{\alpha_{\text{оп}}}_{z\text{оп(т)}}$, взятые для такого угла поворота оперения $\delta_{\text{оп}}$, который будет подставляться в знаменатель формулы (6.1.26). Отметим, что коэффициент торможения потока для рассматриваемого летательного аппарата является функцией угла атаки α и не зависит от угла поворота оперения $\delta_{\text{оп}}$.

Степень интерференции крыла с оперением характеризуется коэффициентом эффективности оперения

$$\eta_{\text{оп}} = (N_{\text{т.кр.оп}} - N_{\text{т.кр}})/(N_{\text{т.оп}} - N_{\text{т}}), \qquad (6.1.27)$$

который равен отношению приращения нормальной силы при установке хвостового оперения на комбинацию корпус — крыло к приращению нормальной силы при установке хвостового оперения на изолированный корпус. Коэффициент эффективности оперения показывает, на сколько уменьшается несущая способность оперения в результате интерференции с крыльями.

Порядок проведения работы

1. Ознакомиться с устройством экспериментальной установки и проверить готовность ее к работе.
2. Провести тарировку тензовесов.

3. Установить тензодержавку и модель летательного аппарата (с крыльями и оперением) в рабочей части трубы под углом атаки $\alpha = 0$; при этом угол установки оперения должен быть равен нулю ($\delta_{оп} = 0$).

4. Включить тензостанцию (а при необходимости и осциллограф) и настроить ее, произведя балансировку мостов.

5. Соединить образцовые манометр и вакуумметр соответственно со штуцерами насадка полного напора, установленного в форкамере, и приемника статического давления в рабочей части трубы.

6. Замерить лабораторным барометром атмосферное давление.

7. Включить трубу и после выхода ее на режим установившегося обтекания снять показания с гальванометров или записать эти показания на осциллограмме, включив предварительно протяжку ленты осциллографа. Одновременно зафиксировать показания датчиков температуры T_0 и давления p_0 в форкамере, а также замерить давление в рабочей части трубы p_∞. При наличии соответствующих датчиков их показания можно также записывать на осциллограмме.

8. Провести указанные в п. 7 замеры при требуемых углах атаки, устанавливая их последовательно с помощью соответствующего приспособления.

9. Прекратить работу трубы и отключить измерительную аппаратуру.

10. Снять тензодержавку с моделью. Изменяя угол установки оперения согласно программе эксперимента, повторить исследования (см. п. п. 2÷4, 6÷9) при тех же углах атаки.

11. Провести аналогичные эксперименты по продувке модели летательного аппарата, имеющего только оперение. При этом в местах установки крыла должны быть размещены заглушки, обеспечивающие гладкость поверхности корпуса. Диапазон изменения углов поворота оперения ($\delta_{оп}$) и углов атаки (α) тот же, что и при исследовании модели с крылом.

12. Снять с модели оперение, разместить на корпусе соответствующие заглушки и повторить исследование обтекания изолированного корпуса для прежнего диапазона углов атаки.

13. Снять с модели заглушки в местах посадки крыла, вновь установить крыло и осуществить весовые испытания неоперенной модели с крылом.

14. По результатам измерения T_0, p_0, p_∞ определить параметры сверхзвукового потока в рабочей части аэродинамической трубы.

15. Расшифровать показания осциллографа (или гальванометров) и с помощью тарировочных зависимостей найти значения соответствующих коэффициентов нормальной силы c_N и момента тангажа m_z. По результатам этих расчетов построить графики функции: $m_{zт.кр.оп} \times \times (\alpha, \delta_{оп})$; $m_{zт.кр}(\alpha)$; $m_{zт.оп}(\alpha, \delta_{оп})$; $m_{z(т)}(\alpha)$.

16. Вычислить коэффициенты эффективности оперения, а также значения угла скоса потока ε и коэффициента торможения скорости у оперения $k_{оп}$ для различных углов атаки.

Пример. Рассмотрим результаты лабораторной работы по определению угла скоса потока, а также коэффициентов эффективности оперения и торможения скорости при сверхзвуковом обтекании модели летательного аппарата, изображенной на рис. 6.1.5. Площадь в плане этой модели $S_м = 22 \cdot 10^{-3}$ $м^2$. Угол атаки, при котором велась продувка, $\alpha = 6°$. Соответствующее «загромождение» рабочей части трубы моделью определялось отношением $\bar{S} = S_м / S_т$ (где $S_т = 0{,}16$ $м^2$ — площадь поперечного сечения рабочей части):

$$\bar{S} = \frac{S_м \sin \alpha_{max}}{S_т} = \frac{22 \cdot 10^{-3} \sin 6°}{0{,}16} = 0{,}014.$$

Полученная величина, определяющая загромождение потока, допустима для условий продувки в трубе с закрытой рабочей частью.

Для измерения нормальной силы и момента тангажа использовалась двухкомпонентная весовая тензометрическая державка. До начала эксперимента была произведена ее тарировка и определены тарировочные коэффициенты $k_N = 10^{-1}$ *кГ/мв* и $k_M = 10^{-2}$ *кГ·м/мв*. После нахождения тарировочных коэффициентов производилась балансировка электрических мостов на универсальной восьмиканальной тензостанции типа 8АНЧ-7М, а регистрация электрических сигналов с тензодатчиков — на осциллографе типа Н-700. После включения трубы производилась запись показаний тензостанции на ленте осциллографа.

По результатам измерений давления и температуры торможения ($p_0 = 2{,}65$ *кГ/см²*, $T_0 = 289$ К), а также давления в рабочей части ($p_\infty = 0{,}115$ *кГ/см²*) определялись параметры сверхзвукового потока:

$$M_\infty = 2{,}71; \quad T_\infty = 117\ \text{К}; \quad \rho_\infty = 0{,}0343\ \text{кГ·сек}^2/\text{м}^4;$$

$$a_\infty = 218\ \text{м/сек}; \quad V_\infty = 590\ \text{м/сек};$$

$$q_\infty = 0{,}596 \cdot 10^4\ \text{кГ/м}^2.$$

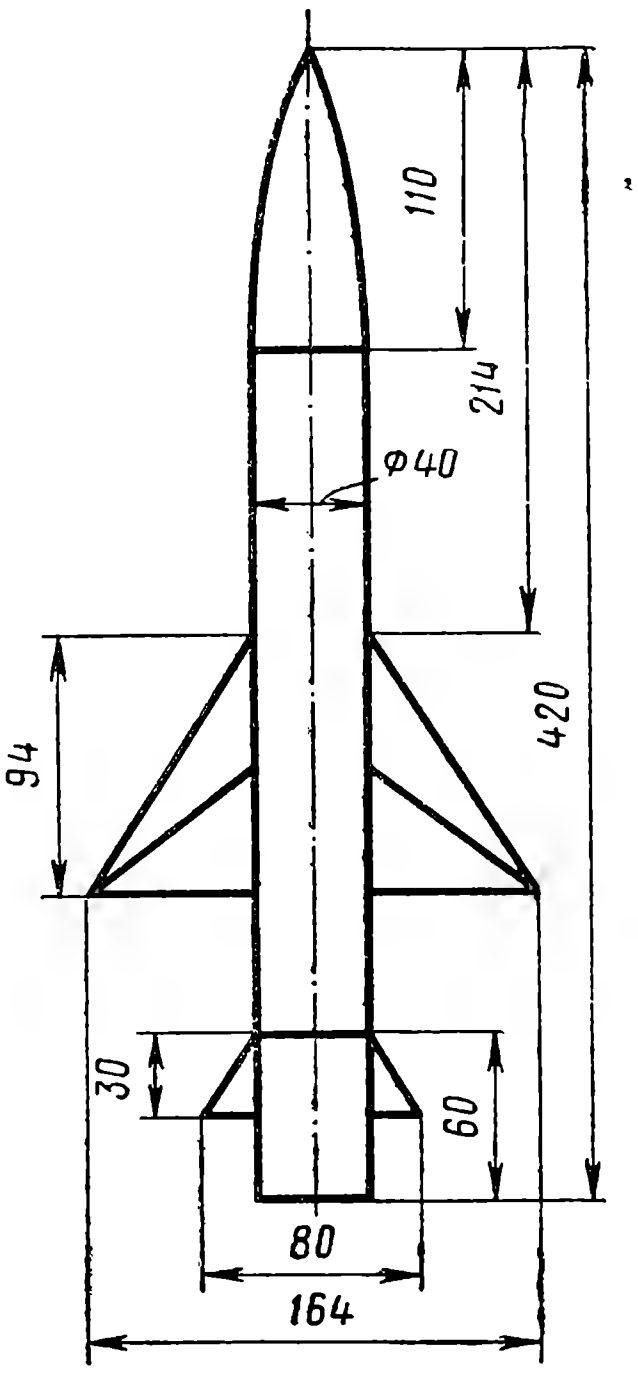


Рис. 6.1.5. Модель крылатой оперенной ракеты

Данные, полученные из эксперимента для угла атаки $\alpha = 6°$ и углов отклонения оперения $\delta_{оп} = 0$; $-9{,}4°$, а также расчет координаты $x_{ц:д}$ и коэффициентов c_N и m_z представлены в табл. Б.

Используя (6.1.27) и экспериментальные значения нормальных сил для соответствующих комбинаций, вычисляем коэффициенты эффективности оперения:

$$\eta_{оп} = \frac{9{,}6 - 10{,}3}{1{,}10 - 1{,}57} = 1{,}49 \quad (\delta = -9{,}4°);$$

$$\eta_{оп} = \frac{10{,}9 - 10{,}3}{2{,}65 - 1{,}57} = 0{,}555 \quad (\delta = 0).$$

Значения аэродинамических коэффициентов вычисляются по (6.1.21), (6.1.22) и (6.1.23).

Для $\delta = 0$ $(\alpha = 6°)$:

$$m_{z(\text{т.оп})\text{в}} = -0{,}886 + 0{,}847 - 0{,}089 + 0{,}155 = 0{,}027;$$

$$m_{z\,оп(\text{т})} = \frac{-0{,}155 + 0{,}089}{1 + \dfrac{0{,}8}{1{,}45} \cdot \dfrac{0{,}598}{0{,}647}} = -0{,}044;$$

$$m^{\alpha}_{z\,оп(\text{т})} = -0{,}044/6° = -0{,}0074\ 1/\text{град};$$

$$m_{z\,оп(\text{т.кр})} = -0{,}044 + 0{,}027 = -0{,}017.$$

Для $\delta = -9{,}4°$ $(\alpha = 6°)$:

$$m_{z\,(\text{т.оп})\text{в}} = -0{,}768 + 0{,}847 + 0{,}031 - 0{,}089 = 0{,}021;$$

$$m_{z\,оп(\text{т})} = \frac{-0{,}031 + 0{,}089}{1 + \dfrac{0{,}8}{1{,}45} \cdot \dfrac{0{,}598}{0{,}647}} = 0{,}038;$$

$$m^{\alpha}_{z\,оп(\text{т})} = 0{,}038/6° = -0{,}0063\ 1/\text{град};$$

$$m_{z\,оп(\text{т.кр})} = 0{,}038 + 0{,}021 = 0{,}059.$$

Строится зависимость $m_{zоп(\text{т.кр})}$ (α, δ), показанная на рис. 6.1.4. Из условия равенства $m_{zоп(\text{т.кр})} = 0$ определяется угол скоса потока $\varepsilon = 3{,}5°$. По (6.1.26) находится коэффициент торможения потока:

$$k_{оп} = \frac{-0{,}017}{-0{,}0074\,(6 - 0 - 3{,}5)} = 0{,}92.$$

Таблица Б

Комбинации / Величины	Корпус—крыло—оперение		Корпус—крыло		Корпус—оперение		Корпус	
α, *град*	6		6		6		6	
δ, *град*	0	—9,4	0	—9,4	0	—9,4	0	—9,4
n_M,	278	242	266	266	48,7	9,75	28	28
M, *кГ·м*	—2,78	—2,42	—2,66	—2,66	—0,487	—0,0975	—0,28	—0,28
n_N	109	96	103	103	26,5	11,0	15,7	15,7
N, *кГ*	10,9	9,60	10,3	10,3	2,65	1,10	1,57	1,57
$x_{ц.д}$, *м*	0,255	0,252	0,258	0,257	0,184	0,0885	0,178	0,178
c_N	1,45	1,28	1,38	1,38	0,354	0,147	0,21	0,21
m_z	—0,886	—0,768	—0,847	—0,847	—0,155	—0,031	0,089	0,089

Работа 6.2.1

Измерение параметров статической устойчивости

Цель работы — по испытаниям в сверхзвуковой трубе определить параметры продольной статической устойчивости модели летательного аппарата, а также эффективность оперения при различных углах отклонения аэродинамических рулей.

Общие сведения

При движении летательного аппарата случайные возмущения (начальный толчок при сходе со стартового устройства, порыв ветра, отклонения от заданного режима работы двигательной установки и др.) могут привести к изменению углов атаки α, скольжения β и крена γ. Возникающие вследствие этого моменты после прекращения действия возмущений приводят к дальнейшему изменению этих углов. Если при этом изменении углы α, β и γ стремятся к первоначальным значениям, то полет будет статически устойчивым, если же отклонения углов продолжают возрастать, то такой полет будет статически неустойчивым. При неизменности углов имеем случай статической нейтральности.

В соответствии с отклонениями значений углов α, β и γ статическая устойчивость подразделяется на продольную, поперечную и статическую устойчивость пути. Иногда, учитывая взаимозависимость движения рыскания и крена, вместо путевой и поперечной устойчивостей рассматривают боковую статическую устойчивость.

При наличии продольной статической устойчивости возникающий продольный момент будет восстанавливающим, т. е. будет стремиться вернуть угол атаки к прежнему значению. В этом случае направление момента тангажа M_z (величине этого момента соответствует аэродинамический коэффициент m_z) будет противоположно направлению изменения угла α. Следовательно, условием продольной статической устойчивости будет неравенство $\partial M_z/\partial\alpha<0$ (или $\partial m_z/\partial\alpha = m_z^\alpha<0$).

В случае продольной статической неустойчивости возникает опрокидывающий момент, который стремится еще больше изменить угол атаки. Поэтому условие продольной статической неустойчивости имеет вид $\partial M_z/\partial\alpha>0$ (или $\partial m_z/\partial\alpha=m_z^\alpha>0$).

Статические устойчивость и неустойчивость пути, очевидно, будут характеризоваться соответственно неравенствами $\partial M_y/\partial\beta<0$ (или $\partial m_y/\partial\beta<0$) и $\partial M_y/\partial\beta>0$ (или $\partial m_y/\partial\beta>0$). В первом случае направления изменений момента рыскания и угла скольжения различны, во-втором — одинаковы, а соответствующие моменты будут восстанавливающими и опрокидывающими.

Мерой поперечной статической устойчивости (статической устойчивости крена) является производная $\partial M_x/\partial\beta$ (или $\partial m_x/\partial\beta=m_x^\beta$), так как у летательных аппаратов обычно момент крена появляется в полете с углом атаки лишь при возникновении угла скольжения. Если производная $m_x^\beta<0$, то летательный аппарат обладает поперечной устойчивостью, а при $m_x^\beta>0$ имеет место поперечная неустойчивость.

Летательный аппарат может быть нейтрален в отношении продольной статической устойчивости, устойчивости пути или поперечной статической устойчивости, если справедливы равенства $m_z^\alpha=0$, $m_y^\beta=0$ и $m_x^\beta=0$.

В качестве характеристики продольной статической устойчивости можно принять разность $\bar{c}_{\text{ц.д}}-\bar{x}_{\text{ц.м}}$ (где $\bar{c}_{\text{ц.д}}=x_{\text{ц.д}}/l$, $\bar{x}_{\text{ц.м}}=x_{\text{ц.м}}/l$; $x_{\text{ц.д}}$ и $x_{\text{ц.м}}$ — соответственно расстояния от одной и той же точки, например носка головной части, до центра давления и центра массы; l — характерный линейный размер летательного аппарата). Если разность $x_{\text{ц.д}}-x_{\text{ц.м}}$, определяющая запас статической устойчивости, положительна, т. е. центр давления расположен за центром массы, то полет будет статически устойчивым; при переднем расположении центра массы $[(\bar{c}_{\text{ц.д}}-\bar{x}_{\text{ц.м}})<0]$ полет статически неустойчив.

В случае, когда продольный момент вычисляется относительно центра массы, то запасом статической устойчивости будет параметр $\bar{c}_{\text{ц.д}}=-\partial m_z/\partial c_N$, называемый коэффициентом продольной устойчивости. При $\partial m_z/\partial c_N<0$ полет будет статически устойчивым, а при $\partial m_z/\partial c_N>0$ — статически неустойчивым.

Для несимметричных конструкций (или для летательных аппаратов симметричной формы, но с отклоненными рулями) в качестве критерия статической устойчивости применяют безразмерное фокусное расстояние $\bar{x}_F=x_F/l=-\partial m_z/\partial c_N$. При заднем относительно центра массы расположении фокуса полет будет статически устойчивым, при переднем — статически неустойчивым.

Аналогично рассматриваются понятия запаса и коэффициента статической устойчивости пути, но при этом положение центра давления определяется не в плоскости угла атаки, а в плоскости угла скольжения и, например, коэффициент устойчивости пути будет находиться по формуле $\bar{c}_{\text{ц.д}}=-\partial m_y/\partial c_z$.

При рассмотрении поперечной статической устойчивости ограничиваются определением величин m_x^{β} при различных фиксированных значениях углов атаки и углов отклонения рулей δ. Для обеспечения статически устойчивого прямолинейного полета в продольной плоскости с требуемым углом атаки необходимо выполнять условие балансировки, позволяющее найти соответствующее отклонение рулей высоты:

$$m_z^{\alpha}\alpha+m_z^{\delta}\delta+m_{z0}=0.$$

Из этого уравнения находят балансировочную характеристику, представляющую собой отношение угла атаки α к углу отклонения рулевого органа δ. Для симметричной конструкции такая характеристика определяется формулой

$$\alpha/\delta=-m_z^{\delta}/m_z^{\alpha}.$$

С целью обеспечения требуемой статической устойчивости крыло располагают в определенном месте корпуса, а в случае необходимости прибегают либо к установке хвостового оперения, играющего роль стабилизатора, либо небольших крыльев в носовой части для создания дестабилизирующего эффекта. Характеристики статической устойчивости летательных аппаратов могут быть рассчитаны различными методами. Рассмотрим один из таких методов, относящихся к плоской конфигурации (см. рис. 6.1.5). Согласно этому методу находятся аэродинамические характеристики изолированных корпуса, крыла и оперения, а затем вычисляются соответствующие интерференционные поправки. При этом для определения аэродинамических характеристик оперения необходимо либо найти угол скоса потока за крылом ε и по эффективному значению угла атаки

$$\alpha_{\text{э}}=\alpha+\delta_{\text{оп}}-\varepsilon$$

рассчитать эти характеристики с учетом интерференции для заданного угла установки оперения ($\delta_{\text{оп}}$), либо воспользоваться соответствующи-

ми расчетными зависимостями из аэродинамической теории тонкого тела.

Координата центра давления оперения изменяется под влиянием вихрей крыла, но с достаточным приближением можно считать, что точка приложения нормальной силы, обусловленной вихрями крыла, совпадает с центром давления оперения для комбинации корпус — оперение, т. е.

$$(x_{\text{ц.д}\alpha})_{\text{оп(в)}} = (x_{\text{ц.д}\alpha})_{\text{оп(т)}}. \qquad (6.2.1)$$

В случае отклонения поворотного крыла (оперения) от нейтрального положения на некоторый угол характеристики статической устойчивости изменяются. Это происходит как за счет появления нормальной силы на самом руле (крыле или оперении), так и от изменившихся условий интерференции.

Координата центра давления для полной комбинации корпус — крыло — оперение

$$x_{\text{ц.д}} = \frac{(c_N)_{\text{т}}(x_{\text{ц.д}})_{\text{т}} + (c_N)_{\text{кр(т)}}(x_{\text{ц.д}})_{\text{кр(т)}} + (c_N)_{\text{т(кр)}}(x_{\text{ц.д}})_{\text{т(кр)}} + (c_N)_{\text{т(оп)}}(x_{\text{ц.д}})_{\text{т(оп)}} +}{(c_N)_{\text{т}} + (c_N)_{\text{кр(т)}} + (c_N)_{\text{т(кр)}} + (c_N)_{\text{т(оп)}} +} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{+ (c_N)_{\text{оп(т)}}(x_{\text{ц.д}})_{\text{оп(т)}} + (c_N)_{\text{оп(в)}}(x_{\text{ц.д}})_{\text{оп(в)}}}{+ (c_N)_{\text{оп(т)}} + (c_N)_{\text{оп(в)}}}, \qquad (6.2.2)$$

где $(c_N)_{\text{т}}$ — коэффициент подъемной силы носовой части корпуса; $(c_N)_{\text{кр(т)}}$ — коэффициент подъемной силы крыла с учетом влияния корпуса и т. д.; $(x_{\text{ц.д}})_{\text{т}}$ — координата центра давления носовой части корпуса; $(x_{\text{ц.д}})_{\text{кр(т)}}$ — координата центра давления крыла с учетом влияния корпуса и т. д.; индекс «оп» относит все величины к оперению.

Входящие в формулу (6.2.2) величины определяются с помощью следующих зависимостей:

$$(c_N)_{\text{кр(т)}} = [K_{\text{кр}}\alpha + k_{\text{кр}}(\delta_e^{\text{т}})_{\text{кр}}](c_N^{\alpha})_{\text{кр}}; \qquad (6.2.3)$$

$$(c_N)_{\text{т(кр)}} = [K_{\text{т}}\alpha + k_{\text{т}}(\delta_e)_{\text{кр}}](c_N^{\alpha})_{\text{кр}}; \qquad (6.2.4)$$

$$(c_N)_{\text{оп(т)}} = [K_{\text{оп}}\alpha + k_{\text{оп}}(\delta_e)_{\text{оп}}](c_N^{\alpha})_{\text{оп}}(S_{\text{оп}}/S_{\text{кр}}); \qquad (6.2.5)$$

$$(c_N)_{\text{т(оп)}} = [(K_{\text{т}})_{\text{оп}}\alpha + (k_{\text{т}})_{\text{оп}}(\delta_e)_{\text{оп}}](c_N^{\alpha})_{\text{оп}}(S_{\text{оп}}/S_{\text{кр}}); \qquad (6.2.6)$$

$$(c_N)_{\text{оп(в)}} = i_{\text{оп}}\frac{(c_N^{\alpha})_{\text{кр}}(c_N^{\alpha})_{\text{оп}}[K_{\text{кр}}\alpha + k_{\text{кр}}(\delta_e)_{\text{кр}}](s_m - r)_{\text{оп}}}{2\pi\lambda_{\text{оп}}(z_v - r)_{\text{кр}}}, \qquad (6.2.7)$$

где кроме ранее встречавшихся обозначений $k_{\text{кр}}$, $k_{\text{оп}}$, $k_{\text{т}}$, $(k_{\text{т}})_{\text{оп}}$ — коэффициенты интерференции, обусловленные отклонением рулей на угол $(\delta_e)_{\text{кр}}$ (поворотного крыла) или $(\delta_e)_{\text{оп}}$ (поворотного оперения) и определяемые в первом приближении из табл. XV-3-1 книги [21] по величине r/s_m:

$$(x_{\text{ц.д}\delta})_{\text{кр(т)}} = x_{\text{кр}} + \frac{K_{\text{кр}}\alpha(x_{\text{ц.д}\alpha}/b_{\text{кр}})_{\text{кр(т)}} + k_{\text{кр}}(\delta_e)_{\text{кр}}(x_{\text{ц.д}\,\delta}/b_{\text{кр}})_{\text{кр(т)}}}{K_{\text{кр}}\alpha + k_{\text{кр}}(\delta_e)_{\text{кр}}} b_{\text{кр}}, \qquad (6.2.8)$$

где $x_{\text{кр}}$ — расстояние от носка летательного аппарата до передней точки корневой хорды консоли крыла; $(x_{\text{ц.д}\alpha}/b_{\text{кр}})_{\text{кр(т)}}$ — относительная координата центра давления крыла в присутствии корпуса при наличии угла атаки α (определяется по табл. XV-1-1 книги [21]); $(x_{\text{ц.д}\,\delta}/b_{\text{кр}})_{\text{кр(т)}}$ — то же, но при наличии угла $(\delta_e)_{\text{кр}}$ отклонения крыла (определяется по табл. XV-3-1 книги [21] или с помощью равенства $(x_{\text{ц.д}\delta})_{\text{кр(т)}} = (x_{\text{ц.д}\delta})_{\text{кр}}$).

Величина $(x_{\text{ц.д}\delta})_{\text{оп(т)}}$ определяется из выражения, аналогичного (6.2.8). Для определения $(x_{\text{ц.д}\alpha})_{\text{т(кр)}}$ служит формула

$$(x_{\text{ц.д}\alpha})_{\text{т(кр)}} = x_{\text{кр}} + (x_{\text{ц.д}\alpha}/b_{\text{кр}})_{\text{т(кр)}} b_{\text{кр}}. \qquad (6.2.9)$$

При расчете положения центра даления на корпусе с учетом влияния крыла (оперения) принимается, что центр давления нечувствителен к тому, развивается ли подъемная сила от угла атаки или от угла поворота крыла (оперения), т. е. $(x_{\text{ц.д}\alpha})_{\text{т(кр)}} = (x_{\text{ц.д}\delta})_{\text{т(кр)}}$, а

$$(x_{\text{ц.д}})_{\text{т(кр)}} = b_{\text{кр}} \frac{K_{\text{т}} \alpha (x_{\text{ц.д}\alpha}/b_{\text{кр}})_{\text{т(кр)}} + k_{\text{т}} (\delta_e)_{\text{кр}} (x_{\text{ц.д}\delta}/b_{\text{кр}})_{\text{т(кр)}}}{K_{\text{т}} \alpha + k_{\text{т}} (\delta_e)_{\text{кр}}}. \qquad (6.2.10)$$

Значение $(x_{\text{ц.д}})_{\text{т(оп)}}$, входящее в (6.2.2), определяется аналогично (6.2.10).

О работе органов управления судят по величинам продольной, путевой и поперечной эффективностей.

Продольная эффективность определяется значением производной $\partial m_z/\partial\delta_e$ при симметричном отклонении горизонтальных консолей. Обычно $\partial m_z/\partial\delta_e<0$ для хвостового оперения и $\partial m_z/\partial\delta_e>0$ для органа управления, расположенного впереди центра массы (схема «утка»). Если m_z определен относительно центра массы летательного аппарата, то

$$\frac{\partial m_z}{\partial\delta_e} = \frac{b_{\text{кр}}}{l}\left\{k_{\text{кр}}\left[\left(\frac{x_{\text{ц.д}\delta}}{b_{\text{кр}}}\right)_{\text{кр}} + \left(\frac{x_{\text{ц.т}}}{b_{\text{кр}}}\right)_{\text{кр}}\right] + k_{\text{т}}\left[\left(\frac{x_{\text{ц.д}\alpha}}{b_{\text{кр}}}\right)_{\text{т(кр)}} + \left(\frac{x_{\text{ц.т}}}{b_{\text{кр}}}\right)_{\text{кр}}\right]\right\}(c_N^{\alpha})_{\text{кр}}, \qquad (6.2.11)$$

где l — характерная длина (например, длина корпуса или размах крыла).

В случае, когда перед органом управления расположен какой-либо несущий элемент (крыло, дестабилизатор или др.), необходимо учесть влияние на величину m_z интерференции с этим элементом.

Путевая эффективность определяется значением производной $\partial m_y/\partial\delta_r$ при симметричном отклонении вертикальных консолей. Расчет величины $\partial m_y/\partial\delta_r$ аналогичен расчету продольной эффективности, но производится в плоскости скольжения.

Поперечная эффективность определяется значением производной $\partial m_x/\partial\delta_a$ при дифференциальном отклонении горизонтальных органов управления (возможно такое отклонение вертикальных или даже наклонных органов управления в Х-образной схеме). На основании зависимостей, полученных из теории тонкого тела и уточненных по линеаризованной теории,

$$\frac{\partial m_x}{\partial\delta_a} = -0{,}167\,\lambda_{\text{кр}}(1 + 3{,}71\,r_s)\frac{1}{E(k)} \qquad (6.2.12)$$

при $\alpha'\lambda_{\text{кр}}\leqslant 4$ или

$$\frac{\partial m_x}{\partial\delta_a} = -0{,}167\lambda_{\text{кр}}(1 + 3{,}71 r_s)\frac{8}{\pi\alpha'\lambda_{\text{кр}}} \qquad (6.2.13)$$

при $\alpha'\lambda_{\text{кр}}>4$, где $E(k)$ — полный эллиптический интеграл второго рода с модулем $k=[1-(0{,}25\,\alpha'\lambda_{\text{кр}})^2]^{0{,}5}$.

Желательно избегать расположения органов управления по крену впереди несущих элементов, так как из-за интерференции на последних возникает обратный по знаку момент крена и управление будет неэффективным.

Определить параметры продольной статической устойчивости модели летательного аппарата и продольную эффективность ее оперения можно с помощью весовых испытаний при различных углах атаки при фиксированных значениях углов отклонения рулей высоты, например с помощью двухкомпонентной тензодержавки, позволяющей находить m_z, $c_{\text{ц.д}}$, а следовательно, m_z^{α} и $m_z^{\delta e}$. Параметры статической устойчиво-

сти пути и путевая эффективность могут определяться аналогичным образом, но на модели, повернутой вокруг своей продольной оси на угол 90°.

Для экспериментального определения параметров поперечной статической устойчивости и поперечной эффективности необходимо производить замер момента крена с помощью специального чувствительного тензодатчика, помещаемого на державке и фиксирующего деформации, связанные со стремлением модели повернуться вокруг своей продольной оси.

Порядок проведения работы

1. Ознакомиться с устройством экспериментальной установки и проверить готовность ее к работе.
2. Провести тарировку тензовесов.
3. Установить тензодержавку с крылатой и оперенной моделью летательного аппарата в рабочей части трубы под углом атаки $\alpha=0$ и при угле установки оперения $\delta_{оп}=0$.
4. Включить тензостанцию и другую измерительную аппаратуру. Произвести балансировку мостов тензостанции.
5. Соединить образцовые манометры и вакуумметр со штуцерами соответственно насадка полного напора, установленного в форкамере, и приемника статического давления в рабочей части трубы.
6. Замерить лабораторным манометром атмосферное давление.
7. Включить трубу и после выхода ее на режим установившегося обтекания снять показания гальванометров или записать их на осциллограмме, включив предварительно (одновременно с пуском трубы) протяжку ленты осциллографа. В то же время зафиксировать показания датчиков температуры T_0 и давления p_0 в форкамере и замерить давление в рабочей части трубы p_∞. Показания датчиков, измеряющих T_0, p_0 и p_∞, желательно преобразовать в электрические величины и записывать на той же осциллограмме, что и показания каналов тензостанции.
8. Изменить угол атаки и провести замеры, указанные в п. 7.
9. То же самое выполнить для углов атаки, предусмотренных программой исследования.
10. Прекратить работу трубы и выключить измерительную аппаратуру.
11. Снять тензодержавку с моделью. Установить оперение на требуемый угол $\delta_{оп}$ и повторить эксперимент (см. п. п. 2÷4, 6÷10).
12. По результатам измерения p_0, T_0, p_∞ определить параметры сверхзвукового потока в рабочей части аэродинамической трубы.
13. Расшифровать показания гальванометров (или осциллограммы) и с помощью тарировочных коэффициентов подсчитать значения коэффициентов нормальной силы c_N и продольного момента m_z при всех углах атаки, а также углах установки оперения.
14. Построить график зависимости $m_z(\alpha)$ при различных значениях $\delta_{оп}=\delta_e$ и найти соответствующие значения производной m_z^α.
15. Построить график зависимости $m_z(\delta_e)$ при различных значениях угла атаки и определить продольную эффективность $\partial m_z/\partial\delta_e$.

Пример. Рассмотрим результаты эксперимента, проведенного с крылатой и оперенной моделью летательного аппарата (см. рис. 6.1.5) на сверхзвуковой аэродинамической трубе. Площадь в плане этой модели $S_м=22\cdot10^{-3}$ $м^2$. Углы атаки, при которых велись продувки, не превышали 10°. Соответствующее «загромождение» рабочей части трубы моделью определялось отношением

$$\bar{S}=\frac{S_м\sin\alpha_{max}}{S_т}=\frac{22\cdot10^{-3}\sin 10^\circ}{0,16}=0,0238,$$

что вполне допустимо для сверхзвуковых труб с закрытой рабочей частью. Угол установки крыла модели относительно продольной оси был равен нулю $(\delta_e)_{кр}=0$, а угол установки оперения принимал три значения: $(\delta_e)_{оп}=0$; 10; 15°. Углы атаки, на которых велись испытания, были равны $\alpha=6$ и 8°.

Модель монтировалась вместе с двухкомпонентными тензовесами в рабочей части аэродинамической трубы. В измерительную аппаратуру входили универсальная тензостанция типа 8АНЧ-7М и шлейфовый осциллограф Н-700.

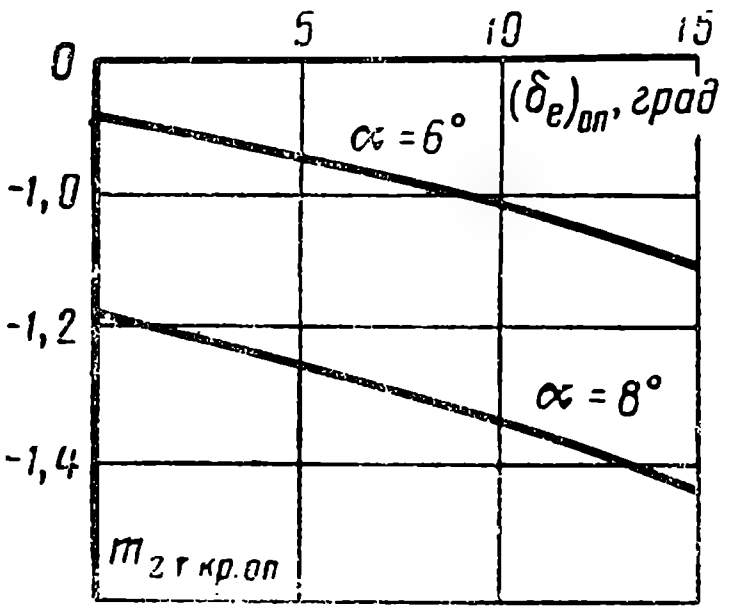


Рис. 6.2.1. Зависимость коэффициента момента тангажа летательного аппарата от угла поворота горизонтального оперения

Тарирование тензовесов осуществлялось после их установки вместе с моделью в рабочей части трубы. Тарировочные коэффициенты оказались равными соответственно по каналам измерения нормальной силы $k_N=10^{-1}$ *кГ/мв*, продольного момента $k_M=10^{-2}$ *кГ·м/мв*.

Давления в форкамере и в рабочей части трубы замерялись с помощью датчиков типа ЭДД-3, показания которых записывались на фотобумажной ленте осциллографа Н-700: $p_0=2{,}65$ *кГ/см²*; $p_\infty=0{,}115$ *кГ/см²*. Температура в форкамере регистрировалась также на осциллографе ($T_0=269$ К). Датчиком служила термопара.

Данные расчета параметров потока в рабочей части трубы следующие: $M_\infty=2{,}71$; $T_\infty=117$ К; $\rho_\infty=0{,}0343$ *кГ·сек²/м⁴*; $a_\infty=218$ *м/сек*; $V_\infty=590$ *м/сек*; $q_\infty=0{,}596\cdot10^4$ *кГ/м²*.

Расчеты аэродинамических коэффициентов модели по данным эксперимента приведены в табл. А, где m_z вычислено относительно центра вращения модели (центра массы) с координатой $x_{вр}$.

По данным табл. А построен график зависимости коэффициента момента тангажа от углов атаки и поворота оперения (рис. 6.2.1). Из графика видно, что зависимость коэффициента момента тангажа модели летательного аппарата ($m_{zт.кр.оп}$) от угла отклонения оперения $(\delta_e)_{оп}$ близка к линейной. Значения продольной эффективности для углов атаки $\alpha=6$ и 8° соответственно будут равны по абсолютной величине:

Таблица А

α, *град*	δ, *град*	n_M	n_N	M, *кГ·м*	N, *кГ*	$x_{ц.д}$, *м*	c_N	$m_z=c_N\frac{x_{вр}-x_{ц.д}}{x_к}$
6	0	278	109	—2,78	10,9	0,255	1,45	—0,156
	10	332	123	—3,32	12,3	0,270	1,65	—0,237
	15	352	127	—3,52	12,7	0,277	1,69	—0,270
8	0	363	145	—3,63	14,5	0,250	1,93	—0,183
	10	427	159	—4,27	15,9	0,267	2,12	—0,286
	15	447	162	—4,47	16,2	0,274	2,16	—0,329

$$\frac{\partial m_z}{\partial\delta_e}\approx\frac{\Delta m_z}{\Delta\delta_e}=\frac{[-0{,}270-(-0{,}156)]}{15/57{,}3}=-0{,}435;$$

$$\frac{\partial m_z}{\partial\delta_e}\approx\frac{\Delta m_z}{\Delta\delta_e}=\frac{[-0{,}329-(-0{,}183)]}{15/57{,}3}=-0{,}558.$$

Значение m_z^α соответственно равно:

$$-\frac{0{,}156}{6}=-0{,}026\ (\text{при}\ \delta=0);\quad -\frac{0{,}237}{6}=-0{,}039\ (\text{при}\ \delta=10°);$$

$$-\frac{0{,}270}{6}=-0{,}045\ (\text{при}\ \delta=15°).$$

В задаче XI.30 по формулам, приведенным в этой работе, показан расчет соответствующих аэродинамических характеристик, с которыми хорошо совпадают полученные экспериментальные результаты.

Исследование динамической устойчивости летательных аппаратов

Цель работы — определить коэффициент аэродинамического демпфирующего момента модели летательного аппарата при сверхзвуковой скорости.

Общие сведения

Характеристики статической устойчивости не могут полностью оценить летных качеств движущегося тела. Они не позволяют, в частности, ответить на вопросы, какова будет амплитуда колебаний угла атаки при тех или иных начальных возмущениях и каким образом произойдет ее изменение по времени.

На эти и другие вопросы отвечает теория динамической устойчивости, которая опирается на результаты аэродинамических исследований при неустановившемся обтекании. При этом на тело в отличие от испытаний в статических условиях будут действовать дополнительные аэродинамические нагрузки, эффект которых зависит от времени.

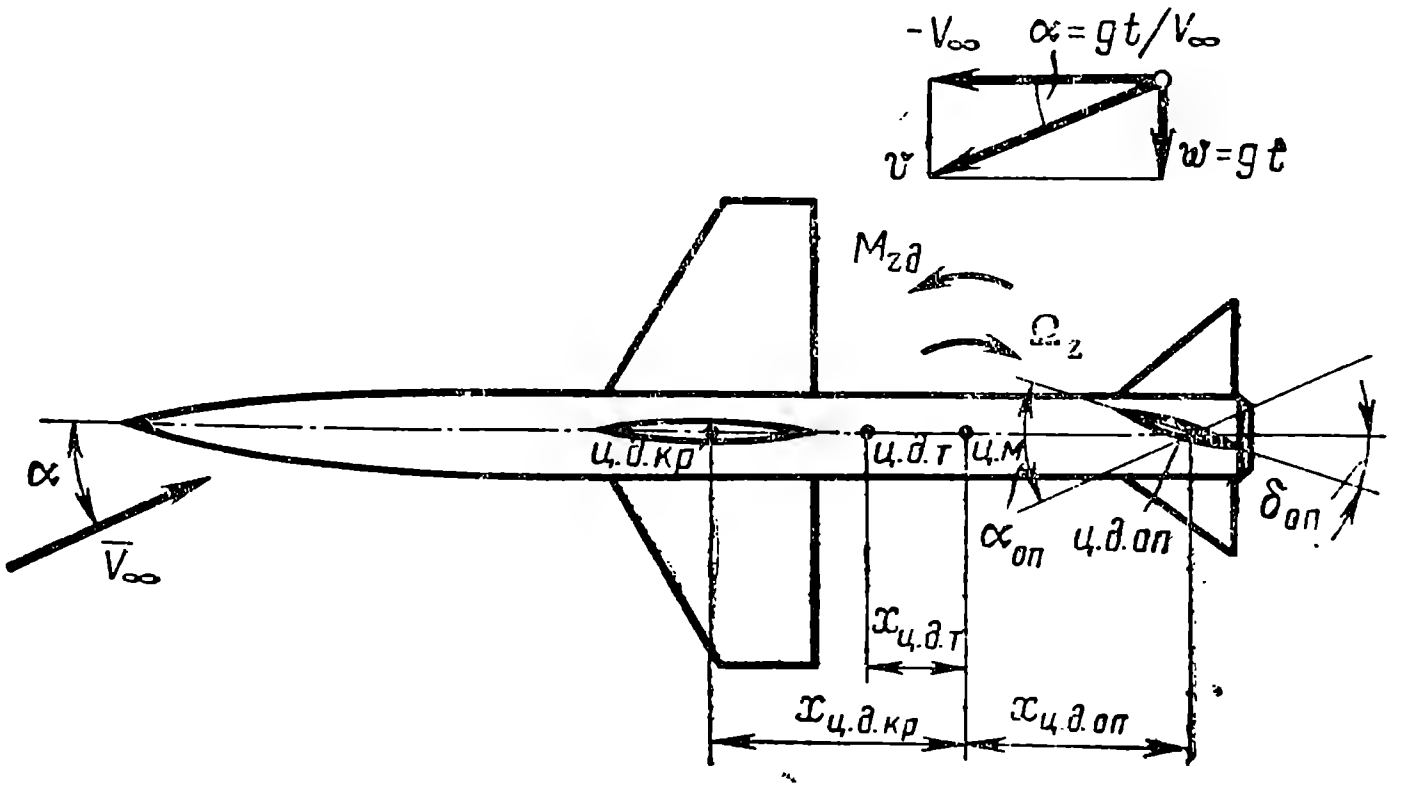


Рис. 6.2.2. Схема к определению демпфирующего момента

Одной из таких нагрузок является демпфирующий момент, возникающий в тех случаях, когда на траектории тело совершает вращательное движение относительно центра массы. Этот момент по своей природе является тормозящим, так как всегда направлен в сторону, обратную вращению.

Рассмотрим движение летательного аппарата в продольной плоскости без крена и скольжения с постоянной скоростью $v = -V_\infty = \text{const}$ и с угловой скоростью вращения в этой плоскости $\Omega_z = \text{const}$ (рис. 6.2.2).

Для нахождения характеристик демпфирования, обусловленного угловой скоростью Ω_z, примем, что движение осуществляется с постоянным углом атаки $\alpha = \text{const}$ ($\dot{\alpha} = 0$), например по круговой траектории. Вследствие вращения аппарата оперение будет находиться под дополнительным углом атаки $\Delta\alpha = \Omega_z x_{ц.д.оп}/V_\infty$ (где $x_{ц.д.оп}$ — расстояние от центра массы аппарата до центра давления оперения). Изменение угла атаки вызовет приращение нормальной силы оперения, коэффициент которой

$$\Delta c_{N\text{оп}} = \left(\frac{\partial c_N}{\partial \alpha}\right)_{\text{оп}} \frac{q}{q_\infty} \cdot \frac{\Omega x_{ц.д.оп}}{V_\infty}, \qquad (6.2.14)$$

где производная $(dc_N/d\alpha)_{оп}$ определяется по параметрам потока перед оперением; q — скоростной напор этого потока.

В соответствии с (6.2.14) вращательные производные для коэффициентов нормальной силы и продольного момента будут соответственно равны:

$$\left(c_N^{\bar{\omega}_z}\right)_{оп} = 2\left(\frac{\partial c_N}{\partial \alpha}\right)_{оп} k_{оп} \frac{x_{ц.д.оп}}{l}; \tag{6.2.15}$$

$$\left(m_z^{\bar{\omega}_z}\right)_{оп} = -2\left(\frac{\partial c_N}{\partial \alpha}\right)_{оп} k_{оп} \left(\frac{x_{ц.д.оп}}{l}\right)^2, \tag{6.2.16}$$

где $k_{оп} = q/q_\infty$ — коэффициент торможения потока у оперения; $\bar{\omega}_z = \Omega_z l/(2V_\infty)$ — безразмерная угловая скорость вращения; l — характерный размер аппарата; вращательная производная $m_z^{\bar{\omega}_z}$ называется коэффициентом демпфирующего момента оперения.

Аналогично определяются коэффициенты демпфирующих моментов крыла и корпуса:

$$\left(m_z^{\bar{\omega}_z}\right)_{кр} = -2\left(\frac{\partial c_N}{\partial \alpha}\right)_{кр} \left(\frac{x_{ц.д.кр}}{l}\right)^2; \tag{6.2.17}$$

$$\left(m_z^{\bar{\omega}_z}\right)_{т} = -2\left(\frac{\partial c_N}{\partial \alpha}\right)_{т} \left(\frac{x_{ц.д.т}}{l}\right)^2. \tag{6.2.18}$$

Формулы (6.2.17) и (6.2.18) используются для условий, при которых соответствующие коэффициенты торможения потока равны единице.

Коэффициент демпфирующего момента всего летательного аппарата

$$m_z^{\bar{\omega}_z} = \left(m_z^{\bar{\omega}_z}\right)_{оп} + \left(m_z^{\bar{\omega}_z}\right)_{кр} + \left(m_z^{\bar{\omega}_z}\right)_{т}, \tag{6.2.19}$$

а момент демпфирования

$$M_{zд} = M_{zд}^{\bar{\omega}_z}\bar{\omega}_z = m_z^{\bar{\omega}_z} q_\infty S_{мид} l\bar{\omega}_z. \tag{6.2.20}$$

Демпфирование вызывается также изменением по времени угла атаки, характеризующимся производной $\dot{\alpha}$. Для определения момента этого демпфирования предположим, что движение аппарата не сопровождается вращением ($\Omega_z = 0$), но имеет место изменение угла атаки, так что $\dot{\alpha} \neq 0$ (см. треугольник скоростей на рис. 6.2.2, полученный при горизонтальном полете с постоянной скоростью $-\bar{V}_\infty$). Если при этом $\Delta\alpha_{кр}$ — изменение угла атаки крыла, то вследствие скоса потока за ним угол атаки изменяется на величину $\Delta\alpha_{оп} = -(\partial\varepsilon/\partial\alpha)_{оп}\Delta\alpha_{кр}$. Исследования показывают, что изменение скоса у оперения происходит с некоторым запаздыванием относительно изменения угла скоса у крыла. Это запаздывание определяется временем, затрачиваемым следом потока на прохождение расстояния от крыла до оперения и равным $t = (x_{ц.д.кр} + x_{ц.д.оц})/V_\infty = x_ц/V_\infty$. Подставляя это время в выражение $\Delta\alpha_{кр} = -\dot{\alpha}t$, получим $\Delta\alpha_{кр} = -\dot{\alpha}x_ц/V_\infty$ и тогда

$$\Delta\alpha_{оп} = \left(\dot{\alpha}x_ц/V_\infty\right)(\partial\varepsilon/\partial\alpha)_{оп}. \tag{6.2.21}$$

Изменение угла атаки оперения на величину $\Delta\alpha_{оп}$ приводит к возникновению добавочной нормальной силы, коэффициент которой

$$(\Delta c_N)_{оп} = \left(\frac{\partial c_N}{\partial \alpha}\right)_{оп} \frac{q}{q_\infty} \cdot \frac{\dot{\alpha}x_ц}{V_\infty}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha}\right)_{оп}. \tag{6.2.22}$$

Зная величину $(\Delta c_N)_{оп}$, можно найти производные устойчивости:

$$\left(c_N^{\dot{\bar{\alpha}}}\right)_{оп} = 2\left(\frac{\partial c_N}{\partial \alpha}\right)_{оп} k_{оп}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha}\right)_{оп} \frac{x_ц}{l}; \tag{6.2.23}$$

$$\left(m_z^{\dot{\bar{\alpha}}}\right)_{оп} = -2\left(\frac{\partial c_N}{\partial \alpha}\right)_{оп} k_{оп}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha}\right)_{оп}\left(\frac{x_ц}{l}\right)^2, \tag{6.2.24}$$

для которых принято $\bar{\dot{\alpha}} = \dot{\alpha} l/(2V_\infty)$.

Характеристики демпфирования рыскания определяются аналогично, но в плоскости угла скольжения β.

Суммарный момент демпфирования, обусловленный угловой скоростью Ω_z и производной $\dot{\alpha}$,

$$M_{z\text{д}} = \left[m_z^{\bar{\omega}_z}\bar{\omega}_z + m_z^{\bar{\dot{\alpha}}}\bar{\dot{\alpha}}\right] q_\infty S_{\text{мид}} l; \qquad (6.2.25)$$

величина $M_{z\text{д}}$ учитывает не только значения параметров движения летательного аппарата в данный момент времени, но и предысторию этого движения, которая проявляется в запаздывании скоса потока. Приближенный расчет $M_{z\text{д}}$ ведется по формулам (6.2.16) ÷ (6.2.19), (6.2.24), причем аэродинамические характеристики $(\partial c_N/\partial\alpha)$, $x_{\text{ц.д}}$, $k_{\text{оп}}$, $(\partial\varepsilon/\partial\alpha)_{\text{оп}}$ для корпуса, крыла и оперения, входящие в эти формулы, должны находиться с учетом интерференции.

Для гиперзвуковых скоростей характеристики демпфирования можно определять с помощью ньютоновской теории. Например, для конуса имеется следующая формула ([49], 1968, № 1):

$$m_z^{\bar{\dot{\alpha}}} = -\frac{1}{4}\operatorname{tg}^{-2}\beta_{\text{к}}\left[1 + \operatorname{tg}^2\beta_{\text{к}} - \frac{8}{3}\left(\frac{x_{\text{ц.т}}}{x_{\text{к}}}\right) + 2\cos^2\beta_{\text{к}}\left(\frac{x_{\text{ц.м}}}{x_{\text{к}}}\right)^2\right], \qquad (6.2.26)$$

в которой $\beta_{\text{к}}$ — половина угла конуса при вершине; $x_{\text{ц.м}}$ — расстояние от этой вершины до центра массы; $x_{\text{к}}$ — высота конуса.

Один из способов экспериментального определения демпфирующего момента связан с исследованием поведения модели летательного аппарата в аэродинамической трубе на установке свободных колебаний, например на динамической установке с упругим шарниром (см. рис. 2.4.11). Модель закреплена на этой установке так, что может совершать свободные колебания вокруг оси z. Уравнение таких колебаний (2.4.3) имеет следующее решение:

$$\alpha = \alpha_0 e^{-nt}\sin(mt + \psi), \qquad (6.2.27)$$

где α_0 — начальное значение угла атаки; ψ — начальная фаза колебаний; $m = 2\pi/T$ — угловая частота; T — период колебаний.

Параметр n в (6.2.27) определяется по выражению

$$n = \frac{M_z^{\bar{\omega}_z} + M_z^{\bar{\dot{\alpha}}}}{4J_z}\cdot\frac{l}{V_\infty} \qquad (6.2.28)$$

и называется коэффициентом затухания. Этот коэффициент можно определить по формуле

$$n = -[\lg(\alpha_{i+T}/\alpha_i)]/(0{,}434T), \qquad (6.2.29)$$

где $\alpha_{(i+T)}/\alpha_i$ — отношение амплитуд колебаний (углов атаки), замеренных через один период колебаний T (рис. 6.2.3). Обычно для нахождения величины этого отношения строят график $\alpha_{i+T} = f(\alpha_i)$ (рис. 6.2.4) по ряду колебаний модели, записанных на осциллограмме. Этот график аппроксимируется прямой, так что $\alpha_{i+T}/\alpha_i = \operatorname{tg}\delta$ (где δ — угол наклона этой прямой).

Ввиду того, что в условиях эксперимента в аэродинамической трубе производная $m_z^{\bar{\omega}_z} \neq m_z^{\bar{\dot{\alpha}}}$, окончательный вид расчетной зависимости для производных коэффициентов демпфирования будет следующий:

$$m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\dot{\alpha}}} = 4J_z\lg(\operatorname{tg}\delta)/(0{,}434\cdot T\rho_\infty V_\infty S l^2). \qquad (6.2.30)$$

Входящий в формулу (6.2.30) период колебаний T находится по числу меток времени, приходящихся на одно колебание. А для определения момента инерции модели J_z записывают ее свободные колебания при

отсутствии потока воздуха в аэродинамической трубе. Делается это дважды, причем один раз на модель крепится дополнительный груз с известным моментом инерции ΔJ_z. Тогда, найдя периоды свободных колебаний модели без груза T_1 и с грузом T_2, можно подсчитать величину момента инерции модели:

$$J_z = \Delta J_z T_1^2/(T_2^2 - T_1^2). \qquad (6.2.31)$$

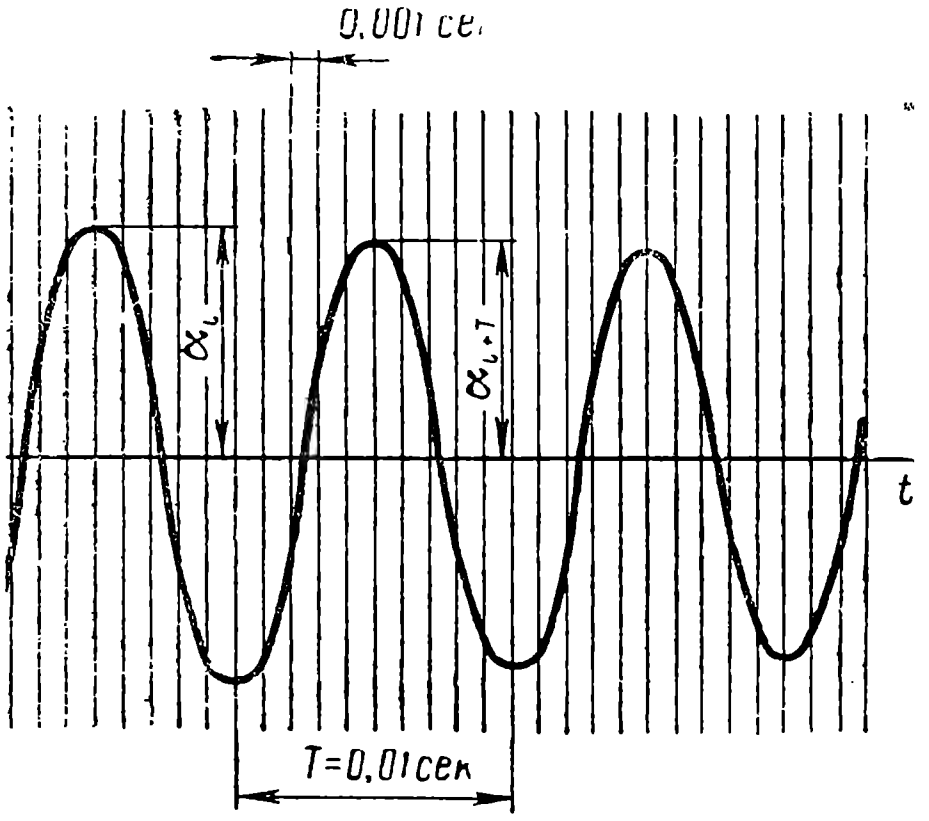


Рис. 6.2.3. Осциллограмма с записью колебаний модели во время эксперимента

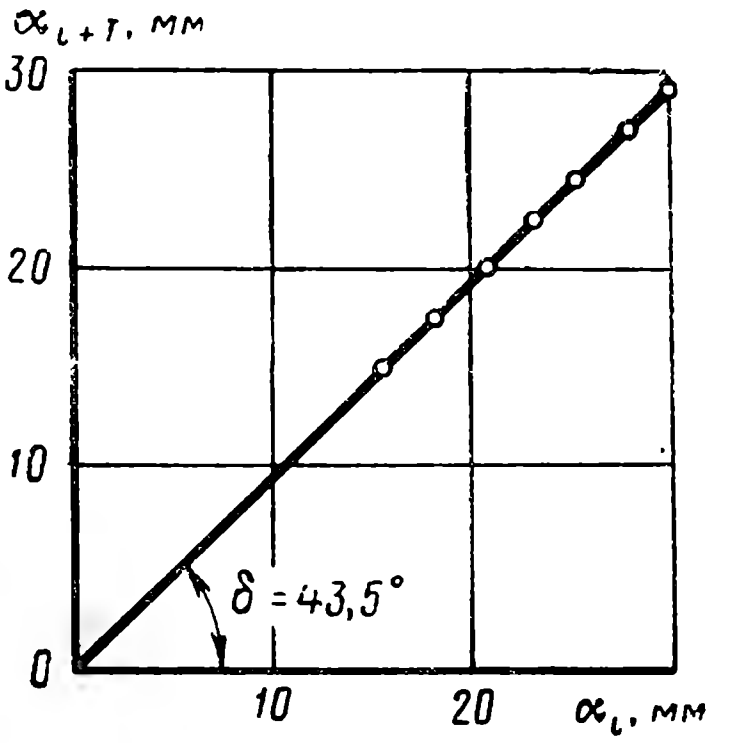


Рис. 6.2.4. График для определения коэффициента затухания колебаний

Порядок проведения работы

1. Ознакомиться с экспериментальной установкой и проверить готовность к работе всех ее элементов.

2. Закрепить динамическую установку с упругим шарниром (см. рис. 2.4.11) и модель в рабочей части трубы под заданным углом атаки.

3. Соединить образцовые манометр и вакуумметр соответственно со штуцерами насадка полного напора, установленного в форкамере, и приемника статического давления в рабочей части трубы.

4. Включить питание приборов и осуществить их подстройку на соответствующий режим работы (необходимая скорость протяжки ленты для записи колебаний; частота меток времени; коэффициент усиления канала датчика угла атаки модели).

5. Включить протяжку ленты осциллографа и записать свободные колебания установки с моделью.

6. Добавить груз с известным значением момента инерции ΔJ_z, вновь записать свободные колебания всей системы, а затем снять дополнительный груз.

7. Замерить лабораторным барометром атмосферное давление.

8. Включить трубу и лентопротяжное устройство осциллографа и записать колебания модели в потоке воздуха. Одновременно зафиксировать показания датчика температуры T_0 и давления p_0 в форкамере, а также измерить статическое давление в рабочей части p_∞.

9. По результатам замера T_0, p_0 и p_∞ определить параметры сверхзвукового потока в рабочей части аэродинамической трубы.

10. Расшифровать запись на ленте осциллографа и построить график зависимости $\alpha_{i+T} = f(\alpha_i)$.

11. Подсчитать значения коэффициента затухания n и величину $m_z^{\dot{\alpha}}$.

Пример. Рассмотрим результаты лабораторной работы по определению коэффициента момента демпфирования конуса со следующими характеристиками: диаметр основания $D = 0{,}08$ *м*; угол конусности $\beta_к = 15°$; безразмерная координата центра массы $\bar{x}_{ц.м} = x_{ц.м}/x_к = 0{,}63$.

Испытания проводились в сверхзвуковой аэродинамической трубе при скорости потока, соответствующей числу Маха $M_\infty = 4$. Вычисленные по измеренным давлениям p_0, p_∞ и температуре T_0 плотность и скорость потока в рабочей части трубы были равны соответственно $\rho_\infty = 0{,}553$ *кг/м*^{3} и $V_\infty = 645$ *м/сек*.

На рис. 6.2.3 приведена часть осциллограммы колебаний конуса на упругом шарнире, метки времени на которой наносились через 0,001 *сек*. В соответствии с этой осциллограммой период колебаний $T = 0{,}01$ *сек*, а следовательно, частота $1/T = 1/0{,}01 = 100$ *гц*.

График зависимости $\alpha_{i+T} = f(\alpha_i)$, построенный по замерам последовательных амплитуд угла атаки на осциллограмме, приведен на рис. 6.2.4. Значение угла δ на нем равно 43,5°. Периоды свободных колебаний модели с грузом и без него соответственно оказались равными $T_2 = 0{,}0136$ *сек* и $T_1 = 0{,}01$ *сек*. Момент инерции груза на модели $\Delta J_z = 0{,}00065$ *кг·м*^{2}. Поэтому согласно (6.2.31) момент инерции этой модели

$$J_z = 0{,}00065 \cdot 0{,}01^2/(0{,}0136^2 - 0{,}01^2) = 7{,}65 \cdot 10^{-4} \text{ кг·м}^2.$$

За характерную площадь была принята площадь миделевого сечения

$$S = S_{\text{мид}} = \pi D^2/4 = \pi 0{,}08^2/4 = 5{,}03 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2,$$

а за характерный размер — высота конуса

$$l = x_к = (D \operatorname{ctg} \beta_к)/2 = (0{,}08 \operatorname{ctg} 15°)/2 = 0{,}149 \text{ м}.$$

В соответствии с этими данными по (6.2.30) была найдена вращательная производная

$$m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\dot{\bar{\alpha}}} = \frac{4 \cdot 7{,}65 \cdot 10^{-4} \lg(\operatorname{tg} 43{,}5°)}{0{,}434 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}553 \cdot 645 \cdot 5{,}03 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}149^2} = -0{,}45.$$

Коэффициент затухания согласно (6.2.29)

$$n = -\lg(\operatorname{tg} 43{,}5°)/(0{,}01 \cdot 0{,}434) = 32{,}4.$$

Расчет по зависимости (6.2.26) для конуса показал, что

$$m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\dot{\bar{\alpha}}} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(\operatorname{tg}^2 15°)} \left[1 + \operatorname{tg}^2 15° - \frac{8}{3} 0{,}63 + 2 \cos^2 15° \cdot 0{,}63^2\right] = -0{,}484.$$

Совпадение результатов расчета и опыта можно считать удовлетворительным.

§ 6.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОРГАНОВ УПРАВЛЕНИЯ

Работа 6.3.1

Аэродинамические исследования руля в виде поворотной консоли

Цель работы — путем дренажных испытаний в малоскоростной аэродинамической трубе найти характеристики рулевой консоли в зависимости от угла ее поворота и ширины щели между консолью и корпусом летательного аппарата.

Общие сведения

Поворотная консоль широко применяется в различных конструкциях летательных аппаратов в качестве аэродинамического органа управления (поворотное крыло или оперение), а также газового руля, размещаемого в выходном сечении сопла ракетной двигательной установки.

Аэродинамические характеристики поворотной консоли позволяют найти значения управляющих усилий и величину силы, на которую возрастает лобовое сопротивление (или соответственно уменьшается тяга двигателя в случае газового руля). Кроме того, эти характеристики используются при определении сил, создаваемых неподвижными консолями крыла или оперения.

На аэродинамические свойства поворотной консоли существенное влияние оказывает интерференция ее с той частью поверхности корпуса, к которой она примыкает. При этом взаимодействие консоли и корпуса носит более сложный характер в случае, когда между ними образуется щель. Поэтому экспериментальными исследованиями предусматривается определение аэродинамических характеристик консоли,

расположенной на корпусе, в зависимости от угла ее поворота $\delta_р$, а также при различных значениях ширины щели $h_щ$ (рис. 6.3.1).

В лабораторной практике широкое распространение получил метод определения таких характеристик, основанный на дренажных испытаниях модели руля, в результате которых находится распределение дав-

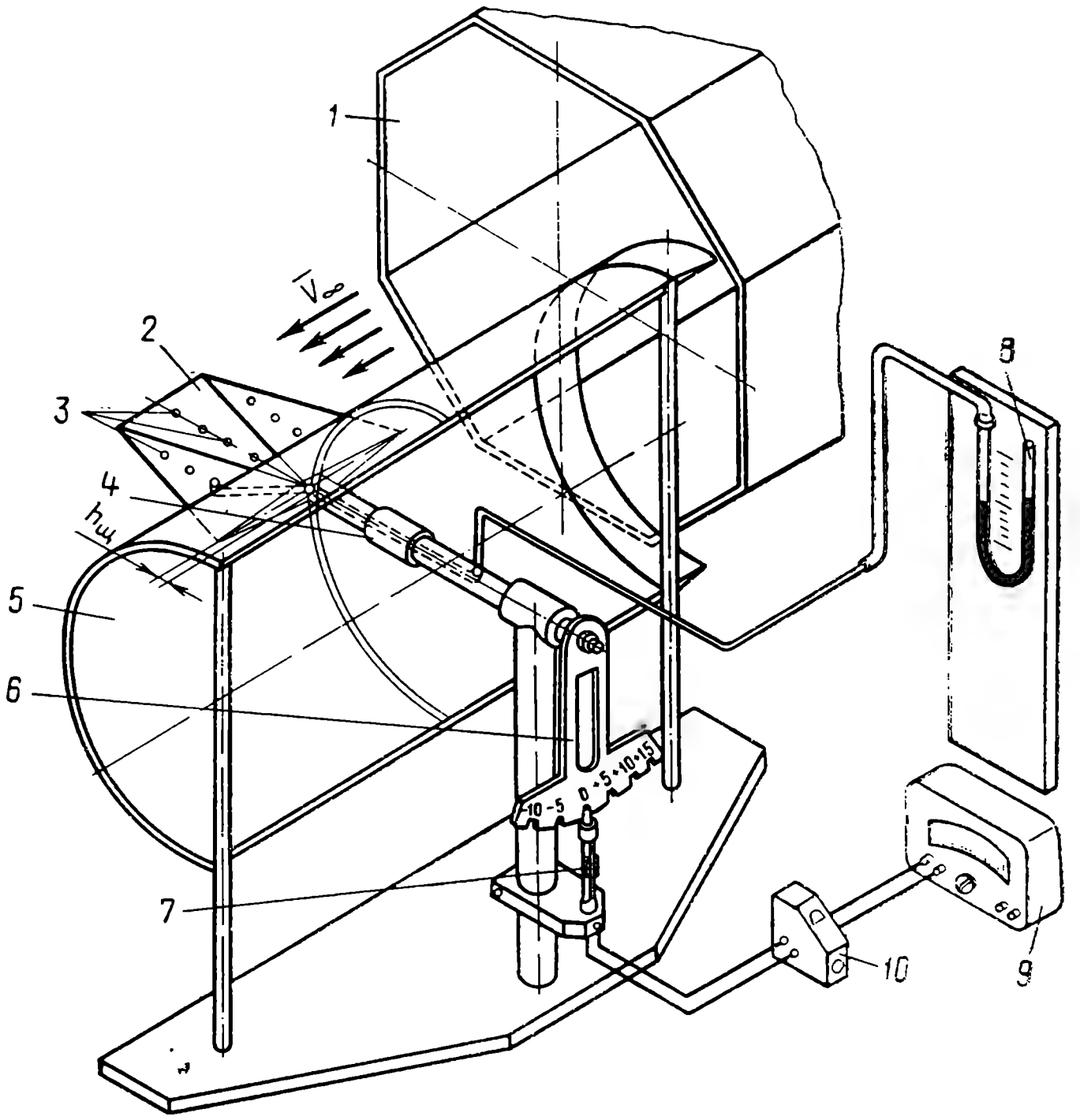


Рис. 6.3.1. Схема установки для исследования работы руля в виде поворотной консоли:

1 — аэродинамическая труба; *2* — поворотная консоль; *3* — дренажные отверстия; *4* — ось вращения консоли; *5* — модель корпуса; *6* — сектор для установки углов атаки (поворота консоли); *7* — упругий элемент с тензодатчиками; *8* — U-образный манометр; *9* — гальваномер; *10* — тензостанция

ления по обтекаемой поверхности рулевой консоли. Затем по этому распределению давления могут быть вычислены аэродинамические коэффициенты консоли в связанных координатах (рис. 6.3.2):

$$c_{Rp} = \frac{2\eta_к}{\eta_к + 1} \int_0^1 d\bar{z} \oint \bar{p} d\bar{y}; \qquad (6.3.1)$$

$$c_{Np} = \frac{2\eta_к}{\eta_к + 1} \int_0^1 d\bar{z} \oint \bar{p} d\bar{x}; \qquad (6.3.2)$$

$$m_{zp} = \frac{-3\eta_к^2}{\eta_к^2 + \eta_к + 1} \int_0^1 d\bar{z} \oint \bar{p} d\bar{x}^2, \qquad (6.3.3)$$

где $\eta_к = b_{кц}/b_{кр}$; $\bar{z} = z/l_к$; $\bar{x} = x/b_{кр}$; $\bar{y} = y/b_{кр}$.

При расчете коэффициентов сопротивления и подъемной силы (в поточных координатах) целесообразно такой расчет осуществить с учетом дополнительной продольной силы, обусловленной трением (c_{Rf}):

$$c_x = (c_{Rp} + c_{Rf})\cos\alpha + c_{Np}\sin\alpha; \qquad (6.3.4)$$

$$c_y = c_{Np}\cos\alpha - (c_{Rp} + c_{Rf})\sin\alpha. \qquad (6.3.5)$$

Здесь величина c_{Rf} рассчитывается в зависимости от характера пограничного слоя (ламинарного или турбулентного) соответственно по формулам (4.1.28), (4.1.29) или (4.1.30); аэродинамические коэффициенты

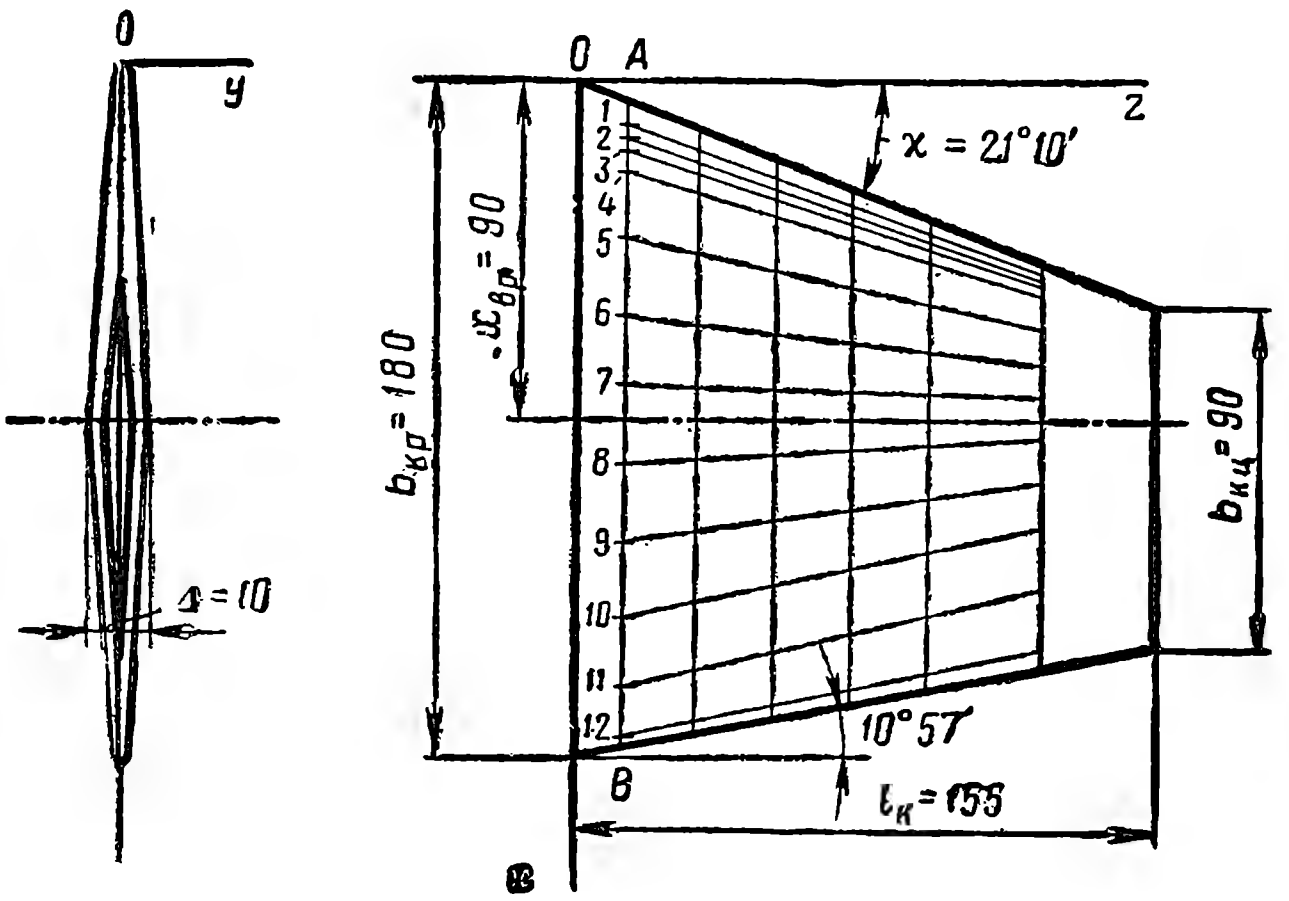


Рис. 6.3.2. Поворотная консоль

сил отнесены к площади консоли $S_к$, а момента — к произведению $S_к\, b_{САХ.р}$ (где $b_{САХ.р}$ — средняя аэродинамическая хорда консоли).

Схема дренажных испытаний консоли крыла или оперения представлена на рис. 6.3.1. Модель такой консоли *2* с дренажными отверстиями *3* размещается в потоке воздуха рабочей части аэродинамической трубы *1* под некоторым углом атаки α, равным углу поворота консоли $\delta_р$. Для воспроизведения реальных условий обтекания модели она крепится на цилиндрическом корпусе, длина которого может меняться с целью подбора различных параметров пограничного слоя перед моделью. При этом предоставляется возможность изменения ширины щели $h_щ$ между корпусом и консолью, а также угла ее установки $\delta_р$. При изготовлении модели консоли необходимо предусмотреть такое количество дренажных отверстий, которое позволило бы получить достоверное представление о поле давлений и осуществить по нему расчет действующих аэродинамических сил. Однако следует учитывать, что из-за малой толщины модели, ограничивающей число размещаемых в ней медных дренажных трубок, может оказаться недостаточным количество дренажных отверстий на одной стороне консоли. В этих случаях при использовании консоли с симметричным профилем для более точного замера распределения давления дренажные отверстия располагают только с одной стороны консоли. А для того чтобы найти распределение давления на противоположной стороне, угол поворота $\delta_р$ меняют на обратный и повторяют измерения.

Рассчитать аэродинамические характеристики поворотной консоли можно по следующей приближенной методике. Рассматривая консоль как крыло малого удлинения, а воздух, обтекающий ее в рабочей части малоскоростной аэродинамической трубы,— как несжимаемую жидкость, для определения статической производной коэффициента нормальной силы изолированной консоли используем зависимость $c_y^\alpha = (c_N^\alpha)_{и.к}$ от сужения, удлинения крыла и угла стреловидности его передней кромки, приведенную на рис. 12.12 в книге [5].

С учетом интерференции консоли с корпусом, влияния щели, а также расположения оси поворота консоли относительно продольной оси корпуса коэффициент нормальной силы консоли

$$c_N = \left(c_N^{\alpha}\right)_{\text{и.к}} k_{\text{кр}}\, n_{\text{щ}} \cos \chi_p \left(\alpha/57{,}3\right), \tag{6.3.6}$$

где $k_{\text{кр}}$ — коэффициент интерференции поворотной консоли; $n_{\text{щ}}$ — коэффициент, учитывающий влияние щели (для малых скоростей в среднем $n_{\text{щ}}=0{,}80$); $\chi_{\text{р}}$ — угол стреловидности оси вращения консоли.

Коэффициент профильного сопротивления консоли

$$c_{x\text{пр}} = c_{Rf}\left(0{,}93 + 2{,}8\bar{\Delta}\right)\left(1 + 5\,\bar{\Delta}\mathbf{M}_{\infty}^{4}\right), \tag{6.3.7}$$

где $\bar{\Delta}$ — относительная толщина профиля консоли.

Коэффициент индуктивного сопротивления

$$c_{xi} = c_y^2\,(1+\delta)/(\pi\lambda_{\text{кр}}), \tag{6.3.8}$$

где $\lambda_{\text{кр}}=4\,l_{\text{к}}^2/S_{\text{кр}}$ — удлинение крыла, составленного из двух консолей; δ — поправочный коэффициент, учитывающий форму крыла в плане. Таким образом, коэффициент продольной силы консоли

$$c_R = c_{x\text{пр}} + c_{xi}. \tag{6.3.9}$$

Порядок проведения работы

1. Ознакомиться с экспериментальной установкой, необходимой измерительной аппаратурой и проверить их готовность к работе.

2. Закрепить модель консоли оперения в рабочей части трубы под заданным углом атаки, установить необходимую ширину щели между консолью и корпусом, а также проверить герметичность соединения резиновыми шлангами дренажных трубок и манометров.

3. Записать показания барометра $p_{\text{атм}}$, термометра $T_{\text{атм}}$ и психрометра.

4. Включить трубу и после выхода ее на режим установившегося обтекания ввести в поток трубку Пито, а затем снять показания с отсчетных колен связанного с ней манометра.

5. Зафиксировать положение уровней жидкости в отсчетных коленах манометров для каждой дренажной точки (для этой цели панель манометра может быть сфотографирована).

6. Определить параметры потока в рабочей части трубы.

7. Найти коэффициенты давления для каждой дренажной точки, используя для замера перепада уровней жидкости в манометрах прибор «Микрофот» и построить кривые распределения этого коэффициента по обтекаемой поверхности.

8. Определить графическим интегрированием коэффициенты c_{Rp}, c_{Np} и m_{zp}.

9. Вычислить коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы с учетом трения.

10. Провести аналогичные испытания консоли при различных углах атаки, ширине щели и осуществить необходимые расчеты аэродинамических коэффициентов.

Пример. Рассмотрим результаты исследования модели поворотной консоли, имеющей симметричный притупленный ромбовидный профиль и трапециевидную форму в плане, в аэродинамической трубе малых скоростей.

Внешний вид этой модели, установленной на цилиндрическом корпусе в открытой рабочей части трубы, приведен на рис. 6.3.3, а основные размеры и расположение дренажных отверстий показаны на рис. 6.3.2. Площадь консоли $S_{\text{к}}=208$ *см*^{2}, а средняя геометрическая хорда $b=S_{\text{к}}/l_{\text{к}}=208/15{,}5=13{,}4$ *см*.

Ввиду симметричности профиля консоли дренажные отверстия размещены лишь с одной стороны поверхности. Цилиндрический корпус устанавливался в рабочей части так, чтобы его поверхность омывалась невозмущенным потоком, но вызывала мини-

мальное «загромождение» потока. Наибольшая величина этого «загромождения» определялась в соответствии с рис. 6.3.4 при максимальном угле поворота консоли $\delta_р = 9°$:

$$\frac{S_м}{S_т} = \frac{S_{кор} + S'_к}{S_т} = \frac{117 + 33}{2400} = 0{,}063.$$

При этом величина $S'_к = 33$ *см*^{2} определялась как площадь проекции консоли при $\delta_р = 9°$ на плоскость поперечного сечения рабочей части трубы. Найденная величина «загромождения» является допустимой при проведении подобных экспериментов.

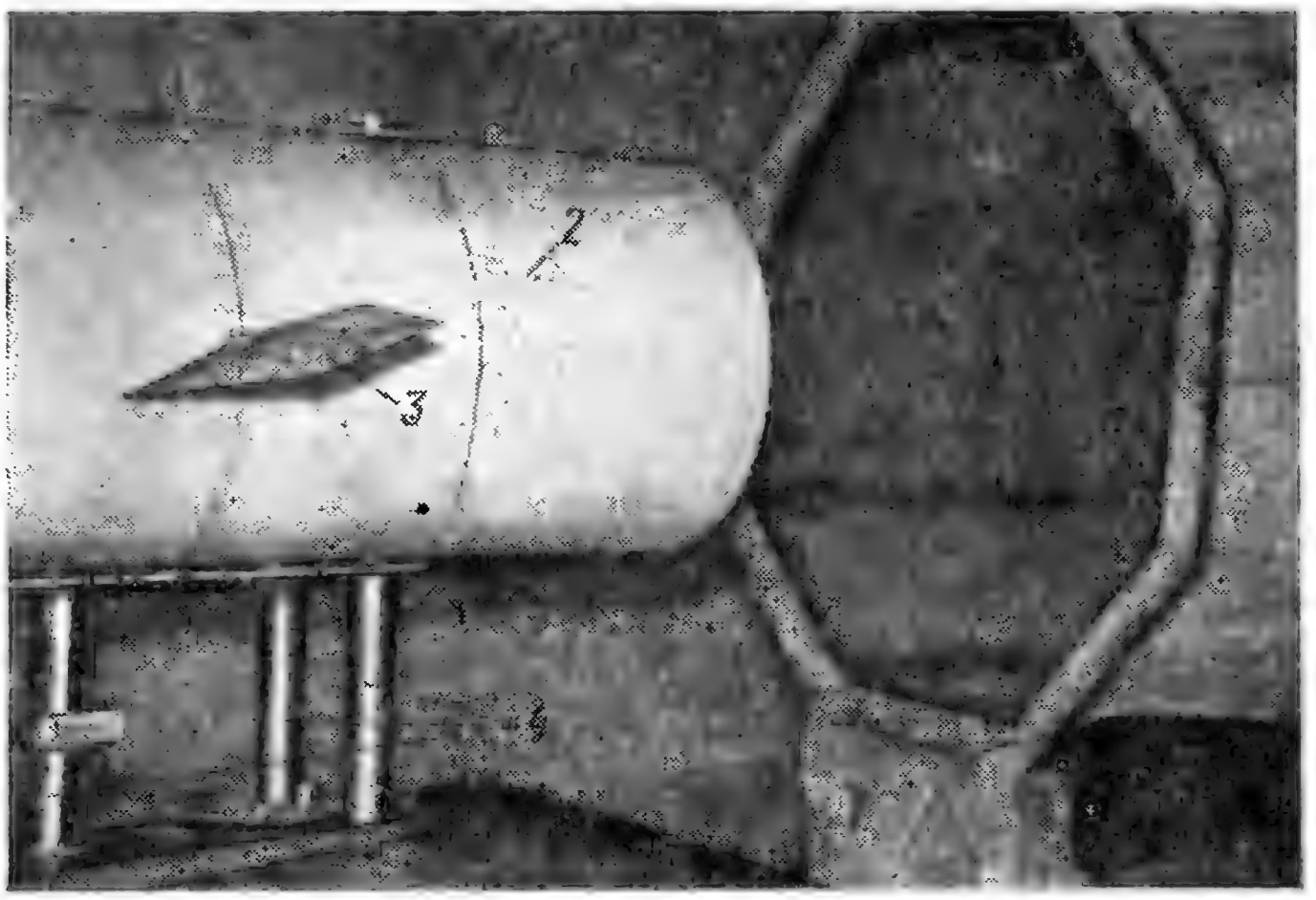


Рис. 6.3.3. Общий вид установки для испытания поворотной консоли:

1 — рабочая часть трубы; *2* — корпус; *3* — модель консоли; *4*—устройство для крепления установки в рабочей части

Исходными данными для определения параметров потока в рабочей части трубы были: $T_\infty = 291$ К; $p_\infty = 764$ *мм рт. ст.*; $R = 287$ *дж/кг·град*; $k = c_p/c_v = 1{,}4$; $\gamma' = 0{,}805$ *кГ/дм*^{3}; $\xi_т = 1{,}02$; $k'_т = 0{,}998$; $\sin\beta' = 0{,}246$; $x = 0{,}7$; $\Delta h' = 275$ *мм*; $p_{н.п} = 7{,}1$ *мм рт. ст.*; $T = 288$ К.

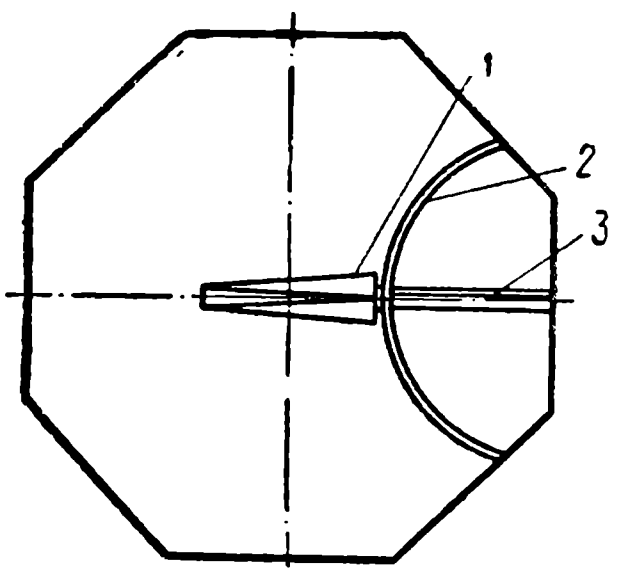


Рис. 6.3.4. Поперечное сечение рабочей части аэродинамической трубы:

1 — поворотная консоль;
2 — стенка модели корпуса;
3 — ось вращения консоли

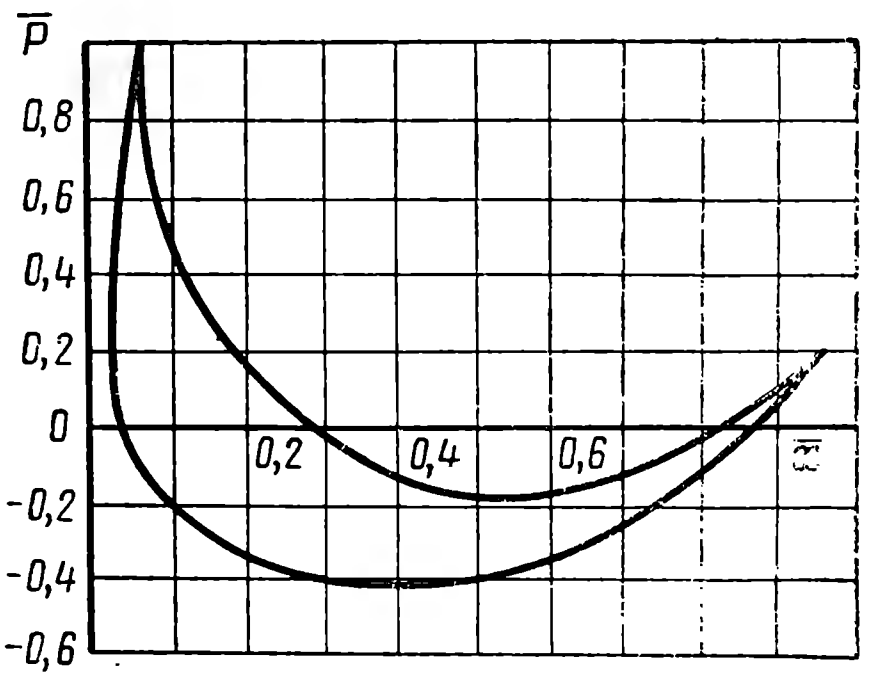


Рис. 6.3.5. График функции $\bar{p} = F_1(\bar{x})$

В результате расчета найдены значения: $\rho_\infty = 0{,}124$ *кГ·сек*^{2}*/м*^{4}; $\mu_\infty = 1{,}83 \cdot 10^{-6}$ *кГ×сек/м*^{2}; $\nu_\infty = 1{,}45 \cdot 10^{-5}$ *м*^{2}*/сек*; $q_\infty = 220$ *кГ/м*^{2}; $V_\infty = 60$ *м/сек*; $\mathbf{Re}_\infty = 5{,}54 \cdot 10^5$; $a_\infty = 340$ *м/сек*; $\mathbf{M}_\infty = 0{,}176$.

По найденной величине скоростного напора и измеренным батарейным манометром давлениям в дренажных отверстиях были рассчитаны коэффициенты давления $\bar{p}$. В частности, для сечения консоли AB (см. рис. 6.3.2; $z = \text{const}$) эти коэффициенты приведены в табл. А.

Таблица А

№ точки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\bar{x}$	0,03	0,05	0,07	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\bar{x}^2$	0,0009	0,0025	0,0049	0,01	0,04	0,09	0,16	0,25	0,36	0,49	0,64	0,81
Нижняя плоскость крыла												
$\bar{y}$	−0,001	−0,002	−0,004	−0,006	−0,012	−0,022	−0,025	−0,027	−0,024	−0,021	−0,018	−0,005
$\bar{p}$	0,4	0,9	0,8	0,5	0,18	−0,05	−0,12	−0,19	−0,17	−0,11	−0,06	0,1
Верхняя плоскость крыла												
$\bar{y}$	0,001	0,002	0,004	0,006	0,012	0,022	0,025	0,027	0,024	0,021	0,018	0,005
$\bar{p}$	0	−0,1	−0,13	−0,20	−0,35	−0,40	−0,42	−0,40	−0,32	−0,25	−0,12	0,08

Соответствующие данным табл. А графики зависимостей $\bar{p}=f_1(\bar{x})$, $\bar{p}=f_2(\bar{y})$, $\bar{p}=f_3(\bar{x}^2)$ помещены на рис. 6.3.5, 6.3.6 и 6.3.7, а кривые для функций $\varphi_1(\bar{z})=\oint \bar{p}d\bar{x}$, $\varphi_2(\bar{z})=\oint \bar{p}d\bar{y}$, $\varphi_3(\bar{z})=\oint \bar{p}d\bar{x}^2$, полученные графическим интегрированием с помощью планиметра, изображены на рис. 6.3.8, 6.3.9, 6.3.10 (пунктиром показаны экстраполяци-

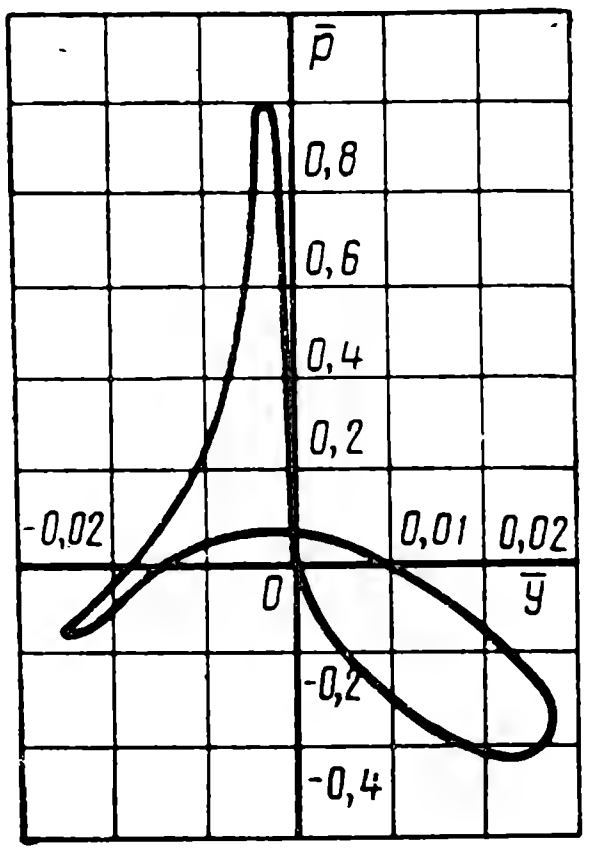


Рис. 6.3.6. График функции $\bar{p}=f_2(\bar{y})$

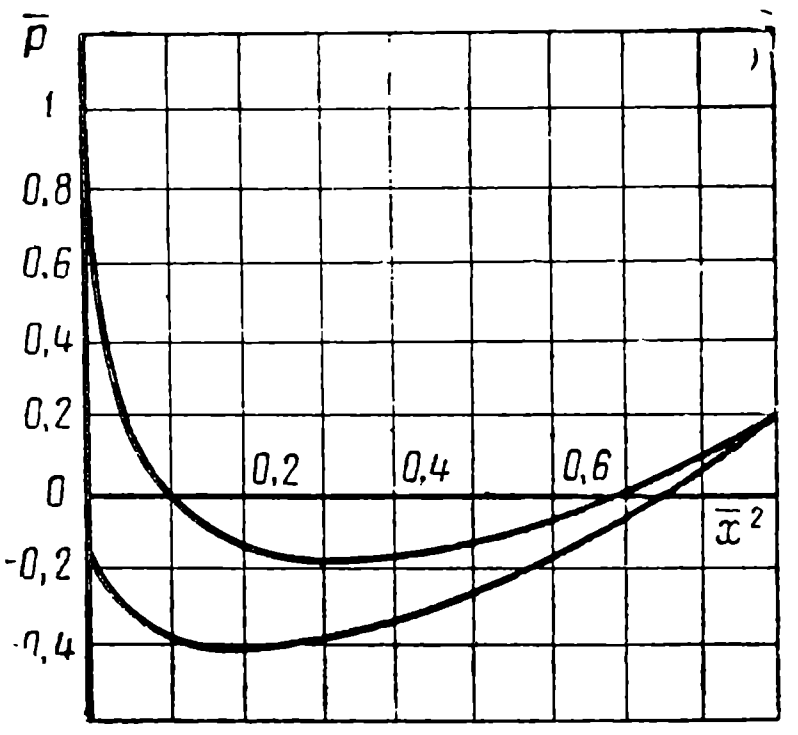


Рис. 6.3.7. График функции $\bar{p}=f_3(\bar{x}^2)$

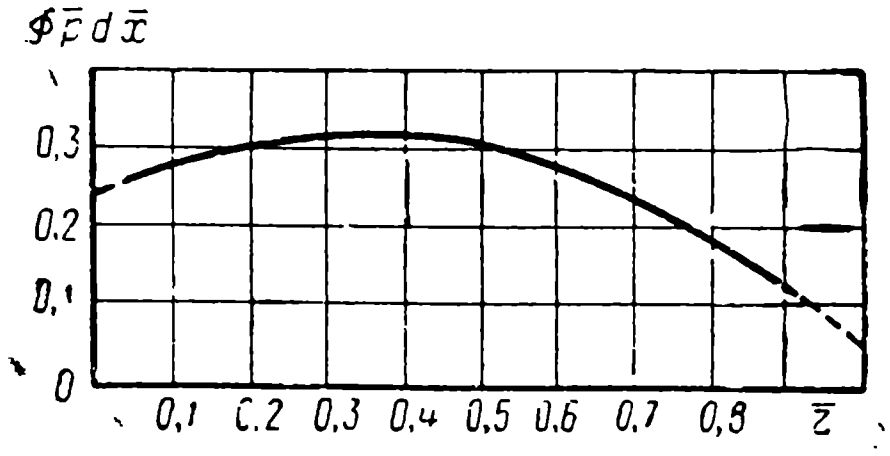


Рис. 6.3.8. График функции $\varphi_1(\bar{z})=\oint \bar{p}d\bar{x}$

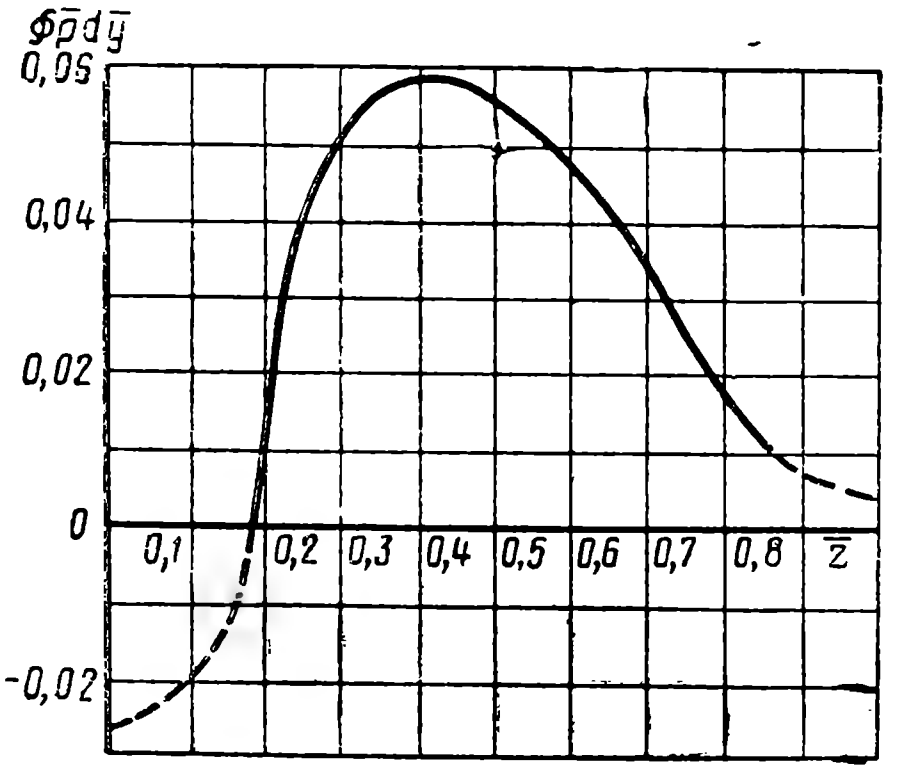


Рис. 6.3.9. График функции $\varphi_2(\bar{z})=\oint \bar{p}d\bar{y}$

онные кривые). На рис. 6.3.8, 6.3.9, 6.3.10 были определены площади под кривыми, а затем были найдены в соответствии с формулами (6.3.1), (6.3.2) и (6.3.3) и заданными размерами консоли аэродинамические коэффициенты: $c_{Np}=0{,}33$; $c_{Rp}=0{,}0327$ и $m_{zp}=0{,}29$.

Вычислим теперь коэффициент продольной силы, обусловленной трением. Примем, что критическое число Рейнольдса $\mathbf{Re}_{кр}=10^5$. Поскольку $\mathbf{Re}_\infty=5{,}54\cdot10^5>\mathbf{Re}_{кр}$, то на поверхности консоли будет турбулентный пограничный слой. Поэтому в соответствии с формулами (4.1.28) и (4.1.29) при $\eta_c=1$

$$c_{Rf}=2\cdot0{,}074/\sqrt[5]{5{,}54\cdot10^5}=0{,}012.$$

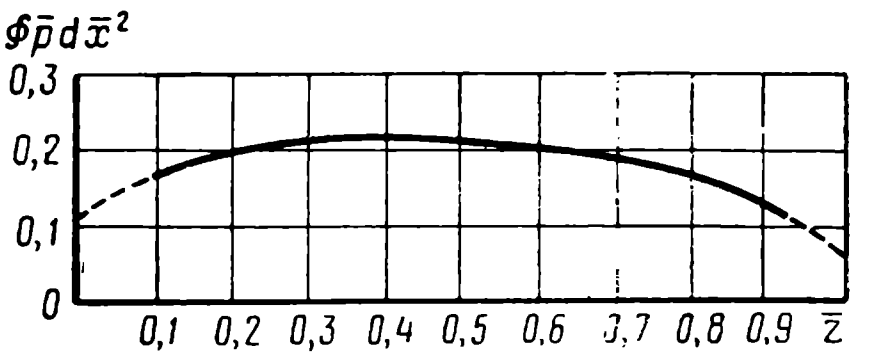


Рис. 6.3.10. График функции $\varphi_3(\bar{z})=\oint\bar{p}d\bar{x}^2$

С учетом этой величины определим аэродинамические коэффициенты в поточных координатах [см. (6.3.4) и (6.3.5)]:

$$c_x=(0{,}0327+0{,}012)\cos9^\circ+0{,}33\cdot\sin9^\circ=0{,}096;$$

$$c_y=0{,}33\cdot\cos9^\circ-(0{,}0327+0{,}012)\sin9^\circ=0{,}32.$$

Рассчитаем теперь значения этих коэффициентов по приближенной методике. Удлинение крыла $\lambda_{кр}=4l_к^2/S_{кр}=4\cdot15{,}5^2/416=2{,}30$, а его сужение $\eta_к=b_{кр}/b_{к.п}=180/90=2$. По графику рис. 12.12 [5] этим значениям $\lambda_{кр}=2{,}3$, $\eta_к=2$, а также угла $\chi=21^\circ10'$ соответствует коэффициент $(c_N^\alpha)_{и.к}=c_y^\alpha=2{,}7$.

Отношение радиуса корпуса к полуразмаху консоли $r/s_m=15{,}5/31=0{,}5$. По этой величине из табл. XV-3-1 [21] коэффициент интерференции консоли $k_{кр}=0{,}94$. Приняв значение $n_щ=0{,}8$ и учитывая, что $\chi_р=90^\circ$, получим из (6.3.6) для угла атаки $\alpha=9^\circ$

$$c_N=2{,}7\cdot0{,}94\cdot0{,}80\cdot\cos90^\circ(9^\circ/57{,}3)=0{,}32.$$

Относительная толщина профиля крыла

$$\bar{\Delta}=\Delta/b=10/180=0{,}056.$$

Отсюда коэффициент профильного сопротивления консоли согласно (6.3.7)

$$c_{x\,пр}=0{,}012\,(0{,}93+2{,}8\cdot0{,}056)(1+5\cdot0{,}056\cdot0{,}176^4)=0{,}0131.$$

По (6.3.8) подсчитываем коэффициент индуктивного сопротивления

$$c_{xi}=0{,}32^2\,(1+0{,}08)/(3{,}14\cdot1{,}15)=0{,}0304,$$

где 1,15 — значение $\lambda_{кр}$ для одной консоли. Здесь поправочный коэффициент $\delta=0{,}08$ соответствует случаю трапециевидных крыльев малого удлинения. Согласно (6.3.9) коэффициент продольной силы

$$c_R=0{,}0131+0{,}0304=0{,}0435.$$

В соответствии с этими значениями

$$c_x=c_R\cos\alpha+c_N\sin\alpha=0{,}0435\cdot\cos9^\circ+0{,}32\cdot\sin9^\circ=0{,}093;$$
$$c_y=c_N\cos\alpha-c_R\sin\alpha=0{,}32\cdot\cos9^\circ-0{,}0435\cdot\sin9^\circ=0{,}323.$$

Сравнение показывает, что расчетные и опытные данные хорошо согласуются между собой.

Работа 6.3.2

Исследование рулевого устройства в виде интерцептора

Цель работы — рассмотреть физическую картину обтекания интерцептора сверхзвуковым потоком и путем дренажных испытаний определить создаваемые им управляющие силы.

Интерцептор (рис. 6.3.11) представляет собой тонкую пластину *1*, которая выдвигается в поток в направлении, перпендикулярном обтекаемой поверхности летательного аппарата. При воздействии на эту пластину сверхзвукового потока возникает следующая картина течения. Ввиду того что перед такой пластиной поток затормаживается, а давление увеличивается, происходит отрыв пограничного слоя от обтекаемой поверхности, который сопровождается поворотом этого потока и появлением косого скачка уплотнения *2*. При этом образуется застойная зона повышенного давления *3*, а непосредственно перед верхней частью интерцептора возникает криволинейный скачок уплотнения *4*. За ним поток повернется в сторону, обратную направлению омывающего течения, а при переходе через волны разрежения *5* произойдет увеличение скорости этого потока и восстановление безотрывного характера обтекания поверхности. Поскольку это приведет к новому повороту потока, то появится еще один (хвостовой) скачок уплотнения *6*. За интерцептором также образуется застойная зона *7*, но давление в ней будет пониженным, подобно тому как это происходит за дном летательного аппарата в виде тела вращения.

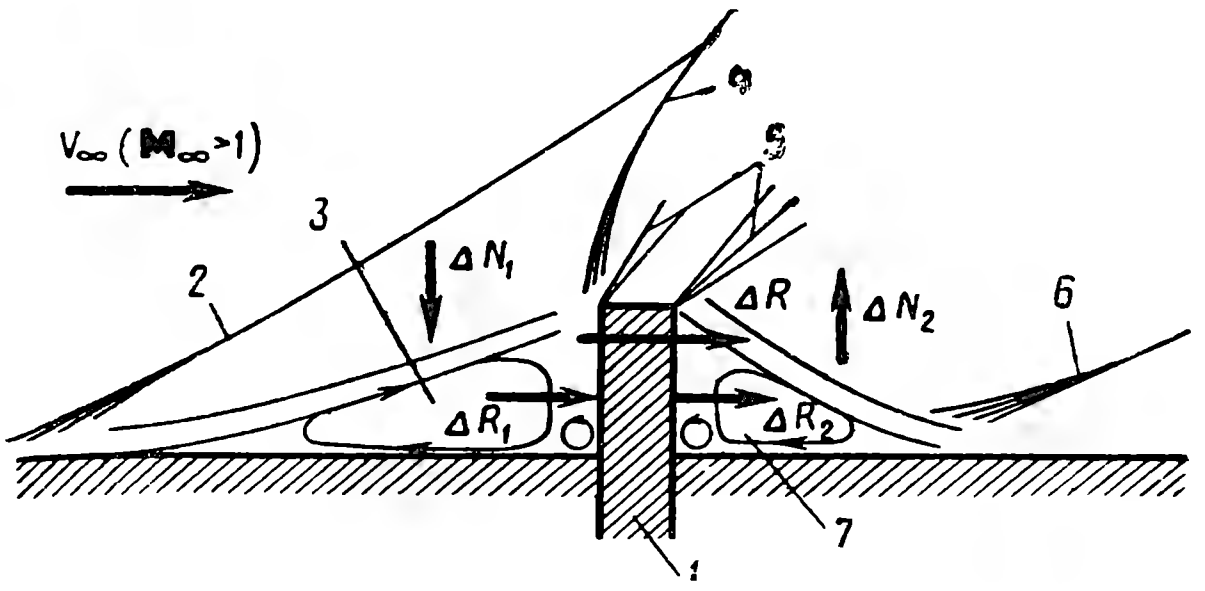


Рис. 6.3.11. Схема обтекания интерцептора сверхзвуковым потоком

В результате такого взаимодействия интерцептора возникает нормальная сила ΔN, состоящая из двух составляющих ΔN_1 и ΔN_2, обусловленных соответственно избыточным давлением в зоне *3* и разрежением в зоне *7* (см. рис. 6.3.11). Ввиду того что эти силы имеют различное направление, возникает момент. Продольное сопротивление ΔR также складывается из силы ΔR_1 от воздействия повышенного давления на переднюю плоскость и силы «донного» сопротивления ΔR_2 от воздействия пониженного давления на заднюю плоскость интерцептора. Опыты показывают, что $|\Delta N_1| > |\Delta N_2|$, поэтому суммарное управляющее усилие $\Delta N = \Delta N_1 - \Delta N_2$ будет направлено вниз. Его величину можно существенно увеличить, если расположить интерцептор у задней кромки крыла или у донного среза корпуса летательного аппарата.

Как правило, управление с помощью интерцептора осуществляется путем приведения его в колебательный режим движения с постоянными амплитудой и частотой. Величина управляющего усилия регулируется перемещением центра колебания интерцептора. Чем ближе этот центр к потоку, тем на бóльшую высоту выдвигается интерцептор, тем большее время он находится в потоке и, следовательно, больше будет управляющее усилие.

Преимуществом интерцепторов перед другими аэродинамическими органами управления является их меньший вес, а недостатками — значительное увеличение лобового сопротивления и ограниченность максимальных значений управляющих сил. Этим и объясняется их применение на сравнительно маломаневренных и легких летательных аппаратах.

Определить управляющие силы, создаваемые интерцептором, можно путем испытаний модели в аэродинамической трубе. В частности, модель, имитирующая часть несущей поверхности с интерцептором, может

быть выполнена в виде заостренной пластины (рис. 6.3.12). При этом следует предусмотреть возможность выдвижения интерцептора на различную высоту.

Как показывают исследования с помощью скоростной киносъемки, перестройка картины течения около интерцептора происходит за промежутки времени, не превышающие $2 \cdot 10^{-4}$ *сек*. Поэтому испытания колеблющихся интерцепторов можно практически осуществлять в «статическом» режиме при различных высотах выдвижения.

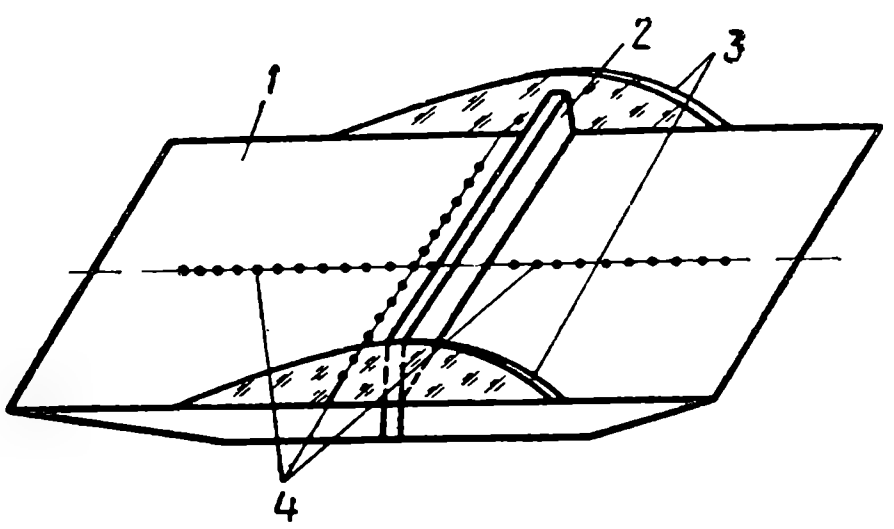


Рис. 6.3.12. Схема модели с интерцептором:

1 — заостренная пластина; *2* — выдвижной интерцептор; *3* — боковые шайбы из прозрачного материала; *4* — дренажные отверстия

Модель должна иметь дренажные отверстия, расположенные вдоль оси симметрии пластины (до и за интерцептором), позволяющие измерить давление и найти соответствующую управляющую силу, а также перед интерцептором в поперечном направлении, для того чтобы по характеру изменения давления судить о влиянии краевых эффектов на величину управляющей силы. С целью исключения влияния краевых эффектов на распределение давления по бокам интерцептора на пластине устанавливаются две заостренные пластинки (б о к о в ы е ш а й б ы, см. рис. 6.3.12), имеющие прозрачные окна, которые позволяют фотографировать спектр потока. Такое фотографирование проводится для исследования качественной картины обтекания интерцептора и осуществляется с помощью теневого прибора. По фотографии можно определить форму и размеры застойных зон, скачков уплотнения и волн разрежения. С этой целью удобно использовать оптическое устройство, называемое к о м п а р а т о р о м, которое помогает быстро и точно находить координаты характерных точек.

Найденное из эксперимента распределение давления до и после интерцептора позволяет вычислить соответствующие значения коэффициентов нормальной и продольной сил. Такое вычисление аналогично расчету аэродинамических коэффициентов профиля крыла. Вместе с тем определение искомых аэродинамических коэффициентов можно осуществить, используя приближенные теоретические методы.

Рассмотрим один из таких методов. Вначале подсчитывается число Рейнольдса перед интерцептором $\mathbf{Re}_{x1} = V_1 x_1/\nu$ (где V_1 — скорость потока в точке отрыва; x_1 — расстояние от передней кромки пластины до этой точки перед интерцептором; ν — коэффициент кинематической вязкости). Затем определяется к о э ф ф и ц и е н т к р и т и ч е с к о г о п е р е п а д а д а в л е н и я в точке отрыва $\bar{p}_2 = (p_2 - p_1)/q_1$ (где p_1, p_2 — давления соответственно перед точкой отрыва и за нею; $q_1 = kp_1\mathbf{M}_1^2/2$ — скоростной напор перед этой точкой). При этом используются следующие эмпирические зависимости:

для ламинарного пограничного слоя

$$\bar{p}_2 = 1{,}69/[\mathbf{Re}_{x1}^{0{,}25}(\mathbf{M}_1^2 - 1)^{0{,}25}]; \qquad (6.3.10)$$

для турбулентного

$$\bar{p}_2 = 2{,}04/[\mathbf{Re}_{x1}^{0{,}1}(\mathbf{M}_1^2 - 1)^{0{,}25}]. \qquad (6.3.11)$$

Одновременно находится отношение давлений для условий после и до скачка, возникающего в точке отрыва:

$$p_2/p_1 = 1 + \bar{p}_2 q_1/p_1. \qquad (6.3.12)$$

По числу Маха перед точкой отрыва ($\mathbf{M}_1$) и отношению давлений p_2/p_1, используя зависимости теории скачков уплотнения, можно определить угол β_c поворота потока за скачком (угол «жидкого клина», рис. 6.3.13).

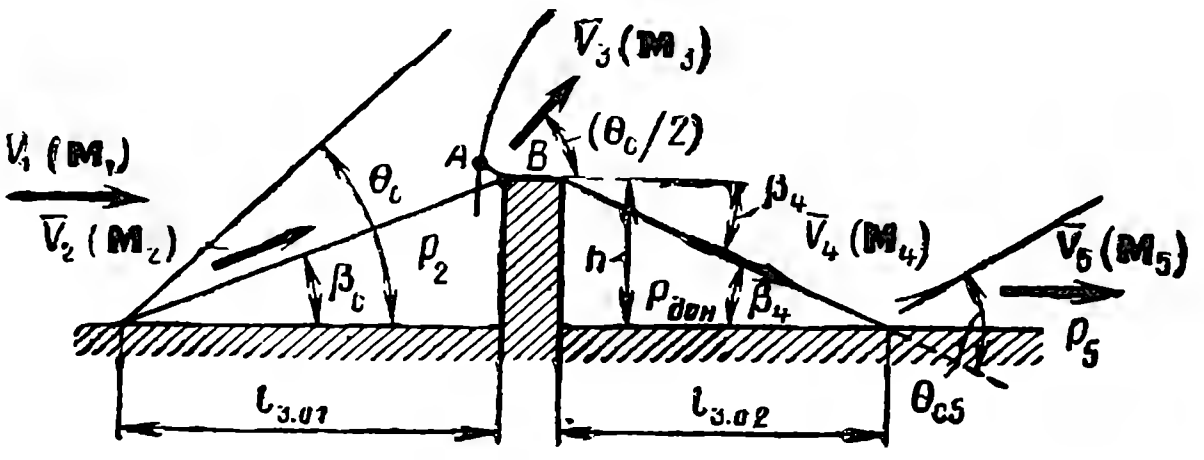


Рис. 6.3.13. Схема к расчету интерцептора

Полагая, что граница застойной зоны прямолинейна и проходит через вершину интерцептора, подсчитывается коэффициент нормальной силы перед интерцептором:

$$c_{N1} = N_1/(q_1 h l_и) = \bar{p}_2/\mathrm{tg}\,\beta_c, \qquad (6.3.13)$$

где h и $l_и$ — соответственно высота и длина интерцептора.

По графику на рис. XVI-1-4 [21] для известных значений числа $\mathbf{M}_1$ и высоты интерцептора находится коэффициент давления за ним $\bar{p}_{дон}$. В соответствии с этим коэффициент продольной силы интерцептора

$$c_R = R/(q_1 h l_и) = \bar{p}_2 + |\bar{p}_{дон}|. \qquad (6.3.14)$$

Для определения давления за интерцептором можно воспользоваться также следующей методикой. Вначале подсчитывается угол косого скачка перед интерцептором:

$$\theta_c = \arcsin\sqrt{[p_2/p_1 + (k-1)/(k+1)]/[2k\mathbf{M}_1^2/(k+1)]}, \qquad (6.3.15)$$

а из формулы

$$\mathrm{tg}\,(\theta_c - \beta_c) = \left(\frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{p_2}{p_1} + 1\right)\left(\frac{k-1}{k+1} + \frac{p_2}{p_1}\right)^{-1}\mathrm{tg}\,\theta_c \qquad (6.3.16)$$

определяется угол β_c. Затем находится соответствующее число Маха за косым скачком:

$$\mathbf{M}_2 = \sqrt{\frac{2 + (k-1)\,\mathbf{M}_1^2}{2k\mathbf{M}_1^2\sin^2\theta_c - (k-1)} + \frac{\mathbf{M}_1^2\cos^2\theta_c}{1 + (k-1)/(2k)}}. \qquad (6.3.17)$$

При допущении, что сечение AB (см. рис. 6.3.13) является критическим (число $\mathbf{M}=1$), а направление течения в нем составляет с первоначальным направлением угол $\theta_c/2$, определяется давление торможения перед сечением AB:

$$p_{0з} = p_2\left(\frac{2k}{k+1}\mathbf{M}_2^2 - \frac{k-1}{k+1}\right)^{-\frac{1}{k-1}}\mathbf{M}_2^{\frac{2k}{k-1}}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{-\frac{k}{k-1}}. \qquad (6.3.18)$$

Если, далее, задаться некоторым давлением $p_{дон}$, то методом последовательных приближений можно найти из выражения $\pi(\mathbf{M}_4) = p_{дон}/p_{оэ}$ число $\mathbf{M}_4$, а также число Маха $\mathbf{M}_{р.л.т}$ на разделяющей линии тока по графику на рис. 6.3.14 для числа $\mathbf{M}_4$. Одновременно вычисляется давление торможения на этой линии:

$$(p_0)_{р.л.т} = p_{дон}/[\pi(\mathbf{M}_{р.л.т})]. \qquad (6.3.19)$$

Тогда по числу $\mathbf{M}_4$ из табл. IV-1-1 [21] получим значение функции $\omega(\mathbf{M}_4)$ и подсчитаем угол $\beta_4 = \omega(\mathbf{M}_4) - \theta_c/2$. Затем из теории скачков уплотнения, зная β_4 и $\mathbf{M}_4$, находим θ_{c5} и отношение давлений:

$$\frac{p_5}{p_{дон}} = \frac{2k}{k+1}\mathbf{M}_4^2\sin^2\theta_{c5} - \frac{k-1}{k+1}. \qquad (6.3.20)$$

Соответствующее давление в зоне восстановления безотрывного обтекания (см. рис. 6.3.14)

$$p_{\text{п}} = K_{\text{п}} (p_5 - p_{\text{дон}}) + p_{\text{дон}}, \qquad (6.3.21)$$

где $K_{\text{п}}$ — некоторый коэффициент, определяемый по графику рис. 6.3.15 в зависимости от числа Маха на верхней кромке интерцептора.

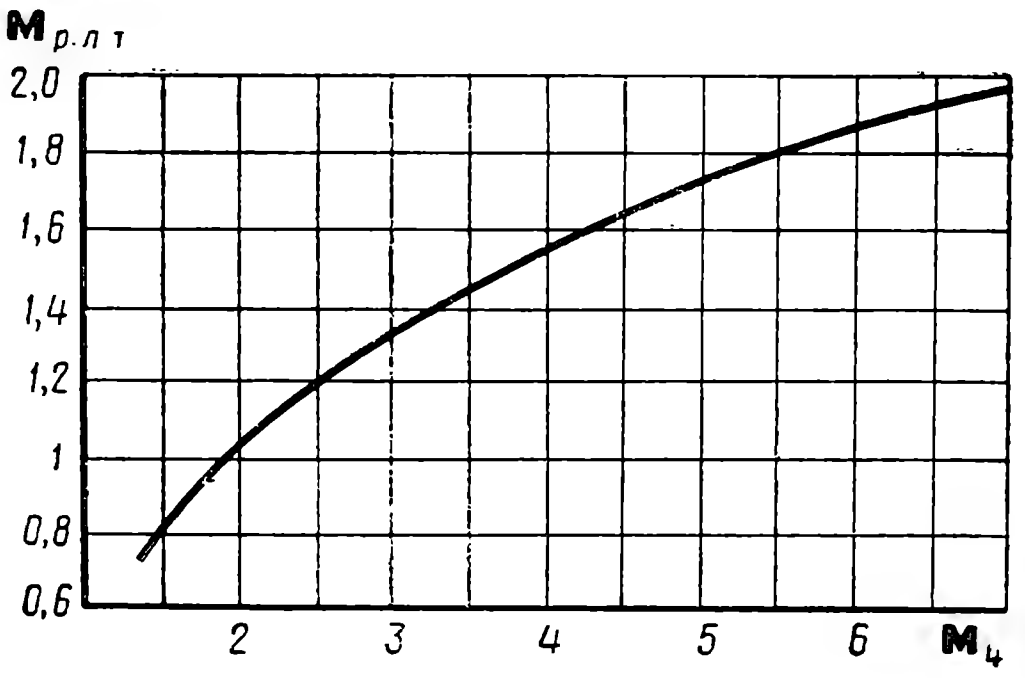


Рис. 6.3.14. График зависимости чисел Маха на разделяющей линии тока в зоне смешения в изэнтропическом потоке

Сравнивая полученное значение $p_{\text{п}}$ с давлением $(p_0)_{\text{р.л.т}}$, методом последовательных приближений отыскиваем

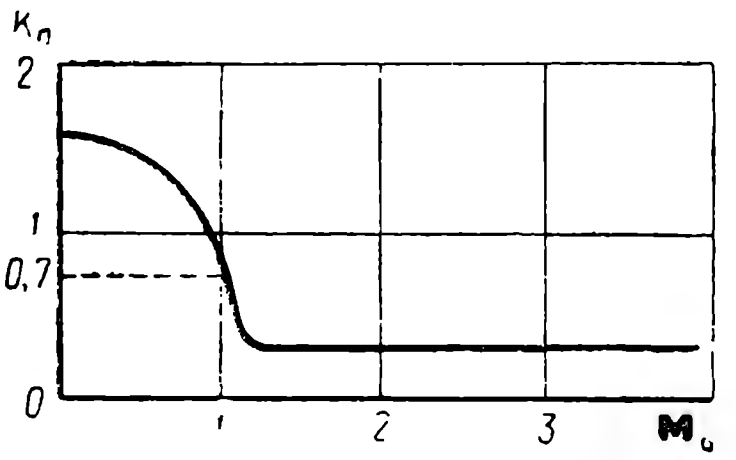


Рис. 6.3.15. График зависимости коэффициента $K_{\text{п}}$ от числа Маха

окончательно такую величину $p_{\text{дон}}$, при которой $p_{\text{п}} = (p_0)_{\text{р.л.т}}$. После этого оказывается возможным определить длину зоны отрыва $l_{\text{з.о2}} = h \operatorname{ctg} \beta_4$ (см. рис. 6.3.13) и коэффициенты сил $c_{N2} = \bar{p}_{\text{дон}} \operatorname{ctg} \beta_4$, $c_{R2} = \bar{p}_{\text{дон}}$. В соответствии с этим полный коэффициент продольной силы

$$c_R = \bar{p}_2 + |\bar{p}_{\text{дон}}|. \qquad (6.3.22)$$

Порядок проведения работы

1. Ознакомиться с устройством экспериментальной установки и проверить готовность к работе всех ее элементов.
2. Закрепить пластину с интерцептором, выдвинутым на высоту h, в рабочей части аэродинамической трубы так, чтобы верхняя поверхность пластины была строго параллельна направлению потока.
3. Замерить лабораторным барометром атмосферное давление.
4. Записать начальные показания на печатающем устройстве ГРМ по всем каналам измерения давления, включая статическое давление в рабочей части трубы P_∞ и давление в форкамере p_0.
5. Осуществить запуск трубы и после выхода ее на режим установившегося движения воздуха в рабочей части включить печатающее устройство ГРМ. Одновременно замерить температуру в форкамере и сфотографировать спектр потока при помощи теневого прибора.
6. Расшифровать показания ГРМ и найти давления на поверхности пластины, а также p_∞ и p_0.
7. Подсчитать параметры потока в рабочей части аэродинамической трубы.
8. Вычислить коэффициенты давления на поверхности пластины, а затем определить аэродинамические коэффициенты c_{N1}, c_{N2}, а также c_R.
9. Повторить измерения и соответствующие расчеты для различных высот выдвижения интерцептора.
10. Обработать негатив фотопленки, отпечатать и расшифровать фотографии спектра потока, обтекающего интерцептор, замерив протяженность застойных зон, углы «жидких клиньев», а также скачков уплотнения (θ_{c1} и θ_{c2}).

11. Построить график зависимости коэффициентов c_{N1}, c_{N2} и c_R от высоты выдвижения интерцептора h.

Пример. Рассмотрим экспериментальное исследование интерцептора длиной $l_и = 100$ *мм* и высотой $h = 8$ *мм*, расположенного на поверхности заостренной пластины на расстоянии $x_1 = 140$ *мм* от ее передней кромки, проведенное в сверхзвуковой аэродинамической трубе с открытой рабочей частью при $\mathbf{M}_\infty = 1{,}83$.

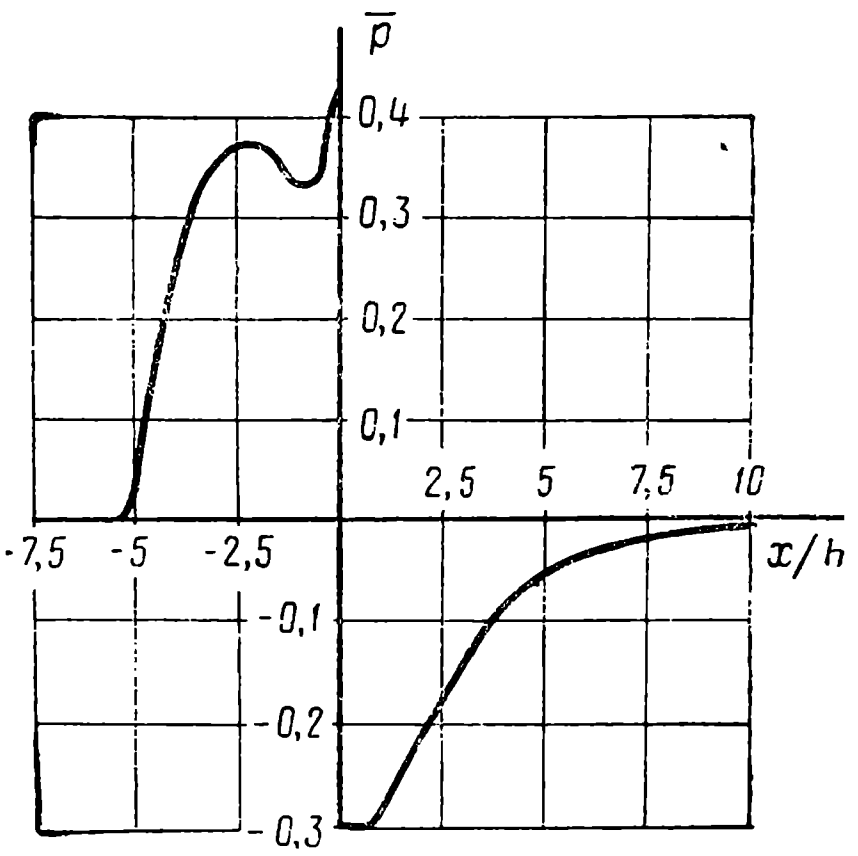


Рис. 6.3.16. График распределения коэффициента давления при обтекании интерцептора

Расшифровка показаний лабораторного барометра, ГРМ, датчика температуры позволила определить: атмосферное давление $p_{атм} = 10^4$ *кГ/м²*; давление в рабочей части $p_\infty = 10^4$ *кГ/м²*; давление и температуру в форкамере $p_0 = 5{,}89 \cdot 10^4$ *кГ/м²*, $T_0 = 479$ К. Этим значениям и числу $\mathbf{M}_\infty = 1{,}83$ соответствуют плотность и температура в рабочей части: $\rho_\infty = 0{,}125$ *кГ·сек²/м⁴*, $T_\infty = 287$ К.

Далее был определен скоростной напор

$$q_\infty = kp_\infty \mathbf{M}_\infty^2/2 = 1{,}4 \cdot 10^4 \cdot 1{,}83^2/2 = 2{,}34 \cdot 10^4 \text{ кГ/м}^2.$$

По величине этого напора, а также давлению, найденному в результате расшифровки показаний ГРМ, вычислены и построены графики распределения коэффициента давления по длине пластины (рис. 6.3.16). Затем с помощью планиметра найдены площади под кривой функции $\bar{p}(\bar{x})$ распределения коэффициента давления перед интерцептором $S_1 = 24{,}9$ *см²* и за ним $S_2 = 16{,}0$ *см²*. Учитывая масштабы $\bar{p}$ и $\bar{x}$ ($\mu_{\bar{p}} = 0{,}05$ *1/см* и $\mu_{\bar{x}} = 1{,}25$ *1/см*), получаем значения коэффициентов нормальных сил:

$$c_{N1} = S_1 \mu_{\bar{p}} \mu_{\bar{x}} = 24{,}9 \cdot 0{,}05 \cdot 1{,}25 = 1{,}56;$$

$$c_{N2} = S_2 \mu_{\bar{p}} \mu_{\bar{x}} = 16{,}0 \cdot 0{,}05 \cdot 1{,}25 = 1{,}00.$$

Соответствующий коэффициент продольной силы

$$c_R = \bar{p}_2 + |\bar{p}_{дон}| = 0{,}36 + 0{,}31 = 0{,}67.$$

Измерения на компараторе фотографии изображения потока, полученной при помощи теневого прибора ИАБ-451 (рис. 6.3.17), позволили найти: длины передней и зад-

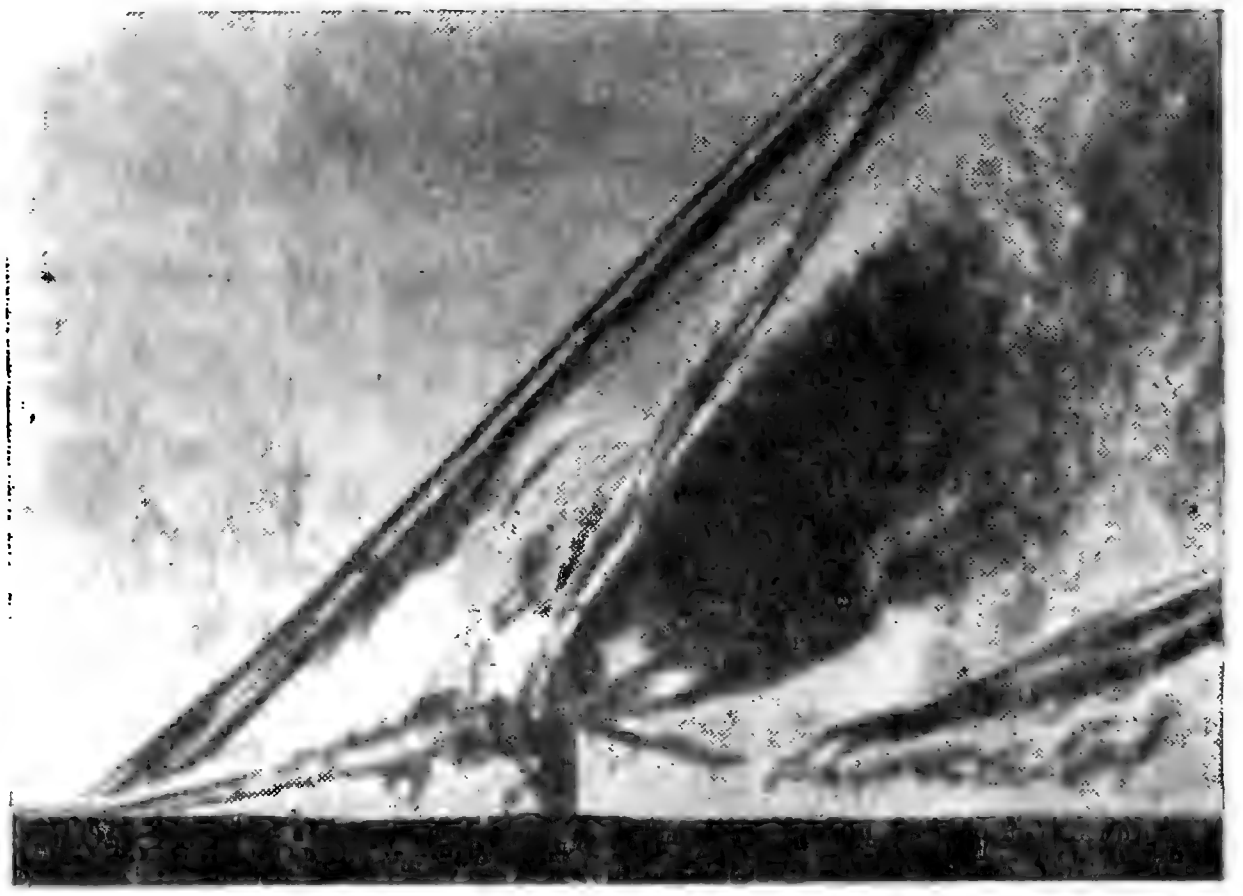


Рис. 6.3.17. Фотография спектра обтекания интерцептора сверхзвуковым потоком ($\mathbf{M}_\infty = 1{,}83$; $h = 0{,}8$ *см*)

ней застойных зон $l_{з:о1}=36$ и $l_{з:о2}=23$ *мм*, углы «жидких клиньев» $\beta_{с1}=12$ и $\beta_{с2}\approx 19°$, углы скачков $\theta_{с1}=44$ и $\theta_{с2}\approx 42°$.

На рис. 6.3.18 построен график зависимости нормальной силы перед интерцептором ΔN_1 от высоты его выдвижения h, полученный по экспериментальным данным в аналогичных условиях ($\mathbf{M}_\infty=1{,}83$).

Рассмотрим расчет интерцептора заданных размеров и сравним полученные данные с экспериментом. Сначала подсчитаем значения коэффициентов динамической и кинематической вязкости воздуха в рабочей части трубы:

$$\mu_\infty=\mu\left(T_\infty/T\right)^{0,76}=1{,}83\cdot 10^{-6}\,(287/288)^{0,76}=1{,}82\cdot 10^{-6}\ кГ\cdot сек/м^2;$$

$$\nu_\infty=\mu_\infty/\rho_\infty=1{,}82\cdot 10^{-6}/0{,}125=1{,}46\cdot 10^{-5}\ м^2/сек.$$

Определяем скорость перед зоной отрыва:

$$V_1=\mathbf{M}_\infty a_\infty=1{,}83\cdot 340=622\ м/сек,$$

а также число Рейнольдса:

$$\mathbf{Re}=V_1 x_1/\nu_\infty=622\cdot 0{,}140/(1{,}46\cdot 10^{-5})=6{,}00\cdot 10^6.$$

Считая пограничный слой турбулентным ($\mathbf{Re}_{кр}<6\cdot 10^6$), найдем:

коэффициент давления

$$\bar{p}_2=\frac{2{,}04}{(6{,}00\cdot 10^6)^{0,1}\,(1{,}83^2-1)^{0,25}}=0{,}346;$$

соответствующее отношение давлений

$$p_2/p_1=1+1{,}40\cdot 1{,}83^2\cdot 0{,}346/2=1{,}81$$

и абсолютную величину этого давления

$$p_2=(p_2/p_1)\,p_1=1{,}81\cdot 1=1{,}81\ кГ/см^2.$$

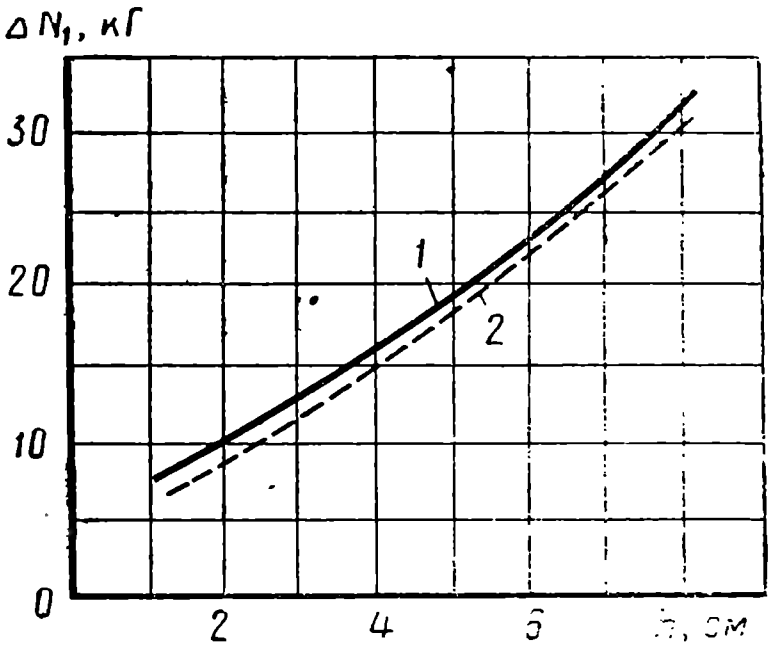


Рис. 6.3.18. График зависимости нормальной силы перед интерцептором от высоты его выдвижения при числе $\mathbf{M}_\infty=1{,}83$:

1 — теоретическая кривая; *2*—опытная кривая

Далее определим угол косого скачка уплотнения:

$$\theta_с=\arcsin\sqrt{[p_2/p_1+(k-1)/(k+1)]/[2k\mathbf{M}_1^2/(k+1)]}=$$

$$=\arcsin\sqrt{[1{,}81+(1{,}4-1)/(1{,}4+1)]/[2\cdot 1{,}4\cdot 1{,}83^2/(1{,}4+1)]}=45{,}5°.$$

С учетом этого

$$\mathrm{tg}\,(\theta_с-\beta_с)=[(1{,}4-1)/(1{,}4+1)\ 1{,}81+1][(1{,}4-1)/(1{,}4+1)+$$
$$+1{,}81]^{-1}\,\mathrm{tg}\,45{,}5°=0{,}669,$$

откуда

$$\mathrm{tg}\,\beta_с=0{,}206\ \ (\beta_с=11{,}6°).$$

Теперь найдем число Маха за косым скачком:

$$\mathbf{M}_2=\sqrt{\frac{2+(1{,}4-1)\,1{,}83^2}{2\cdot 1{,}4\cdot 1{,}83^2\sin^2 45{,}5°-(1{,}4-1)}+\frac{1{,}83^2\cos^2 45{,}5°}{1+(1{,}4-1)/(2\cdot 1{,}4)}}=1{,}43,$$

а также давление торможения за этим скачком:

$$p_{0з}=1{,}81\left(\frac{2\cdot 1{,}4}{1{,}4+1}\,1{,}43^2-\frac{1{,}4-1}{1{,}4+1}\right)^{-\frac{1}{1{,}4-1}}1{,}43^{\frac{2\cdot 1{,}4}{1{,}4-1}}\left(\frac{2}{1{,}4+1}\right)^{-\frac{1{,}4}{1{,}4-1}}=5{,}72\ кГ/см^2.$$

Зададимся давлением в застойной зоне за интерцептором $p_{дон}=0{,}287\ кГ/см^2$. Тогда газодинамическая функция $\pi(\mathbf{M}_4)=0{,}287/5{,}72=0{,}0502$. Этому значению в табл. 9 [13] для $k=1{,}4$ соответствует число Маха $\mathbf{M}_4=2{,}62$.

По графику рис. 6.3.14 для $\mathbf{M}_4=2{,}62$ получим число Маха на разделяющей линии тока $\mathbf{M}_{р.л.т}=1{,}23$, которое по табл. 9 [13] позволяет найти функцию $\pi(\mathbf{M}_{р.л.т})=0{,}396$ и давление торможения на разделяющей линии тока:

$$(p_0)_{р.л.т}=p_{дон}/\pi\,(\mathbf{M}_{р.л.т})=0{,}287/0{,}396=0{,}723\ кГ/см^2.$$

Из табл. IV-1-1 [21] по числу $\mathbf{M}_4=2{,}62$ определяем угол поворота потока $\omega(\mathbf{M}_4)=41{,}8°$. Соответствующий угол

$$\beta_4=\omega\,(\mathbf{M}_4)-\theta_с/2=41{,}8-45{,}5/2=19°.$$

Используя формулу из теории скачков уплотнения

$$\frac{\operatorname{tg}\theta_{c5}}{\operatorname{tg}(\theta_{c5}-\beta_4)}=\frac{(k+1)\,M_4^2\sin^2\theta_{c5}}{2+(k-1)\,M_1^2\sin^2\theta_{c5}},$$

получаем методом последовательных приближений значение угла скачка $\theta_{c5}=40{,}1°$. Соответствующее отношение давлений на скачке

$$\frac{p_5}{p_{\text{дон}}}=\frac{2\cdot 1{,}4}{1{,}4+1}2{,}62^2\sin^2 40{,}1°-\frac{1{,}4-1}{1{,}4+1}=3{,}17,$$

откуда

$$p_5=(p_5/p_{\text{дон}})\,p_{\text{дон}}=3{,}17\cdot 0{,}287=0{,}910\ кГ/см^2.$$

Получив из графика (см. рис. 6.3.15) по значению $M_4=1$ величину коэффициента $K_{\text{п}}=0{,}70$, подсчитываем давление за хвостовым скачком уплотнения

$$p_{\text{п}}=0{,}70\,(0{,}910-0{,}287)+0{,}287=0{,}725\ кГ/см^2.$$

Поскольку $(p_0)_{\text{р.л.т}}=0{,}723$ и $p_{\text{п}}=0{,}725\ кГ/см^2$ достаточно близки, дальнейших приближений не делаем и полагаем, что давление $p_{\text{дон}}=0{,}287\ кГ/см^2$ найдено достаточно точно.

Коэффициент давления

$$\bar{p}_{\text{дон}}=(0{,}287-1)/2{,}42=-0{,}295.$$

Коэффициенты нормальных сил N_1 и N_2 соответственно равны:

$$c_{N1}=\bar{p}_2\operatorname{ctg}\beta_{\text{с}}=0{,}346/0{,}206=1{,}67;$$

$$c_{N2}=\bar{p}_{\text{дон}}\operatorname{ctg}\beta_4=-0{,}295\cdot\operatorname{ctg}19°=-0{,}855,$$

а коэффициент осевой силы

$$c_R=\bar{p}_2+|\bar{p}_{\text{дон}}|=0{,}346+0{,}295=0{,}641.$$

Сравнение показывает, что результаты расчета отличаются от экспериментальных коэффициентов c_R и c_{N1} примерно на 5%, а от коэффициента c_{N2} — на 15%.

Работа 6.3.3

Исследование комбинированного органа управления (КОУ)

Цель работы — изучение картины взаимодействия сверхзвукового потока воздуха со струей газа, вдуваемого через щель в пластине, и управляющей силы комбинированного органа управления.

Общие сведения

Комбинированный орган управления (КОУ) представляет собой щелевое сопло или систему отверстий, расположенных обычно либо на задней кромке несущей поверхности (крыло, оперение), либо на внешней поверхности кормовой части корпуса летательного аппарата. Управляющая сила, создаваемая им, включает в себя как силу тяги ΔP_i от истечения вдуваемого в поток газа, так и аэродинамическую силу ΔN, возникающую от перераспределения давления по омываемой потоком поверхности при интерференции этого потока со струей вдуваемого газа (рис. 6.3.19). В качестве рабочего тела КОУ применяется сжатый газ, продукты сгорания топлива двигательной установки и т. п.

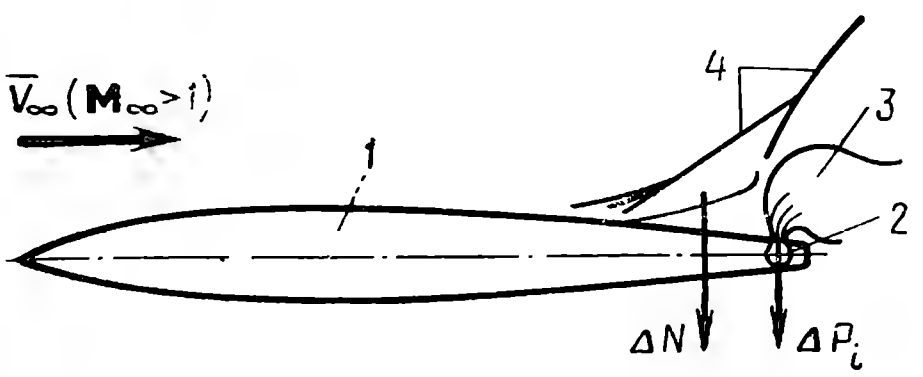


Рис. 6.3.19. Схема комбинированного органа управления на задней кромке крыла:

1 — крыло; *2* — щелевое сопло; *3* — струя вдуваемого газа; *4* — система скачков уплотнения

КОУ используется как при дозвуковых скоростях в качестве реактивных закрылков,

так и при сверхзвуковых полетах. Картина взаимодействия сверхзвукового потока со струей газа (рис. 6.3.20) отличается большой сложностью. Перед струей вдуваемого газа *1*, служащей своеобразной преградой, поток тормозится, в результате чего возникает положительный гра-

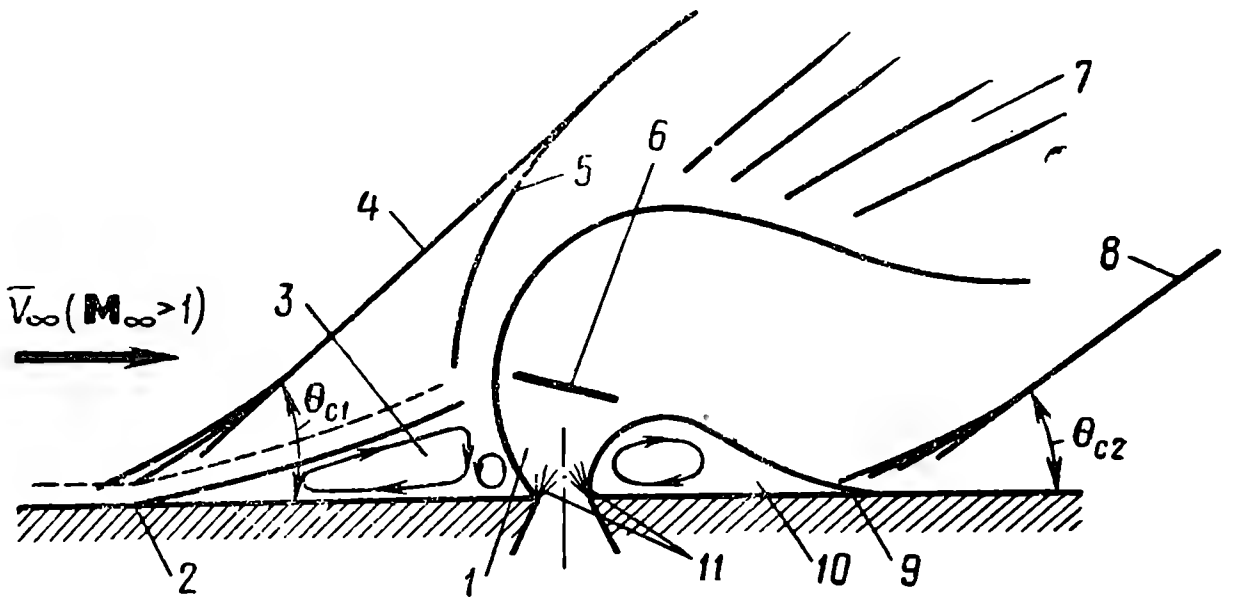


Рис. 6.3.20. Схема течения при вдуве в поток газа

диент давления, который вызывает отрыв пограничного слоя в точке *2*. При этом образуются передняя застойная зона *3* и скачок уплотнения *4*. Сама струя под воздействием потока поворачивается и на некотором расстоянии вниз по потоку соприкасается с обтекаемой поверхностью в точке *9*, создавая еще одну застойную (заднюю) зону *10* с пониженным давлением. В потоке газа и в струе наблюдаются скачки уплотнения *5*, *6*, *8*, а также волны разрежения *7* и *11*.

Рассмотренная схема течения является типичной для больших отношений давления торможения в струе к давлению в набегающем потоке ($p_{0j}/p_\infty > 60$). При меньших значениях этого отношения картина взаимодействия упрощается, так как с уменьшением отношения p_{0j}/p_∞ последовательно исчезают застойная зона *10*, хвостовой скачок уплотнения *8*, передняя застойная зона *3* и скачки *5* и *6*, а косой скачок уплотнения *4* располагается у передней кромки отверстия (рис. 6.3.21).

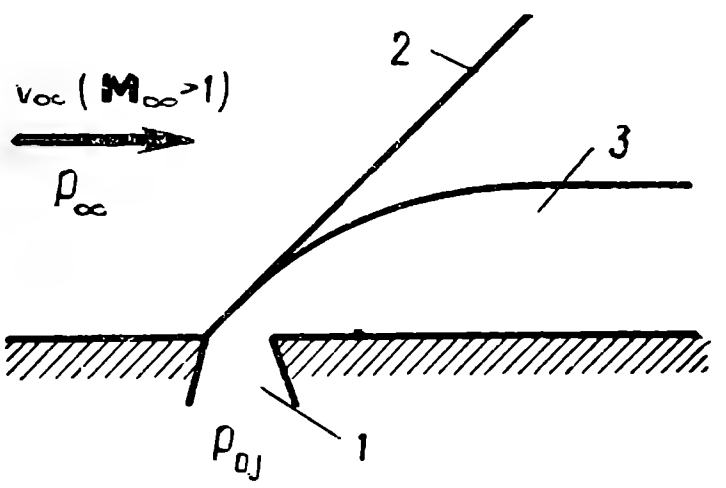


Рис. 6.3.21. Схема взаимодействия струи со сверхзвуковым потоком при малых перепадах давления ($p_{0j}/p_\infty < 5$):

1 — щелевое сопло; *2* — скачок уплотнения; *3* — струя вдуваемого газа

Об эффективности работы комбинированных органов управления можно судить по величине коэффициента усиления, который представляет собой отношение управляющей силы к силе тяги, образующейся при вдуве газа в поток, т. е.

$$K_{\text{ус}} = (\Delta N + \Delta P_i)/\Delta P_i = 1 + \Delta N/\Delta P_i. \qquad (6.3.23$$

Чем больше коэффициент усиления, тем больше та часть управляющей силы, которая создается за счет аэродинамической интерференции струи и потока. Поскольку сила тяги пропорциональна расходу вдуваемого газа, то отсюда следует, что при больших значениях коэффициента усиления заданную управляющую силу можно получить при меньших значениях расхода вдуваемого газа, чем достигается уменьшение его запаса на борту летательного аппарата. При определенных условиях полета и режима работы комбинированного органа управления коэффициент усиления может быть очень высоким ($K_{\text{ус}} = 6 \div 8$), что является несомненным достоинством этого органа управления. К преимуществам его относятся также отсутствие подвижных частей, контактирующихся с набегающим потоком, что делает его более надежным, особенно при гиперзвуковых скоростях полета в условиях больших тепловых потоков.

Регулирование величины управляющей силы осуществляется обычно с помощью клапанов, изменяющих расход вдуваемого газа, поэтому быстродействие органа управления высокое. Недостатки комбинированных органов управления такие же, как и у аэродинамических, и определяются, в частности, тем, что для обеспечения их надежной работы требуются большие скорости полета, происходящего в достаточно плотных слоях атмосферы.

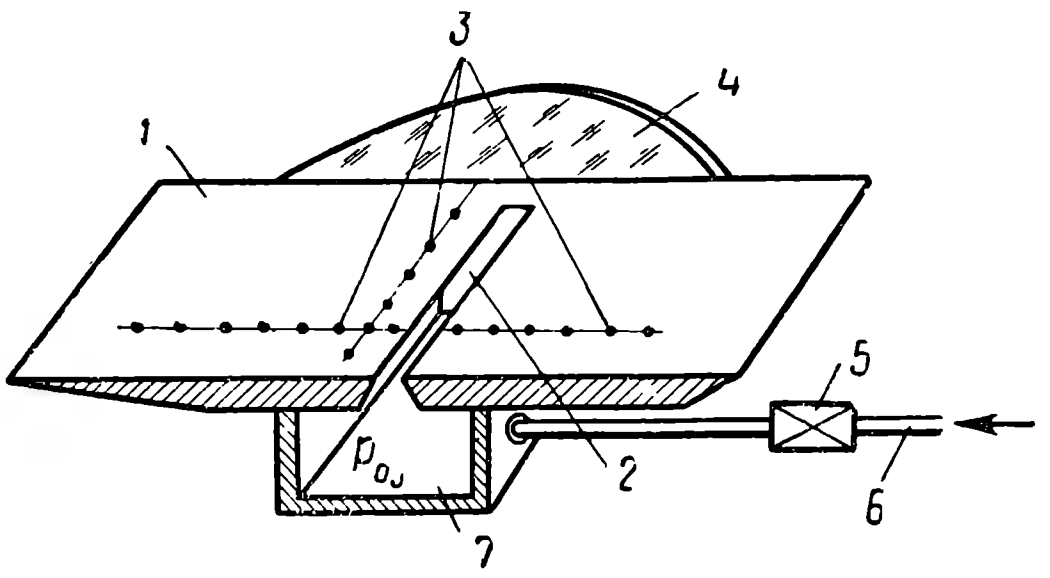


Рис. 6.3.22. Модель комбинированного органа управления

Экспериментальная установка для исследования работы КОУ представляет собой аэродинамическую трубу, в рабочей части которой закрепляется модель. В качестве модели можно использовать заостренную пластину *1* со щелевым соплом *2* (рис. 6.3.22). Сжатый газ подается в форкамеру комбинированного органа управления *7* через трубопровод *6*. Давление в этой форкамере регулируется с помощью редукционного клапана *5*. Для замера давлений пластина дренируется рядом отверстий *3*, расположенных вдоль ее оси симметрии на участке до щелевого сопла и за ним. Это позволяет определить соответствующие составляющие управляющего усилия КОУ. Кроме того, перед щелью поперек пластины также делается ряд дренажных отверстий, чтобы по характеру изменения давления судить о влиянии краевых эффектов на величину управляющей силы.

По полученному из эксперимента распределению давления по поверхности пластины можно вычислить часть управляющей силы ΔN, обусловленную аэродинамической интерференцией потока и струи.

Сила тяги, развиваемая вдуваемым через щель газом,

$$\Delta P_i = f(\lambda_a)\, p_{0j}\, S_{\text{щ}}, \qquad (6.3.24)$$

где $f(\lambda_a)$ — газодинамическая функция; $\lambda_a = V_a/a^*$ — безразмерная скорость вдуваемого газа в выходном сечении щели; $S_{\text{щ}}$ — площадь выходного сечения щелевого сопла. Обычно сечение щели делается суживающимся и $\lambda_a = 1$. Поэтому для расчета силы тяги требуется знать лишь размеры выходного сечения щели и замерить давление торможения вдуваемого газа p_{0j}.

Теоретический расчет коэффициента усиления по зависимости (6.3.23) связан с вычислением силы ΔN. При определении этой силы можно исходить из предположения, что суммарная сила от избыточного давления за щелью равна нулю. Такая предпосылка хорошо согласуется с экспериментальными данными. Для нахождения силы перед струей вводится понятие о высоте эквивалентной преграды $h_э$, т. е. некоторой высоте твердой преграды (например интерцептора), которая создает такую же управляющую силу ΔN как и при струйном взаимодействии с потоком. В первом приближении высота эквивалентной преграды, *см*,

$$h_э = 0{,}641 \sqrt{\Delta_{\text{щ}}\, p_{0j}/p_\infty}, \qquad (6.2.25)$$

где $\Delta_{\text{щ}}$ — ширина щели, *см*. Определив по (6.3.25) эту высоту, можно затем вычислить силу ΔN, так же как и значение силы ΔN_1, действующей перед интерцептором (см. рис. 6.3.11). Для этого найдем коэффициент критического перепада давления в точке отрыва пограничного слоя перед струей $\bar{p}_2$. Затем вычислим отношение давлений для условий за

косым скачком уплотнения и до него: $p_2/p_1 = 1 + \bar{p}_2 q_\infty / p_\infty$. Кроме того, по числу Маха $\mathbf{M}_\infty$ и величине этого отношения по зависимостям теории скачков уплотнения получим угол поворота потока за скачком β_c. Наконец, можно вычислить длину зоны отрыва: $l_{з.о} = h_э / \operatorname{tg} \beta_c$ и соответствующее значение силы:

$$\Delta N = (p_2 - p_\infty)\, l_{з.о}\, l_{щ}, \tag{6.3.26}$$

где $l_{щ}$ — длина щелевого сопла для вдува газа. Рассмотренный метод расчета этой силы не учитывает краевых эффектов, поэтому чем длиннее щель, тем точнее определяется такая сила.

При проведении экспериментов замер давлений проводится по всей длине пластины. С целью снижения влияния боковых кромок этой пластины желательно располагать около них специальные устройства в виде шайб из прозрачного материала (см. *4* на рис. 6.3.22). Так же как и при исследовании интерцептора, желательно осуществить фотографирование спектра течения, используя для этой цели теневой прибор.

Порядок проведения работы

1. Ознакомиться с устройством экспериментальной установки и проверить готовность к работе всех ее элементов.
2. Закрепить модель комбинированного органа управления в рабочей части аэродинамической трубы так, чтобы верхняя поверхность пластины была параллельна направлению набегающего потока.
3. Замерить лабораторным барометром атмосферное давление.
4. Записать начальные показания на печатающем устройстве ГРМ по всем каналам измерения давления, включая измерение статического давления в рабочей части аэродинамической трубы p_∞ и давлений в форкамерах трубы p_0 и комбинированного органа управления p_{0j}.
5. Включить устройство для подачи вдуваемого газа и на заданных режимах вдува (при определенных значениях p_{0j}) произвести с помощью теневого прибора фотографирование газодинамического спектра.
6. Отключить подачу вдуваемого газа.
7. Осуществить запуск трубы и после выхода ее на режим установившегося движения воздуха в рабочей части обеспечить вновь подачу вдуваемого газа.
8. Установить необходимый режим вдува газа, контролируя его по соответствующей величине давления торможения p_{0j}, включить печатающее устройство ГРМ, одновременно замерить температуры в форкамерах трубы и КОУ, а также сфотографировать изображение при помощи теневого прибора; повторить измерения на других режимах вдува.
9. Расшифровать показания ГРМ и найти давления на поверхности пластины, а также значения p_∞, p_0 и p_{0j}.
10. Подсчитать параметры потока в рабочей части аэродинамической трубы и в выходном сечении щели комбинированного органа управления.
11. Вычислить коэффициенты давления на поверхности пластины, построить соответствующие графики при различных значениях отношения p_{0j}/p_∞, а затем с помощью планиметра определить аэродинамические коэффициенты нормальных сил перед щелью вдува и за нею.
12. Подсчитать значения тяги, развиваемой вдуваемым газом на различных режимах работы КОУ.
13. Определить значения коэффициента усиления $K_{ус}$ при различных значениях отношения давлений p_{0j}/p_∞ и построить соответствующий график.
14. Обработать негатив фотопленки, отпечатать и расшифровать фотографии спектра струй и потоков, взаимодействующих с вдуваемым

газом. При этом замерить протяженность застойных зон, углы «жидких клиньев), скачков уплотнения (θ_{c1} и θ_{c2}), а также расстояние от поверхности пластины до прямого скачка в свободной струе (при отсутствии ее взаимодействия с потоком) и точки пересечения переднего «жидкого клина» с нормалью к поверхности пластины у ближней кромки щели (см. рис. 6.3.20).

Пример. Рассмотрим экспериментальное исследование комбинированного органа управления с шириной щелевого сопла $\Delta_{щ}=0{,}508$ *мм* и длиной $l_{щ}=152$ *мм*, проведенное в сверхзвуковой аэродинамической трубе для числа Маха $\mathbf{M}_\infty=4$. Канал щели — сужающийся, а направление вдуваемой струи воздуха перпендикулярно обтекаемой поверхности.

Модель КОУ крепилась на прямоугольной плоской заостренной спереди пластине длиной 390 *мм* и шириной 254 *мм*. На расстоянии 19 *мм* от передней кромки устанавливался полуцилиндрический турбулизатор высотой 0,64 *мм*. Расстояние от передней кромки пластины до щелевого сопла составляло $x_1=184$ *мм*.

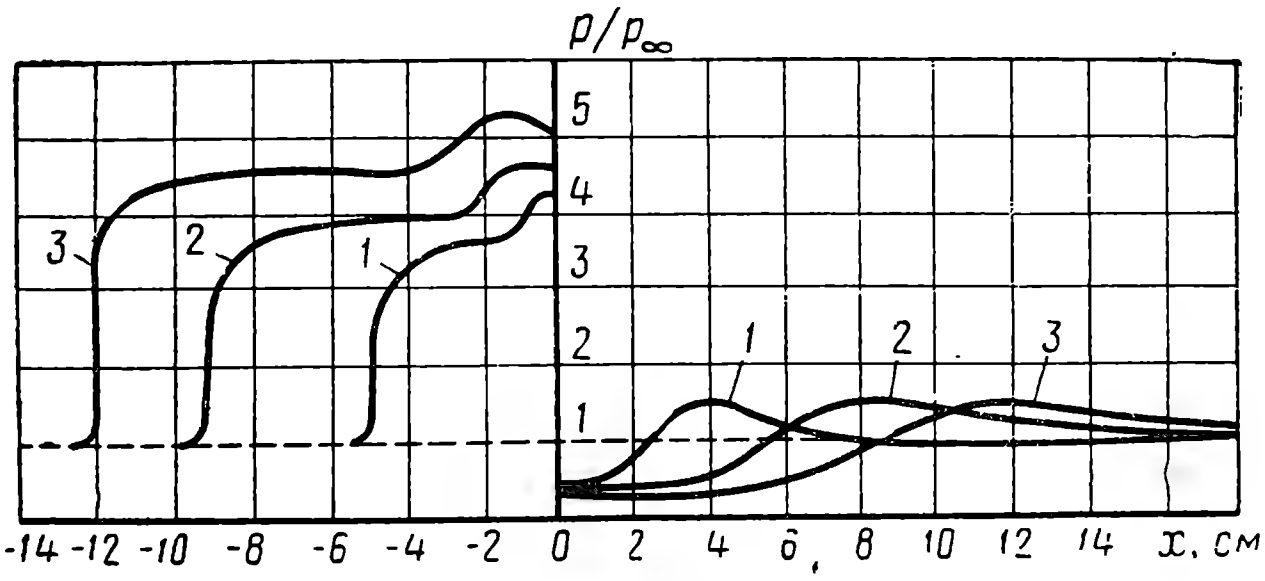


Рис. 6.3.23. Распределение давления по поверхности комбинированного органа управления при различных перепадах давлений:

1 — $p_{0j}/p_\infty=152$; *2* — $p_{0j}/p_\infty=356$; *3* — $p_{0j}/p_\infty=570$

По данным замеров манометров и термометров найдены следующие параметры: $p_0=3{,}04$ *кГ/см²*; $T_0=300$ К (в форкамере аэродинамической трубы); $p_{0j}=7{,}02$ *кГ/см²*; $T_{0j}=700$ К (в форкамере комбинированного органа управления). Соответствующее давление в рабочей части трубы

$$p_\infty = p_0\,\pi(\mathbf{M}_\infty) = 3{,}04\,\pi(4) = 0{,}0197\ кГ/см^2,$$

а отношение

$$p_{0j}/p_\infty = 7{,}02/0{,}197 = 356.$$

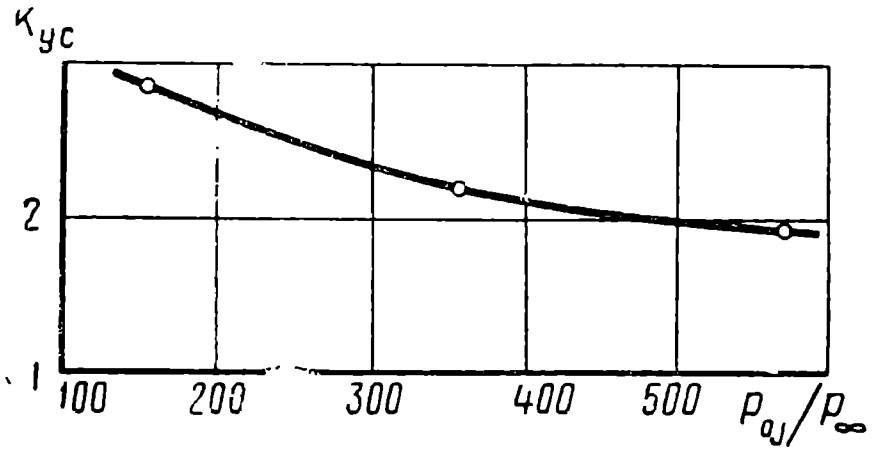


Рис. 6.3.24. График зависимости коэффициента усиления от перепада давлений p_{0j}/p_∞

Распределение давления по поверхности пластины, полученное по замерам на ГРМ, приведено на графике 6.3.23 (кривая *2*).

В результате графического интегрирования получено значение нормальной силы перед соплом $\Delta N=8{,}30$ *кГ*. Исследования также показали, что нормальная сила от давления на пластину за щелевым соплом практически отсутствует. Тяга, развиваемая вдуваемым воздухом ($k=1{,}4$), согласно (6.3.24)

$$\Delta P_i = 1{,}268\cdot 7{,}02\cdot 10^4\,(0{,}508\cdot 10^{-3}\cdot 152\cdot 10^{-3}) = 6{,}86\ кГ.$$

Соответствующий коэффициент усиления

$$K_{ус} = 1 + 8{,}30/6{,}86 = 2{,}21.$$

Зависимость этого коэффициента от перепада давлений p_{0j}/p_∞ по данным двух экспериментов при том же числе $\mathbf{M}_\infty=4$ (кривые *1* и *3* на рис. 6.3.23) приведена на рис. 6.3.24. Из графика видно, что чем больше перепад давлений, тем меньше значения коэффициентов усиления.

Определим значение коэффициента усиления расчетным путем. Для этого вычислим высоту эквивалентной преграды:

$$h_э = 0{,}641\sqrt{0{,}508\cdot 10^{-1}\cdot 356} = 2{,}73\ см.$$

Температуре воздуха в рабочей части трубы $T_\infty = T_0\tau(\mathbf{M}_\infty) = 300\cdot\tau(4) = 71{,}2$ К соответствует согласно графику на рис. I-12 [17] коэффициент динамической вязкости $\mu_\infty = 0{,}65\cdot 10^{-6}$ *кГ·сек/м²*. Плотность воздуха в этой рабочей части

$$\rho_\infty = p_\infty/(RT_\infty) = 0{,}0197/(287\cdot 71{,}2) = 0{,}00965 \text{ кГ·сек}^2/\text{м}^4.$$

Скорость звука

$$a_\infty = \sqrt{1{,}4\cdot 287\cdot 71{,}2} = 168 \text{ м/сек},$$

а скорость потока

$$V_\infty = \mathbf{M}_\infty a_\infty = 4\cdot 168 = 672 \text{ м/сек}.$$

Соответствующее число Рейнольдса потока перед щелевым соплом

$$\mathbf{Re}_x = \frac{V_\infty \rho_\infty x_1}{\mu_\infty} = \frac{674\cdot 0{,}00965\cdot 0{,}184}{0{,}65\cdot 10^{-6}} = 1{,}82\cdot 10^6,$$

а коэффициент давления в передней застойной зоне

$$\bar{p}_2 = 2{,}04/[(1{,}82\cdot 10^6)^{0{,}1}(4^2-1)^{0{,}25}] = 0{,}244.$$

По этой величине находим отношение давлений:

$$p_2/p_1 = 1 + 1{,}4\cdot 4^2(0{,}244/2) = 3{,}73.$$

Угол наклона скачка уплотнения по (6.3.15)

$$\theta_c = \arcsin\sqrt{[3{,}73 + (1{,}4-1)/(1{,}4+1)]/[2\cdot 1{,}4\cdot 4^2/(1{,}4+1)]} = 26°50'.$$

По этой величине определяем из (6.3.16)

$$\operatorname{tg}(\theta_c - \beta_c) = \left(\frac{1{,}4-1}{1{,}4+1}3{,}73 + 1\right)\left(\frac{1{,}4-1}{1{,}4+1} + 3{,}73\right)^{-1}\operatorname{tg} 26°50' = 0{,}203,$$

откуда угол $\beta_c = 15°$. Этому значению угла соответствует длина зоны отрыва

$$l_{з.о} = h_э/\operatorname{tg}\beta_c = 2{,}73/\operatorname{tg} 15° = 10{,}2 \text{ см}.$$

Теперь можно найти управляющее усилие:

$$\Delta N = (p_2/p_\infty - 1)\, p_\infty\, l_{з.о}\, l_ш = (3{,}73-1)\, 0{,}0197\cdot 10{,}2\cdot 15{,}2 = 8{,}35 \text{ кГ}.$$

Как видим, результаты расчета и данные опыта согласуются достаточно хорошо.

Работа 6.3.4

Определение шарнирного момента руля

Цель работы — определить шарнирный момент аэродинамического руля и исследовать зависимость его величины от угла поворота и ширины щели между консолью руля и корпусом.

Общие сведения

Шарнирный момент аэродинамического руля $M_ш$ обусловлен действием на него поверхностных сил и вычисляется относительно оси поворота руля. Этот момент является одной из важнейших характеристик органа управления и входит в уравнение, характеризующее вращательное движение руля. При маневре рулевой привод преодолевает воздействие шарнирного момента. Поэтому чем больше величина $M_ш$, тем мощнее должен быть этот привод. В противном случае вращение руля будет происходить медленнее и летательный аппарат может не выполнить требуемый маневр.

Шарнирный момент аэродинамического руля в виде поворотной консоли (рис. 6.3.25) определяется выражением

$$M_ш = -N_р h, \qquad (6.3.27)$$

в котором $N_р$ — нормальная сила, приложенная в центре давления руля; h — расстояние от этого центра до оси вращения.

В соответствии с выражением (6.3.27) момент рассматривается отрицательным при условии, если $N_р > 0$, $h > 0$.

Заменяя в (6.3.27) нормальную силу ее выражением через аэродинамический коэффициент $c_N = N/(S_р q_\infty)$ (где $S_р$ — площадь рулевой консоли; q_∞ — скоростной напор) и вводя коэффициент шарнирного момента $m_ш = M_ш/(S_р q_\infty \ b_{САХ.р})$, получим для этого коэффициента

$$m_ш = -c_N h/b_{САХ.р}, \qquad (6.3.28)$$

где $b_{САХ.р}$ — средняя аэродинамическая хорда руля.

Из формулы (6.3.28) видно, что для определения коэффициента шарнирного момента надо знать значения c_N и h, т. е. величину и точку приложения нормальной силы руля. Поскольку обычно стремятся иметь минимальную мощность рулевого привода, что соответствует наименьшему значению $M_ш$, то принимают необходимые меры, способствующие уменьшению величины h. Это, однако, может привести к снижению точности определения $m_ш$ по (6.3.28), так как при небольших значениях координаты центра давления относительная погрешность при расчете h возрастает. Поэтому обычно расчетные значения коэффициента шарнирного момента уточняют и проверяют при помощи соответствующих экспериментов.

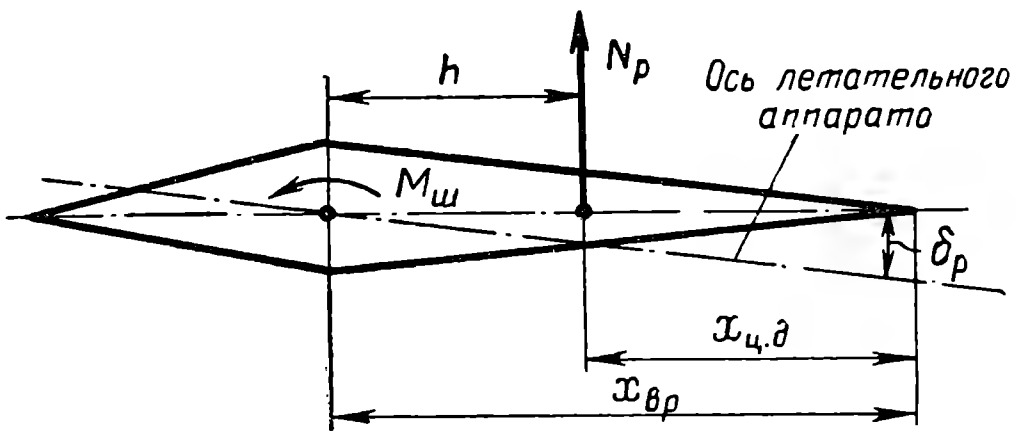


Рис. 6.3.25. Схема к определению шарнирного момента

Для замера величины шарнирного момента можно использовать тензометрическое устройство (см. рис. 6.3.1). Шарнирный момент, действующий на поворотную консоль *2*, передается через ось вращения *4* на сектор установки углов атаки *6*, который стремится изогнуть упругий элемент *7*. На шейке упругого элемента наклеен проволочный тензодатчик. Усиленные сигналы от этого тензодатчика поступают на тензостанцию *10* и гальванометр *9*.

Для определения влияния ширины щели $h_щ$ между консолью оперения и корпусом опыты проводятся при различных значениях этой ширины. Результаты эксперимента представляются в виде графиков зависимости коэффициента шарнирного момента от угла поворота консоли $\delta_р$ и ширины щели. Рассмотрим один из моментов расчета коэффициента шарнирного момента, вызванного поворотом руля на угол $\delta_р$. Прежде всего по формуле (6.3.6) следует определить коэффициент нормальной силы руля c_N. Далее находят координату центра давления тонкой изолированной консоли $(x_{ц.д})_{и.к}$ и вносят поправки на его толщину $\Delta x_{ц.д}$ и интерференцию с корпусом при повороте $\Delta x_{ц.д\delta}$. В соответствии с этим координата центра давления руля

$$h = (x_{ц.д})_{и.к} - \Delta x_{ц.д} - \Delta x_{ц.д\delta} - x_{вр}, \qquad (6.3.29)$$

где $x_{вр}$ — расстояние от передней точки бортовой хорды консоли до оси вращения руля.

Слагаемые, входящие в (6.3.29), определяются следующим образом. Сначала находятся сужение консоли

$$\eta_к = b_{кр}/b_{кц}, \qquad (6.3.30)$$

средняя аэродинамическая хорда руля

$$b_{САХ.р} = \frac{4}{3} \cdot \frac{S_к}{l_к} \left[1 - \frac{\eta_к}{(1+\eta_к)^2}\right] \qquad (6.3.31)$$

и ее координата

$$x_{\text{САХ}} = \frac{l_{\text{к}}}{3} \cdot \frac{\eta_{\text{к}} + 2}{\eta_{\text{к}} + 1} \operatorname{tg} \chi_{\text{п}}. \tag{6.3.32}$$

Затем по графику фиг. 5.4 [25] определяется коэффициент x_{dA} и подсчитывается координата центра давления изолированной консоли:

$$(x_{\text{ц.д}})_{\text{и.к}} = x_{\text{САХ}} + b_{\text{САХ.р}} x_{dA}. \tag{6.3.33}$$

Поправка на толщину, как показывают исследования, невелика, и в нашем случае примем $\Delta x_{\text{ц.д}} = 0$. Что касается поправки на интерференцию при повороте руля, то она находится из формулы [21]:

$$\frac{\Delta x_{\text{ц.д}\delta}}{b_{\text{кр}}} = \left(\frac{x_{\text{ц.д}\delta}}{b_{\text{кр}}}\right)_{\text{кр}} - \left(\frac{x_{\text{ц.д}\delta}}{b_{\text{кр}}}\right)_{\text{кр(т)}}, \tag{6.3.34}$$

в которой слагаемые правой части берутся из табл. XV-3-1 [21] по соответствующим величинам $r_s = r/s_m$.

Вычислив координату h по (6.3.29) и подставив ее значение, а также ранее найденные величины c_N и $b_{\text{САХ.р}}$ в (6.3.28), получим искомое значение коэффициента шарнирного момента $m_{\text{ш}}$.

Порядок проведения работы

1. Ознакомиться с экспериментальной установкой и необходимой измерительной аппаратурой.
2. Закрепить модель консоли оперения в рабочей части трубы под заданным углом атаки и установить требуемую ширину щели между консолью и корпусом.
3. Провести тарирование тензометрического устройства для измерения шарнирного момента в требуемом диапазоне углов атаки и построить соответствующий тарировочный график.
4. Записать показания лабораторных барометра и термометра, а также психрометра.
5. Включить трубу и после выхода ее на режим установившегося обтекания ввести в поток трубку Пито, а затем снять показания с отсчетных колен связанного с ней манометра.
6. Зафиксировать показания гальванометра, после чего прекратить работу трубы.
7. Определить параметры набегающего потока в аэродинамической трубе.
8. С помощью тарировочного графика найти по показанию гальванометра величину шарнирного момента.
9. Подсчитать значение коэффициента шарнирного момента.
10. Изменить угол атаки и ширину щели в соответствии с программой эксперимента и повторить операции, указанные в п.п. 5÷9.
11. Занести полученные данные в сводную таблицу коэффициентов шарнирного момента при различных углах атаки и величинах ширины щели.
12. Построить графики зависимости величины коэффициента шарнирного момента от угла атаки консоли оперения при фиксированных значениях ширины щели, а также от ширины щели при различных углах атаки.

Пример. Рассмотрим результаты экспериментального исследования шарнирного момента руля в виде поворотной консоли, проведенного в дозвуковой аэродинамической трубе малых скоростей с открытой рабочей частью. Для такого исследования использовалась та же модель консоли и приспособление для ее крепления в рабочей части, что и в работе 6.3.1 (см. рис. 6.3.1 и 6.3.2). Аналогично этой работе определялись и параметры потока в рабочей части трубы. Скоростной напор в ней $q_\infty = 220$ *кГ/м*^{2}.

Тарирование тензометрического устройства проводилось непосредственно в рабочей части трубы после установки модели (рис. 6.3.26). На плече в 91 *мм* от оси вращения

к консоли прикреплялась чашка весов. Нагружение осуществлялось с помощью разновесов. В качестве измерительной аппаратуры использовались тензостанция типа УТС1-12/35 и гальванометр МВ-150. Данные тарирования представлены графиком на рис. 6.3.27 в виде зависимости момента, приложенного к поворотной консоли, от числа делений отклонения стрелки гальванометра.

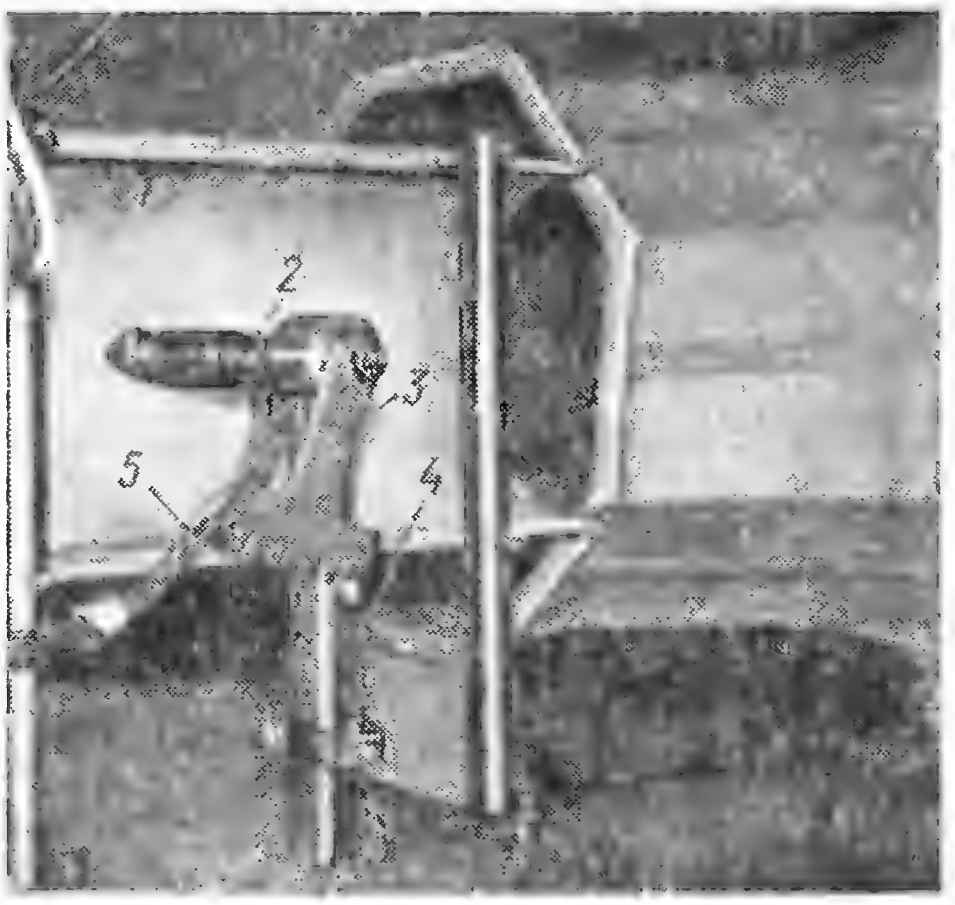


Рис. 6.3.26. Устройство для крепления модели поворотной консоли и корпуса:

1 — корпус; *2* — ось вращения консоли; *3*—сектор для установки углов поворота консоли; *4* — упругий элемент с тензодатчиком; *5* — дренажные трубки

Эксперимент проводился при установке руля $\delta_р = 9°$ и различных значениях ширины щели ($h_щ = 1$; 2; 3; 4; 5 и 8 *мм*). Результаты отклонения стрелки гальванометра — число делений n, значения шарнирного момента $M_ш$, найденные по тарировочному графику (см. рис.

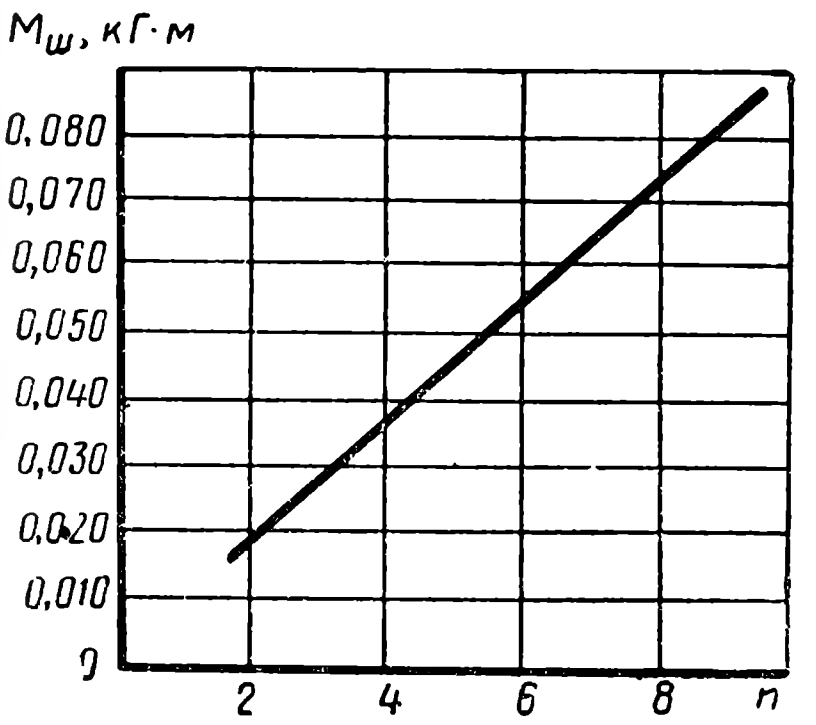


Рис. 6.3.27. Тарировочный график упругого элемента с тензодатчиком

Таблица А

$h_щ$, *мм*	n	$M_ш$, *кГ·м*	$m_ш$	$m_ш^\delta \approx \frac{m_ш}{\delta_р}$, 1/*град*
1	10	0,090	0,140	0,016
2	7	0,063	0,098	0,011
3	6	0,055	0,086	0,0095
4	5	0,045	0,070	0,0078
5	5	0,045	0,070	0,0078
8	5	0,045	0,070	0,0078

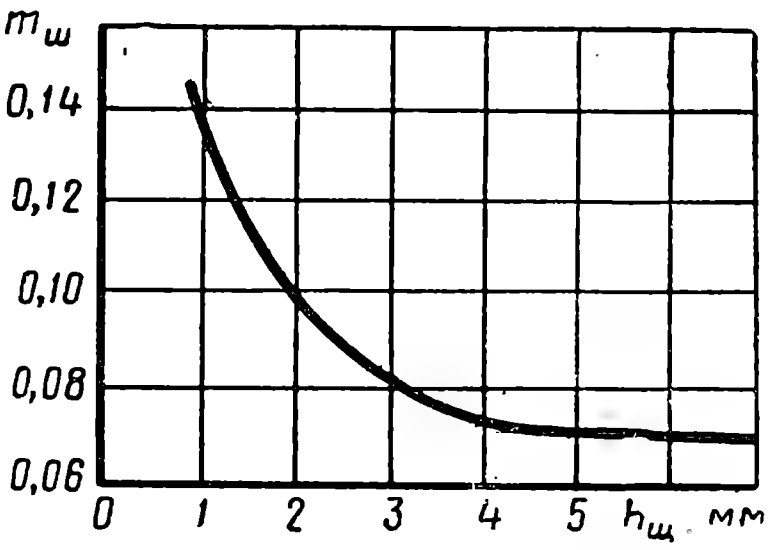


Рис. 6.3.28. Зависимость коэффициента шарнирного момента от ширины щели при угле атаки $\alpha = 9°$

6.3.27) и соответствующие коэффициенты этого момента приведены в табл. А.

В табл. А приведены также значения производной $m_ш^\delta$, 1/*град*. График зависимости $m_ш$ от $h_щ$, построенный по данным табл. А, изображен на рис. 6.3.28. Из этого графика видно, что при увеличении ширины щели коэффициент шарнирного момента уменьшается; это, очевидно, связано с более интенсивным перетеканием воздуха из области повышенного давления под консолью в область пониженного давления над ней, следствием которого явилось уменьшение перепада давлений, подъемной силы и шарнирного момента.

Для сравнения оценим величину коэффициента шарнирного момента расчетным путем. Согласно (6.3.30) сужение консоли

$$\eta_к = 180/90 = 2;$$

средняя аэродинамическая хорда (6.3.31)

$$b_{САХ.р} = \frac{4}{3} \cdot \frac{208}{15,5}\left[1 - \frac{2}{(1+2)^2}\right] = 14,0\ см,$$

а ее координата (6.3.32)

$$x_{\text{САХ}} = \frac{15{,}5}{3} \cdot \frac{2+2}{2+1} \operatorname{tg} 21°10' = 2{,}66 \text{ см}.$$

По графику фиг. 5.4 [25] для $\lambda\sqrt{1-M_\infty^2} = 2 \cdot 1{,}15\sqrt{1-0{,}17^2} = 2{,}29$ и $\eta_к = 2$ находим коэффициент $\bar{x}_{dA} = 0{,}25$.

С учетом этого координата изолированной консоли (6.3.33)

$$(x_{\text{ц.д}})_{\text{и.к}} = 2{,}66 + 14 \cdot 0{,}25 = 6{,}16 \text{ см}.$$

По табл. XV-3-1 [21] для $r_в = 0$ значение $(x_{\text{ц.дб}}/b_{\text{кр}})_{\text{кр}} = 0{,}667$, а для $r_в = 0{,}5$ значение $(x_{\text{ц.дб}}/b_{\text{кр}})_{\text{кр(т)}} = 0{,}664$. Поэтому в соответствии с (6.3.34) поправка

$$\Delta x_{\text{ц.д б}} = 18\,(0{,}667 - 0{,}664) = 0{,}054.$$

Подставляя соответствующие величины в (6.3.29), получим

$$x_{\text{ц.д}} = 6{,}16 - 0{,}054 - 9{,}00 = -2{,}90 \text{ см},$$

т. е. центр давления находится перед центром вращения консоли.

Используя найденное в работе 6.3.1 для рассматриваемой поворотной консоли расчетное значение коэффициента нормальной силы $c_N = 0{,}32$, определим по (6.3.28) коэффициент шарнирного момента:

$$m_{\text{ш}} = -0{,}32\,(-2{,}90/14) = 0{,}066.$$

Соответствующая величина этого момента

$$M_{\text{ш}} = m_{\text{ш}}\, q_\infty\, S_{\text{к}}\, b_{\text{САХ.р}} = 0{,}066 \cdot 221 \cdot 208 \cdot 10^{-4} \cdot 14 \cdot 10^{-2} = 43 \cdot 10^{-3} \text{ кГ} \cdot \text{м}.$$

Сравнивая полученную величину коэффициента шарнирного момента с соответствующим экспериментальным значением, можно сделать вывод об их достаточно удовлетворительном согласовании между собой для ширины щели, равной примерно 4 *мм*.

ГЛАВА VII

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ТРЕНИЯ

§ 7.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Работа 7.1.1

Измерение давления и температуры торможения в пограничном слое

Цель работы — определение параметров пограничного слоя (распределение скорости, толщина пограничного слоя, условные толщины вытеснения и потери импульса), а также напряжения трения.

Общие сведения

Методика измерений в пограничном слое. Теория движения идеальной жидкости дает удовлетворительную картину обтекания какой-либо поверхности только в свободном потоке, расположенном за пределами пограничного слоя, непосредственно примыкающего к этой поверхности, где существенное значение приобретают силы вязкого трения.

На рис. 7.1.1 приведена схема такого пограничного слоя на плоской пластине, обтекаемой в продольном направлении. Этот слой простирается от передней кромки до точки отрыва. Поскольку изменение скорости пограничного слоя до ее значения во внешнем свободном потоке происходит асимптотически, то определение толщины пограничного слоя δ в известной степени произвольно. Условно за внешнюю границу пограничного слоя принимают линию, на которой скорость течения отличается от скорости в свободном потоке на 1%.

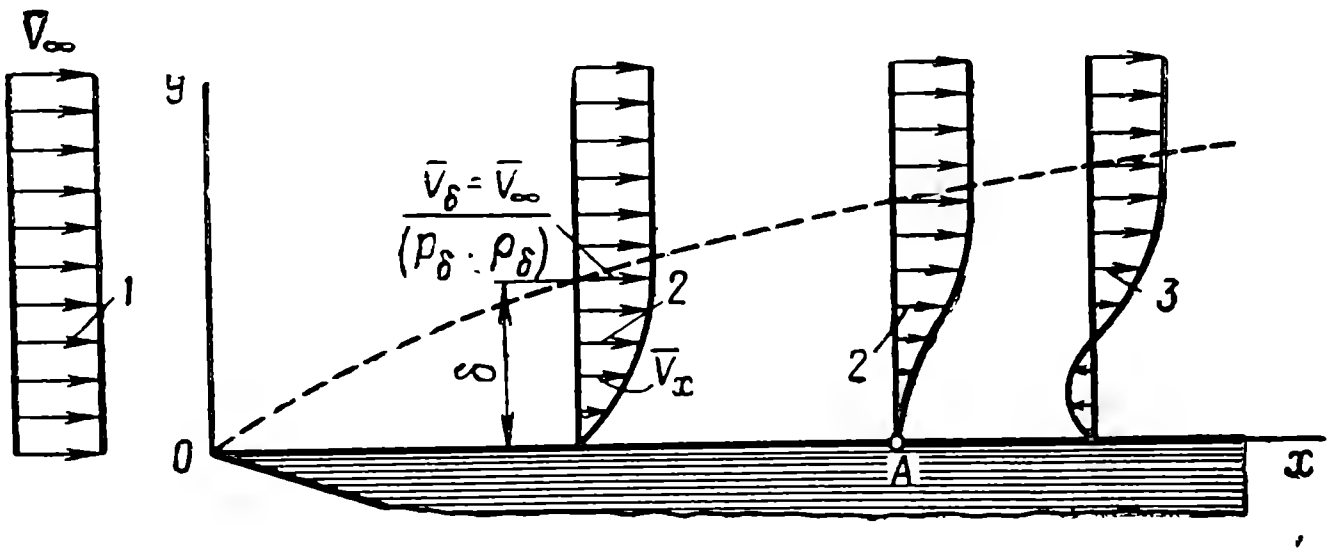


Рис. 7.1.1. Пограничный слой на плоской пластинке, обтекаемой в продольном направлении:

1 — эпюра скоростей в набегающем потоке; *2* — распределение скоростей в пограничном слое; *3* — распределение скоростей в области за точкой отрыва; *A* — точка отрыва пограничного слоя

Изучение пограничного слоя связано с определением распределения по его толщине продольных скоростей V_x, плотностей ρ и температур T, а также толщины слоя δ, условных толщин вытеснения δ^* и потери импульса δ^{**}. Давление в различных точках сечения пограничного слоя практически постоянно ($\partial p/\partial y = 0$), и его можно принять равным давлению p_δ на внешней границе этого слоя, что справедливо при условии, если толщина пограничного слоя мала по сравнению с поперечными размерами обтекаемого тела.

Чтобы найти распределение параметров газа в пограничном слое, необходимо экспериментально определить при заданных условиях обтекания изменение давления и температуры заторможенного потока по толщине слоя, измерить статическое давление p_δ, а также установить

зависимость коэффициента восстановления датчика температуры от параметров потока. В связи с малой толщиной пограничного слоя и большими градиентами скоростей для измерений в нем требуются миниатюрные датчики давлений и температур с высокой чувствительностью.

Статическое давление в пограничном слое p_δ, равное его значению в свободном потоке, может быть измерено при помощи дренажного отверстия, просверленного в стенке и соединенного с манометром. При большой толщине пограничного слоя, когда условие $\partial p/\partial y=0$ не соблюдается, т. е. статическое давление по толщине слоя изменяется и не равно p_δ (это также имеет место при больших сверхзвуковых скоростях), измерение этого давления необходимо проводить с помощью специального зонда в ряде точек пограничного слоя. В качестве такого зонда используются насадки с конической или оживальной головкой (см. рис. 2.1.25 и 2.1.26). При экспериментальных исследованиях пограничного слоя микронасадок полного напора закрепляют на координатнике, снабженном микрометрическим винтом, позволяющим измерять расстояния с точностью до 0,02 *мм*. Момент соприкосновения насадка с обтекаемой поверхностью регистрируют с помощью электрического контакта (рис. 7.1.2).

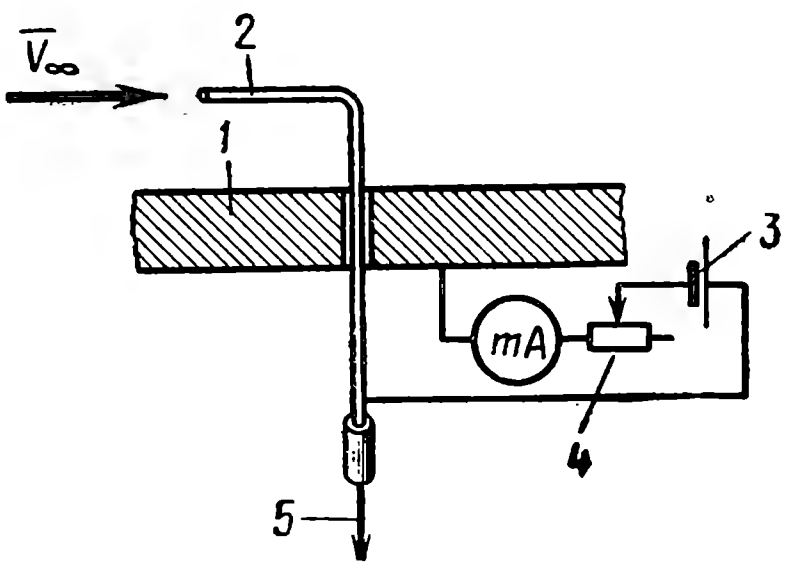


Рис. 7.1.2. Электрическая схема для регистрации момента соприкосновения микронасадка с обтекаемой поверхностью:

1 — обтекаемая поверхность; *2* — чувствительный элемент (микронасадок); *3* — источник питания; *4* — потенциометр; *5* — к регистрирующему прибору — манометру

Микронасадок, изолированный от остальной конструкции, соединяется с одним из полюсов источника напряжений, а исследуемая поверхность — с другим, причем в цепь последовательно включены потенциометр и миллиамперметр. В момент соприкосновения насадка с обтекаемой поверхностью цепь замыкается, и этот момент фиксируют по показанию миллиамперметра. Минимальное расстояние от этой поверхности до точки замера составляет половину поперечного размера приемного отверстия трубки Пито.

Схемы координатников приведены на рис. 7.1.3. Координатники содержат микрометрический винт, соединенный с ползуном, для отсчета положения ползуна относительно некоторого начального положения и направляющие. На ползуне закрепляют чувствительные элементы (зонд статического давления, трубка Пито, термоприемник и т. п.), служащие для исследования течения жидкости, например в пограничном слое.

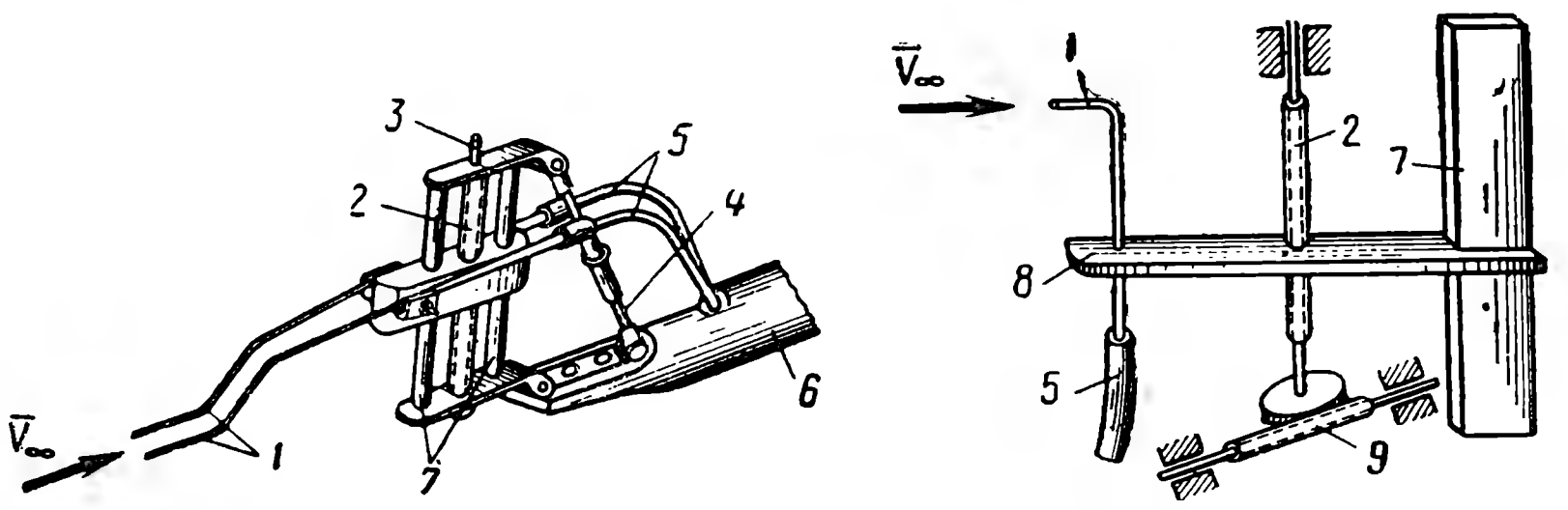


Рис. 7.1.3. Координатники для исследования поля скоростей и температур в пограничном слое:

1 — чувствительные элементы; *2* — микрометрический винт; *3* — к приводу; *4* — регулировочный тендер; *5* — резиновые шланги; *6* — державка; *7* — направляющие; *8* — ползун; *9*— червячный редуктор

При измерении в пограничном слое трубку полного напора перемещают при помощи координатника до тех пор, пока она не окажется в свободном потоке, т. е. за пределами пограничного слоя, о чем судят по прекращению изменения показаний манометров, измеряющих давление p_0'.

Как показывают исследования, при сверхзвуковом обтекании на большей части пограничного слоя скорость будет также сверхзвуковой и лишь в очень малой пристеночной области — дозвуковой (см. рис. 7.1.7). Измерив давление торможения p_0' на участке сверхзвукового течения, а также определив статическое давление p_δ (давление на стенке), можно найти при помощи формулы (2.2.9) число Маха в соответствующей точке пограничного слоя, расположенной на «эффективной оси» насадка (см. рис. 2.1.34).

Эпюра скоростей и параметры пограничного слоя. Для нахождения соответствующей скорости в пограничном слое необходимо определить местную температуру T или плотность ρ. Чаще всего в условиях эксперимента находят температуру торможения T_0, по которой затем вычисляют статическую температуру T, а плотность определяют из уравнения состояния и условия постоянства статического давления поперек пограничного слоя.

Обычно температуру торможения в пограничном слое измеряют с помощью термоприемника, конструкция которого определяется условиями эксперимента, величинами измеряемой температуры, скорости и давления, а также допустимой погрешностью измерений. Температура обтекаемой поверхности тела может быть измерена термопарой, вмонтированной в стенку этого тела (см. § 2.3).

Как правило, давление p_0' и температура T_0 торможения замеряются в точках сечения, расположенных на таком расстоянии друг от друга, чтобы по найденным значениям можно было осуществить достаточно надежную интерполяцию для определения соответствующих промежуточных величин. При этом находятся значения p_0' и T_0, соответствующие одной и той же точке пограничного слоя. По измеренной температуре торможения T_0 и найденному числу $\mathbf{M}$ в этой точке можно найти температуру, плотность и скорость:

$$T = T_0 / \left(1 + \frac{k-1}{2} \mathbf{M}^2\right); \tag{7.1.1}$$

$$\rho = p_\delta / (RT) \text{ или } \rho = \rho_\delta (T_\delta / T); \tag{7.1.2}$$

$$V_x = \mathbf{M} \sqrt{kRT_0 / \left(1 + \frac{k-1}{2} \mathbf{M}^2\right)}. \tag{7.1.3}$$

Предполагая, что теплообмен между потоком и стенкой отсутствует или пренебрежимо мал, а температура торможения в пограничном слое мало отличается от соответствующего значения для свободного потока, скорость в слое можно определить по следующей зависимости:

$$V_x = \mathbf{M} \sqrt{kRT_{0\infty} / \left(1 + \frac{k-1}{2} \mathbf{M}^2\right)}, \tag{7.1.4}$$

где $T_{0\infty} = T_\delta \left(1 + \frac{k-1}{2} \mathbf{M}_\delta^2\right)$.

В этом случае измерение температуры производят лишь в одной точке пограничного слоя или в свободном потоке. На основании экспериментальных зависимостей $V_x(y)$ и $\rho(y)$ можно определить толщину пограничного слоя δ, условные толщины вытеснения δ^* и потери импульса δ^{**}. При этом толщина δ находится по эпюре скоростей $V_x(y)$

(рис. 7.1.4), на которой отыскивается координата $y=\delta$, соответствующая значению $V_x=0{,}99\ V_\infty$. Условные толщины δ^* и δ^{**} определяются по формулам:

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho V_x}{\rho_\delta V_\delta}\right) dy; \qquad (7.1.5)$$

$$\delta^{**} = \int_0^\delta \frac{\rho V_x}{\rho_\delta V_\delta}\left(1 - \frac{V_x}{V_\delta}\right) dy. \qquad (7.1.6)$$

Расчеты производятся следующим образом. Прежде всего, зная толщину пограничного слоя δ, выбирают шаг изменения аргумента $h_y=\delta/n$ (шаг интегрирования), деля δ на n равных частей. При этом величина шага, а также порядок конечных разностей должны отвечать заданной точности расчета. Причем если шаг интегрирования достаточно мал, то в расчете можно ограничиться конечными разностями второго и даже первого порядка. Затем в соответствующих точках $y_0=0$, $y_1=h_y$ и т. д. из графиков $V_x(y)$ и $\rho(y)$ определяют скорость V_x, плотность ρ и заносят их в бланк численного интегрирования (см. табл. В). По этим значениям подсчитывают подынтегральные функции f_{δ^*} и $f_{\delta^{**}}$ [см. (7.1.5), (7.1.6)]:

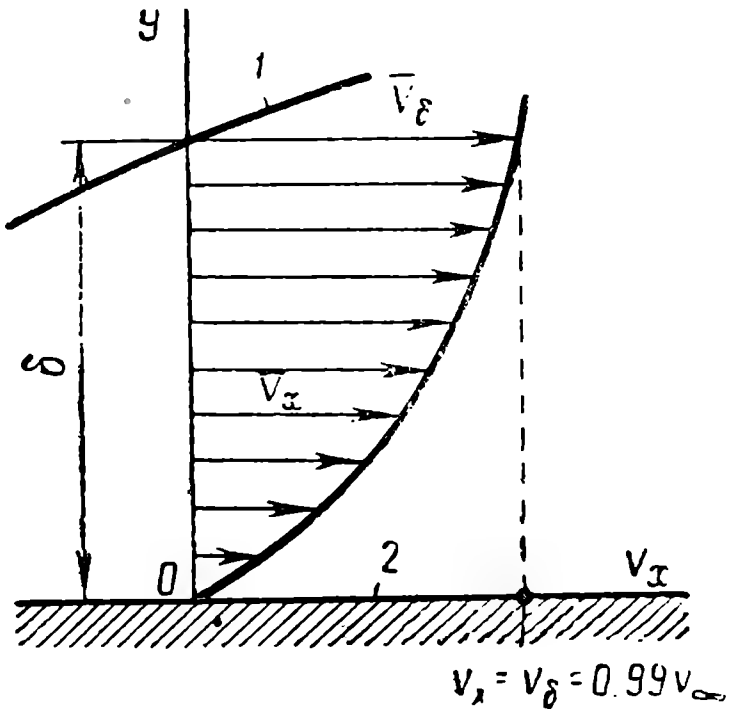


Рис. 7.1.4. К определению толщины пограничного слоя:

1 — внешняя граница пограничного слоя; *2* — стенка

$$(f_{\delta^*})_{0(1,2,\ldots)} = 1 - \frac{\rho V_x}{\rho_\delta V_\delta}; \qquad (7.1.7)$$

$$(f_{\delta^{**}})_{0(1,2,\ldots)} = \frac{\rho V_x}{\rho_\delta V_\delta}\left(1 - \frac{V_x}{V_\delta}\right) \qquad (7.1.8)$$

и заносят в табл. В значения конечных разностей:

$$(\Delta f_{\delta^*})_{0(1,2,\ldots)} = (f_{\delta^*})_{1(2,3,\ldots)} - (f_{\delta^*})_{0(1,2,\ldots)}; \qquad (7.1.9)$$

$$(\Delta^2 f_{\delta^*})_{0(1,2,\ldots)} = (\Delta f_{\delta^*})_{1(2,3,\ldots)} - (\Delta f_{\delta^*})_{0(1,2,\ldots)}. \qquad (7.1.10)$$

Конечные разности $(\Delta f_{\delta^{**}})_{0(1,2,\ldots)}$ и $(\Delta^2 f_{\delta^{**}})_{0(1,2,\ldots)}$ определяются аналогично. По этим разностям вычисляют:

$$\delta^* = \int_0^\delta f_{\delta^*} dy = \int_0^{h_y} f_{\delta^*} dy + \int_{h_y}^{2h_y} f_{\delta^*} dy + \cdots + \int_{(n-1)h_y}^{\delta} f_{\delta^*} dy = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta\delta_i^*; \qquad (7.1.11)$$

$$\delta^{**} = \int_0^\delta f_{\delta^{**}} dy = \int_0^{h_y} f_{\delta^{**}} dy + \int_{h_y}^{2h_y} f_{\delta^{**}} dy + \cdots + \int_{(n-1)h_y}^{\delta} f_{\delta^{**}} dy = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta\delta_i^{**}, \qquad (7.1.12)$$

где интегралы $\Delta\delta_i^*$ и $\Delta\delta_i^{**}$ находятся с помощью интерполирующих функций. Например,

$$\Delta\delta_0^* = \int_0^{h_y} f_{\delta^*} dy = h_y\left(f_{\delta_0^*} + \frac{1}{2}\Delta f_{\delta_0^*} - \frac{1}{12}\Delta^2 f_{\delta_0^*}\right); \qquad (7.1.13)$$

$$\Delta\delta_0^{**} = \int_0^{h_y} f_{\delta^{**}} dy = h_y\left(f_{\delta_0^{**}} + \frac{1}{2}\Delta f_{\delta_0^{**}} - \frac{1}{12}\Delta^2 f_{\delta_0^{**}}\right). \qquad (7.1.14)$$

Таким образом, при вычислении $\Delta\delta_i^*$ и $\Delta\delta_i^{**}$ следует пользоваться формулами горизонтальной строки последовательных элементов и лишь один раз, при вычислении последнего значения $\Delta\delta_{n-1}^*$ или $\Delta\delta_{n-1}^{**}$, — формулами ломаной строки. Например,

$$\Delta\delta_{n-1}^* = \int\limits_{(n-1)h_y}^{\delta} f_{\delta^*}\, dy = h_y\left(f_{\delta^*_{n-1}} + \frac{1}{2}\Delta f_{\delta^*_{n-1}} - \frac{1}{12}\Delta^2 f_{\delta^*_{n-2}}\right). \quad (7.1.15)$$

Как уже говорилось, введение трубки полного напора в пограничный слой приводит к нарушению структуры пограничного слоя и ошибкам измерения его параметров. Для устранения этих ошибок можно воспользоваться экспериментально установленными зависимостями для условных толщин вытеснения и потери импульса, учитывающими искажения измерений трубкой Пито вблизи внешней границы слоя:

$$\delta^* = \delta^*_{\text{расч}}(1 - d/\delta)^{0,18}; \quad (7.1.16)$$

$$\delta^{**} = \delta^{**}_{\text{расч}}(1 - d/\delta)^{0,18}, \quad (7.1.17)$$

где $\delta^*_{\text{расч}}$, $\delta^{**}_{\text{расч}}$ — величины, рассчитанные по экспериментальным данным; d — наружный диаметр трубки Пито.

Напряжение трения. По эпюре скоростей и распределению других параметров газа в пограничном слое можно рассчитать для рассматриваемого сечения напряжение трения на стенке $\tau_{ст}$ и соответствующий местный коэффициент трения $c_{fx} = 2\tau_{ст}/(\rho_\delta V_\delta^2)$. Для этой цели по графику, изображающему такую эпюру (см. рис. 7.1.4), следует найти величину $(\partial V_x/\partial y)_{y=0}$, а затем, пользуясь формулой Ньютона, вычислить напряжение трения на стенке:

$$\tau_{ст} = \mu_{ст}(\partial V_x/\partial y)_{y=0}. \quad (7.1.18)$$

Коэффициент динамической вязкости определяется по приближенной формуле

$$\mu = \mu_0 (T/T_0)^{0,76}, \quad (7.1.19)$$

где μ_0 — коэффициент вязкости при некоторой начальной температуре T_0.

Кроме указанного графического способа для определения производной $(\partial V_x/\partial y)_{y=0}$ может быть использован метод численного дифференцирования. Для этого необходимо составить таблицу измеренных значений $V_x = f(y)$ с постоянным шагом и вычислить конечные разности ΔV_{x0}, $\Delta^2 V_{x0}$ и $\Delta^3 V_{x0}$. По значениям этих разностей $(\partial V_x/\partial y)_{y=0}$ может быть определена по следующей формуле численного дифференцирования (для последовательных элементов горизонтальной строки):

$$\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{1}{h_y}\left(\Delta V_{x0} - \frac{1}{2}\Delta^2 V_{x0} + \frac{1}{3}\Delta^3 V_{x0}\right), \quad (7.1.20)$$

где

$$\Delta V_{x0} = V_{x1} - V_{x0} = V_{x1}; \quad \Delta^2 V_{x0} = \Delta V_{x1} - \Delta V_{x0};$$
$$\Delta^3 V_{x0} = \Delta^2 V_{x1} - \Delta^2 V_{x0}.$$

При использовании указанных методов следует учитывать, что ввиду конечных размеров трубки полного напора не удается измерить скорости в пристеночной области, поэтому при построении эпюры скоростей приходится пользоваться экстраполяцией, что, естественно, снижает точность определения производной $\partial V_x/\partial y$ на стенке. При необходимости для повышения этой точности можно осуществить расчеты $\tau_{ст}$ по экспе-

риментальным данным на основе решения интегрального соотношения импульсов:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{1}{V_\delta} \cdot \frac{dV_\delta}{dx}(2\delta^{**} + \delta^*) = \frac{\tau_{ст}}{\rho_\delta V_\delta^2}. \qquad (7.1.21)$$

Среднее значение $\tau_{ст}$ на некотором малом участке обтекаемой поверхности $\Delta x = x_2 - x_1$ определяют следующим образом. Сначала производят измерение всех необходимых величин (V_δ, V_x, ρ) на границах этого участка, а затем рассчитывают соответствующие значения δ^* и δ^{**}, по которым, используя уравнение (7.1.21), определяют $\tau_{ст}$. При обтекании плоской пластинки задача упрощается, так как вдоль пластинки $V_\delta = \text{const}$ и уравнение (7.1.21) принимает вид

$$d\delta^{**}/dx = \tau_{ст}/(\rho_\delta V_\delta^2). \qquad (7.1.22)$$

Соответствующая зависимость для определения коэффициента трения будет

$$c_{fx} = 2(d\delta^{**}/dx). \qquad (7.1.23)$$

Как видно, в данном случае можно ограничиться нахождением для пластинки только условной толщины потери импульса, что существенно облегчает исследование трения.

Приближенные методы расчета пограничного слоя на пластинке. Исследования показывают, что пограничный слой на пластинке либо полностью ламинарный, либо смешанный — на передней части ее поверхности ламинарный, а на остальной турбулентный. В случае безградиентного течения несжимаемой жидкости можно использовать зависимости для расчета параметров пограничного слоя [20]:

ламинарный пограничный слой —

$$\frac{\delta_{нсж}}{x} = \frac{4{,}64}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}; \quad (c_{fx})_{нсж} = \frac{0{,}646}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}; \quad (c_{xf})_{нсж} = \frac{1{,}292}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}};$$

$$\frac{\delta^*}{x} = \frac{1{,}74}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}; \quad \frac{\delta^{**}}{x} = \frac{0{,}646}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}};$$

турбулентный пограничный слой —

$$\frac{\delta_{нсж}}{x} = \frac{0{,}37}{\sqrt[5]{\mathrm{Re}_x}}, \quad \frac{\delta^*}{\delta_{нсж}} = \frac{1}{8}, \quad \frac{\delta^{**}}{\delta_{нсж}} = \frac{7}{72},$$

$$(c_{fx})_{нсж} = \frac{0{,}0598}{\sqrt[5]{\mathrm{Re}_x}}; \quad (c_{xf})_{нсж} = \frac{0{,}075}{\sqrt[5]{\mathrm{Re}_L}}.$$

При учете влияния сжимаемости и теплопередачи на параметры пограничного слоя в случае больших скоростей можно исходить из метода определяющей энтальпии i^*. В соответствии с этим методом отношения соответствующих толщин и коэффициентов трения определяются следующим образом:

для ламинарного пограничного слоя —

$$\delta_{сж}/\delta_{нсж} = (T^*/T_\delta)^{(n+1)/2} (\mu_{ср\delta}/\mu^*_{ср})^{1/2};$$

$$\frac{(c_{xf})_{сж}}{(c_{xf})_{нсж}} = \frac{(c_{f\lambda})_{сж}}{(c_{fx})_{нсж}} = \frac{(\tau_{ст})_{сж}}{(\tau_{ст})_{нсж}} = \left(\frac{T^*}{T_\delta}\right)^{(n-1)/2} \left(\frac{\mu^*_{ср}}{\mu_{ср\delta}}\right)^{1/2};$$

для турбулентного пограничного слоя —

$$\delta_{\text{сж}}/\delta_{\text{нсж}} = \left(T^*/T_\delta\right)^{(n+1)/5} \left(\mu_{\text{ср}\delta}/\mu^*_{\text{ср}}\right)^{1/5};$$

$$\frac{(c_{xf})_{\text{сж}}}{(c_{xf})_{\text{нсж}}} = \frac{(c_{fx})_{\text{сж}}}{(c_{fx})_{\text{нсж}}} = \frac{(\tau_{\text{ст}})_{\text{сж}}}{(\tau_{\text{ст}})_{\text{нсж}}} = \left(\frac{T^*}{T_\delta}\right)^{(n-4)/5} \left(\frac{\mu^*_{\text{ср}}}{\mu_{\text{ср}\delta}}\right)^{4/5}.$$

В этих соотношениях индексом «*» отмечены определяющие параметры; $\mu_{\text{ср}}$ — средний молекулярный вес газа; n — показатель степени, определяющий зависимость коэффициента динамической вязкости от температуры.

Порядок проведения работы

1. Ознакомиться со схемой экспериментальной установки, устройством модели, датчиков давления и температуры, а также регистрирующими устройствами; проверить готовность их к работе.
2. Установить в рабочую часть сверхзвуковой трубы сопловые вкладыши, соответствующие выбранному расчетному числу Маха.
3. Закрепить исследуемую модель на державке и установить ее в рабочей части так, чтобы плоская поверхность была расположена параллельно потоку.
4. Установить на модели при помощи микрокоординатника трубку Пито и соединить ее дренажной трубкой с ГРМ.
5. Проверить соединение приемника статического давления в рабочей части трубы с манометром (ГРМ).
6. В соответствии с электрической схемой (см. рис. 7.1.2) соединить модель и трубку Пито с устройством для регистрации момента их соприкосновения.
7. Снять начальные показания манометра, предназначенного для определения p_∞, и измерить атмосферное давление $p_{\text{атм}}$.
8. Установить трубку полного напора в крайнее нижнее положение (до соприкосновения с обтекаемой поверхностью), сделать нулевой отсчет на счетчике положения микрокоординатника и снять начальные показания манометра, соединенного с трубкой Пито.
9. Включить аэродинамическую трубу и после выхода ее на режим установившегося движения воздуха снять показания манометров, измеряющих давления торможения p_0' и статическое давление p_∞, а также измерить температуру $T_{0\,\text{ф}}$ в форкамере.
10. Перемещая трубку полного напора с помощью микрокоординатника на заданное расстояние y от стенки, произвести аналогичные измерения давления p_0' в пограничном слое.
11. Выключить трубу и вместо трубки полного напора установить на модели при помощи микрокоординатника датчик температуры. Соединить его с регистрирующей аппаратурой и проверить надежность ее работы; включить трубу и, перемещая датчик, снять показания электрического прибора, соответствующие определенному значению температуры торможения T_0.
12. По измеренным значениям статического давления и давления p_0' за скачком уплотнения найти распределение чисел **M** по толщине пограничного слоя.
13. Зная температуру торможения T_0 и чи́сла **M**, вычислить в соответствующих точках сечения пограничного слоя статическую температуру T, скорость V_x и плотность ρ.
14. Осуществить расчет толщины пограничного слоя δ, условных толщин δ^* и δ^{**}, а также напряжения трения $\tau_{\text{ст}}$ и коэффициента $c_{fx} = 2\tau_{\text{ст}}/(\rho_\delta V_\delta^2)$.

Пример. Рассмотрим результаты экспериментального исследования сверхзвукового пограничного слоя на стенке рабочей части аэродинамической установки сверхзвуковых скоростей.

Коэффициент тарировки трубки Пито $\xi_т$ и коэффициент восстановления датчика температуры r принимались равными единице. Для измерения давления в рабочей части трубы p_∞, которое принималось равным давлению p_δ в пограничном слое на стенке, а также давления торможения p_0' в этом слое использовался ГРМ с коэффициентом шкалы $K=0{,}005$. Давление p_0 в форкамере определялось обычным механическим манометром, а температура $T_{0ф}$ в ней измерялась с помощью платинового электротермометра сопротивления.

Общий вид этой трубы и схема всей экспериментальной установки показаны на рис. 7.1.5. Перед пуском аэродинамической трубы было измерено барометрическое давление $p_{атм}=740{,}1$ *мм рт. ст.* (10065,5 *кГ/м*^{2}). Одновременно были сняты начальные показания ГРМ для каналов измерения статического давления (p_∞) $N_0=0{,}3$ и давления торможения (p_0') $N_0=1{,}2$.

После включения трубы и выхода ее на установившийся режим с манометра для измерения статического давления было снято показание $N=199$. В соответствии с этим статическое давление

$$p_\infty = p_{атм} - \xi_т K (N - N_0) = 10065{,}5 - 1 \cdot 0{,}005 \times (199 - 0{,}3)\, 10^4 = 130{,}5 \text{ кГ/м}^2.$$

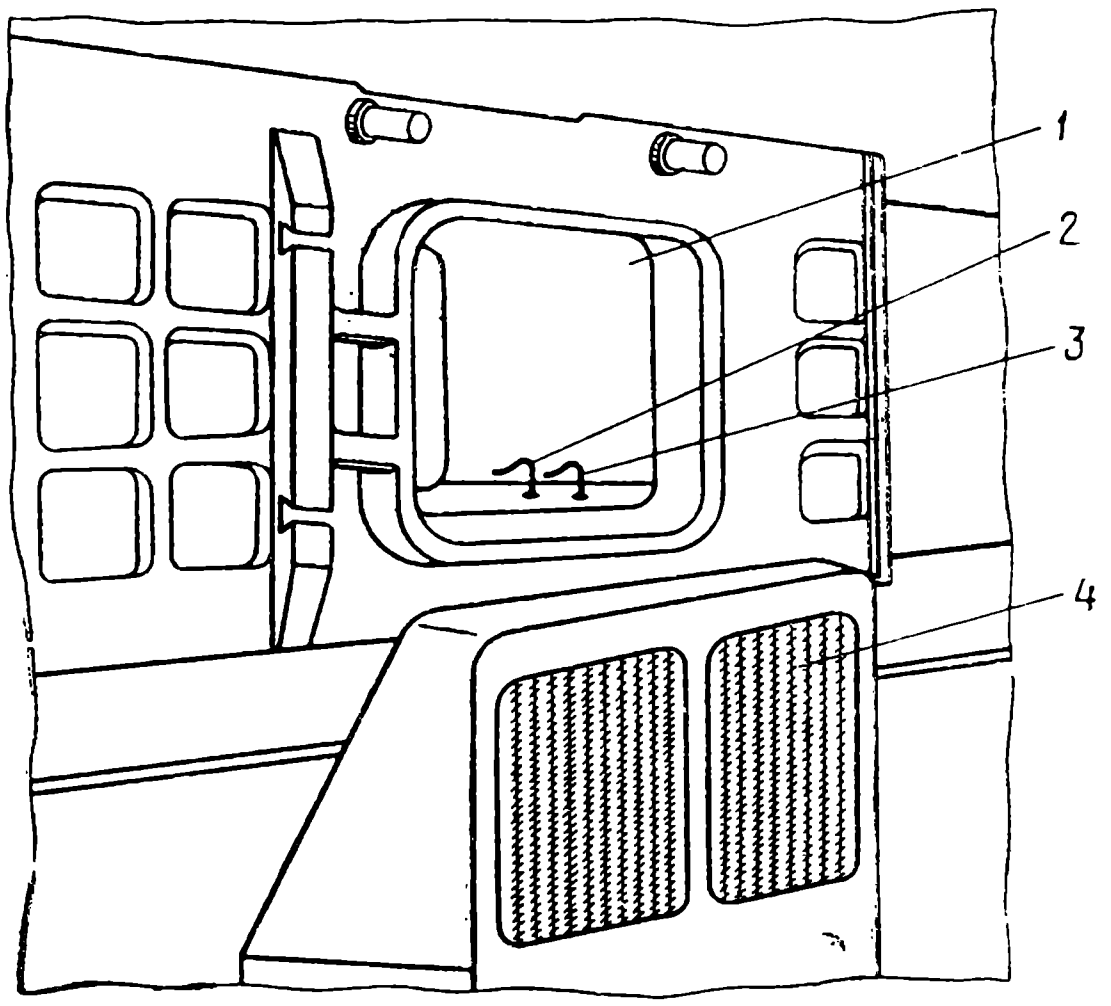


Рис. 7.1.5. Схема экспериментальной установки:
1 — рабочая часть; *2* — термоприемник; *3* — трубка полного напора; *4* — ГРМ

Так как измеренное давление в форкамере $p_0=45$ *кГ/см*^{2}, то число Маха потока в рабочей части аэродинамической трубы

$$M_\infty = \left\{\frac{2}{k-1}\left[\left(\frac{p_0}{p_\infty}\right)^{(k-1)/k} - 1\right]\right\}^{1/2} = \left\{\frac{2}{1{,}4-1}\left[\left(\frac{45\cdot 10^4}{130{,}5}\right)^{(1{,}4-1)/1{,}4} - 1\right]\right\}^{1/2} = 6{,}80.$$

Число Маха M_δ на внешней границе пограничного слоя будет таким, как это значение M_∞. Соответствующая ему скорость V_∞, равная скорости V_δ на этой границе, будет $V_\delta = V_\infty = M_\delta a_\delta$. Так как скорость звука в свободном потоке $a_\delta = \sqrt{kRT_\delta}$, а температура этого потока $T_\delta = T_{0ф}\left(1 + \frac{k-1}{2} M_\delta^2\right)^{-1}$, то, учитывая, что измеренное в форкамере значение $T_{0ф}=800$ К и газовая постоянная для воздуха $R=287$ *м*^{2}/(*сек*^{2}·*град*) [287 *дж*/(*кг*·*град*)], получим:

$$T_\delta = 800\left(1 + \frac{1{,}4-1}{2} 6{,}8^2\right)^{-1} = 78{,}06 \text{ К};$$

$$V_\delta = 6{,}80\sqrt{1{,}4\cdot 287\cdot 78{,}06} = 1204 \text{ м/сек};$$

$$\rho_\delta = p_\infty/(RT_\delta) = 130{,}5/(287\cdot 78{,}06) = 0{,}00583 \text{ кГ}\cdot\text{сек}^2/\text{м}^4.$$

При измерении давления p_0' и температуры торможения T_0 в пограничном слое соответствующие насадки перемещались в нем на малые расстояния, равные 0,25 и 0,5 *мм* вблизи стенки и 1 *мм* на большей части слоя, причем точность отсчета этих расстояний на микрокоординатнике составляла $\pm 0{,}025$ *мм*. Расположению трубки Пито на обтекаемой поверхности соответствовало расстояние $y_1=0.25$ *мм* от ее оси до стенки. При этом показание ГРМ было $N=197{,}4$. Таким образом, давление торможения

$$p_0' = p_{атм} - \xi_т K (N - N_0) = 10065{,}5 - 1\cdot 0{,}005\,(197{,}4 - 1{,}2)\, 10^4 = 256 \text{ кГ/м}^2.$$

Так как $p_\delta = 130{,}5$ *кГ/м*^{2}, то число Маха, определенное из уравнения (2.2.9):

$$\frac{130,5}{256}=\frac{\left(\frac{2\cdot 1,4}{1,4+1}M^2-\frac{1,4-1}{1,4+1}\right)^{1/(1,4-1)}}{\left(\frac{1,4+1}{2}M^2\right)^{1,4/(1,4-1)}},$$

будет равно 1,03.

По показанию милливольтметра $N=8,5$ из тарировочного графика (см. рис. 3.1.10) находим температуру торможения $T_0=400$ К. По этому значению определяем статическую температуру:

$$T=T_0\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{-1}=400\left(1+\frac{1,4-1}{2}1,03^2\right)^{-1}=329,6\ \text{К};$$

вычисляем скорость:

$$V_x=Ma=V_\delta\left(\frac{M}{M_\delta}\right)\left(\frac{T}{T_\delta}\right)^{1/2}=1204\,\frac{1,03}{6,80}\left(\frac{329,6}{78,06}\right)^{1/2}=375\ м/сек$$

и плотность:

$$\rho=\rho_\delta\,(T_\delta/T)=0,00583\,(78,06/329,6)=0,00139\ кГ\cdot сек^2/м^4.$$

Аналогично производятся измерения и осуществляются расчеты параметров для других положений датчиков давления и температуры в пограничном слое; полученные результаты вносятся в табл. А.

Таблица А

Расстояние y от стенки, *мм*	p_0', *кГ/м²*	T_0, К	p/p_0'	M	T, К	V_x, *м/сек*	ρ, *кГ·сек²/м⁴*
0,25	256	400,0	0,5100	1,03	329,6	375	0,00139
0,50	315	450,4	0,4154	1,20	349,7	449,7	0,00130
1,00	822	528,8	0,1594	2,12	278,5	708,6	0,00164
1,50	1095	577,6	0,1191	2,48	259,0	799,7	0,00176
2,00	1220	592,0	0,1074	2,62	249,5	829,2	0,00182
2,50	1341	603,2	0,0979	2,75	240,1	853,7	0,00190
3,00	1475	612,0	0,0885	2,90	228,2	877,5	0,00200
4,00	1730	629,0	0,0755	3,15	210,1	914,7	0,00217
5,00	2000	648,0	0,0651	3,40	195,6	953,2	0,00233
15,0	5750	768,8	0,0227	5,82	98,86	1159,3	0,00461
16,0	6275	775,4	0,0208	6,08	92,35	1170,9	0,00493
21,0	7810	798,0	0,0167	6,80	78,06	1200,0	0,00583
22,0	7810	800	0,0167	6,80	78,06	1204,0	0,00583

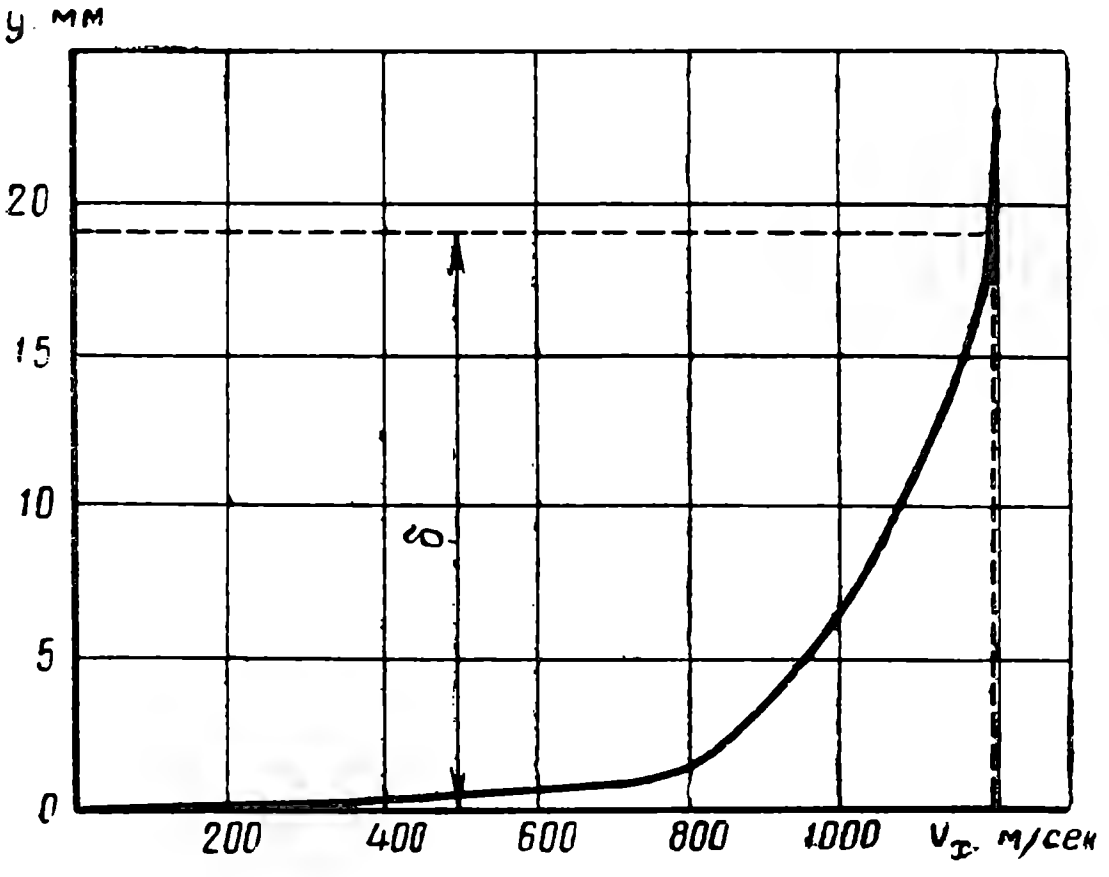


Рис. 7.1.6. Распределение скоростей в пограничном слое на стенке рабочей части аэродинамической трубы

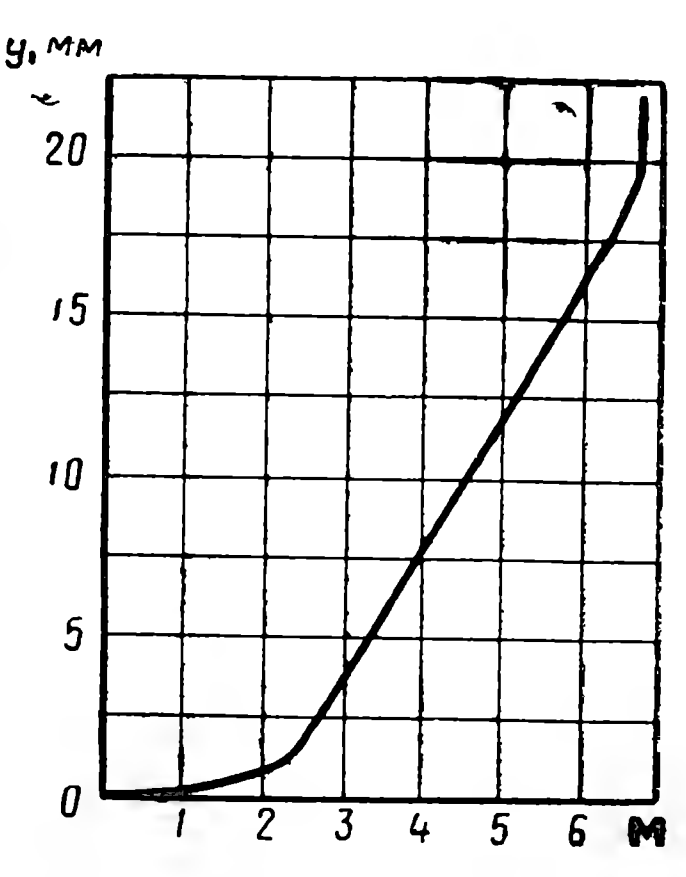


Рис. 7.1.7. Распределение чисел M по толщине пограничного слоя

В табл. А для сокращения ее размеров приведена часть полученных результатов, относящихся к пристеночной области и к участку пограничного слоя, примыкающему к внешней границе. Причем, как видно из таблицы, измерения заканчивались, когда координата y насадка была равна 22 *мм* и он показывал то же давление p_0', что и для предыдущей координаты $y=21$ *мм*.

По данным табл. А на рис. 7.1.6 построен график функции $V_x=f(y)$, из которого найдена при условии, что $V_\delta=0{,}99\cdot V_\infty=1192$ *м/сек*, толщина пограничного слоя $\delta=19$ *мм*. На рис. 7.1.7 и 7.1.8 показаны соответствующие зависимости M, T_0 и T.

Таблица Б

y, *мм*	V_x, *м/сек*	ΔV_x, *м/сек*	$\Delta^2 V_x$, *м/сек*	$\Delta^3 V_x$, *м/сек*
0	0	449,7	—190,8	+23,0
0,5	449,7	258,9	—167,8	—
1,0	708,6	91,1	—	—
1,5	799,7	—	—	—

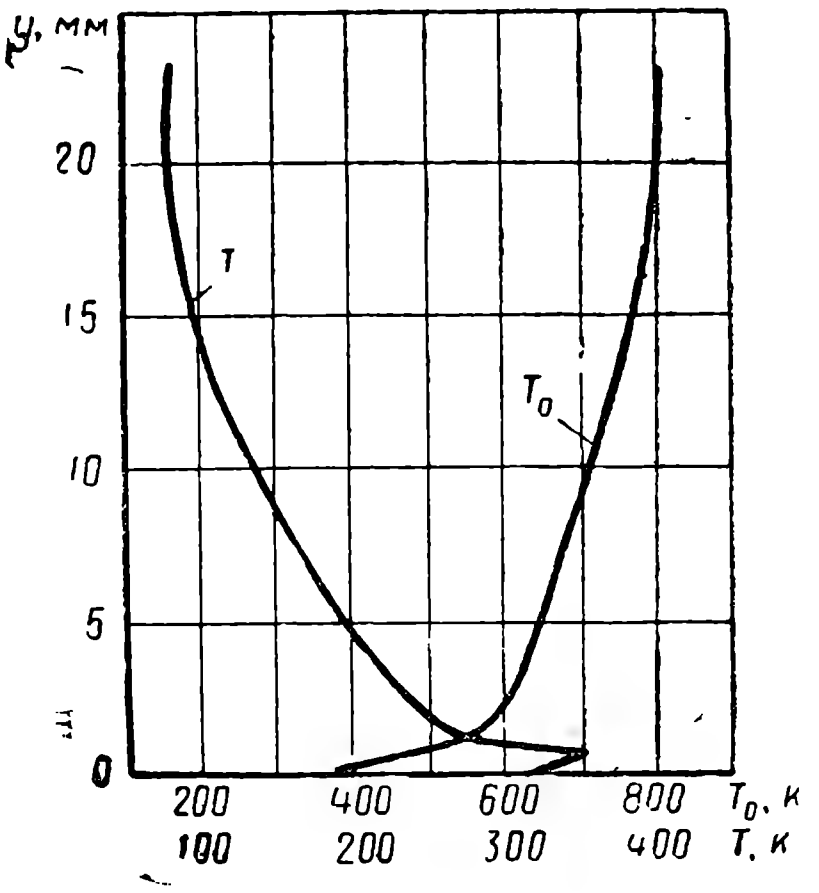


Рис. 7.1.8. Распределение температур (T_0, T) по толщине пограничного слоя

Для нахождения напряжения трения на стенке $\tau_{ст}$ составим по известному распределению скорости таблицу разностей (см. табл. Б).

В соответствии с данными табл. Б

$$\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)_{y=0}=\frac{1}{0{,}5\cdot 10^{-3}}\left[449{,}7-\frac{1}{2}(-190{,}8)+\frac{1}{3}\cdot 23{,}0\right]=1{,}106\cdot 10^6\ 1/сек.$$

Коэффициент динамической вязкости

$$\mu_{ст}=\mu_0\,(T_{ст}/T_0)^{0{,}76}=1{,}71\cdot 10^{-6}\,(310/273)^{0{,}76}=1{,}89\cdot 10^{-6}\ кГ\cdot сек/м^2.$$

Температура стенки здесь $T_{ст}$, равна 310 К, определялась экстраполированием по графику на рис. 7.1.8. В соответствии с полученными результатами

$$\tau_{ст}=\mu_{ст}\,(\partial V_x/\partial y)_{y=0}=1{,}89\cdot 10^{-6}\cdot 1{,}106\cdot 10^6=2{,}09\ кГ/м^2.$$

По этой величине находим местный коэффициент трения:

$$c_{fx}=\frac{\tau_{ст}}{q_\delta}=\frac{2\tau_{ст}}{kM_\delta^2 p_\delta}=\frac{2\cdot 2{,}09}{1{,}4\cdot 6{,}80^2\cdot 130}=0{,}49\cdot 10^{-3}.$$

Для определения условных толщин вытеснения δ^* и потери импульса δ^{**} воспользуемся формулами численного интегрирования (7.1.11)÷(7.1.14). В соответствии с этими формулами и с учетом данных измерений V_x и ρ (см. табл. А) были подсчитаны отношения $V_x/V\delta$, ρ/ρ_δ, $\rho V_x/(\rho_\delta V_\delta)$, найдены функции f_{δ^*}, $f_{\delta^{**}}$, а также соответствующие конечные разности, и определены величины $\Delta\delta^*$, $\Delta\delta^{**}$ (см. табл. В).

По данным табл. В, где в целях иллюстрации представлена лишь часть результатов, при помощи (7.1.11) и (7.1.12) были определены следующие значения δ^* и δ^{**}:

$$\delta^*=\sum_0^{18}\Delta\delta_i^*=0{,}9148+0{,}7992+\cdots+0{,}0480+0{,}0108\approx 8{,}65\ мм;$$

$$\delta^{**}=\sum_0^{18}\Delta\delta_i^{**}=0{,}04129+0{,}06969+\cdots+0{,}00545+0{,}00077\approx 0{,}85\ мм.$$

С учетом поправочных формул (7.1.16) и (7.1.17):

$$\delta^*=8{,}65\,(1-0{,}5/19)^{0{,}18}\approx 8{,}60\ мм;$$

$$\delta^{**}=0{,}85\,(1-0{,}5/19)^{0{,}18}\approx 0{,}85\ мм.$$

Исследование пульсаций скорости в пограничном слое на плоской пластинке

Цель работы — экспериментальное определение точки перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный.

Общие сведения

Распределение параметров жидкости в пограничном слое, а также трение и теплопередача к обтекаемой поверхности существенно зависят от режима течения, поэтому важной практической задачей является определение положения точки перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный.

Ламинарное течение жидкости устойчиво при некоторых условиях, определяемых критическим числом Рейнольдса. При значениях этого числа, бóльших критического, ламинарное течение становится неустойчивым и переходит в турбулентное. Такой переход связан с возникновением в потоке незатухающих возмущений.

Если образующиеся вследствие каких-либо внешних причин возмущения скорости и давления с течением времени затухают, то течение устойчиво, если они возрастают, то течение неустойчиво и возможен переход ламинарного режима в турбулентный. Однако этот переход не происходит мгновенно. Непосредственно за точкой потери устойчивости ламинарного пограничного слоя по отношению к малым случайным возмущениям, попадающим в этот слой, течение носит перемежающийся характер: происходит смена ламинарных и турбулентных состояний через неравномерные промежутки времени. Физический характер такого перемежающегося течения характеризуют посредством коэффициента перемежаемости, указывающего, какую долю некоторого промежутка времени в определенном сечении потока существует турбулентное течение.

На переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный влияет целый ряд факторов: число Рейнольдса

Таблица В

y, мм	V_x, м/сек	$\frac{\rho \cdot 10^2}{кГ \cdot сек^2/м^4}$	$\frac{V_x}{V_\delta}$	$\frac{\rho}{\rho_\delta}$	f_{δ^*}	Δf_{δ^*}	$\Delta^2 f_{\delta^*}$	$\Delta\delta^*$, мм	$f_{\delta^{**}}$	$\Delta f_{\delta^{**}}$	$\Delta^2 f_{\delta^{**}}$	$\Delta\delta^{**}$, мм
0	0	—	0	—	1				0			
1	708,6	0,164	0,5945	0,2927	0,8289	—0,1711	0,1152	0,9148	0,07056	0,07056	—0,07202	0,04129
2	829,2	0,182	0,6956	0,3264	0,7730	—0,0559	0,0202	0,7992	0,07056	—0,00146	—0,00146	0,06969
3	877,5	0,200	0,7362	0,3568	0,7373	—0,0357	0,0011	0,7551	0,06910	0,00020	—0,00035	0,06923
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
16	1170,9	0,493	0,9824	0,8816	0,1339	—0,0595	0,0107	0,1032	0,01524	0,00589	—0,00112	0,01239
17	1180	0,523	0,9899	0,9354	0,0744	—0,0488	0,0232	0,0480	0,00935	—0,00701	0,00467	0,00545
18	1189	0,547	0,9976	0,9767	0,0256	—0,0256		0,0108	0,00234	—0,00234		0,00077
19	1192	0,560	1	1	0				0			

и число Маха; размеры шероховатости; относительная температура поверхности; углы атаки и стреловидности крыла; градиент давления; степень затупления тела; вдув (или отсос) газа в пограничный слой, а также начальная турбулентность потока.

В настоящее время достаточно подробно изучена устойчивость ламинарного пограничного слоя по отношению к малым возмущениям и получено следующее условие для точки потери такой устойчивости в случае обтекания плоской пластинки:

$$(V_\infty \delta^*/\nu_\infty)_{\text{п.у}} = 420.$$

Расстояние от точки перехода до точки потери устойчивости существенно зависит от степени турбулентности потока, причем это расстояние тем меньше, чем больше степень турбулентности.

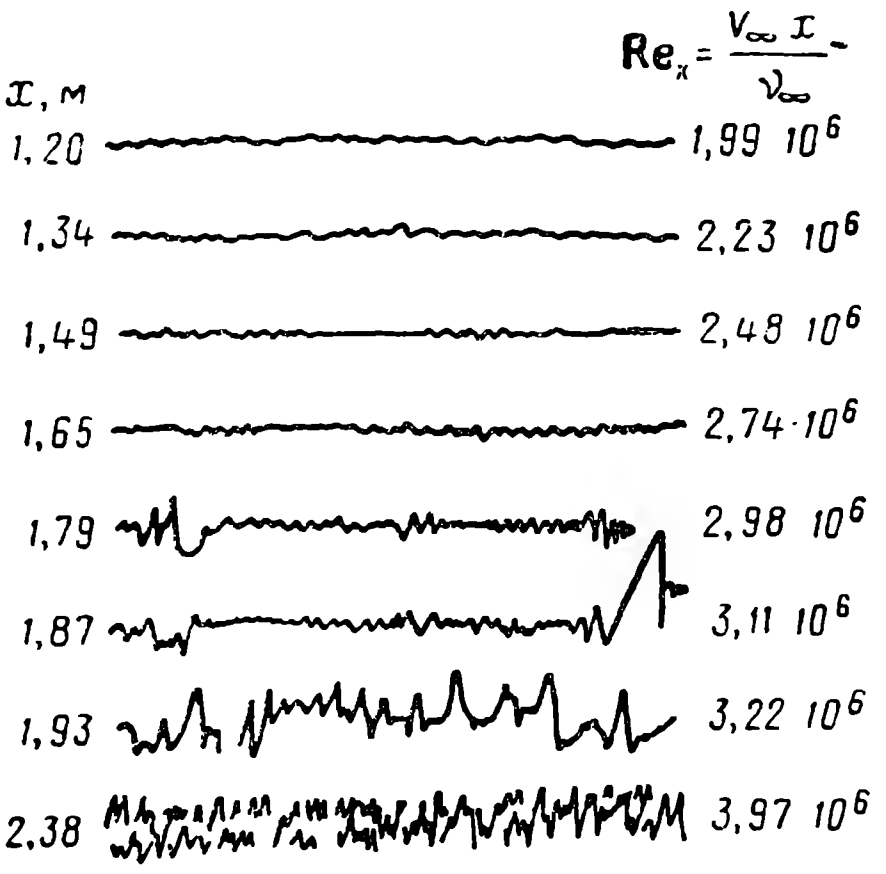


Рис. 7.1.9. Пульсации скорости в пограничном слое, регистрируемые катодным осциллографом

Переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный сопровождается более быстрым возрастанием скорости по мере удаления от поверхности и бóльшим утолщением слоя. Эти изменения и сопровождающие их явления служат основой для различных методов определения точки перехода. Можно определить два значения критического числа Рейнольдса. Одно из них соответствует началу области перехода, другое — ее концу, т. е. полностью развитому турбулентному пограничному слою. В приближенных расчетах можно исходить из того, что ламинарный пограничный слой отделен от турбулентного областью перехода с бесконечно малыми размерами или геометрической точкой. Координата $x_{\text{кр}}$ этой точки перехода определяется по критическому числу Рейнольдса $\mathbf{Re}_{\text{кр}}$, которое в свою очередь вычисляется как некоторое среднее значение между числами Рейнольдса, соответствующими началу и концу области перехода. Обычно в результате эксперимента устанавливают положение перехода, а затем по известным параметрам невозмущенного потока и $x_{\text{кр}}$ рассчитывают значение критического числа Рейнольдса: $\mathbf{Re}_{\text{кр}} = V_\infty x_{\text{кр}}/\nu_\infty$.

В настоящее время используются различные методы исследования перехода. Наиболее широкое распространение получили методы, основанные на измерении турбулентных пульсаций скорости, полного давления, профиля скоростей в пограничном слое. В некоторых случаях применяются визуальные методы, позволяющие наблюдать изменения в пограничном слое при помощи дыма, химических индикаторов, каолина, сублимирующих и люминесцирующих покрытий, масляной пленки, пылеосаждения.

Рассмотрим более подробно метод определения перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный, основанный на измерении пульсаций скорости. В качестве прибора, регистрирующего эти пульсации, используют термоанемометр (см. § 2.2). Прежде чем приступить к исследованию пограничного слоя на поверхности модели, необходимо определить характеристики невозмущенного потока, а именно скорость V_∞ и начальную турбулентность ε (см. § 2.2). Затем датчик термоанемометра, установленный в координатном устройстве, следует

расположить на небольшом расстоянии от обтекаемой поверхности (0,2÷0,6 *мм* — в зависимости от толщины пограничного слоя) и перемещать его вдоль этой поверхности, причем нить термоанемометра должна быть расположена перпендикулярно скорости потока. В процессе перемещения датчика следят за изменением характера пульсаций скорости с помощью катодного осциллографа и устанавливают протяженность ламинарного пограничного слоя, переходной области и полностью развитого турбулентного пограничного слоя.

Каждая из указанных областей характеризуется следующими явлениями. В ламинарном пограничном слое пульсации незначительны, а в переходной области эти пульсации велики по амплитуде, но носят редкий, случайный характер. На турбулентном участке происходит увеличение пульсаций скорости (рис. 7.1.9).

Определив границы области перехода, т. е. координаты $x_{кр}$, соответствующие началу и концу перехода и отсчитываемые от передней кромки пластинки, и зная параметры набегающего потока V_∞ и ν_∞, можно рассчитать критические числа Рейнольдса $\mathbf{Re}_{кр} = V_\infty x_{кр}/\nu_\infty$ (минимальное и максимальное, соответствующие началу и концу перехода).

Порядок проведения работы

1. Ознакомиться со схемой экспериментальной установки, устройством модели, термоанемометром, тарировочной аэродинамической трубой, а также регистрирующими приборами и проверить готовность их к работе.

2. Измерить атмосферное давление $p_{атм}$, температуру $T_{атм}$, а также разность температур по психрометру.

3. Произвести тарировку датчика термоанемометра с помощью специальной тарировочной аэродинамической трубы и установить зависимость показаний вольтметра постоянного тока $U_в$ от скорости потока V (см. § 3.1).

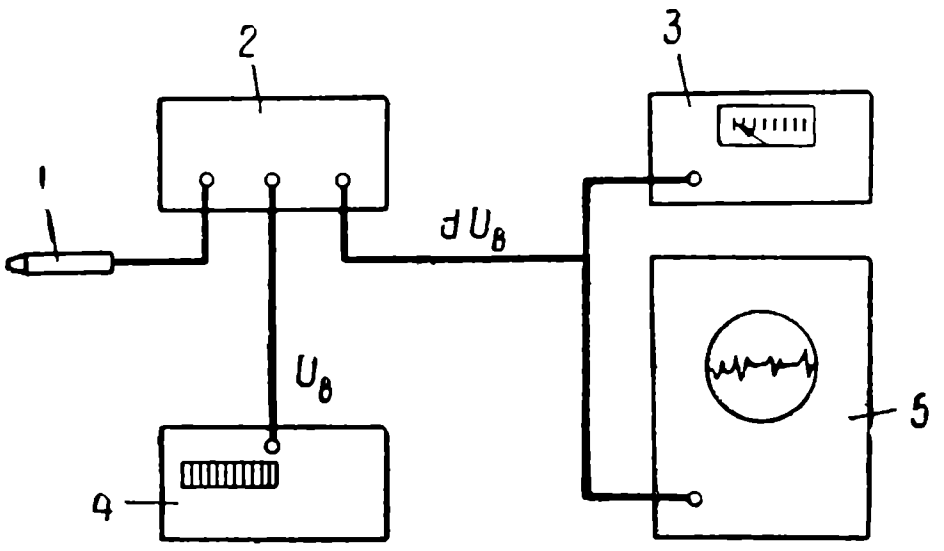


Рис. 7.1.10. Схема включения регистрирующей аппаратуры:

1 — датчик термоанемометра; *2* — термоанемометр; *3*, *4* — вольтметры переменного и постоянного тока; *5* — катодный осциллограф

4. Установить в рабочей части дозвуковой аэродинамической трубы исследуемую модель.

5. Осуществить соединение регистрирующих приборов: термоанемометра, вольтметров постоянного и переменного тока, а также осциллографа согласно схеме, приведенной на рис. 7.1.10.

6. Закрепить датчик термоанемометра в рабочей части аэродинамической трубы на державке координатного устройства и соединить его электрическим кабелем с термоанемометром.

7. Включить питание моста термоанемометра и произвести балансировку измерительного канала термоанемометра (см. § 3.1).

8. Включить аэродинамическую трубу и после выхода ее на режим установившегося движения воздуха снять показания вольтметров постоянного и переменного тока.

9. Установить датчик термоанемометра на заданном расстоянии от обтекаемой поверхности (в зоне пограничного слоя) вблизи передней кромки пластинки.

10. Перемещать датчик термоанемометра вдоль обтекаемой поверхности с помощью координатного устройства и следить на осциллографе за характером пульсаций скорости в пограничном слое.

11. По изменению характера и амплитуды пульсаций скорости вдоль обтекаемой поверхности установить характерные области течения (ламинарное, переходное, турбулентное) и зафиксировать с помощью координатного устройства расстояния (координаты x) от передней кромки до этих областей.

12. По показаниям вольтметров постоянного и переменного тока определить скорость невозмущенного потока (см. тарировочный график на рис. 3.1.16) и по зависимости (3.2.39) — начальную турбулентность ε.

13. По измеренным значениям $p_{атм}$, $T_{атм}$ и разности температур психрометра определить относительную влажность воздуха, давление насыщенного водяного пара (см. табл. 2.2.1; 2.2.2) и рассчитать плотность газового потока ρ_∞ и коэффициент кинематической вязкости ν_∞.

14. По найденным в процессе эксперимента координатам области перехода и параметрам набегающего потока определить критические числа Рейнольдса, соответствующие началу и концу области перехода.

Пример. Приведем результаты исследования перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный на плоской пластинке в дозвуковой аэродинамической трубе. Обработка экспериментальных данных, полученных при таком исследовании, осуществлялась с помощью тарировочной кривой для термоанемометра, приведенной на рис. 3.1.16.

Перед пуском аэродинамической трубы были измерены барометрическое давление $p_{атм}=760$ *мм рт. ст.* (10300 *кГ/м*^{2}), а также температура воздуха в лаборатории $T_{атм}=288$ К и разность температур психрометра, равная двум градусам (разность между показаниями сухого $t_1=15°$ С и влажного $t_2=13°$ С термометров).

Соединение регистрирующих приборов (термоанемометра, цифрового вольтметра постоянного тока, вольтметра переменного тока и осциллографа) производилось согласно схеме, приведенной на рис. 7.1.10. В первоначальном положении датчик термоанемометра устанавливался на координатном устройстве в рабочей части аэродинамической трубы вдали от исследуемой модели (вне пограничного слоя). После включения трубы и выхода ее на установившийся режим работы были сняты показания цифрового вольтметра постоянного тока $U_в=4{,}89$ *в* и вольтметра переменного тока $dU_в=0{,}23$ *мв*. Скорость потока в рабочей части аэродинамической трубы V_∞ определялась из тарировочного графика (см. рис. 3.1.16) по $U_в=4{,}89$ *в* и оказалась равной $V_\infty=24$ *м/сек*.

Начальная турбулентность потока дозвуковой аэродинамической трубы ε была найдена по зависимости (3.2.39):

$$\varepsilon = 4{,}35\,\frac{dU_в}{U_в}\cdot\frac{U_в^2}{U_в^2-(U_0')^2} = 4{,}35\,\frac{0{,}23\cdot10^{-3}}{4{,}89}\cdot\frac{4{,}89^2}{4{,}89^2-(0{,}925\cdot3)^2} = 0{,}03\cdot10^{-2}.$$

После снятия показаний вольтметров постоянного и переменного тока, необходимых для определения V_∞ и ε, датчик термоанемометра с помощью координатника был установлен в районе носовой части пластинки на расстоянии 0,57 *мм* от ее поверхности и перемещался в процессе исследований вдоль поверхности (в направлении потока). В результате были получены осциллограммы пульсаций скорости, приведенные на рис. 7.1.9, где для каждой координаты x указаны соответствующие числа Рейнольдса $\mathbf{Re}_x$. На основании этих экспериментальных данных можно сделать вывод, что начало области перехода соответствует расстоянию от передней кромки, равному $x_1=1{,}65$ *м*, а конец — длине $x_2=2{,}38$ *м*. По этим значениям можно вычислить минимальное $\mathbf{Re}_{кр1}$ и максимальное $\mathbf{Re}_{кр2}$ числа Рейнольдса перехода.

Плотность набегающего потока

$$\rho_\infty = \rho_{атм} = \frac{p_{атм}}{RT_{атм}}\left(1-0{,}378\,\frac{x\cdot p_{н.п}}{p_{атм}}\right) = \frac{10300}{287\cdot288}\left(1-0{,}378\,\frac{0{,}8\cdot12{,}79}{760}\right)\approx$$
$$\approx 0{,}124\ кГ\cdot сек^2/м^4.$$

Здесь относительная влажность $x=0{,}8$ была определена из табл. 2.2.1 по температуре $t_{атм}=15°$ С и разности температур психрометра 2° С, а давление насыщенного водяного пара $p_{н.п}=12{,}79$ *мм рт. ст.* — из табл. 2.2.2.

Так как коэффициент динамической вязкости

$$\mu_\infty = \mu_0\,(T_\infty/T_0)^{0{,}76} = 1{,}71\cdot10^{-6}(288/273)^{0{,}76} \approx 1{,}78\cdot10^{-6}\ \ кГ\cdot сек/м^2$$

и соответствующий коэффициент кинематической вязкости

$$\nu_\infty = \mu_\infty/\rho_\infty = 1{,}78\cdot10^{-6}/0{,}124 = 14{,}4\cdot10^{-6}\ \ м^2/сек,$$

то, следовательно,

$$\mathbf{Re}_{кр1} = V_\infty x_1/\nu_\infty = 24 \cdot 1{,}65/(14{,}4 \cdot 10^{-6}) = 2{,}74 \cdot 10^6;$$

$$\mathbf{Re}_{кр2} = V_\infty x_2/\nu_\infty = 24 \cdot 2{,}38/(14{,}4 \cdot 10^{-6}) = 3{,}97 \cdot 10^6.$$

Работа 7.1.3

Исследование распределения давления и полного аэродинамического сопротивления шара, обтекаемого потоком вязкой несжимаемой жидкости

Цель работы — определение по измеренному сопротивлению шара и распределению давления по его поверхности начальной турбулентности потока в аэродинамической трубе.

Общие сведения

При исследовании обтекания вязким потоком тел различной формы наблюдаются так называемые кризисные явления, связанные с резким изменением характера этого обтекания. Такие явления могут сопровождаться отрывом потока с поверхности или же происходят при безотрывном ее обтекании.

Наиболее ярко выражены кризисные явления в случае обтекания тонкой пластинки и шара. При безотрывном обтекании пластинки кризисное явление состоит в резком возрастании ее сопротивления, обусловленном переходом ламинарного пограничного слоя в турбулентный. При обтекании шара кризис обтекания носит другой характер. Вследствие нарастания на его поверхности пограничного слоя и торможения, обусловленного противодавлением, происходит отрыв этого слоя. Начало такого отрыва совпадает с той точкой поверхности, где $\tau_{ст}=0$, т. е.

$$\mu_{ст} (\partial V_x/\partial y)_{y=0} = 0.$$

Следовательно, отрыв пограничного слоя происходит тем ниже по течению, чем больше напряжение трения на стенке, поскольку в этом случае частицы жидкости пройдут больший путь в пограничном слое вдоль поверхности тела, прежде чем $\tau_{ст}$ станет равным нулю. Таким образом, в случае ламинарного пограничного слоя отрыв произойдет значительно выше по потоку, чем в случае смешанного пограничного слоя, когда на кормовой части шара имеется турбулентный пограничный слой.

Схема отрыва потока при обтекании шара показана на рис. 7.1.11, а соответствующее распределение коэффициентов давления $\bar{p}=(p-p_\infty)/q_\infty$ — на рис. 7.1.12. Чем ниже по потоку происходит отрыв пограничного слоя, тем ближе по своему характеру обтекание шара потоком реальной (вязкой) жидкости к обтеканию его идеальной средой. Поэтому, несмотря на то, что сопротивление трения при переходе от ламинарного пограничного слоя к турбулентному возрастает, кризис обтекания приводит к уменьшению полной величины сопротивления шара вследствие уменьшения области пониженного давления в кормовой части (см. рис. 7.1.12).

Кризисные явления в случае обтекания шара при прочих равных условиях наступают тем скорее (т. е. при меньшем числе Рейнольдса $\mathbf{Re}=V_\infty D/\nu_\infty$, где D — диаметр шара), чем больше начальная турбулентность потока. Шар вследствие большой чувствительности характера его обтекания к начальной турбулентности используется в эксперимен-

тальной аэродинамике как эталонный образец обтекаемой поверхности при определении величины этой турбулентности.

Разработаны и применяются два способа этого определения. Первый из них связан с измерением лобового сопротивления шара, а второй основан на измерении перепада давления на его поверхности.

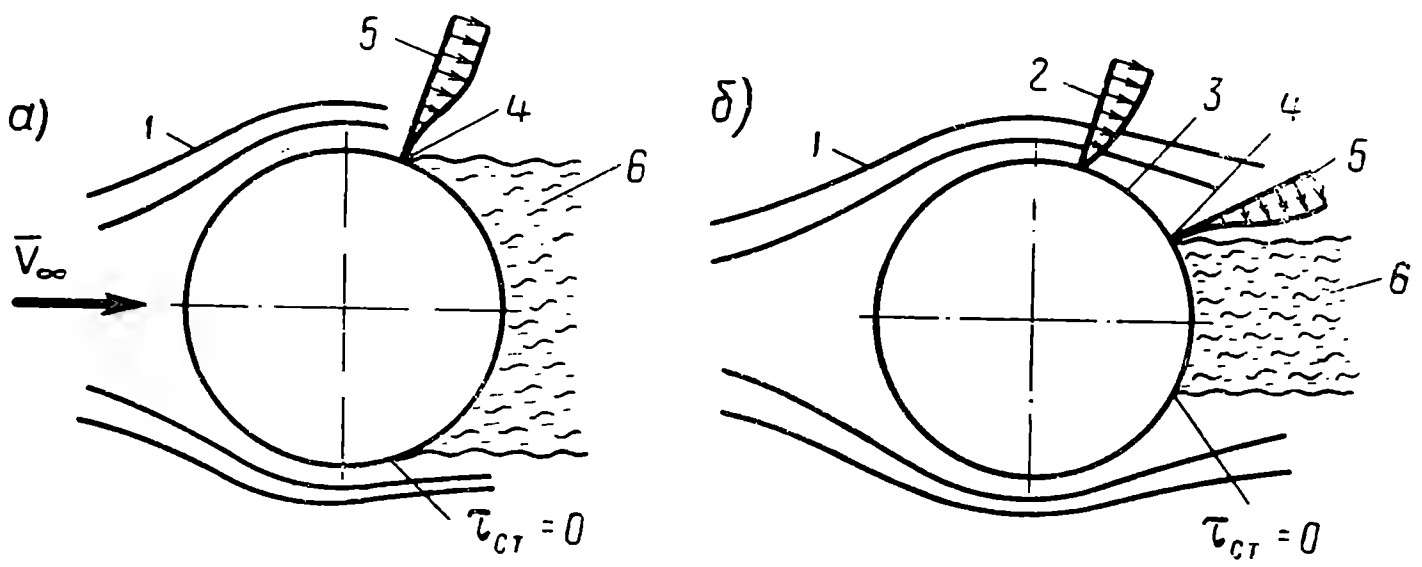


Рис. 7.1.11. Схема отрыва потока при обтекании шара:

а — полностью ламинарное течение (докритическое обтекание); *б* — смешанное течение (закритическое обтекание); *1* — линии тока; *2* — эпюра скоростей в пограничном слое; *3* — точка перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный; *4* — точка отрыва пограничного слоя; *5* — эпюра скоростей в точке отрыва; *6* — вихревой след за телом

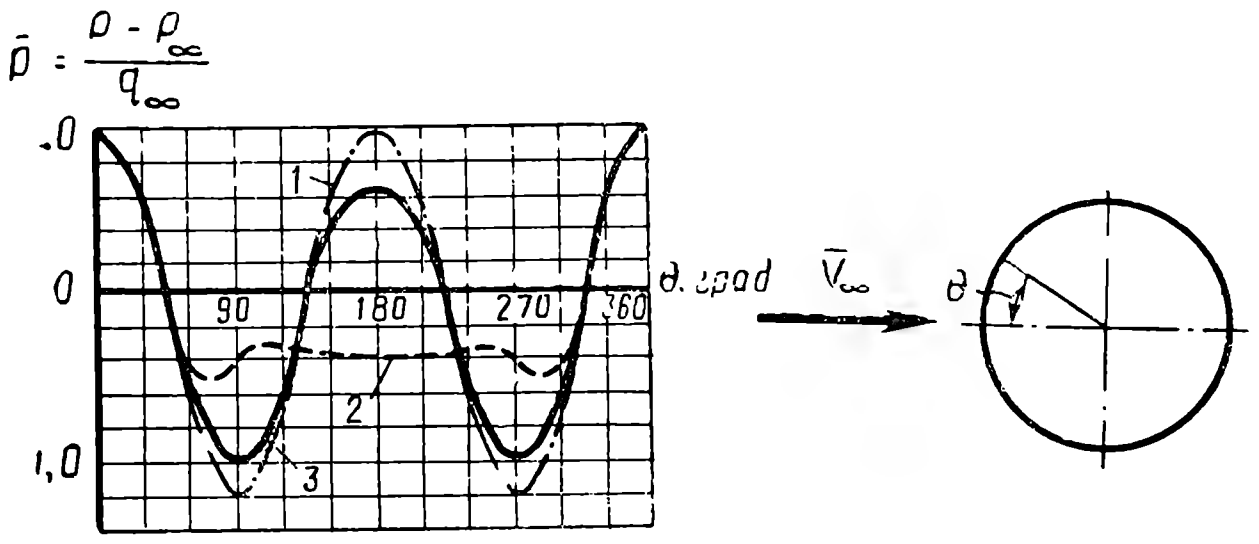


Рис. 7.1.12. Распределение коэффициентов давления по поверхности шара:

1 — безвихревое обтекание идеальным потоком; *2* — докритическое обтекание; *3* — сверхкритическое обтекание

Определение начальной турбулентности потока в аэродинамической трубе по измерению лобового сопротивления шара. Если, увеличивая скорость потока в аэродинамической трубе, измерить при помощи аэродинамических весов лобовое сопротивление шара и подсчитать соответствующий коэффициент сопротивления c_x, то можно построить график зависимости этого коэффициента от числа Рейнольдса, как это показано на рис. 7.1.13.

Из рисунка видно, что величина c_x изменяется в широких пределах: при малых числах Рейнольдса, когда происходит отрыв ламинарного потока $c_x \approx 0{,}48$, а при больших значениях этого числа (в случае «турбулентного отрыва») $c_x \approx 0{,}1$. В сравнительно малом диапазоне чисел Рейнольдса (на рис. 7.1.13 $\mathbf{Re}_1$ и $\mathbf{Re}_2$) происходит резкое снижение коэффициента сопротивления, обусловленное переходом ламинарного пограничного слоя в турбулентный и сдвигом по этой причине его точки отрыва вниз по потоку. Приближенно считают, что такое снижение происходит при критическом числе Рейнольдса $\mathbf{Re}^*$, за которое принимают его значение $\mathbf{Re} = V_\infty D/\nu_\infty$, соответствующее коэффициенту лобового сопротивления шара $c_x = 0{,}3$ (см. рис. 7.1.13).

Если провести измерения лобового сопротивления одного и того же шара в различных аэродинамических трубах и построить графики $c_x = f(\mathbf{Re})$, то может оказаться, что полученные кривые не совпадут (рис. 7.1.14) и соответствующие числа **Re*** будут также различными. Это объясняется разной величиной начальной турбулентности потока ε.

На основании испытаний по определению лобового сопротивления одного и того же шара в различных аэродинамических трубах, началь-

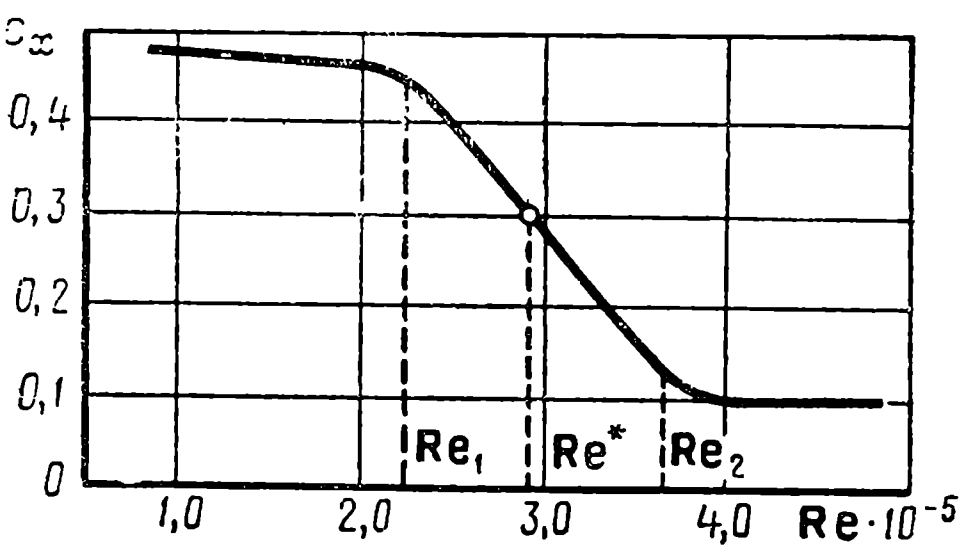


Рис. 7.1.13. Зависимость коэффициента лобового сопротивления шара от числа Рейнольдса

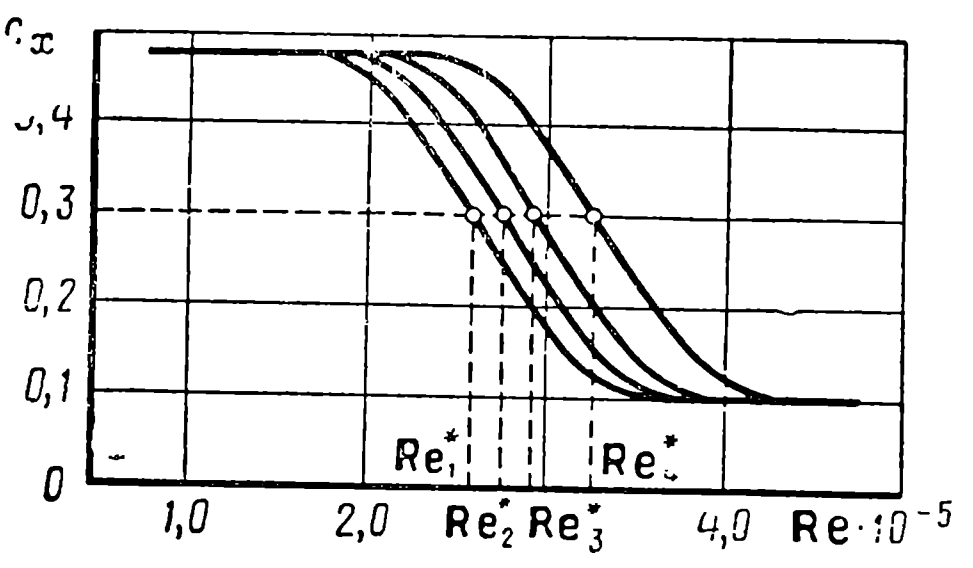


Рис. 7.1.14. Зависимости $c_x = f(\mathbf{Re})$ для шара, полученные в различных аэродинамических трубах

ная турбулентность в которых заранее определена с помощью, например, термоанемометра, можно построить серию кривых $c_x = f(\mathbf{Re})$ — таких, как на рис. 7.1.14. По этим кривым можно найти критические числа **Re***, а затем графически воспроизвести зависимость $\varepsilon = f(\mathbf{Re}^*)$. Такая зависимость, которой можно пользоваться для определения в экспериментальных условиях начальной турбулентности ε, %, приведена на рис. 7.1.15. Исследования показывают, что найденные при помощи этого графика значения начальной турбулентности потока близки к действительным, если используемая в экспериментах модель шара имеет диаметр $D \approx 12 \div 15$ *см*.

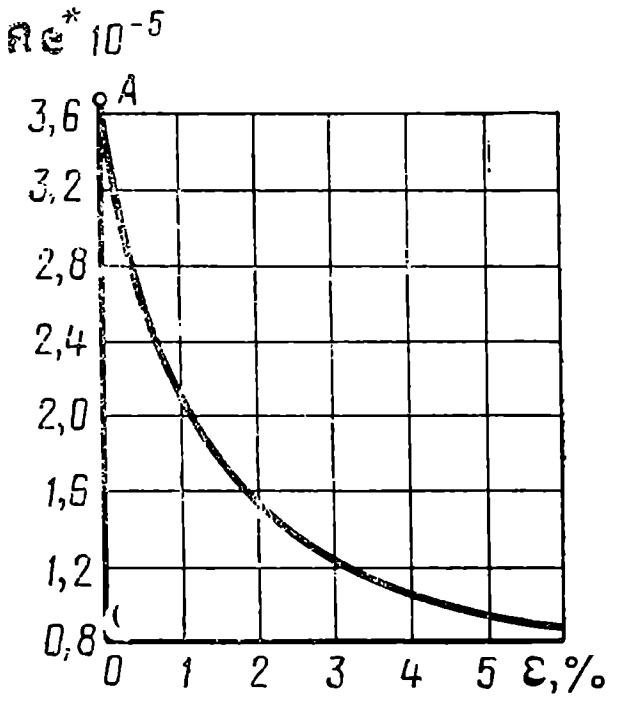


Рис. 7.1.15. Связь между начальной турбулентностью потока и критическим числом Рейнольдса шара (*A* — свободный полет)

Определение начальной турбулентности потока по измерению перепада давлений на поверхности шара. Из рис. 7.1.12 видно, что изменение числа Рейнольдса наиболее сильно сказывается на распределении давления в кормовой части шара. Если до наступления «кризиса» за шаром преобладает разрежение, то при «закризисном» обтекании в этой зоне наблюдается более высокое давление. Область, которая в наибольшей степени реагирует на изменение числа Рейнольдса, определяется полярными координатами $\theta = 150° \div 210°$ (см. рис. 7.1.12). Эта особенность обтекания шара используется в целях определения критического числа Рейнольдса по перепаду давлений в головной и кормовой частях шара.

В стенке шара, предназначенного для подобных исследований, просверливают два дренажных отверстия, причем одно из них располагают в точке полного торможения (критической точке), а другое — в кормовой части, в точке с полярной координатой $\theta = 157°30'$. В целях повышения точности измерений давления в кормовой части шара просверливают не одно, а четыре симметрично расположенных дренажных отверстия (рис. 7.1.16), измеряемые давления в которых осредняются с

помощью коллектора (величину этого осредненного давления обозначим через $p_к$). Изменение условий обтекания (числа **Re**) существенно влияет на перепад давления $\Delta p = p_0 - p_к$ в этих точках и в точке полного торможения. Если при разных скоростях потока в аэродинамической

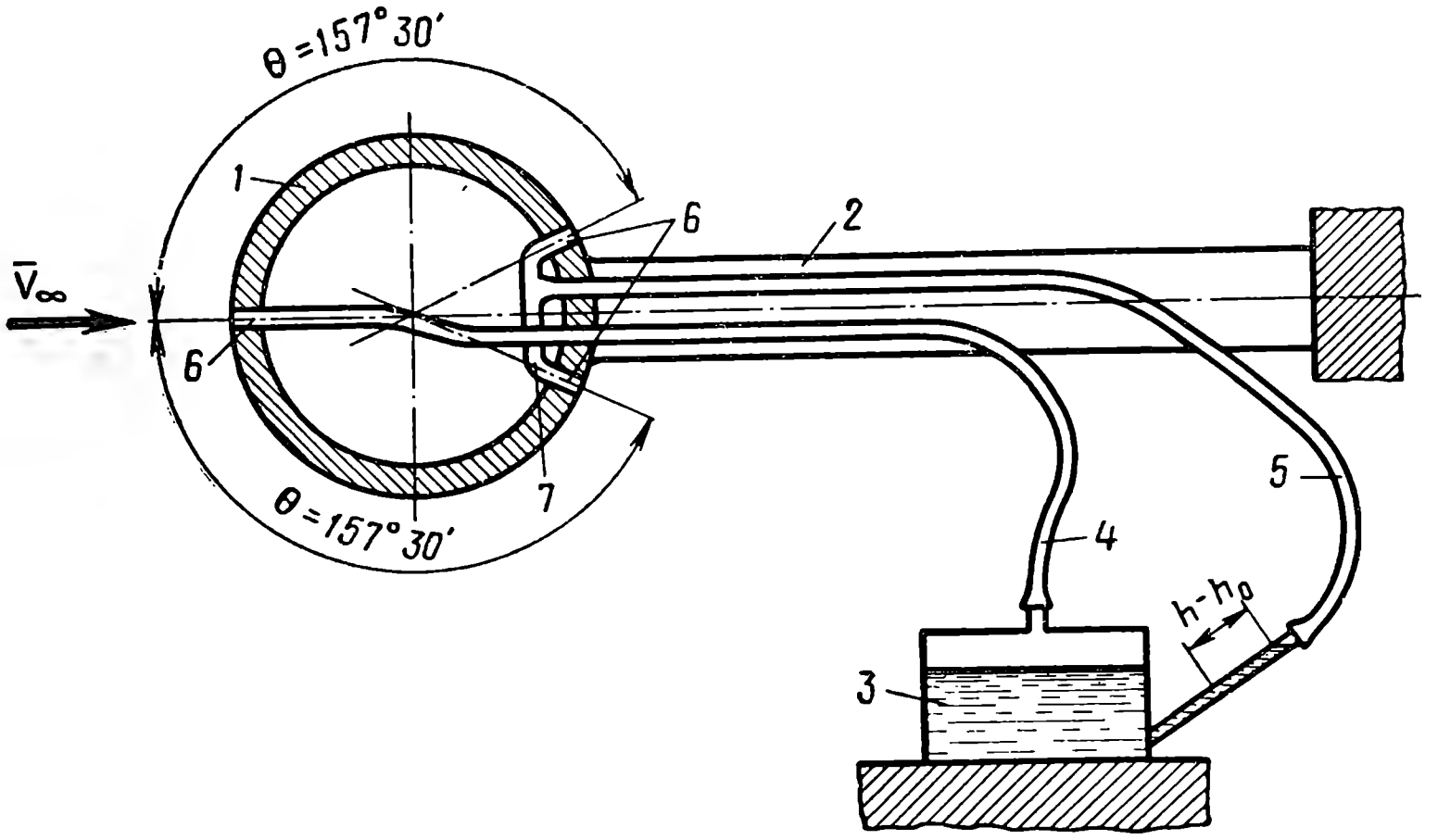


Рис. 7.1.16. Модель шара для определения начальной турбулентности потока по измерению перепада давления на его поверхности:

1 — шар давления; *2* — донная державка; *3* — жидкостной манометр; *4*, *5* — трубопроводы, соединяющие дренажные точки с манометром; *6* — дренажные отверстия для измерения давления; *7* — коллектор

трубе измерить этот перепад давлений, то можно построить зависимости (рис. 7.1.17)

$$\Delta\bar{p} = \frac{2(p_0 - p_к)}{\rho_\infty V_\infty^2} = \frac{2\Delta p}{\rho_\infty V_\infty^2} = f(\mathbf{Re}).$$

Исследования показывают, что значение $\Delta\bar{p} = 1{,}22$ соответствует коэффициенту лобового сопротивления $c_x = 0{,}3$, при котором определяется критическое число **Re***. Таким образом, для нахождения этого числа Рейнольдса можно использовать график $\Delta\bar{p} = f(\mathbf{Re})$, на котором значение **Re*** отыскивается по величине $\Delta\bar{p} = 1{,}22$. Зная **Re***, по кривой на рис. 7.1.15 можно определить соответствующую величину начальной турбулентности ε.

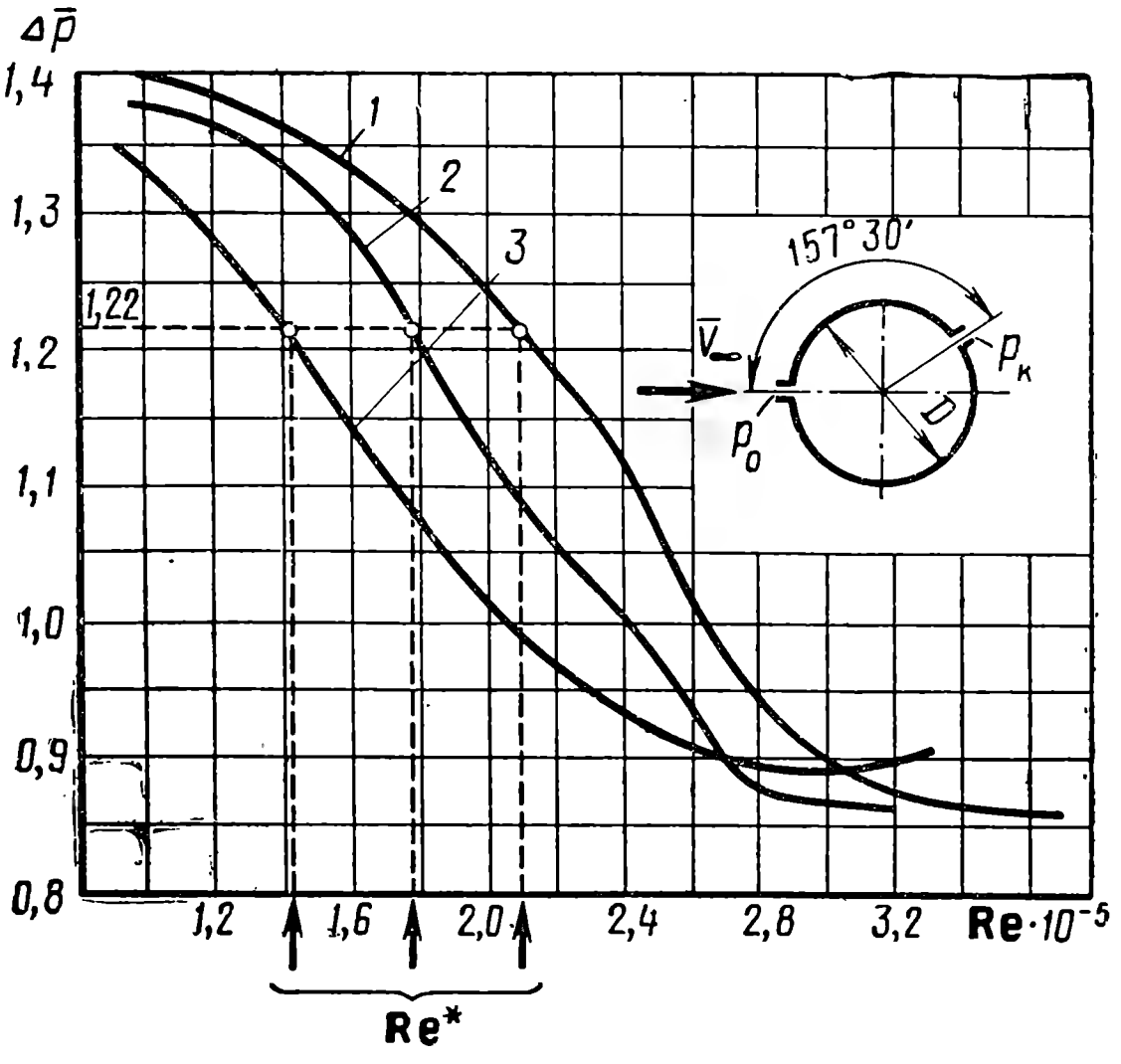


Рис. 7.1.17. Зависимости $\Delta\bar{p}$ от числа Рейнольдса для шара, полученные в аэродинамических трубах с различной начальной турбулентностью потока (*1*, *2*, *3*)

Порядок проведения работы

Метод измерения полного сопротивления.

1. Ознакомиться со схемой экспериментальной установки, устройством модели, однокомпонентными

тензометрическими весами, тарировочным приспособлением, а также регистрирующими приборами и проверить готовность их к работе.

2. Произвести тарировку аэродинамических весов и построить тарировочный график зависимости $X=f(N)$ (где X — осевая сила; N — показания регистрирующего прибора — милливольтметра).

3. Закрепить исследуемую модель шара на тензометрических весах с помощью донной державки и установить ее в рабочей части аэродинамической трубы.

4. Установить в этой рабочей части насадок полного напора и соединить его с микроманометром с помощью резинового шланга.

5. Измерить атмосферное давление $p_{атм}$ и температуру $T_{атм}$, снять начальные показания микроманометра, регистрирующего прибора весов, а также психрометра.

6. Включить аэродинамическую трубу и после выхода ее на режим установившегося движения воздуха зафиксировать показания манометра, измеряющего полное давление, а также показания регистрирующего прибора аэродинамических весов.

7. Изменить режим работы двигателя аэродинамической трубы и провести новые испытания по определению лобового сопротивления шара, записывая каждый раз показания трубки полного напора и регистрирующего прибора весов.

8. По измеренным атмосферному давлению ($p_{атм}$) и температуре ($T_{атм}$), а также разности температур влажного и сухого термометров психрометра определить плотность воздуха ρ_∞.

9. По измеренным атмосферному давлению и давлению торможения p_0, а также найденной ранее плотности ρ_∞ определить скорость потока в рабочей части аэродинамической трубы, а затем подсчитать коэффициент кинематической вязкости ν_∞, скоростной напор $q_\infty = \rho_\infty V_\infty^2/2$ и число Рейнольдса $\mathbf{Re}=V_\infty D/\nu_\infty$ для различных режимов работы аэродинамической трубы.

10. Используя тарировочный график, по найденным в эксперименте показаниям регистрирующего прибора весов N определить лобовое сопротивление шара X.

11. По значению X найти соответствующий коэффициент лобового сопротивления c_x для каждого режима работы аэродинамической трубы.

12. Построить графическую зависимость коэффициента c_x от величины $\mathbf{Re}=V_\infty D/\nu_\infty$ и определить критическое число Рейнольдса $\mathbf{Re}^*$, соответствующее значению $c_x=0{,}3$.

13. Определить по $\mathbf{Re}^*$ начальную турбулентность аэродинамической трубы, используя график на рис. 7.1.15.

Метод измерения перепада давлений.

1. Ознакомиться со схемой экспериментальной установки, устройством модели, а также регистрирующими приборами и проверить их готовность к работе.

2. Установить в рабочей части аэродинамической трубы дренированную модель шара (шар давления) на донной державке.

3. Соединить резиновыми трубками дренажное отверстие, расположенное на лобовой поверхности шара, с резервуаром чашечного микроманометра, а отверстия в кормовой части — с измерительной трубкой микроманометра.

4. Установить в рабочей части аэродинамической трубы насадок полного напора (для измерения скорости V_∞) и соединить его с микроманометром (это измерение можно также осуществить по величине полного давления, измеренного в критической точке шара, которое подводится к манометру через соединительный тройник).

5. Снять начальные показания микроманометров, предназначенных для определения скорости потока и перепада давлений в лобовой и кор-

мовой областях шара, а также измерить атмосферное давление $p_{атм}$, температуру $T_{атм}$ и разность температур по психрометру.

6. Включить аэродинамическую трубу и после выхода ее на режим установившегося движения воздуха снять показания микроманометров.

7. Изменить режим работы двигателя аэродинамической трубы и вновь провести испытания по измерению перепада давлений на поверхности шара.

8. По измеренным $p_{атм}$, $T_{атм}$, а также разности температур влажного и сухого термометров психрометра определить плотность воздуха ρ_∞.

9. По измеренным атмосферному давлению $p_{атм}$, давлению торможения p_0 и найденной плотности ρ_∞ определить скорость потока в открытой рабочей части аэродинамической трубы, а затем коэффициент кинематической вязкости ν_∞, скоростной напор $q_\infty=\rho_\infty V_\infty^2/2$ и число Рейнольдса для различных режимов работы аэродинамической трубы.

10. Определить перепад давлений $\Delta p=p_0-p_к$ при разных скоростях набегающего потока.

11. Вычислить значения $\Delta\bar{p}=\Delta p/q_\infty$, построить график $\Delta\bar{p}=f(\mathbf{Re})$ и определить по нему критическое число Рейнольдса, соответствующее значению $\Delta p=1{,}22$.

12. Определить по этому числу Рейнольдса, используя графическую зависимость $\varepsilon=f(\mathbf{Re}^*)$ на рис. 7.1.15, начальную турбулентность.

Пример. Измерение лобового сопротивления. Рассмотрим результаты экспериментального определения начальной турбулентности потока дозвуковой аэродинамической трубы переменных скоростей по измерению в ней лобового сопротивления модели шара.

Для исследования применялась модель диаметром $D=12$ *см* (площадь миделевого сечения $S_{мид}=0{,}0113$ $м^2$), установленная на однокомпонентных тензометрических весах с помощью донной державки. Предварительно была осуществлена тарировка этих весов, по результатам которой построен график на рис. 7.1.18.

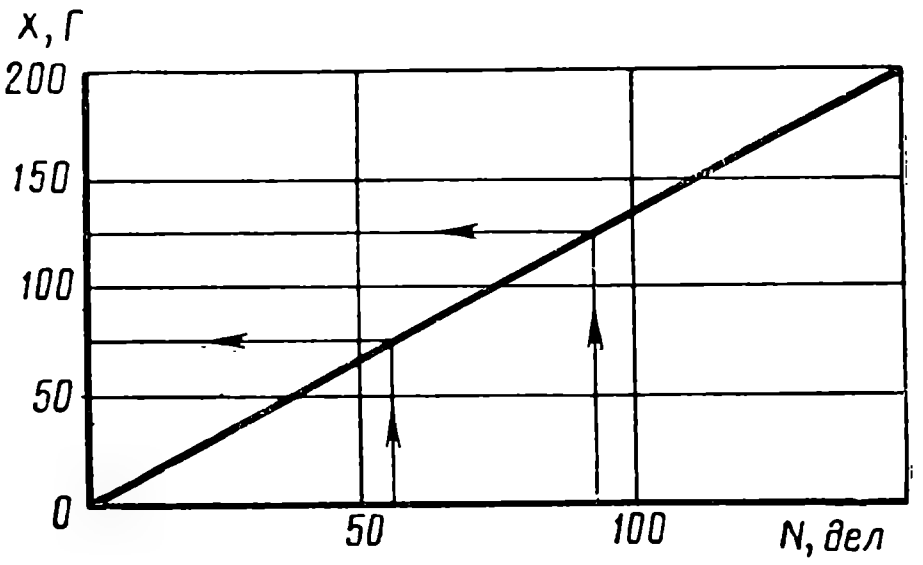


Рис. 7.1.18. Тарировочный график однокомпонентных тензометрических весов

Перед пуском аэродинамической трубы измерялись барометрическое давление $p_{атм}=760$ *мм рт. ст.*, температура в лаборатории $T_{атм}=288$ К, а также разность температур по психрометру, равная двум градусам (показание влажного термометра 286 К). Одновременно были сняты начальные показания микроманометра ($h_0=6$ *мм*) и регистрирующего прибора весов ($N_0=12$ *дел*).

Плотность воздуха

$$\rho_\infty=\rho_{атм}=\frac{p_{атм}}{RT_{атм}}\left(1-0{,}378\,\frac{x p_{н.п}}{p_{атм}}\right)=\frac{10300}{287\cdot 288}\left(1-0{,}378\,\frac{0{,}8\cdot 12{,}79}{760}\right)\approx$$
$$\approx 0{,}124\ кГ\cdot сек^2/м^4.$$

Здесь относительная влажность $x=0{,}8$ определена из табл. 2.2.1 по атмосферной температуре и разности температур психрометра, а давление $p_{н.п}=12{,}79$ *мм рт. ст.* — из табл. 2.2.2 по температуре $T_{атм}=288$ К (15° С).

Коэффициент динамической вязкости

$$\mu_\infty=\mu_0\,(T_\infty/T_0)^{0{,}76}=1{,}71\cdot 10^{-6}\,(288/273)^{0{,}76}=1{,}78\cdot 10^{-6}\ \ кГ\cdot сек/м^2,$$

а коэффициент кинематической вязкости

$$\nu_\infty=\mu_\infty/\rho_\infty=1{,}78\cdot 10^{-6}/0{,}124=14{,}4\cdot 10^{-6}\ \ м^2/сек.$$

После пуска трубы и выхода ее на установившийся режим с микроманометра, соединенного с трубкой полного напора, было снято показание $h=41$ *мм*, а с регистрирующего прибора весов $N=68$. В соответствии с этими данными скорость потока в рабочей части аэродинамической трубы

$$V_\infty = \sqrt{\frac{2}{\rho_\infty}(h-h_0)\sin\beta\cdot\gamma\cdot\xi_т} = \sqrt{\frac{2}{0,124}(41-6)\,10^{-3}\cdot 0,5\cdot 800\cdot 1} =$$

$$= 15,1\ м/сек.$$

Здесь: $\gamma = 0,8\ кГ/дм^3$ — удельный вес жидкости в микроманометре; $\beta = 30°$ — угол наклона плоскости измерительного колена микроманометра; $\xi_т$ — коэффициент тарировки насадка полного напора (его величина принимается равной единице).

Сила лобового сопротивления $X = 0,075\ кГ$ определена из тарировочного графика (см. рис. 7.1.18) по величине

$$N - N_0 = 68 - 12 = 56.$$

Скоростной напор набегающего потока

$$q_\infty = \rho_\infty V_\infty^2/2 = 0,124\cdot 15,1^2/2 = 14,0\ кГ/м^2.$$

Наконец, коэффициент лобового сопротивления шара

$$c_x = X/(q_\infty S_{мид}) = 0,075/(14\cdot 0,0113) = 0,474$$

и число Рейнольдса

$$\mathbf{Re} = V_\infty D/\nu_\infty = 15,1\cdot 0,12/(14,4\cdot 10^{-6}) = 1,25\cdot 10^5.$$

Таблица А

V_∞, м/сек	$N-N_0$, дел	X, кГ	q_∞, кГ/м²	c_x	$\mathbf{Re}\cdot 10^{-5}$
15,1	56	0,075	14,0	0,474	1,25
20,0	98	0,130	24,8	0,464	1,67
25,0	127	0,170	38,7	0,389	2,08
30,0	77	0,103	55,75	0,164	2,50
35,0	71	0,095	76,0	0,111	2,92
40,0	88	0,117	99,1	0,105	3,33

Аналогично осуществленные измерения и расчеты для других режимов работы двигателя аэродинамической трубы и соответствующих скоростей потока в рабочей части приведены в табл. А.

По данным табл. А на рис. 7.1.19 построена зависимость $c_x = f(\mathbf{Re})$, на основании которой определено критическое число Рейнольдса $\mathbf{Re}^* = 2,2\cdot 10^5$, соответствующее значению $c_x = 0,3$. По значению $\mathbf{Re}^* = 2,2\cdot 10^5$ из графика $\varepsilon = f(\mathbf{Re}^*)$ на рис. 7.1.15 была определена начальная турбулентность потока $\varepsilon = 0,9\%$.

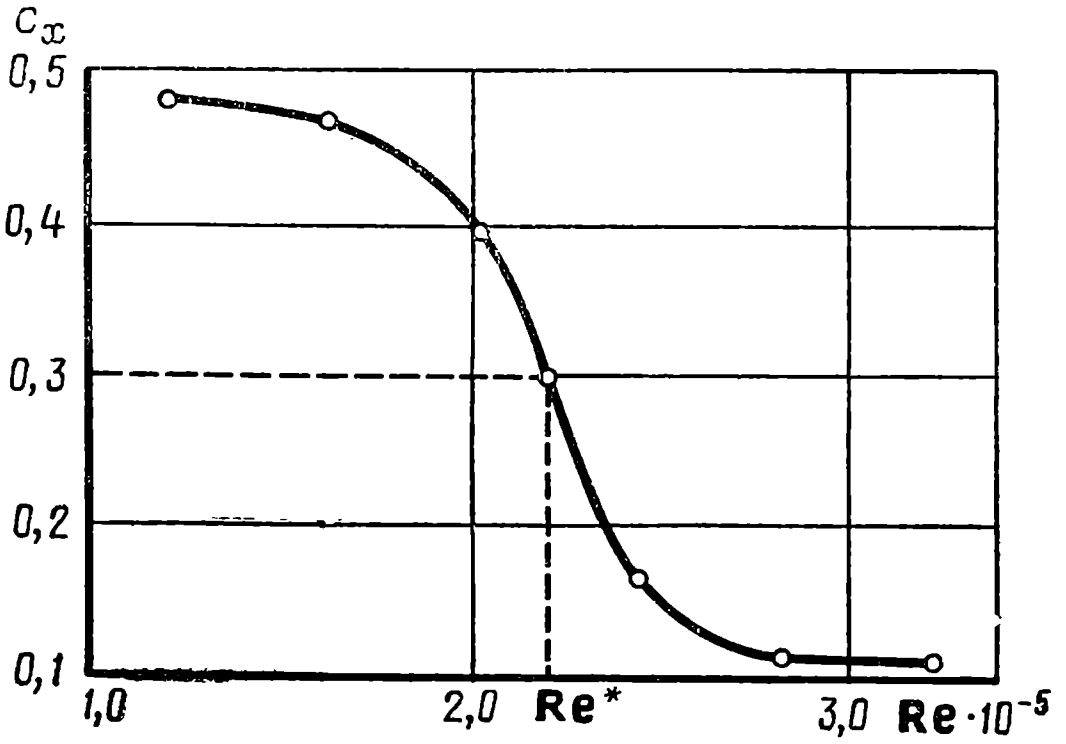


Рис. 7.1.19. Экспериментальная зависимость $c_x = f(\mathbf{Re})$ для определения критического числа Рейнольдса $\mathbf{Re}^*$

Измерение перепада давлений. Приведем результаты экспериментального определения начальной турбулентности по измерению перепада давлений на поверхности шара в той же дозвуковой аэродинамической трубе, что и в предыдущем примере.

Схема экспериментальной установки (шара давления) приведена на рис. 7.1.16. Полый дренированный шар диаметром $D = 12\ см$ (площадь миделевого сечения $S_{мид} = 0,0113\ м^2$) устанавливался на донной державке в рабочей части трубы. Скорость набегающего потока V_∞ в ней определялась как с помощью трубки полного напора, так и по давлению торможения, измеренному в передней критической точке шара.

Перепад давлений на поверхности шара в заданных точках определялся с помощью микроманометра. Для этого перед пуском трубы было снято нулевое показание манометра ($h_0 = 6\ мм$), а затем показание при продувке после выхода трубы на установившийся режим ($h = 39\ мм$). В соответствии с этим

$$\Delta p = p_0 - p_к = (h - h_0)\sin\beta\cdot\gamma\cdot\xi_т = (39-6)\,10^{-3}\cdot 0,75\cdot 800\cdot 1,0 = 19,8\ кГ/м^2,$$

а соответствующая безразмерная величина

$$\bar{\Delta p} = \Delta p/q_\infty = 19,8/14 = 1,42.$$

Аналогично производились измерения и осуществлялись расчеты для других режимов работы аэродинамической трубы (см. табл. Б).

Таблица Б

V_∞, м/сек	q_∞, кГ/м²	$\mathbf{Re}\cdot 10^{-5}$	h, мм	Δh, мм	Δp, кГ/м²	$\Delta\bar{p}$
15,1	14,0	1,25	39	33	19,8	1,42
20,0	24,8	1,67	63	57	34,2	1,38
25,0	38,7	2,08	89	83	49,8	1,29
30,0	55,75	2,50	94	88	52,8	0,948
35,0	76,0	2,92	110	104	62,4	0,821
40,0	99,1	3,33	139	133	79,8	0,808

По данным табл. Б на рис. 7.1.20 построен график зависимости $\Delta\bar{p}=f(\mathbf{Re})$, на основании которого было определено критическое число Рейнольдса $\mathbf{Re}^*=2{,}14\cdot 10^5$, соответствующее $\Delta\bar{p}=1{,}22$.

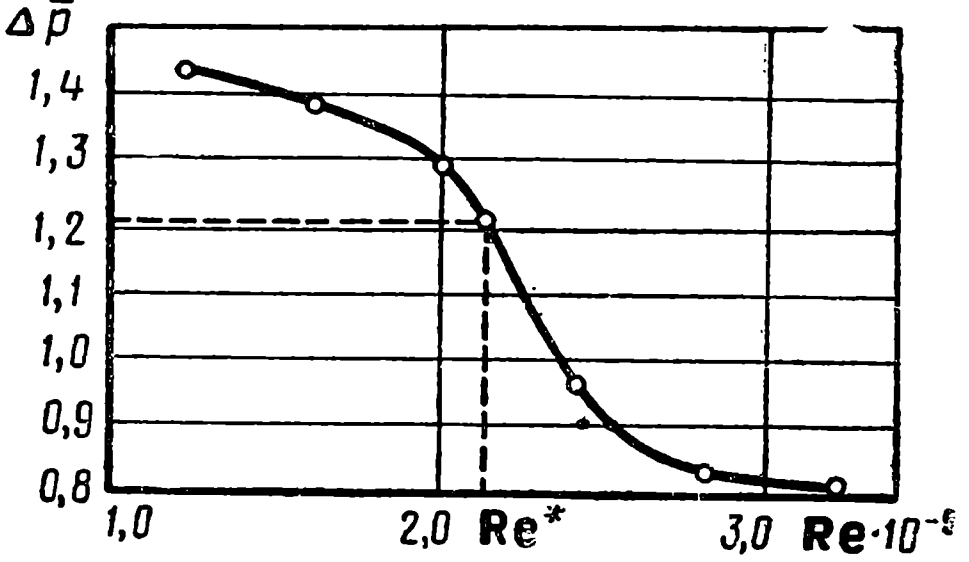


Рис. 7.1.20. Определение критического числа Рейнольдса $\mathbf{Re}^*$ по найденной в результате эксперимента зависимости $\Delta\bar{p}=f(\mathbf{Re})$

По значению $\mathbf{Re}^*=2{,}14\cdot 10^5$, используя зависимость $\varepsilon=f(\mathbf{Re}^*)$ (см. рис. 7.1.15), найдена начальная турбулентность потока $\varepsilon\approx 1{,}0\%$.

Работа 7.1.4

Исследование влияния шероховатости на обтекание поверхности

Цель работы — определение зависимости между шероховатостью и переходом ламинарного пограничного слоя в турбулентный.

Общие сведения

Шероховатость обтекаемой поверхности оказывает существенное влияние на распределение параметров потока, положение и размеры области перехода, величину поверхностного трения, поэтому исследование влияния шероховатости на пограничный слой представляет большой практический интерес.

Область возмущений, вносимых в поток шероховатостью, зависит от отношения высоты элементов шероховатости (например бугорков шероховатости) к толщине пограничного слоя. Для практики необходимо знать, до каких значений этой высоты шероховатость не оказывает влияния на переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный и как изменяется характер этого перехода при произвольной шероховатости. Представляет также интерес величина допустимой шероховатости для турбулентного пограничного слоя, при которой не происходит увеличения сопротивления по сравнению с гладкой стенкой.

Оценка влияния сжимаемости на эффективность шероховатости показывает, что с увеличением M_∞ критические высоты шероховатости возрастают. Это явление подтверждается экспериментами (рис. 7.1.21). Таким образом, пограничный слой в сжимаемой жидкости менее чувствителен к шероховатости, чем в несжимаемом потоке. После того как отношение k/δ_k^* (k — высота элемента шероховатости; δ_k^* — толщина вытеснения в сечении пограничного слоя, где расположен турбулизирующий элемент) достигнет критического значения, дальнейшее его возрастание даже на небольшую величину приводит к быстрому перемещению

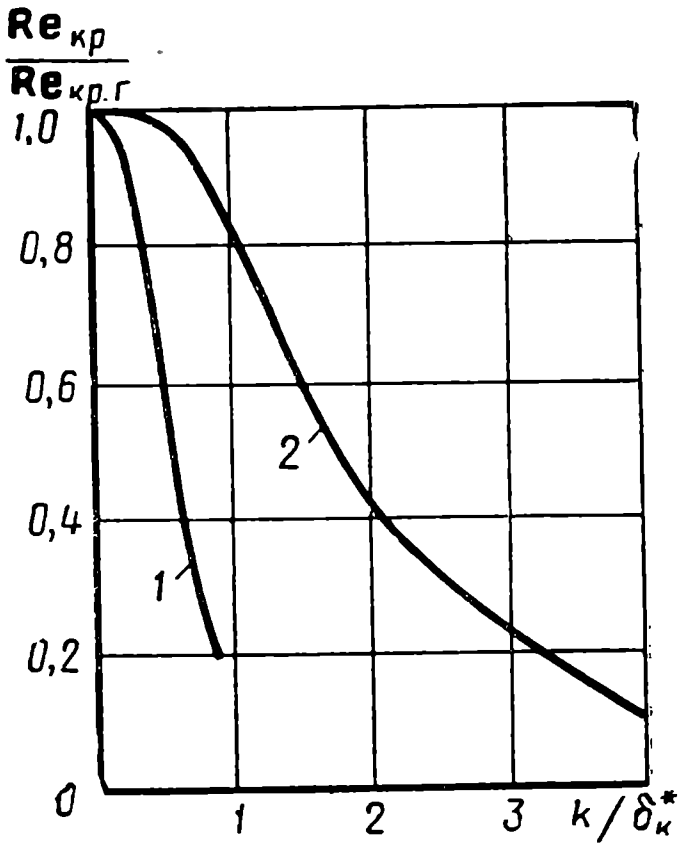


Рис. 7.1.21. Влияние цилиндрического элемента шероховатости на критическое число Рейнольдса:

δ_k^* — толщина вытеснения пограничного слоя в месте расположения элемента шероховатости; *1* — зависимость для малых скоростей (несжимаемая жидкость); *2* — число $M_\infty=3{,}1$; $Re_{кр.г}$ — критическое число Рейнольдса для гладкой поверхности

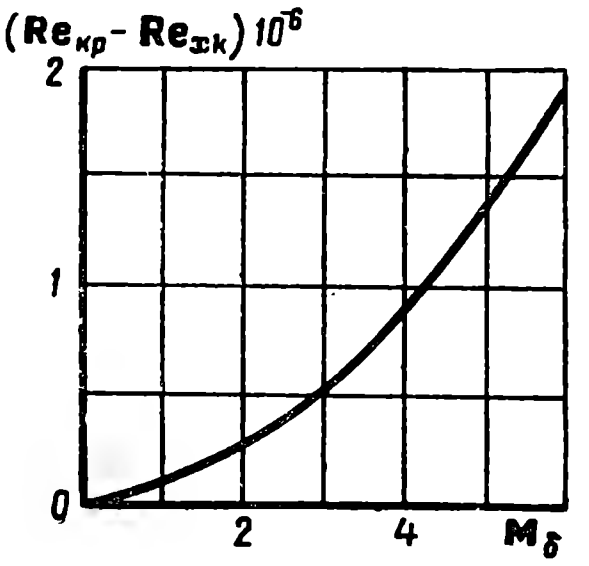


Рис. 7.1.22. Расстояние между точкой перехода и турбулизатором в зависимости от числа Маха (конус и пластинка)

точки перехода вперед до тех пор, пока она не достигнет минимального расстояния от элемента шероховатости, при котором последний считается эффективным.

Это минимальное расстояние между точкой перехода и положением турбулизирующего элемента зависит от числа M_δ и увеличивается с ростом этого числа. На рис. 7.1.22 приведена зависимость для разности $Re_{кр}-Re_{xk}$ (где $Re_{кр}=V_\delta x_{кр}/\nu_\delta$; $Re_{xk}=V_\delta x_k/\nu_\delta$) от числа Маха, полученная при обтекании плоских пластин и конусов со сферическими элементами шероховатости.

В турбулентном пограничном слое шероховатость не приводит к увеличению сопротивления в случае, если высота элементов шероховатости меньше толщины ламинарного подслоя. Приближенно величина допустимой шероховатости k для пластинки может быть определена из соотношения

$$V_\infty k/\nu_\infty = 100. \qquad (7.1.24)$$

Расчеты и экспериментальные данные показывают, что критическая высота шероховатости, вызывающая переход ламинарного течения в турбулентное, значительно больше (примерно в 10 раз при малых скоростях), чем допустимая высота шероховатости при турбулентном пограничном слое.

Остановимся на исследовании влияния элементов шероховатости на переход течения в пограничном слое. Обычно при таких исследованиях эти элементы той или иной формы (сферические, цилиндрические и т. п.) равномерно располагают на кольцевых (для тел вращения) или плос-

ких полосках и укрепляют на поверхности тела в заданном сечении с помощью, например, эпоксидного клея. При этом толщина указанных полос должна быть такой, чтобы они не оказывали влияния на переход пограничного слоя. Например, при числе $M_\delta = 2{,}7$ допустимая толщина такой полосы примерно равна 0,05 *мм* [49], причем с увеличением M_δ она несколько возрастает.

Высота элементов шероховатости определяется микрометром. Следует обратить внимание на тщательность обработки обтекаемой поверхности особенно в носовой части, где пограничный слой наиболее тонок.

Затем препарированная модель устанавливается в рабочей части аэродинамической трубы и каким-либо способом определяется положение точки перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный. В частности, при сверхзвуковых скоростях целесообразно такое определение вести либо путем измерения теплового потока (для этой цели на поверхности модели размещают термопары), либо используя оптические приборы, позволяющие фотографировать пограничный слой и различные его участки.

Изменяя размеры и форму элементов шероховатости, а также их расположение на обтекаемой поверхности и определяя каждый раз критическое число Рейнольдса, можно путем сравнения этого числа с соответствующим значением для гладкой поверхности установить степень влияния шероховатости и оценить эффективность турбулизатора.

При малых скоростях (несжимаемая жидкость) высота изолированного элемента шероховатости цилиндрической формы, при которой еще не сказывается влияние этой шероховатости на переход, может быть определена из соотношения

$$V_* k/\nu_\delta = 7, \tag{7.1.25}$$

где k — высота элемента шероховатости; $V_* = \sqrt{\tau_{ст k}/\rho}$ — динамическая скорость, определяемая по величине касательного напряжения на стенке ($\tau_{ст k}$) в месте расположения этого элемента.

Высота элемента шероховатости, при которой переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный происходит непосредственно около этого элемента, определяется из соотношения

$$V_* k/\nu_\delta = 15 \div 20. \tag{7.1.26}$$

При сверхзвуковых скоростях число $\mathbf{Re}_k = V_\delta k/\nu_\delta$ является функцией $\mathbf{M}_\delta$, k, $\mathbf{Re}_{xk} = V_\delta x_k/\nu_\delta$ и соответствует минимальному критическому числу Рейнольдса на адиабатической стенке:

для конусов

$$\mathbf{Re}_k = 32{,}8\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\delta^2\right)\mathbf{Re}_{xk}^{1/4}; \tag{7.1.27}$$

для плоских пластинок

$$\mathbf{Re}_k = 43{,}2\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\delta^2\right)\mathbf{Re}_{xk}^{1/4}. \tag{7.1.28}$$

В соответствии с зависимостью (7.1.27) можно также записать

$$\frac{x_k}{k} = \frac{\mathbf{Re}_{xk}^{3/4}}{32{,}8\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\delta^2\right)}. \tag{7.1.29}$$

Соотношения (7.1.27) ÷ (7.1.29) устанавливают эффективные размеры шероховатости, при которой число Рейнольдса перехода (критическое число) оказывается минимальным.

Можно рекомендовать следующую методику определения размеров элементов шероховатости и их положения на обтекаемой поверхности

для обеспечения перехода пограничного слоя в заданной точке поверхности. Выбирают в зависимости от поставленной задачи положение точки перехода $x_{кр}$ и соответствующее число $\mathbf{Re}_{кр} = V_\delta x_{кр}/\nu_\delta$ (при этом параметры невязкого потока V_δ, ρ_δ предполагаются известными). Затем по графику (см. рис. 7.1.22) находят величину разности $\mathbf{Re}_{кр} - \mathbf{Re}_{xk}$ как функцию числа $\mathbf{M}_\delta$ и вычисляют $\mathbf{Re}_{xk}$, а используя зависимости (7.1.27), (7.1.28), определяют $\mathbf{Re}_k$. По найденным значениям чисел $\mathbf{Re}_{xk}$ и $\mathbf{Re}_k$ вычисляют соответствующую координату турбулизатора и размер элемента шероховатости.

Порядок проведения работы

1. Изготовить турбулизатор, для чего отшлифовать отдельные элементы шероховатости (например стальные шарики) до получения заданных номинальных размеров; равномерно расположить их на стальной ленте (плоской или кольцевой) и залить эпоксидным клеем, после чего вновь отшлифовать. Толщина стальной ленты при этом должна быть достаточно малой, чтобы не оказывать влияния на переход пограничного слоя.

2. С помощью микрометра измерить высоту отдельных элементов шероховатости.

3. Ознакомиться с аэродинамической установкой, регистрирующей аппаратурой и проверить их готовность к работе.

4. Проверить соединение приемника статического давления в рабочей части трубы с манометром (ГРМ).

5. Снять начальные показания манометра, предназначенного для определения p_∞, а также измерить атмосферное давление.

6. Установить в рабочей части аэродинамической трубы на донной державке исследуемую модель с тщательно обработанной поверхностью.

7. Осуществить пуск аэродинамической трубы и после выхода ее на установившийся режим движения воздуха снять показания манометров, измеряющих статическое давление p_∞ и давление торможения в форкамере p_0, измерить температуру в форкамере T_0, а также произвести фотографирование картины обтекания модели теневым прибором.

8. Выключить аэродинамическую трубу, укрепить изготовленный турбулизатор на исследуемой поверхности в сечении с координатой x_k, отсчитываемой от передней кромки тела.

9. Вновь осуществить пуск аэродинамической трубы и после выхода ее на установившийся режим работы произвести фотографирование обтекания модели.

10. По измеренным значениям давления торможения в форкамере p_0 и статического давления p_∞ найти число $\mathbf{M}_\infty$ в рабочей части аэродинамической трубы, а затем, используя найденную при помощи датчика температуру торможения T_0, рассчитать все остальные параметры потока.

11. По полученным теневым снимкам определить положение точки перехода пограничного слоя для гладкой стенки и поверхности с турбулизатором.

12. По известным параметрам свободного потока (на внешней границе пограничного слоя) и координате $x_{кр}$ перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный подсчитать критические числа Рейнольдса для гладкой и шероховатой поверхностей (соответственно $\mathbf{Re}_{кр.г}$ и $\mathbf{Re}_{кр}$).

Пример. Рассмотрим результаты экспериментального исследования влияния сферических элементов шероховатости на обтекание теплоизолированной поверхности конуса сверхзвуковым потоком. Исследуемая модель была изготовлена в виде заостренного ко-

нического тела с полууглом при вершине $\beta_k = 5°$ и длиной образующей 500 *мм*. Чистота поверхности конуса (после полировки) соответствовала среднеквадратичному отклонению микронеровностей менее 0,25 *мкм*. Турбулизатор представлял собой стальную ленту толщиной примерно 0,05 *мм*, на поверхности которой с помощью эпоксидного клея были укреплены стальные шарики на расстоянии друг от друга примерно 1,5 *мм*. При этом средняя высота элементов шероховатости, измеренная микрометром, $k = 0{,}198$ *мм*.

Перед пуском аэродинамической трубы было измерено барометрическое давление $p_{атм} = 740$ *мм рт. ст.* (10060 *кГ/м²*). Одновременно были сняты начальные показания в канале ГРМ $N_0 = 1{,}4$ для измерения статического давления p_∞. После установки гладкой модели конуса в рабочей части, включения трубы и выхода ее на установившийся режим работы были сняты показания манометра $N = 191{,}4$ статического давления, измерено давление в форкамере $p_0 = 1{,}53$ *кГ/см²*, а также температура $T_0 = 300$ К. Одновременно была сфотографирована картина обтекания модели теневым прибором.

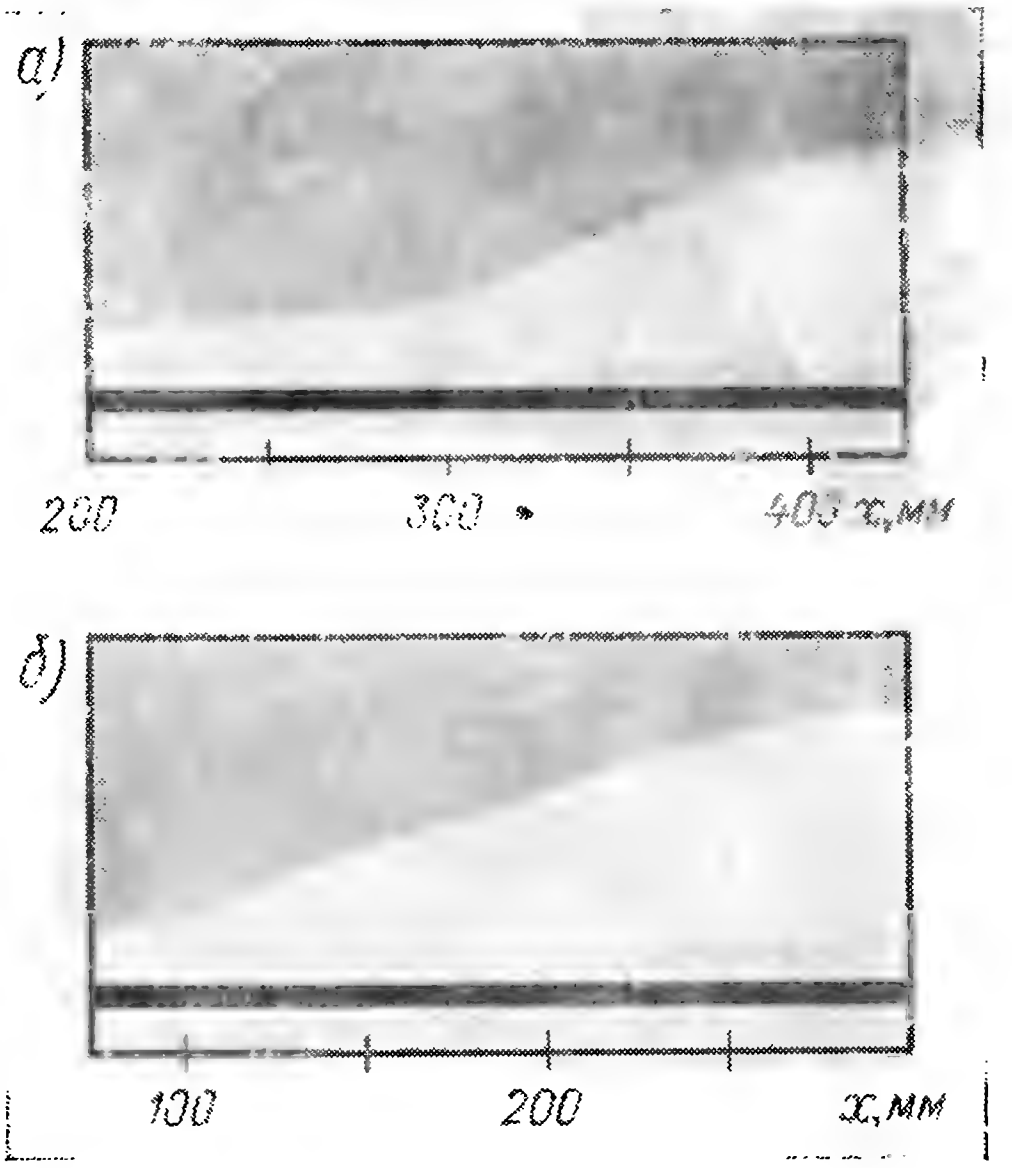


Рис. 7.1.23. Теневые фотографии обтекания модели:

а — гладкая поверхность; *б* — шероховатая поверхность

В соответствии с полученными данными и с учетом того, что коэффициент трубки $\xi_т = 1{,}0$, а коэффициент шкалы ГРМ $K = 0{,}005$, были определены параметры потока в рабочей части:

$$p_\infty = p_{атм} - \xi_т K (N - N_0) = 10060 - 1 \cdot 0{,}005\,(191{,}4 - 1{,}4)\,10^4 = 564 \ кГ/м^2;$$

$$M_\infty = \left\{\frac{2}{k-1}\left[\left(\frac{p_0}{p_\infty}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right]\right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{\frac{2}{1{,}4-1}\left[\left(\frac{1{,}53\cdot 10^4}{564}\right)^{\frac{1{,}4-1}{1{,}4}} - 1\right]\right\}^{\frac{1}{2}} = 2{,}8;$$

$$T_\infty = T_0\left(1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2\right)^{-1} = 300\left(1 + \frac{1{,}4-1}{2}\,2{,}8^2\right)^{-1} = 117 \text{K};$$

$$a_\infty = \sqrt{kRT_\infty} = \sqrt{1{,}4 \cdot 287 \cdot 117} \approx 218 \ м/сек;$$

$$V_\infty = M_\infty a_\infty = 2{,}8 \cdot 218 \approx 610 \ м/сек;$$

$$\rho_\infty = p_\infty/(RT_\infty) = 564/(287 \cdot 117) = 1{,}68 \cdot 10^{-2} \ кГ \cdot сек^2/м^4.$$

Параметры на внешней границе пограничного слоя определялись по найденным параметрам невозмущенного потока с помощью таблиц и графиков [17]:

$$M_k = M_\delta = 2{,}7; \quad \rho_k = \rho_\delta = 1{,}86 \cdot 10^{-2} \ кГ \cdot сек^2/м^4;$$

$$T_k = T_\delta = 123 \text{ K}; \quad p_k = p_\delta = 659 \ кГ/м^2;$$

$$V_k = V_\delta = 602 \ м/сек; \quad a_k = a_\delta = 223 \ м/сек.$$

Коэффициент динамической вязкости подсчитывался по формуле (7.1.19):

$$\mu_\delta = \mu_0 \left(T_\delta/T_0\right)^{0{,}76} = 1{,}83 \cdot 10^{-6}\,(123/293)^{0{,}76} = 0{,}954 \cdot 10^{-6} \ кГ \cdot сек/м^2.$$

Соответствующий коэффициент кинематической вязкости

$$\nu_\delta = \mu_\delta / \rho_\delta = 0{,}954 \cdot 10^{-6}/(1{,}86 \cdot 10^{-2}) = 0{,}513 \cdot 10^{-4} \ м^2/сек.$$

По полученным теневым фотографиям обтекания гладкой поверхности (рис. 7.1.23, *а*) была определена координата точки перехода $x_{кр} = 305$ *мм*. Следовательно, критическое число Рейнольдса для такой поверхности конуса

$$Re_{кр.г} = V_\delta x_{кр}/\nu_\delta = 602 \cdot 0{,}305/\left(0{,}513 \cdot 10^{-4}\right) = 3{,}58 \cdot 10^6.$$

Исследования влияния шероховатости проводились на модели конуса с установленным на расстоянии $x_k = 73$ *мм* от носка турбулизатором. Из полученных теневых сним-

ков (см. рис. 7.1.23, *б*) была определена координата точки перехода $x_{кр}=102$ *мм*. В соответствии с этим значением критическое число Рейнольдса для шероховатой поверхности

$$\mathbf{Re}_{кр}=602\cdot 0{,}102/\left(0{,}513\cdot 10^{-4}\right)=1{,}20\cdot 10^{6}.$$

Отношение найденных критических чисел Рейнольдса для гладкой и шероховатой поверхностей $\mathbf{Re}_{кр.г}/\mathbf{Re}_{кр}\approx 3$. Таким образом, используемая в эксперименте шероховатость вызывает переход пограничного слоя на расстоянии от носка, втрое меньшем, чем на гладкой стенке.

Сравним полученные опытные результаты с некоторыми данными, известными из литературных источников. Число Рейнольдса, подсчитанное по параметрам на внешней границе пограничного слоя и по координате x_k,

$$\mathbf{Re}_{xk}=V_{\delta}\,x_k/\nu_{\delta}=602\cdot 0{,}073/\left(0{,}513\cdot 10^{-4}\right)=0{,}86\cdot 10^{6}.$$

Следовательно, разность

$$\mathbf{Re}_{кр}-\mathbf{Re}_{xk}=1{,}20\cdot 10^{6}-0{,}86\cdot 10^{6}\approx 0{,}34\cdot 10^{6}.$$

Эта величина удовлетворительно согласуется с результатами, приведенными на рис. 7.1.22, и одновременно служит подтверждением того, что выбранная высота элементов шероховатости близка к эффективной.

Найдем значение этой эффективной высоты. Для этого вычислим число Рейнольдса по значению $k=0{,}198$ *мм*:

$$\mathbf{Re}_{k}=V_{\delta}\,k/\nu_{\delta}=602\cdot 0{,}198\cdot 10^{-3}/\left(0{,}513\cdot 10^{-4}\right)=2330.$$

Согласно (7.1.27) число $\mathbf{Re}_k$, соответствующее эффективной шероховатости,

$$\mathbf{Re}_{k}=32{,}8\left(1+\frac{1{,}4-1}{2}\,2{,}7^{2}\right)(0{,}86\cdot 10^{6})^{1/4}=2460.$$

Таким образом, эффективная высота шероховатости

$$k=\mathbf{Re}_{k}\,\nu_{\delta}\,/V_{\delta}=2460\cdot 0{,}513\cdot 10^{-4}/602=0{,}208\cdot 10^{-3}\ м.$$

Работа 7.1.5

Весовые измерения силы трения

Цель работы — непосредственное измерение аэродинамического сопротивления, обусловленного трением, и определение местного коэффициента трения для турбулентного пограничного слоя.

Общие сведения

При исследовании обтекания тел вязким потоком газа большое практическое значение приобрели методы непосредственного измерения силы сопротивления трения. К числу их относится метод обращенного движения [18], согласно которому небольшой участок поверхности тела («плавающий элемент») закрепляется на весовом устройстве и в результате продувки в аэродинамической трубе определяется соответствующая сила трения.

На рис. 7.1.24 показан общий вид экспериментальной модели с «плавающим элементом», предназначенной для измерения трения при обтекании непроницаемой поверхности плоской пластинки. «Плавающий элемент» *4* размещается в прямоугольном пазу такой пластинки *1*. При этом зазор между ними должен быть достаточно малым в целях устранения градиента давления на его острых кромках. Согласно экспериментальным данным величина этого зазора не должна превышать 0,03÷0,08 *мм*. Кроме того, верхние поверхности пластинки и «плавающего элемента» должны притираться совместно в собранном виде с тем, чтобы устранить возможный сдвиг этих поверхностей в вертикальном направлении. Такой сдвиг оказывает неблагоприятное влияние на результаты экспериментальных исследований. Например, установлено, что коэффициент сопротивления трения уменьшается примерно на 20%

в случае, если поверхность «плавающего элемента» расположена ниже на 0,05 *мм* относительно пластинки, и возрастает на ту же величину, если этот элемент поднят примерно на 0,03 *мм*. В первом случае возникает отрицательный градиент давления, способствующий снижению трения, во втором к собственно поверхностному трению добавляются сила от давления и донное сопротивление. Таким образом, максимальные выступы сопрягаемых деталей не должны превышать долей микрона.

Подвижная система помимо «плавающего элемента» включает в себя стойку *5*, ось *7*, два упругих элемента *3*, *6*, поддерживающих ось *7*, керамический электрод *2* и катушку *8* с выводами. Основной упругий

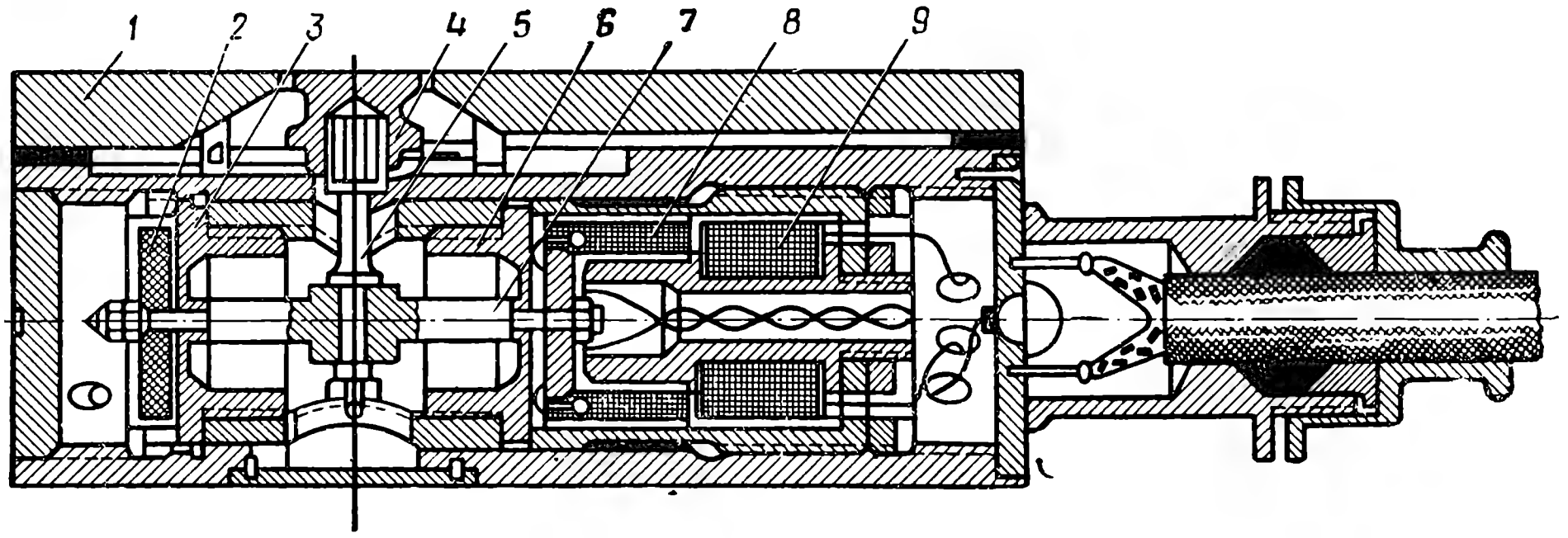


Рис. 7.1.24. Конструктивная схема «плавающего элемента», предназначенного для непосредственного измерения силы трения

элемент *3* выполнен в виде консольной балки, к свободному концу которой прикладывается измеряемое усилие; второй упругий элемент является поддерживающим и должен обладать большой «податливостью» в осевом направлении. Тарировку «плавающего элемента» тангенциальной силой производят до установки исследуемой модели в рабочей части аэродинамической трубы. При этом при перемещении электрода, соединенного с «плавающим элементом» посредством упругой консольной балки, изменяется межэлектродное пространство и емкость системы, что регистрируется соответствующим прибором. Кроме того, в конструкции устройства предусмотрены подвижная катушка *8* и узел подмагничивания *9*, позволяющие заменить внешнюю тангенциальную силу электромагнитной и производить в случае необходимости тарировку «плавающего элемента» модели, установленной в аэродинамической трубе.

В процессе эксперимента регистрируют показания, например миллиамперметра, пропорциональные перемещению упругого элемента (т. е. тангенциальной силе поверхностного трения), и, используя тарировочный график, определяют силу трения X_f. Соответствующая этой силе средняя на рассматриваемом участке поверхности величина напряжения трения $\tau_{ст} = X_f/S$, а местный коэффициент трения

$$c_{fx} = \frac{X_f}{q_\infty S} = \frac{X_f}{(k/2)\, p_\infty\, M_\infty^2\, S},$$

где $q_\infty = \rho_\infty V_\infty^2/2$ — скоростной напор набегающего потока; S — площадь поверхности «плавающего элемента».

В соответствии с теоретическими и экспериментальными исследованиями определение коэффициента турбулентного трения плоской пластинки, обтекаемой несжимаемым потоком, можно вести по следующим зависимостям, каждая из которых применяется для соответствующего диапазона чисел Рейнольдса:

$$c_{fx} = 0{,}028\mathbf{Re}_x^{-0,15} \quad (5\cdot 10^5 < \mathbf{Re}_x < 5\cdot 10^8);$$

$$c_{fx} = 0{,}016\mathbf{Re}_x^{-0,12} \quad (10^8 < \mathbf{Re}_x < 10^9);$$

$$c_{fx} = 0{,}011\mathbf{Re}_x^{-0,10} \quad (10^9 < \mathbf{Re}_x < 10^{10}).$$

Числа Рейнольдса в этих зависимостях $\mathbf{Re}_x = V_\infty \rho_\infty x/\mu_\infty$ вычисляются по параметрам набегающего потока (V_∞, ρ_∞, μ_∞) и расстоянию от

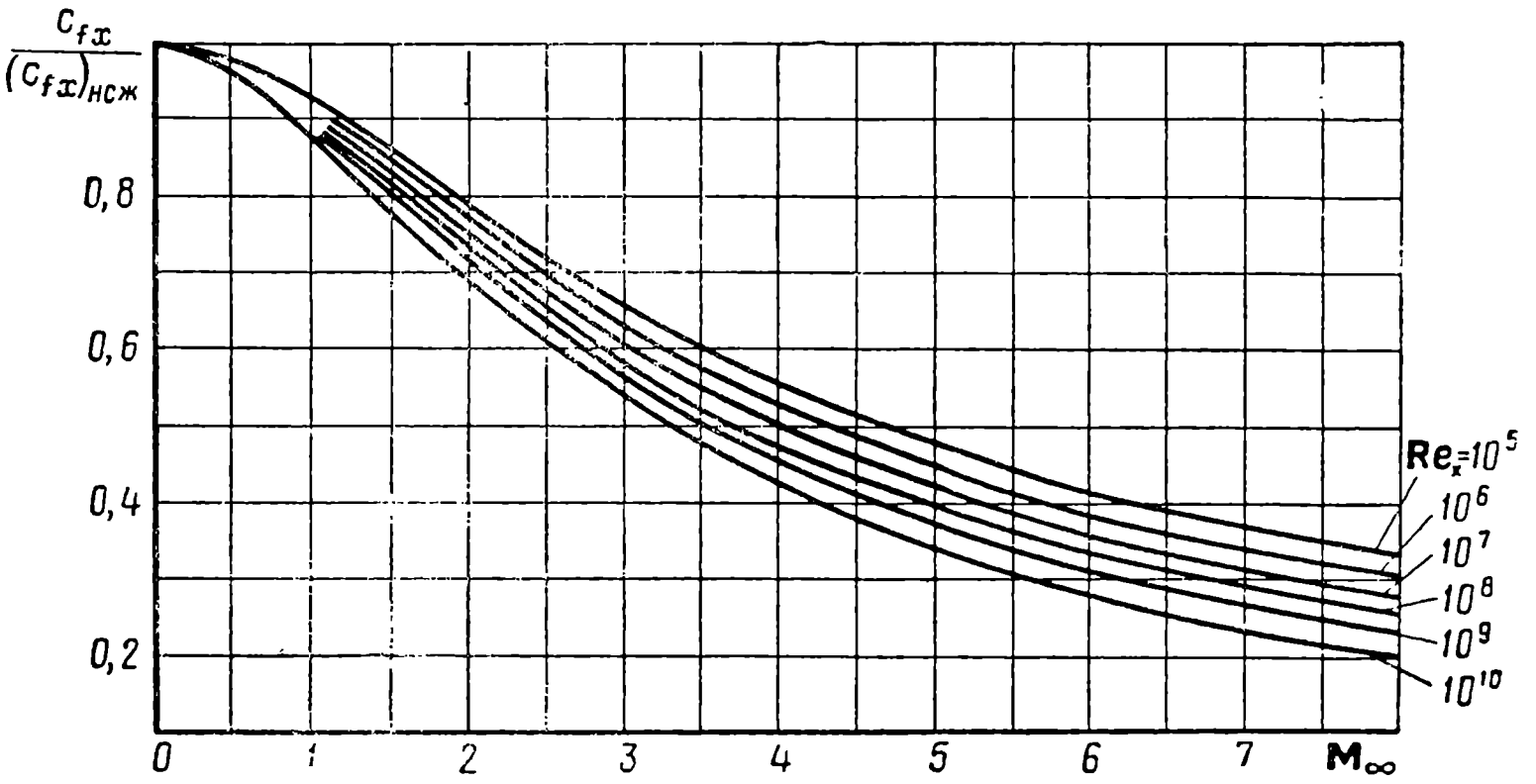


Рис. 7.1.25. Отношение $c_{fx}/(c_{fx})_{нсж}$ в зависимости от чисел Маха и Рейнольдса

передней кромки пластинки до «плавающего элемента». Для учета влияния сжимаемости следует воспользоваться формулой

$$c_{fx}/(c_{fx})_{нсж} = (1 + 0{,}18\mathbf{M}_\infty^2)^{-1/2} \qquad (7.1.30)$$

либо данными, приведенными на рис. 7.1.25.

Порядок проведения работы

1. Ознакомиться со схемой экспериментальной установки, устройством модели, регистрирующей аппаратурой и проверить их готовность к работе.
2. Установить сопловые вкладыши в рабочую часть сверхзвуковой аэродинамической трубы, соответствующие выбранному числу Маха.
3. Закрепить исследуемую модель на державке и установить ее в рабочей части таким образом, чтобы плоская поверхность была расположена параллельно потоку.
4. Произвести тарировку «плавающего элемента» тангенциальной силой и построить соответствующий тарировочный график.
5. Проверить соединение приемника статического давления в рабочей части трубы с манометром (ГРМ).
6. Снять начальные показания манометра, предназначенного для определения p_∞, а также регистрирующего прибора (например миллиамперметра), и измерить атмосферное давление $p_{атм}$.
7. Включить аэродинамическую трубу и после выхода ее на режим установившегося движения воздуха осуществить измерения манометром статического давления, а также снять показания регистрирующего прибора (миллиамперметра), пропорциональные силе трения; определить давление и температуру в форкамере (p_0 и T_0).
8. По измеренным значениям p_∞ и p_0 определить число $\mathbf{M}_\infty$ в рабочей части.
9. По значениям T_0 и $\mathbf{M}_\infty$ найти параметры набегающего потока (T_∞, ρ_∞, V_∞).

10. Используя тарировочный график, определить по показанию милливамперметра силу трения X_f.

11. Найти по величине этой силы и параметрам набегающего потока, а также известной площади стенки «плавающего элемента» коэффициент трения c_{fx}.

Пример. Рассмотрим данные исследований трения на плоской непроницаемой пластинке с помощью экспериментальной установки, схема которой приведена на рис. 7.1.26. «Плавающий элемент», имеющий форму прямоугольника с размерами 12×35 *мм*, расположен на расстоянии 450 *мм* от передней кромки пластинки. Стенки элемента и пластинки теплоизолированы от остальной конструкции. Давление в форкамере сверхзвуковой трубы определялось с помощью обычного механического манометра ($p_0=6$ *кГ/см²*), а температура была измерена электротермометром сопротивления ($T_0=288$ К). Для измерения статического давления на стенке рабочей части трубы использовался групповой регистрирующий манометр с коэффициентом шкалы $K=0{,}005$.

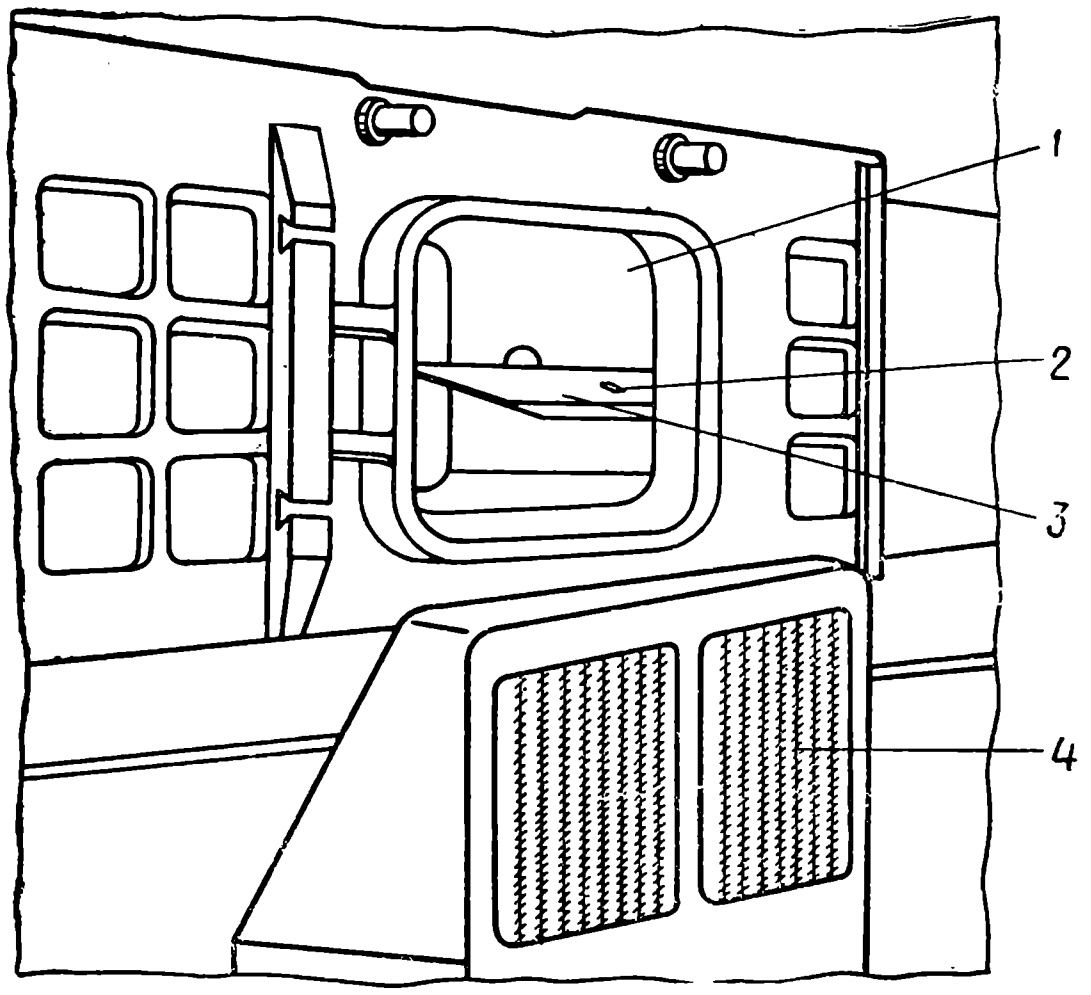


Рис. 7.1.26. Общий вид экспериментальной установки:

1 — рабочая часть; *2* — плавающий элемент; *3* — плоская пластинка; *4* — ГРМ

Перед пуском этой трубы измерялось барометрическое давление ($p_{атм}=740$ *мм рт. ст.*), а также осуществлялась тарировка «плавающего элемента» (рис. 7.1.27). Начальные показания ГРМ (в канале статического давления), а также показание милливамперметра соответственно были равны $N_0=1{,}7$ и $n_0=10$. После включения трубы и выхода ее на установившийся режим с манометра статического давления было снято показание $N=140$. В соответствии с этим

$$p_\infty = p_{атм} - \xi_т K(N-N_0) =$$
$$= 10060 - 1\cdot 0{,}005(140-1{,}7)\,10^4 =$$
$$= 3150 \text{ кГ/м}^2.$$

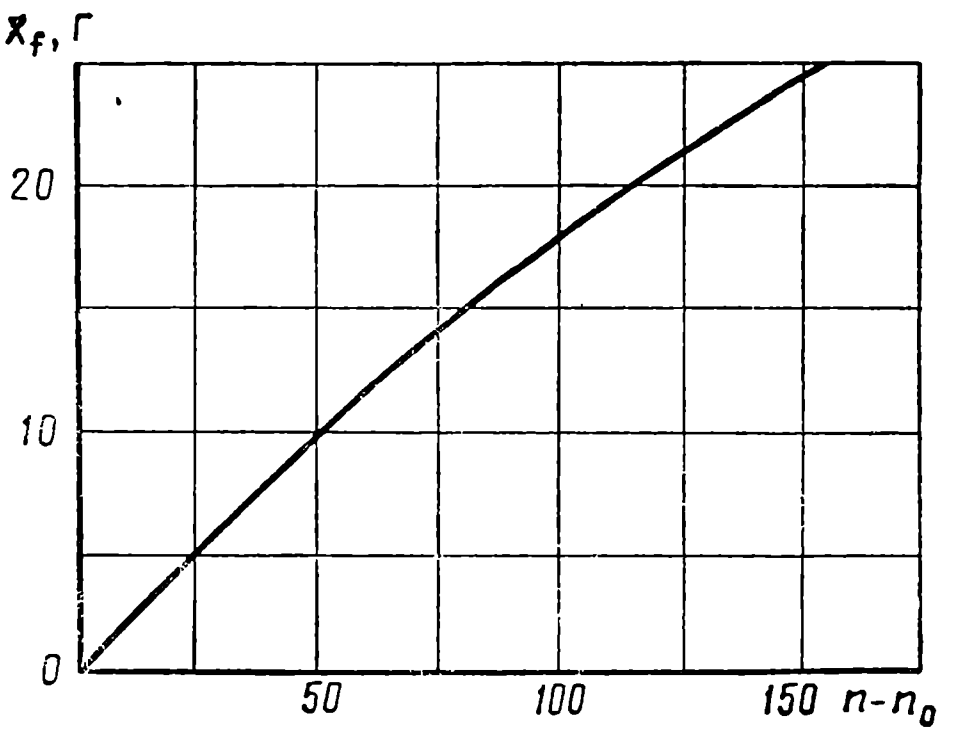


Рис. 7.1.27. Тарировочный график плавающего элемента

Так как давление в форкамере $p_0=6\cdot 10^4$ *кГ/м²*, то число Маха в рабочей части трубы

$$M_\infty = \left\{\frac{2}{k-1}\left[\left(\frac{p_0}{p_\infty}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right]\right\}^{1/2} = \left\{\frac{2}{1{,}4-1}\left[\left(\frac{6\cdot 10^4}{3150}\right)^{\frac{1{,}4-1}{1{,}4}} - 1\right]\right\}^{1/2} = 2{,}57.$$

Остальные параметры потока были следующими:

$$T_\infty = T_0\left(1+\frac{k-1}{2}M_\infty^2\right)^{-1} = 288\left(1+\frac{1{,}4-1}{2}2{,}57^2\right)^{-1} = 124 \text{ К};$$

$$V_\infty = M_\infty a_\infty = 2{,}57\sqrt{1{,}4\cdot 287\cdot 124} = 575 \text{ м/сек};$$

$$\rho_\infty = p_\infty/(RT_\infty) = 3150/(287\cdot 124) = 0{,}0882 \text{ кГ}\cdot\text{сек}^2/\text{м}^4.$$

Соответствующий коэффициент динамической вязкости

$$\mu_\infty = \mu_0\left(T_\infty/T_0\right)^{0{,}76} = 1{,}82\cdot 10^{-6}\,(124/288)^{0{,}76} = 0{,}97\cdot 10^{-6} \text{ кГ}\cdot\text{сек/м}^2.$$

По показанию миллиамперметра $n=52$ из тарировочного графика (см. рис. 7.1.27) по величине $n-n_0=42$ находим силу трения $X_f=8{,}75$ Г. Зная поверхность «плавающего элемента» $S=4{,}2\cdot10^{-4}$ $м^2$, определяем соответствующее этой силе напряжение трения

$$\tau_{ст}=X_f/S=8{,}75\cdot10^{-3}/(4{,}2\cdot10^{-4})=20{,}8\ кГ/м^2$$

и аэродинамический коэффициент

$$c_{fx}=\frac{X_f}{q_\infty S}=\frac{X_f}{(k/2)\,p_\infty \mathbf{M}_\infty^2 S}=\frac{8{,}75\cdot10^{-3}}{(1{,}4/2)\,3150\cdot2{,}57^2\cdot4{,}2\cdot10^{-4}}=1{,}43\cdot10^{-3}$$

Сравним полученные результаты с данными, которые получаются по соответствующим методам аэродинамического расчета. Для этого установим характер пограничного слоя на пластинке. Приняв критическое число Рейнольдса $\mathbf{Re}_{кр}=2\cdot10^6$, найдем координату точки перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный:

$$x_{кр}=\frac{\mathbf{Re}_{кр}\,\mu_\delta}{V_\delta\,\rho_\delta}=\frac{2\cdot10^6\cdot0{,}97\cdot10^{-6}}{575\cdot0{,}0882}\approx0{,}038\ м.$$

Так как эта длина очень мала, то практически можно считать, что в рассматриваемом случае на исследуемой пластинке имеется только турбулентный пограничный слой, начинающийся с ее передней кромки.

Ввиду того что расстояние от передней кромки до «плавающего элемента» 0,45 $м$, соответствующее число Рейнольдса

$$\mathbf{Re}_x=\frac{V_\delta\,x\rho_\delta}{\mu_\delta}=\frac{575\cdot0{,}45\cdot0{,}0882}{0{,}97\cdot10^{-6}}=2{,}36\cdot10^7,$$

а местный коэффициент трения в несжимаемом потоке

$$\left(c_{fx}\right)_{нсж}=0{,}028\,\mathbf{Re}_x^{-0{,}15}=0{,}028\left(2{,}36\cdot10^7\right)^{-0{,}15}=2{,}19\cdot10^{-3}.$$

Влияние сжимаемости на коэффициент трения можно учесть, используя зависимость

$$c_{fx}/(c_{fx})'_{нсж}=\left(1+0{,}18\mathbf{M}_\infty^2\right)^{-\frac{1}{2}}=(1+0{,}18\cdot2{,}57^2)^{-\frac{1}{2}}=0{,}675.$$

Следовательно, $c_{fx}=0{,}675\ (c_{fx})_{нсж}=0{,}675\cdot2{,}19\cdot10^{-3}=1{,}48\cdot10^{-3}$, что удовлетворительно согласуется с полученными экспериментальными результатами и имеющимися данными для теплоизолированной пластинки при $\mathbf{M}_\infty=2{,}57$ (см. рис. 7.1.25).

РАЗДЕЛ ВТОРОЙ

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ПО АЭРОДИНАМИКЕ

I. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ АЭРОДИНАМИКИ

I.1. Каков характер силового воздействия газообразной среды на движущийся в ней летательный аппарат?

I.2. В чем заключаются характерные особенности ламинарного и турбулентного движений жидкости?

I.3. В чем различие происхождения сил трения в ламинарном и турбулентном потоках?

I.4. Измерения показали, что в рассматриваемом сечении поток около обтекаемой поверхности на некотором удалении от нее турбулентный. Правильно ли утверждение, что таким же будет течение на всем участке этого сечения, включая пристеночную область.

I.5. На рис. 2.I.1 показаны главный вектор $\bar{F}$ и главный вектор момента $\bar{M}$ системы элементарных аэродинамических сил, распределенных на обтекаемой поверхности (центр масс O на рисунке — точка приведения, относительно которой вычислен момент).

Покажите схемы расположения аналогичных векторов $\bar{F}$ и $\bar{M}$ для двух моделей летательных аппаратов, закрепленных в аэродинамических трубах так, как показано на рис. 2.I.2. Места крепления этих моделей совпадают с точками приведения A и B, относительно которых определяется момент.

I.6. На рис. 2.I.3 показан общий случай поворота осей ортогональной системы координат, а также взаимное расположение скоростной и связанной систем координат, применяющихся в аэродинамике.

Для перехода от системы координат x, y, z к системе x_1, y_1, z_1 необходимо знать три угла Эйлера φ, ψ, θ (см. рис. 2.I.3, *а*). В то же время для пересчета аэродинамических сил и моментов, полученных в скоростной системе координат, на соответствующие их значения в связанных осях достаточно иметь известными два угла α и β (угол атаки и угол скольжения; см. рис.2.I.3, *б*). Объясните, почему возможен такой пересчет.

I.7. Дайте определения углов атаки α и скольжения β. В соответствии с этими определениями покажите графически относительное расположение скоростной и связанной систем координат, а также углов α и β в следующих случаях движения летательного аппарата: 1) без скольжения под углом атаки; 2) со скольжением под нулевым углом атаки.

I.8. На рис. 2.I.4 показана наиболее общая схема действующих на летательный аппарат аэродинамических сил и моментов в скоростной (x, y, z) и связанной (x_1, y_1, z_1) системах координат. В соответствии с этой схемой при наличии углов атаки α и скольжения β такими силами

являются лобовое сопротивление X, подъемная сила Y, боковая сила Z (проекции вектора $\bar{F}$ на оси скоростной системы), а моментами — M_x, M_y, M_z (соответственно моменты крена, рыскания и тангажа, являющиеся проекциями момента $\bar{M}$ на те же оси x, y, z).

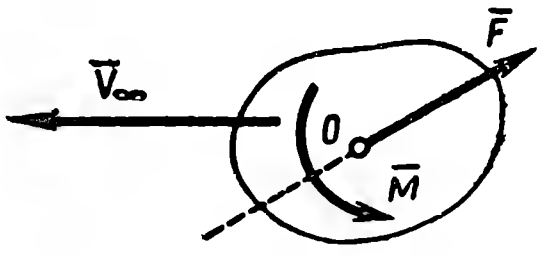


Рис. 2.I.1. Главный вектор и главный момент аэродинамических сил, действующих на тело, движущееся со скоростью $\bar{V}_\infty$

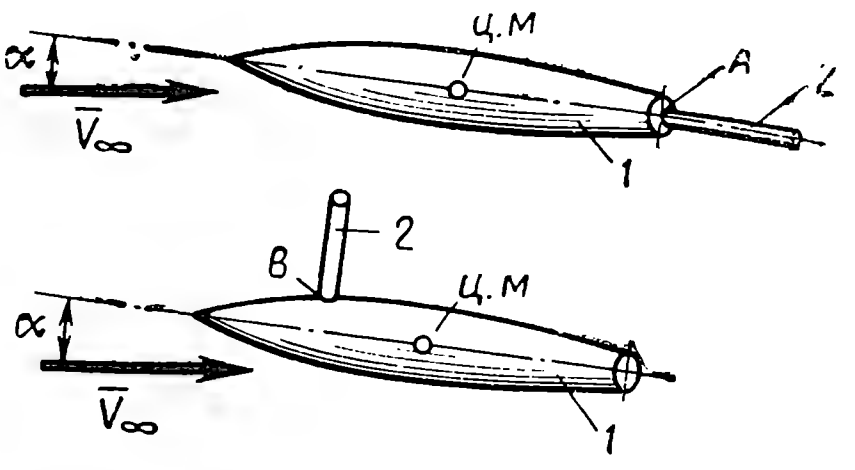


Рис. 2.I.2. Различное закрепление тел вращения *1* на державках *2*

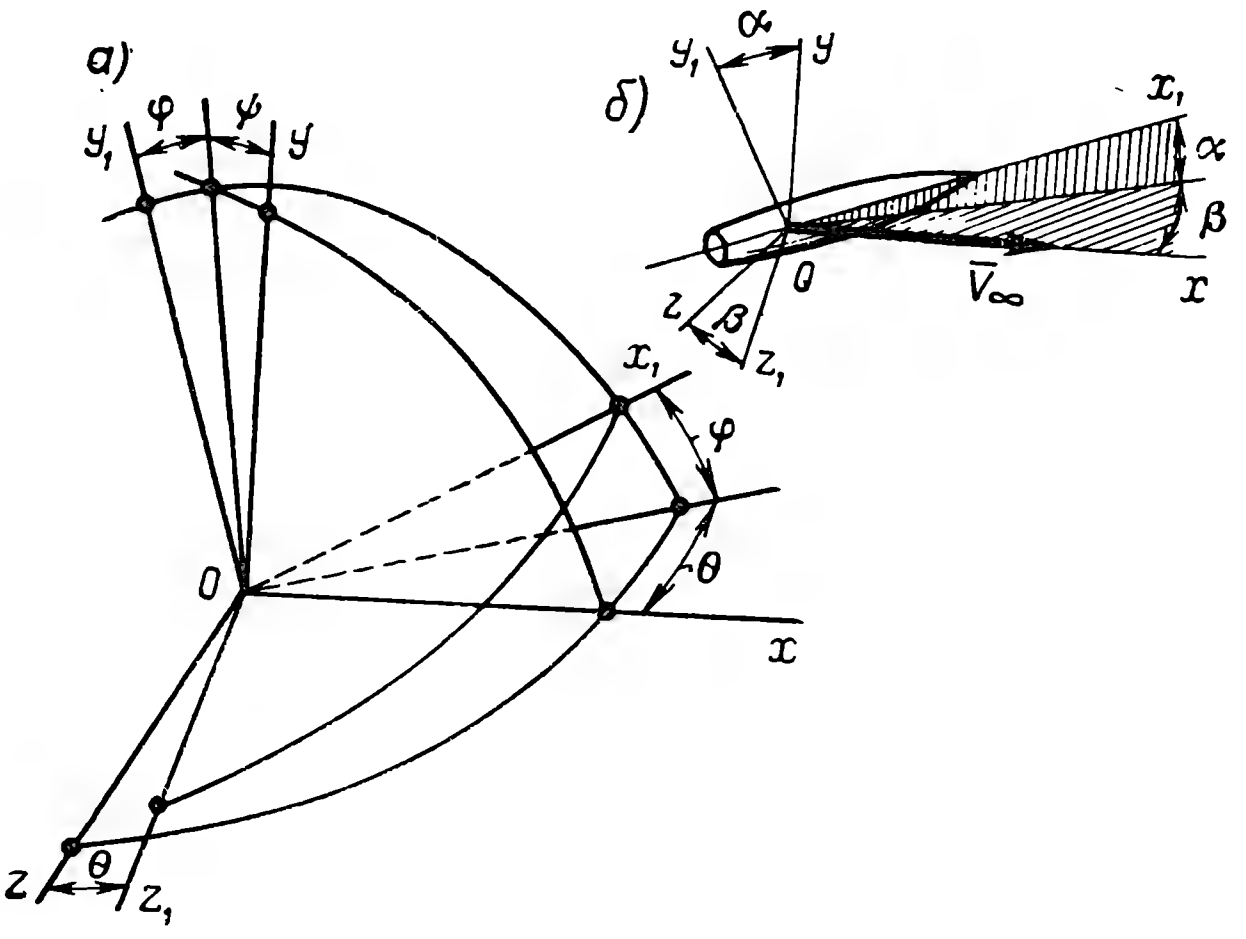


Рис. 2.I.3. Расположение двух ортогональных систем координат:

а — общий случай; *б* — связанная и поточная системы

Если рассмотреть связанные с летательным аппаратом оси, то действующими силами будут $X_1(R)$, $Y_1(N)$, Z_1 — осевая (продольная), нормальная и поперечная силы (проекции вектора $\bar{F}$ соответственно на оси x_1, y_1, z_1), а моментами — M_{x1}, M_{y1}, M_{z1} (моменты крена, рыскания и тангажа), являющиеся проекциями вектора $\bar{M}$ соответственно на те же оси x_1, y_1, z_1. Получите формулы пересчета сил и моментов из связанной системы координат в скоростную и наоборот.

Как будет выглядеть соответствующая схема в случаях движения летательного аппарата, указанных в вопросе I.7, при условии, что конструкция такого аппарата симметрична относительно горизонтальной и вертикальной плоскостей, проходящих через его продольную ось?

I.9. На рис. 2.I.5 изображена схема действующих на тело вращения сил и моментов в связанных (x_1, y_1, z_1) и поточных (x, y, z) координатах. На этом же рисунке указаны углы атаки α и скольжения β. Приведите эквивалентную схему силового воздействия, обусловленную обтеканием того же тела вращения под углом атаки $\alpha'(\beta=0)$, и найдите величину этого угла.

I.10. На рис. 2.I.6 показаны два одинаковых оперенных тела вращения и действующие на них осевые силы R_1 и R_2, возникающие при обтекании этих тел под некоторыми углами атаки. Существование силы R_1 (рис. 2.I.6, *а*) вполне объяснимо; что касается силы R_2 (рис. 2.I.6, *б*), то ее возникновение кажется неправдоподобным, так как она будто бы

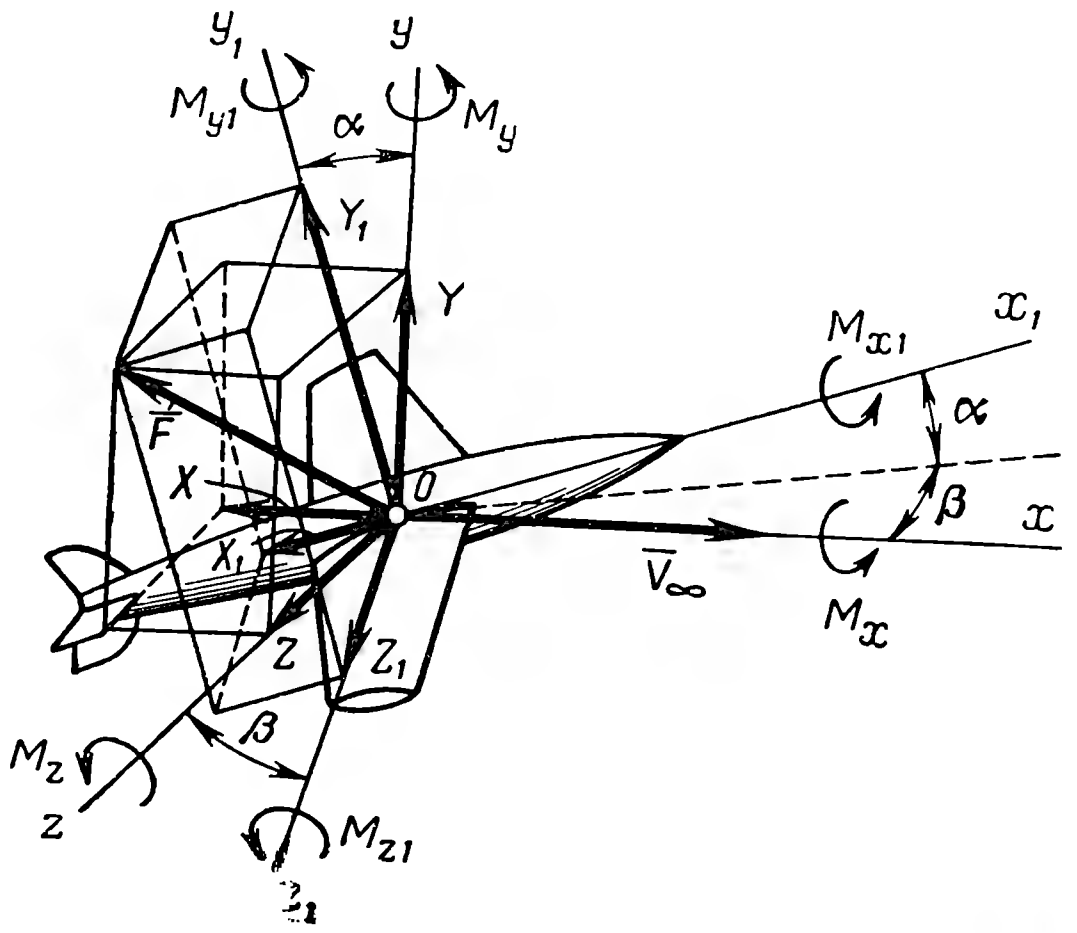


Рис. 2.I.4. Силы и моменты, действующие на летательный аппарат

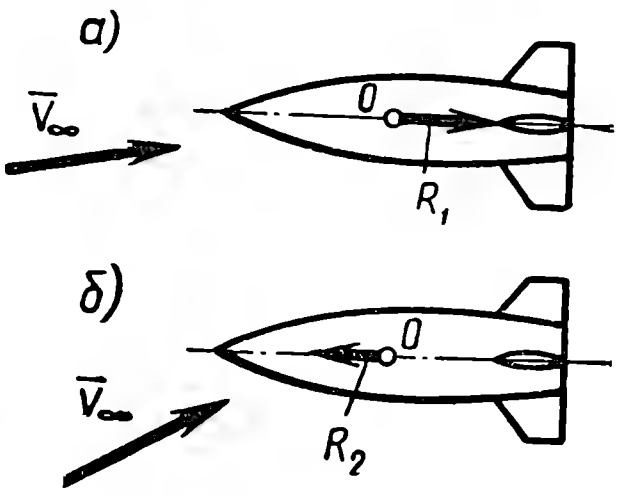


Рис. 2.I.6. Силы, действующие на оперенные тела

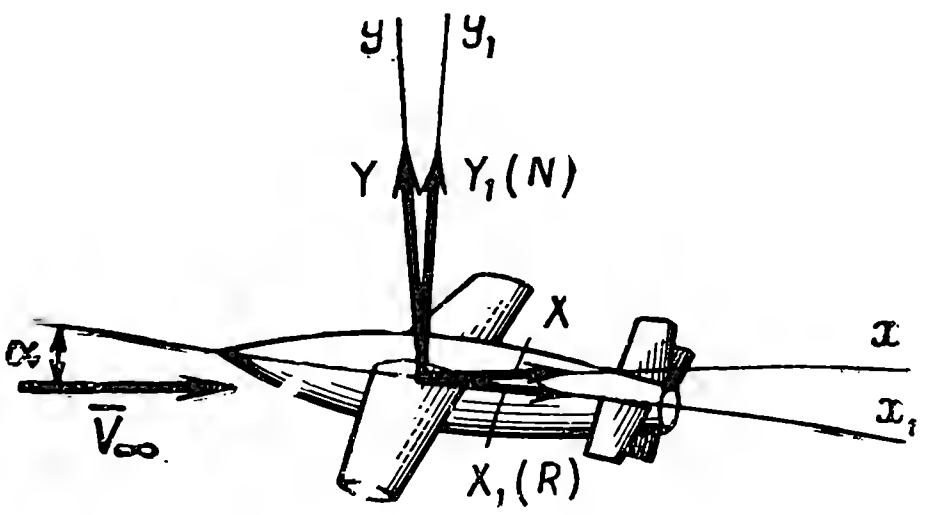


Рис. 2.I.7. Взаимное расположение сил в скоростной и связанной системах координат

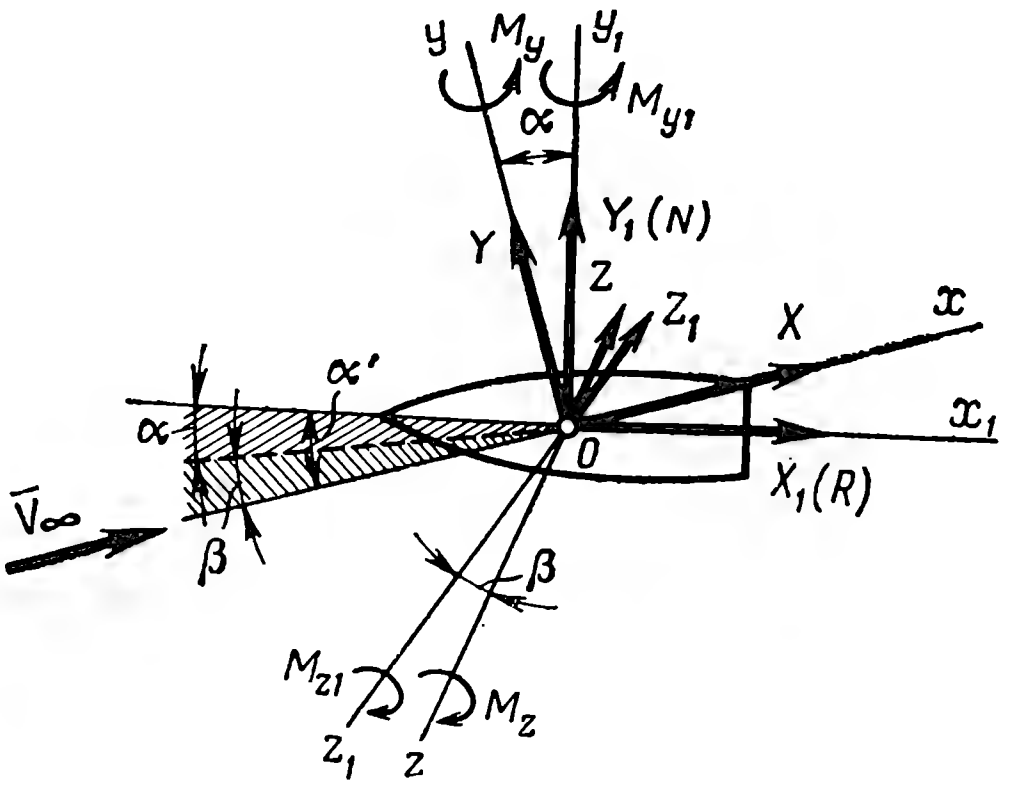


Рис. 2.I.5. Схема для расчета сил и моментов, действующих на тело вращения

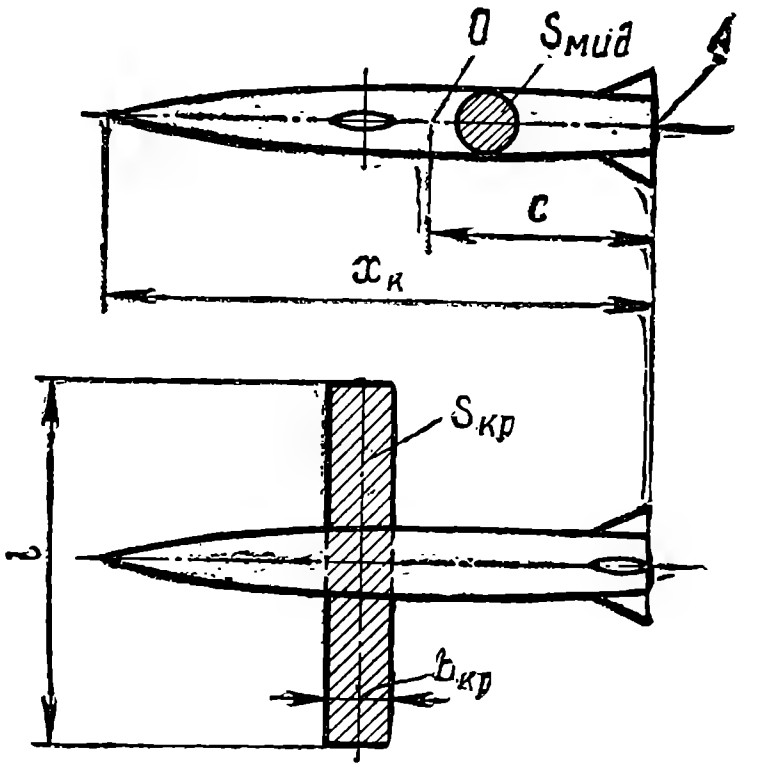


Рис. 2.I.8. Схема летательного аппарата

представляет собой некую подталкивающую силу. В действительности на обтекаемое тело действует сила лобового сопротивления X_2 (или X_1 в первом случае).

Объясните, в чем разница между осевой силой и лобовым сопротивлением, покажите схему силового воздействия при обтекании каждого обтекаемого тела в поточной и связанной системах координат.

I.11. В соответствии со схемой силового воздействия на летательный аппарат (рис. 2.I.7) напишите выражения для подъемной силы Y в зависимости от осевой и нормальной сил (R и N), а для нормальной силы

N — в зависимости от сопротивления и подъемной силы (X и Y). Найдите соотношения, определяющие Y и N как линейные и квадратичные функции угла атаки α.

I.12. Теоретически или экспериментальным путем найдены составляющие главного вектора момента $\overline{M}$ в связанных координатах (M_{x1}, M_{y1}, M_{z1}). Определите по этим составляющим проекции того же вектора в поточной и скоростной системах координат. Рассмотрите при этом частные случаи, характеризующие движение без скольжения, а также движение со скольжением под нулевым углом атаки.

I.13. Один из аэродинамических коэффициентов (c_{x1}) силы лобового сопротивления X рассчитан по площади наибольшего поперечного сечения $S_{мид}$ корпуса, а другой (c_{x2}) — по площади крыла в плане $S_{кр}$. Найдите зависимость между этими коэффициентами.

I.14. В соответствии со схемой на рис. 2.I.8 напишите выражения для коэффициента подъемной силы c_y летательного аппарата в скоростных координатах в функции коэффициентов нормальной c_N и осевой c_R сил в связанных осях координат. При этом учесть, что коэффициенты c_N, c_R рассчитаны соответственно по площадям $S_{кр}$, $S_{мид}$ (см. рис. 2.I.8), а коэффициент c_y должен быть вычислен по значению $S_{кр}$.

I.15. В результате исследований в аэродинамической трубе был измерен момент тангажа M_{zA} относительно поперечной оси, проходящей через точку A в хвостовой части модели (см. рис. 2.I.8). По этой величине момента вычислен аэродинамический коэффициент m_{zA}, рассчитанный по площади $S_{мид}$ и длине модели $x_к$. Зная m_{zA}, требуется найти соответствующую величину коэффициента момента тангажа относительно оси, проходящей через другую точку O, при условии, что этот коэффициент рассчитан по хорде крыла $b_{кр}$ и его площади в плане $S_{кр}$.

I.16. В соответствии со схемой на рис. 2.I.8 напишите выражения для коэффициента момента крена m_x в скоростных координатах через коэффициенты моментов тангажа m_{z1}, рыскания m_{y1} и крена m_{x1} в связанных координатах при условии, что m_x относится к площади крыльев в плане $S_{кр}$ и их размаху l, а коэффициенты в связанных осях — к геометрическим размерам $S_{кр}$, $x_к(m_{z1})$, $S_{кр}$, $l(m_{y1})$ и $S_{кр}$, $l(m_{x1})$.

I.17. Назовите характерные геометрические параметры, которые обычно выбирают при расчете аэродинамических коэффициентов летательных аппаратов самолетных схем.

I.18. Известен аэродинамический коэффициент силы (или момента), а также высота и скорость движения летательного аппарата. Можно ли определить по этим данным соответствующую силу или момент?

I.19. Известны следующие составляющие коэффициента сопротивления летательного аппарата в виде тела вращения (рис. 2.I.9): $c_{xp}=0{,}2$ (коэффициент сопротивления от давления, рассчитанный по миделевому сечению тела $S_{мид}$); $c_{xf}=0{,}01$ (коэффициент сопротивления трения, найденный по боковой поверхности $S_п$); $c_{xдон}=0{,}3$ (коэффициент донного сопротивления, вычисленный по площади сечения дна $S_{дон}$).

Определите полный коэффициент сопротивления тела вращения при условии, что $S_{мид}/S_п=0{,}1$, $S_{мид}/S_{дон}=1{,}2$.

I.20. На рис. 2.I.10, *а*, *б* показаны схемы трех изолированных крыльев прямоугольной *1*, трапециевидной *2* и треугольной *3* форм. В соответствии с размерами этих крыльев на рисунке определите их удлинение λ и сужение η.

I.21. В соответствии с обозначениями и конкретными размерами шестиугольного крыла на рис. 2.I.11 ($b_{кр}=1$; $b_{кц}=0{,}2$; $l=5$; $b'=0{,}1$) найдите соответствующие общие соотношения и численные значения для средней геометрической b и средней аэродинамической $b_{САХ}$ хорд этого крыла.

I.22. Для несимметричного профиля экспериментальным путем най-

дена зависимость между коэффициентами подъемной силы c_y и момента тангажа m_z относительно точки O передней кромки (рис. 2.I.12).

Определите коэффициент центра давления $c_{ц.д}=x_{ц.д}/b$ и безразмерную координату фокуса $\bar{x}_F=x_F/b$.

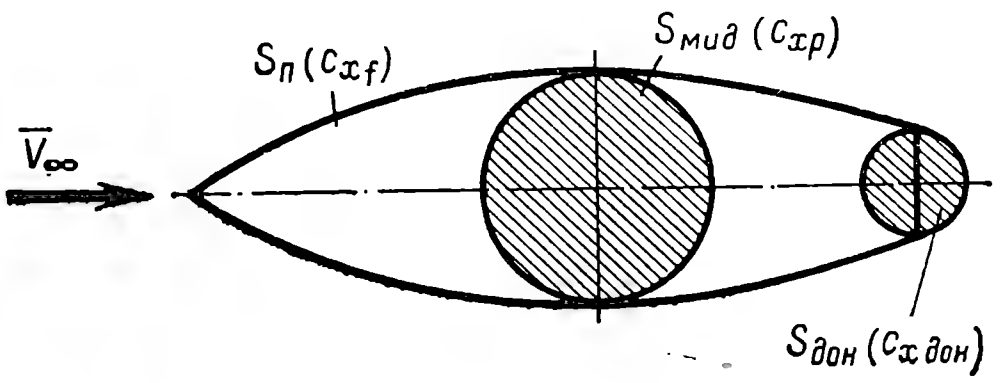


Рис. 2.I.9. Характерные площади тела вращения

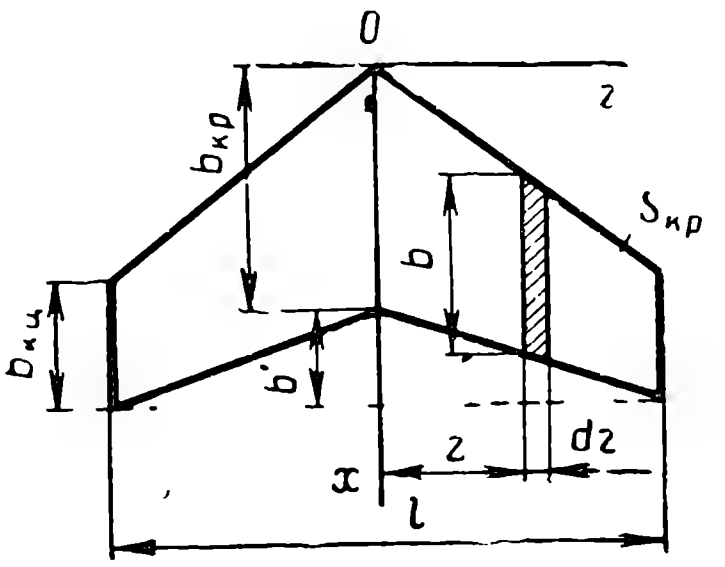


Рис. 2.I.11. Крыло шестиугольной формы в плане

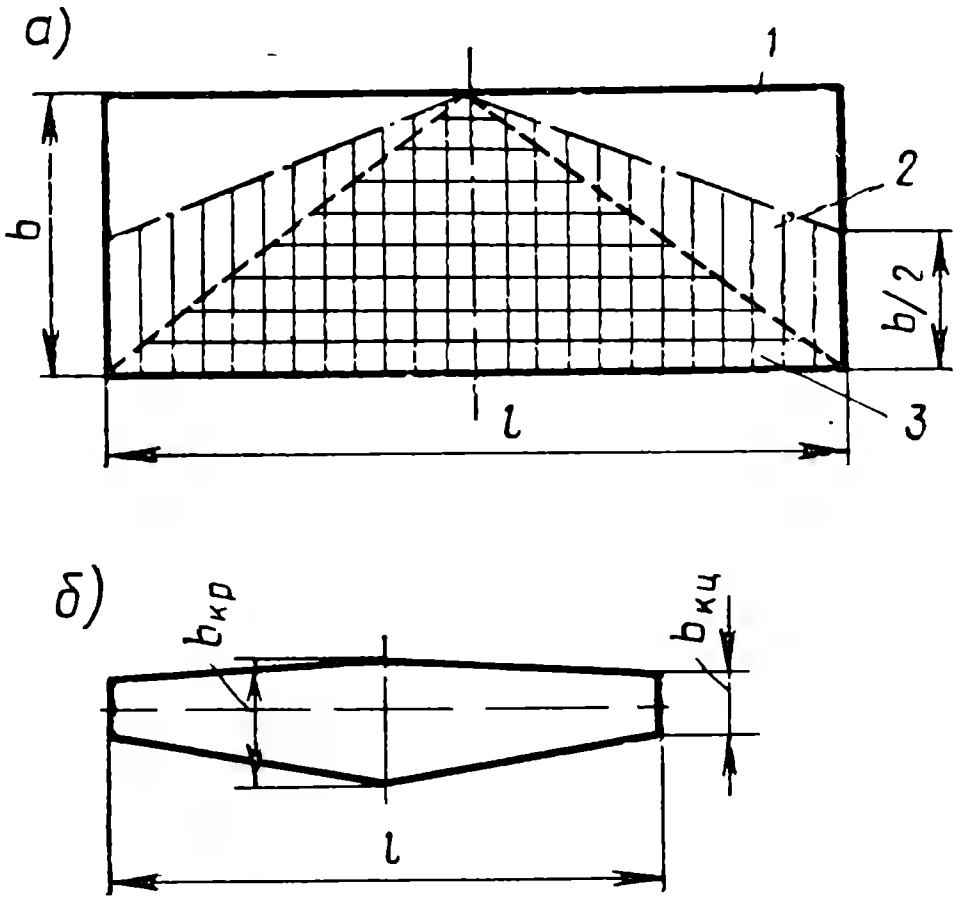


Рис. 2.I.10. Возможные схемы крыльев

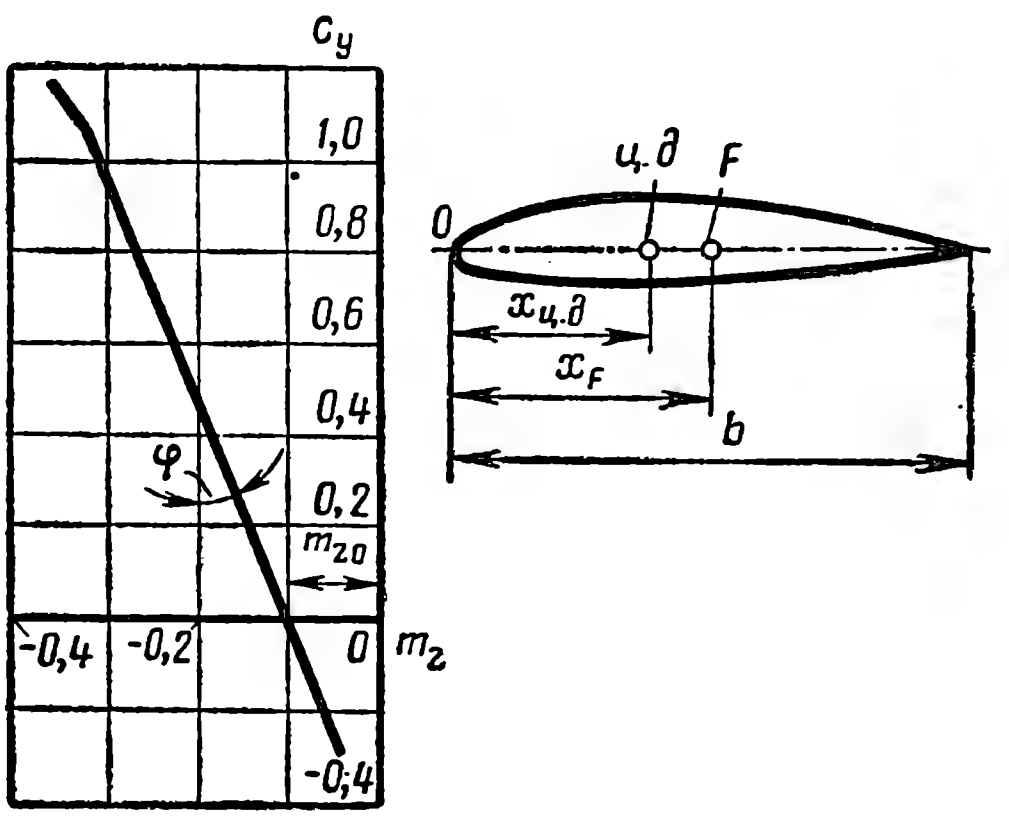


Рис. 2.I.12. Несимметричный профиль крыла

I.23. На рис. 2.I.13 изображены поляры двух профилей. Покажите, какой будет соответствующая форма этих профилей, и определите для них непосредственно по рисунку максимальное качество $(c_y/c_x)_{max}$, наивыгоднейший угол атаки $\alpha_{наив}$, максимальное значение коэффициента подъемной силы c_{ymax} и критические углы атаки $\alpha_{кр}$.

I.24. В результате экспериментальных исследований тела вращения в аэродинамической трубе определена величина коэффициента центра давления $c_{ц.д}=x_{ц.д}/x_к$. Это тело использовалось в качестве летательного аппарата в трех случаях, для каждого из ко-

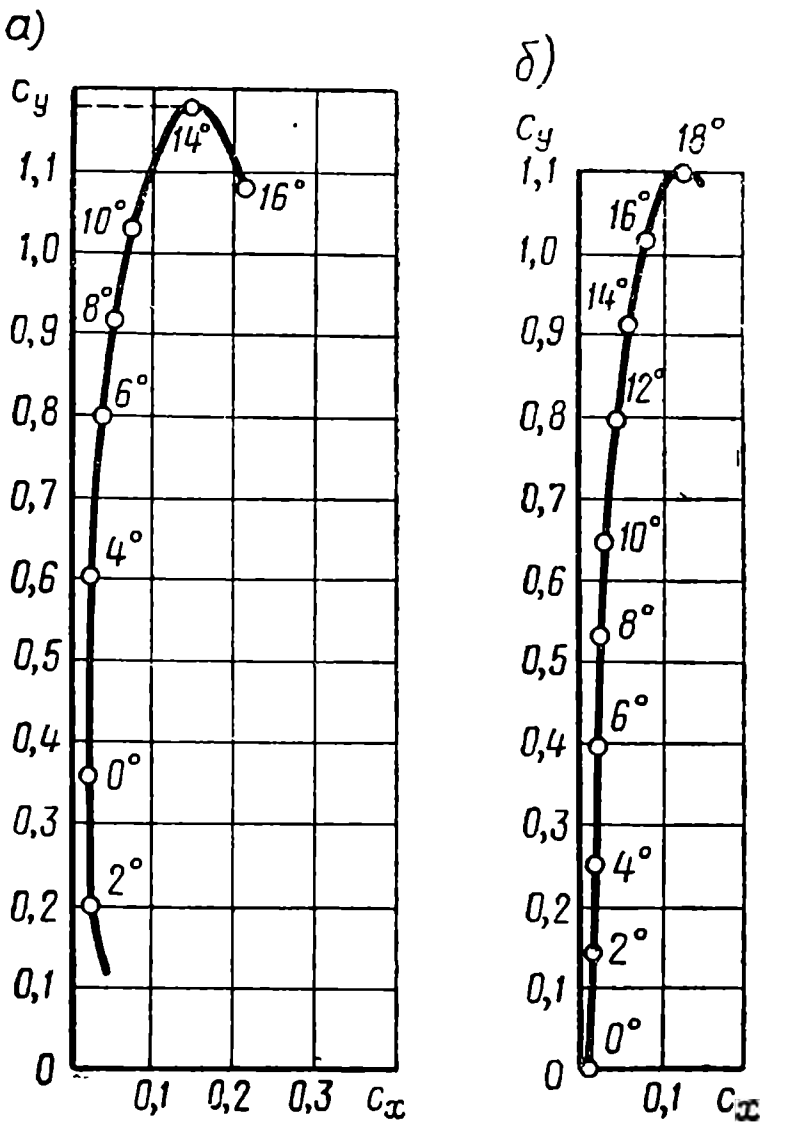


Рис. 2.I.13. Поляры профилей крыла ⟶

торых взаимное расположение центров масс и давления показано на рис. 2.I.14. Объясните, почему могло произойти такое смещение этих центров относительно друг друга. Что можно сказать о таких летательных аппаратах в отношении их продольной статической устойчивости?

I.25. В чем особенность аэродинамики больших скоростей, обусловленная свойством газовой смеси изменять плотность с изменением давления?

I.26. Назовите примерную последовательность и характер физико-химических превращений в воздухе, движущемся с очень большими сверхзвуковыми скоростями и подвергающемся торможению на скачке уплотнения.

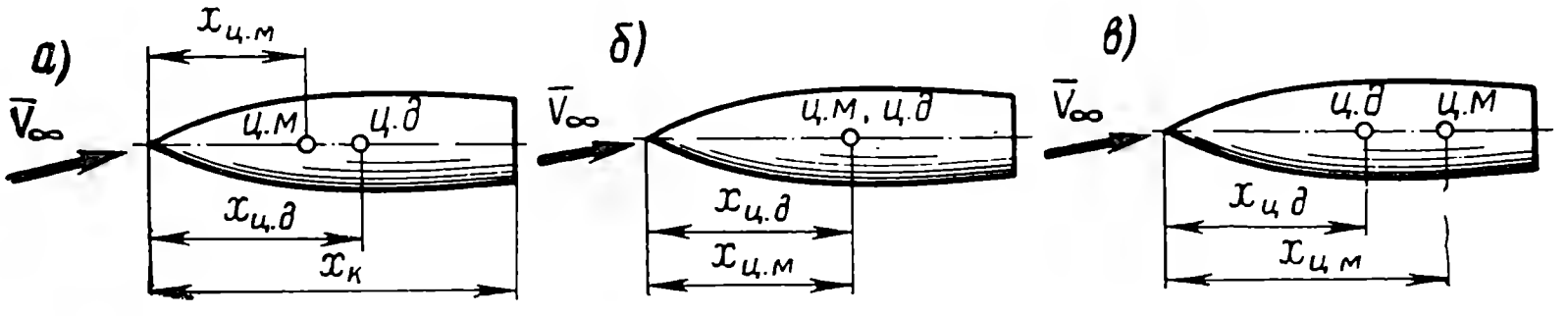


Рис. 2.I.14. Различные взаимные положения центров масс и давления

I.27. В результате диссоциации из общего количества m двухатомных молекул распалось n. Какова будет в этом случае степень диссоциации?

I.28. Давление диссоциирующего газа уменьшилось, а температура сохранилась постоянной. Как изменится степень диссоциации?

I.29. Как изменяются удельные теплоемкости газа при увеличении его температуры?

I.30. Назовите параметры газа, от которых зависят коэффициенты динамической вязкости μ и теплопроводности λ при отсутствии диссоциации и для диссоциированного газа (укажите правильный ответ, см. табл. 2.I.1). В таблице: T — температура; p — давление.

Таблица 2.I.1

	1-й ответ		2-й ответ		3-й ответ	
	T	p	T	p	T	p
Диссоциация отсутствует	—	+	+	+	+	—
Диссоциированный газ	+	—	—	+	+	+

I.31. Определите ошибку в вычислении удельной теплоемкости воздуха при $T=5000$ К и $p=0{,}1$ $кГ/см^2$ без учета равновесной диссоциации.

I.32. Давление в диссоциированном воздухе при температуре $T=4000$ К уменьшилось с 1 до 0,01 $кГ/см^2$. Как изменилась его плотность?

I.33. Как будет изменяться средний молекулярный вес воздуха при увеличении его температуры и давления?

I.34. Вычислите скорость звука в воздухе, разогретом до температуры $T=3500$ К и находящемся под давлением $p=0{,}01$ $кГ/см^2$, и сравните полученную величину со скоростью звука в предположении, что удельные теплоемкости постоянны или изменяются при отсутствии диссоциации.

I.35. Воздух нагрет до температуры $T=4000$ К при давлении $p=0{,}1$ $кГ/см^2$. Определите его энтальпию i с учетом диссоциации и сравните полученное значение для случаев постоянных теплоемкостей ($k=c_p/c_v=1{,}4$) и переменных их значений, зависящих только от температуры (недиссоциированная среда).

I.36. В аэродинамике больших скоростей для упрощения исследований обтекания тел вместо воздуха, представляющего собой сложную химически реагирующую газовую среду, используют его двухатомную модель. Объясните, что представляет собой такая модель воздуха.

I.37. Для заданных давления $p=0{,}01$ *кГ/см*^{2} и температуры $T=3000$ К определите степень равновесной диссоциации кислорода, рассматривая его как условный двухатомный диссоциирующий газ.

I.38. Определите средний молекулярный вес двухатомной модели азота при давлении $p=0{,}01$ *кГ/см*^{2} и температуре $T=5000$ К.

I.39. При давлении $p=0{,}01$ *кГ/см*^{2} степень диссоциации азота $\alpha=0{,}5$. Рассматривая его как двухатомную модель диссоциирующего газа, определите плотность, температуру, энтальпию и внутреннюю энергию.

I.40. Для воздуха, рассматриваемого в виде смеси диссоциирующих чистых двухатомных газов N_2 и O_2, известны давление $p=0{,}01$ *кГ/см*^{2} и температура $T=4500$ К. Определите степень диссоциации и термодинамические параметры разогретого воздуха.

I.41. Для условий предыдущей задачи (степени диссоциации кислорода и азота в воздушной смеси, энтальпии ее равновесной диссоциации) определите средний молекулярный вес и коэффициент динамической вязкости воздуха.

II.1. В аэродинамике существуют два метода кинематического исследования жидкой среды, один из которых называют методом Лагранжа, а другой — методом Эйлера. Каково основное содержание этих методов и в чем их различие?

Рассмотрите также следующую задачу. Пусть движение жидкости задано проекциями скоростей в переменных Эйлера (x, y, t): $V_x = mx + nt$, $V_y = -ky + lt$, $V_z = 0$, где m, n, l, k — некоторые постоянные величины.

Перейдите от переменных Эйлера к переменным Лагранжа и определите в этих новых переменных уравнение траектории.

II.2. Найдите уравнения линий тока и траекторий для трех видов движения жидкости, заданных следующими проекциями скоростей:

1) $V_x = -ay$, $V_y = ax$, $V_z = 0$;

2) $V_x = x + t$, $V_y = -y + t$, $V_z = 0$;

3) $V_x = ax/R^3$, $V_y = ay/R^3$, $V_z = az/R^3$;

здесь a — некоторая постоянная величина; $R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

II.3. Укажите основное отличие характера движения жидкой частицы от движения твердого тела, а также элементы, из которых складывается деформационное движение жидкой частицы. Выделите элементы, характеризующие поступательное, вращательное и деформационное движения жидкой частицы в виде параллелепипеда, скорость точки C которой определяется в виде

$$V_{xc} = V_x + \theta_x\, dx + \varepsilon_y\, dz + \varepsilon_z\, dy + \omega_y\, dz - \omega_z\, dy,$$

где $\theta_x = \dfrac{\partial V_x}{\partial x}$; $\varepsilon_y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial V_x}{\partial z} + \dfrac{\partial V_z}{\partial x}\right)$; $\varepsilon_z = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial V_y}{\partial x} + \dfrac{\partial V_x}{\partial y}\right)$;

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right); \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right).$$

II.4. Определите величину скорости относительного кубического расширения в потоке газа, проекции скорости которого заданы уравнениями:

$$V_x = \frac{cx}{\rho\,(x^2+y^2)},\quad V_y = \frac{cy}{\rho\,(x^2+y^2)},\quad V_z = 0,$$

где ρ — плотность газа; c — некоторая константа.

II.5. В двухмерном плоском потоке жидкости расположена бесконечно малая частица в форме круга с уравнением

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2.$$

Определите форму этой частицы и изменение ее площади после деформации при условии, что эта деформация линейная и происходит вдоль осей Ox_1 и Oy_1, являющихся главными осями деформации (рис. 2.II.1).

II.6. Определите, каким будет по характеру — вихревым или потенциальным — поток жидкости в трубе, в которой распределение скорости по сечению подчиняется степенному закону:

$$V_x = V_{\max}\,(y/r_0)^n,$$

где $V_{\max}$ — наибольшая скорость в центре трубы;
r_0 — радиус трубы; величина $y = r_0 - r$ (рис. 2.II.2).

Найдите для этого случая величину ротора скорости $\operatorname{rot} \bar{V}$.

II.7. На рис. 2.II.3 показано двухмерное плоское течение — так называемый плоский вихрь. В этом течении линиями тока служат концентрические окружности, причем скорость V зависит только от радиуса r в соответствии с формулой

$$V = \text{const}/r.$$

Докажите, что такое течение является безвихревым, и напишите в общем виде условие существования безвихревых движений жидкости.

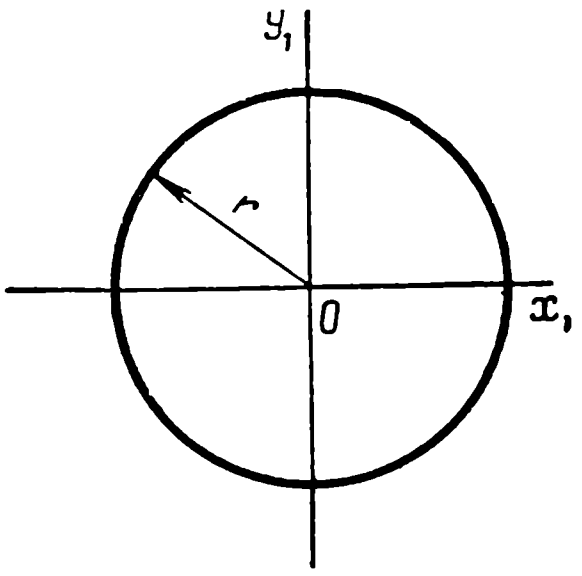


Рис. 2.II.1. К определению деформации жидкой частицы в форме круга радиуса r

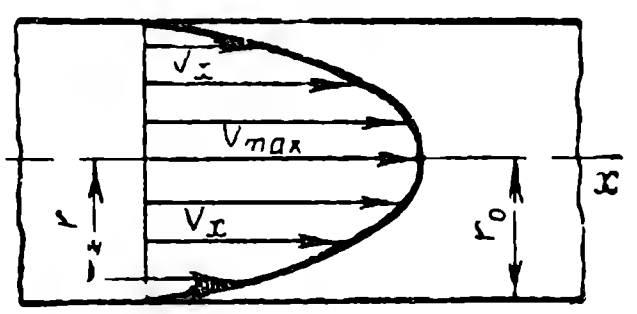


Рис. 2.II.2. Распределение скоростей по сечению круглой цилиндрической трубы

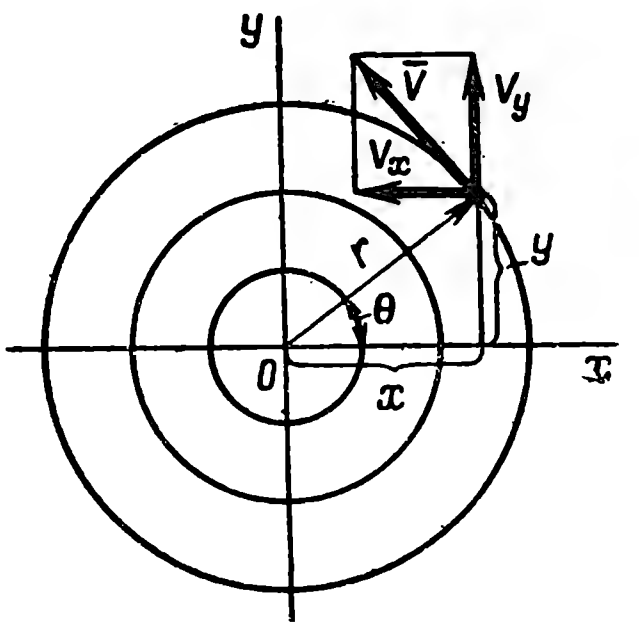


Рис. 2.II.3. Циркуляционный поток (плоский вихрь)

II.8. Напишите равенства, выражающие необходимые и достаточные условия, для того чтобы составляющие скорости V_x, V_y, V_z являлись частными производными по координатам от некоторой функции φ, называемой потенциалом скоростей. Покажите, что вектор скоростей равен градиенту этой функции, т. е.

$$\bar{V} = \text{grad}\,\varphi.$$

II.9. Определите составляющие угловой скорости частиц жидкости в потоке, для которого проекции скорости на оси координат равны

$$V_x = axy,\ V_y = ayz,\ V_z = axz,$$

где a — некоторая константа.

II.10. Рассмотрите вывод уравнения неразрывности на основе метода Лагранжа.

II.11. При выводе уравнения неразрывности можно исходить из метода Эйлера. Каким будет по физическому смыслу условие этого вывода?

II.12. Используя метод Эйлера, выведите уравнение неразрывности для случая неустановившегося движения газа за цилиндрической ударной волной, возникающей перед так называемым расширяющимся цилиндрическим поршнем (рис. 2.II.4).

II.13. Используя метод Эйлера, получите уравнение неразрывности в цилиндрических и сферических координатах.

II.14. Покажите, что уравнение

$$\partial\rho/\partial t + \partial(\rho V)/\partial r + \varepsilon\rho V/r = 0$$

представляет собой уравнение неразрывности для течения с плоскими, цилиндрическими и сферическими волнами (величина ε равна соответственно 0, 1 и 2).

II.15. Получите уравнения неразрывности для следующих видов движения газа:

1) каждая частица описывает окружность, перпендикулярную постоянной оси и с центром на ней;

2) скорости частиц, располагающихся в пространстве симметрично по отношению к неподвижному центру, направлены либо от центра, либо к нему и зависят только от расстояния до этого центра;

3) частицы газа движутся в плоскости, проходящей через ось x.

II.16. Движение газа характеризуется тем, что траектории частиц располагаются в одном случае на поверхностях коаксиальных цилиндров, а в другом — на поверхности конусов, коаксиальных с осью x и имеющих общую вершину. Напишите уравнение неразрывности для каждого из этих случаев.

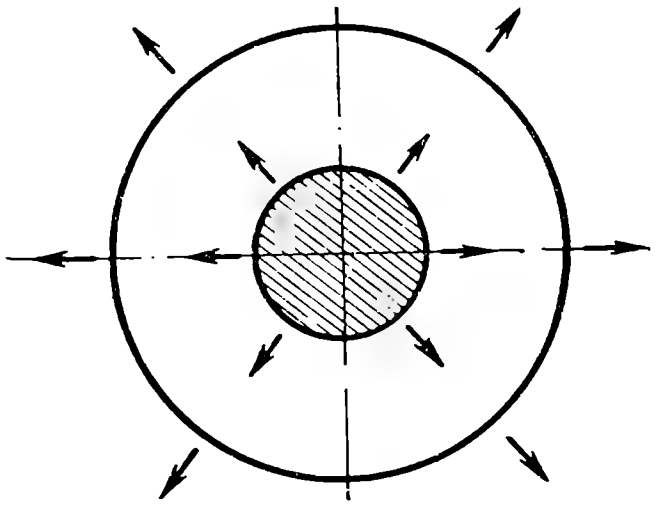


Рис. 2.II.4. Движение газа за цилиндрической ударной волной

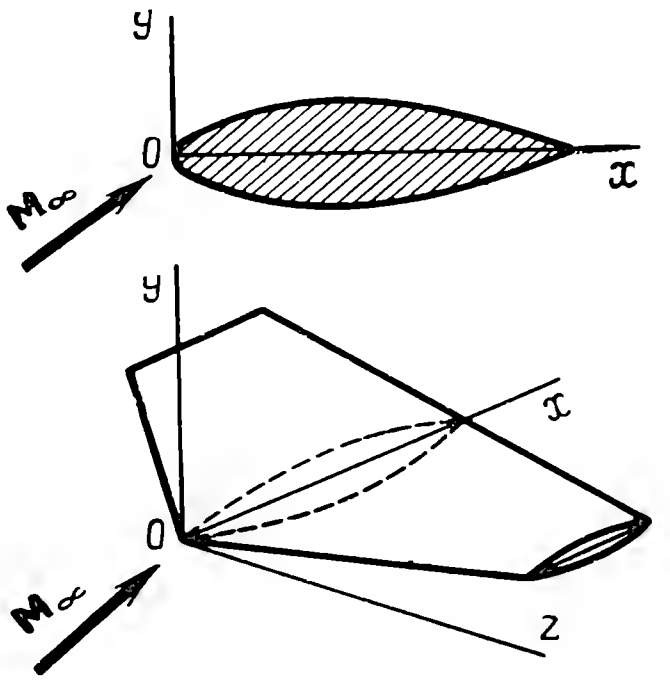


Рис. 2.II.5. Профиль и крыло конечного размаха в потоке жидкости

II.17. Какой вид имеют уравнения неразрывности в декартовых координатах, используемые для исследования установившегося обтекания сжимаемой жидкостью профиля крыла, а также крыла конечного размаха (рис. 2.II.5)?

II.18. Преобразуйте уравнение неразрывности

$$\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}(\rho\bar{V}) = 0$$

к виду

$$\partial\rho/\partial t + \bar{V}\operatorname{grad}\rho + \rho\operatorname{div}\bar{V} = 0.$$

II.19. Потенциальная функция φ полностью определяет характер движения жидкости, так как по ее величине можно определить скорость в любой точке течения. Можно указать также на существование другой функции, определяющей движение, а именно функции тока ψ.

Дайте определение этой функции, укажите виды потоков, для которых она существует, и напишите соотношения, связывающие между собой функции φ и ψ.

II.20. Определите функцию тока ψ, если известен потенциал скоростей несжимаемого течения

$$\varphi = a(x^2 - y^2),$$

где a — некоторая константа $(a > 0)$.

II.21. Докажите, используя понятия векторного анализа, свойство ортогональности линий тока и эквипотенциальных линий (на плоскости) или эквипотенциальных поверхностей (в пространственном осесимметричном потоке).

II.22. Определите расход жидкости через произвольную кривую AB для случая двухмерного (плоского или пространственного осесимметричного) течения, если известны значения функций тока в точках A и B.

II.23. Определите расход жидкости через отрезок прямой линии, со-

единяющей точки A $(x_1=0;\ y_1=0)$ и B $(x_2=1,\ y_2=1)$, в случае движения, определяемого потенциалом скоростей

$$\varphi = x(x^2 - 3y^2).$$

II.24. Докажите теорему Гельмгольца о постоянстве вдоль вихревой трубки ее интенсивности. Какое важное свойство вихревых трубок следует из теоремы Гельмгольца?

II.25. Движение задано проекциями скорости

$$V_x = -ky,\ V_y = kx,\ V_z = \sqrt{\varphi(z) - 2k^2(x^2+y^2)},$$

где k — постоянная величина; $\varphi(z)$ — некоторая функция z.

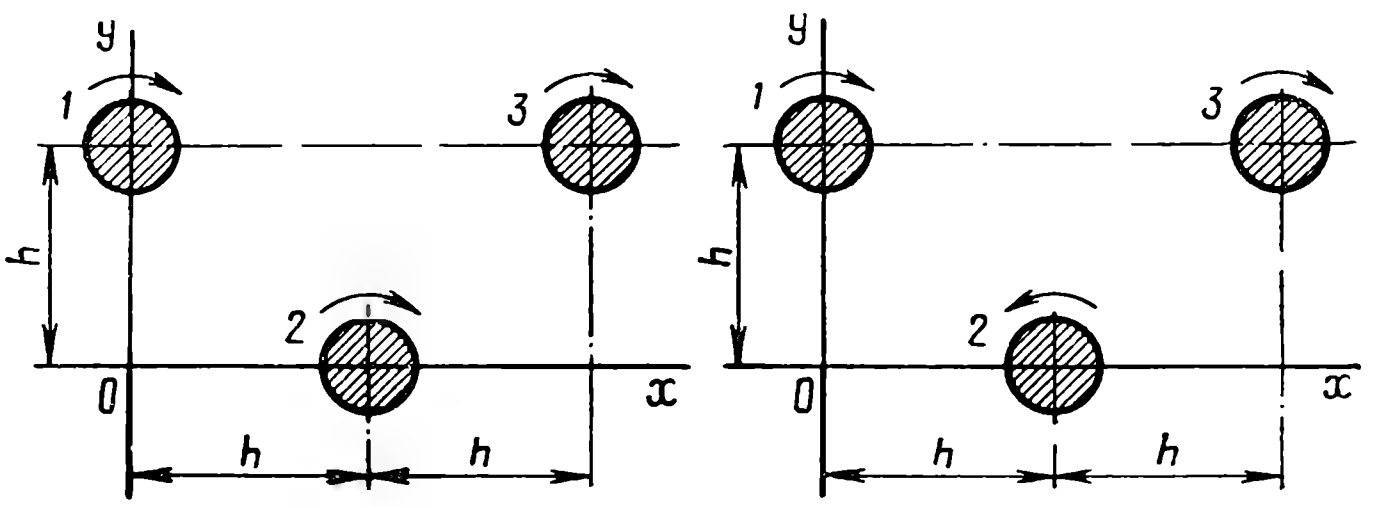


Рис. 2.II.6. К исследованию движения системы трех прямолинейных вихрей

Определите ротор скорости $\overline{\Omega} = \mathrm{rot}\,\overline{V}$ и укажите его направление.

II.26. Вычислите циркуляцию скорости по контуру, соединяющему точки с координатами A $(x, 0)$ и B $(0, y)$ в потоке жидкости, который задан проекциями скорости

$$V_x = -\frac{ax}{x^2+y^2},\ V_y = \frac{ay}{x^2+y^2},\ V_z = 0,$$

где a — некоторая константа.

II.27. Определите скорость, индуцированную вихревым кольцом (вихревой линией, имеющей форму окружности), в точке, расположенной в центре кольца. Радиус кольца $r=1$ *м*; циркуляция (интенсивность вихревой линии) $\Gamma = 100$ *м*^{2}/*сек*.

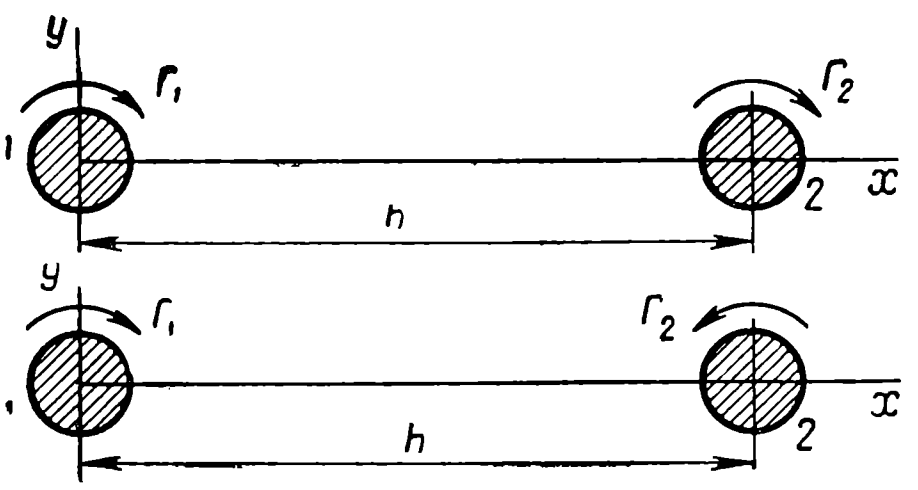


Рис. 2.II.7. К исследованию движения пары прямолинейных вихрей одинаковой интенсивности

II.28. На рис. 2.II.6 дана система, состоящая из трех прямолинейных вихрей, расстояние между которыми в продольном и поперечном направлениях $h=50$ *см*. Найдите скорости, сообщаемые вихрями друг другу, и определите характер движения заданной вихревой системы в двух случаях:

1) интенсивности всех вихрей одинаковы по абсолютной величине и знаку $(\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = \Gamma)$;

2) интенсивность нижнего вихря одинакова по величине, но противоположна по знаку двум верхним вихревым жгутам; абсолютная величина циркуляции равна 100 *м*^{2}/*сек*.

II.29. Определите потенциал скоростей и функцию тока течения, индуцируемого парой прямолинейных вихрей для двух случаев (рис. 2.II.7):

1) циркуляции скорости вокруг каждого из вихрей одинаковы по величине и знаку $(\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma)$;

2) указанные циркуляции скорости одинаковы по величине, но противоположны по знаку ($\Gamma_1 = -\Gamma_2$).

II.30. Найдите траекторию прямолинейного вихря, находящегося внутри двугранного угла, который образован двумя взаимно перпендикулярными стенками.

II.31. В точках с координатами $y = \pm h$ в жидкости расположена пара вихрей, интенсивности которых равны по величине, но противоположны по знаку ($\Gamma_1 = -\Gamma_2$). При этом набегающий поток (на бесконечности) имеет такую скорость, что вихри остаются неподвижными. Найдите соответствующие линии тока.

II.32. Покажите, что необходимыми и достаточными условиями существования комплексного потенциала $W(z)$ для двухмерного плоского несжимаемого потока являются зависимости

$$\partial\varphi/\partial x = \partial\psi/\partial y, \quad \partial\varphi/\partial y = -\partial\psi/\partial x.$$

II.33. Получите выражение для комплексного потенциала течения несжимаемой жидкости, создаваемого плоским точечным диполем.

II.34. Определите комплексный потенциал потока, образующегося в результате наложения поступательного плоскопараллельного потока со скоростью V на течение от диполя с моментом M. Найдите уравнение семейства линий тока полученного сложного течения.

II.35. Рассмотрите геометрическую картину течения, комплексный потенциал которого задан в виде уравнения

$$W = V\left(z + r_0^2/z\right).$$

II.36. Движение определяется комплексным потенциалом

$$W = (1 + i)\ln(z^2 - 1) + (2 - 3i)\ln(z^2 - 4) + 1/z. \qquad (2.II.1)$$

Найдите расход жидкости через окружность $x^2 + y^2 = 9$ и циркуляцию скорости Γ по этой окружности.

II.37. Комплексный потенциал задан функцией

$$W(z) = V\left(z + \frac{r_0^2}{z}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z. \qquad (2.II.2)$$

Эта функция, характеризующая сложный поток, получена путем сложения комплексных потенциалов трех более простых течений.

Выделите из (2.II.2) каждый такой комплексный потенциал и рассмотрите соответствующую картину течения.

II.38. По заданному комплексному потенциалу (2.II.2) определите потенциал скоростей и функцию тока результирующего потока, выведите уравнение обтекаемого контура и найдите распределение скорости в потоке и на этом контуре.

II.39. Как изменяются скорость и давление в потоке от плоского точечного источника (или стока) при удалении от него?

III.1. Уравнения движения вязкого газа (уравнения Навье — Стокса) при условии $\mu = \text{const}$ записываются в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dV_x}{dt} &= X - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\Delta V_x + \frac{\nu}{3}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{div}\bar{V};\\ \frac{dV_y}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\Delta V_y + \frac{\nu}{3}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{div}\bar{V};\\ \frac{dV_z}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\Delta V_z + \frac{\nu}{3}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\operatorname{div}\bar{V}. \end{aligned}\right\}$$

Какой вид примут эти уравнения для одномерного неустановившегося (нестационарного) течения невесомого сжимаемого газа и для плоского установившегося движения невесомой несжимаемой жидкости?

III.2. Преобразуйте уравнения движения невесомого невязкого неионизированного газа в декартовых координатах

$$\frac{dV_x}{dt} = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x},\quad \frac{\partial V_y}{dt} = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y},\quad \frac{dV_z}{dt} = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z} \qquad (2.\text{III}.1)$$

к цилиндрическим координатам.

III.3. Выведите уравнение диффузии для плоского течения относительно декартовой системы осей координат.

III.4. Уравнение энергии для двухмерного (плоского) движения вязкого теплопроводного газа (при отсутствии диффузионной теплопередачи и излучения) имеет следующий вид:

$$\rho\frac{di}{dt} = \frac{dp}{dt} + \mu\left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)^2 - \frac{2}{3}(\operatorname{div}\bar{V})^2 + 2\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)^2\right] + \operatorname{div}(\lambda\operatorname{grad}T). \qquad (2.\text{III}.2)$$

Выделите в этом уравнении диссипативные члены, а также запишите уравнение энергии при условии, что движение газа происходит с малыми скоростями.

III.5. Крыло бесконечного размаха обтекается без скольжения потоком невесомого сжимаемого невязкого и неизлучающего газа. Параметры набегающего потока известны. Назовите параметры установившегося возмущенного потока, которые необходимо определить (при условии постоянства удельных теплоемкостей), и составьте соответствующую систему уравнений.

III.6. Для всякой баротропной газовой среды, характеризующейся однозначной зависимостью между давлением и плотностью, отношение dp/ρ представляет собой дифференциал некоторой функции P. Найдите значение этой функции для случая адиабатического течения газа.

III.7. Один из частных интегралов уравнения движения невязкого газа имеет вид

$$\partial\varphi/\partial t + V^2/2 + \int dp/\rho + U = C(t). \qquad (2.\text{III}.3)$$

Как называется этот интеграл и каков его физический смысл? Объясните также физический смысл величины $\partial\varphi/\partial t$.

III.8. Сформулируйте физическое условие, соответствующее уравнению Лагранжа

$$\left[\frac{V_1^2}{2} + \left(\int\frac{dp}{\rho}\right)_1 + U_1\right] - \left[\frac{V_2^2}{2} + \left(\int\frac{dp}{\rho}\right)_2 + U_2\right] = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_1, \qquad (2.\text{III}.4)$$

записанному для двух произвольных точек в потоке, взятых в один и тот же момент времени.

Каким свойством обладает поток газа, для которого действительно уравнение Лагранжа вида

$$\partial\varphi/\partial t + V^2/2 + i = C(t)? \qquad (2.III.5)$$

III.9. Напишите частный интеграл уравнения движения невязкого сжимаемого газа, являющийся интегралом Эйлера. Каков физический смысл этого интеграла и в чем его отличие от интеграла Лагранжа?

III.10. Уравнение вихревого (непотенциального) установившегося движения сжимаемой жидкости имеет в векторной форме вид

$$\operatorname{grad}(V^2/2) + \operatorname{rot}\bar{V}\times\bar{V} = \bar{G} - (1/\rho)\operatorname{grad} p. \qquad (2.III.6)$$

Укажите возможные частные интегралы этого уравнения.

III.11. Какой закон физики лежит в основе уравнения (интеграла) Бернулли

$$V^2/2 + gy + p/\rho + U = \text{const}? \qquad (2.III.7)$$

Рассмотрите физический смысл членов этого интеграла.

III.12. В гидроканале путем протаски изучается модель корабля, имеющего длину в натуре $L_н = 160$ *м* и скорость $V_н = 14$ *м/сек*. Определите, с какой скоростью необходимо перемещать в этом гидроканале модель, длина которой $L_м = 3$ *м*.

III.13. Летательный аппарат рассчитан на движение при нормальных атмосферных условиях со скоростями $V_н = 300 \div 600$ *км/ч*. Для испытаний в аэродинамической трубе переменной плотности используется модель этого аппарата, выполненная в масштабе 1 : 10. Продувка будет проводиться при давлении в рабочей части аэродинамической трубы $p = 20$ *атм* и температуре $t = 25°$ С. Определите, при каких скоростях необходимо испытывать модель, чтобы обеспечить аэродинамическое подобие по числу Рейнольдса.

III.14. В аэродинамической трубе переменной плотности испытывается модель крыла с хордой $b_м = 150$ *мм*. Скорость воздушного потока в трубе $V_м = 25$ *м/сек*, а температура воздуха $t_м = 30°$ С. Определите, при каком давлении необходимо проводить испытания, чтобы обеспечивалось аэродинамическое подобие по числу Рейнольдса. Натурное крыло имеет хорду $b_н = 1{,}2$ *м*, а скорость его движения $V_н = 330$ *км/ч*.

III.15. В сверхзвуковой аэродинамической трубе истечение воздуха из сопла происходит со скоростью $V = 450$ *м/сек* при температуре $t = -50°$ С. Каким будет соответствующее число Маха и как изменится это число, если путем подогрева увеличить температуру воздуха в рабочей части трубы до $t = 15°$ С?

III.16. Как изменится максимальная скорость истечения газа из резервуара при изотермическом повышении в нем давления?

III.17. Найдите максимальную скорость при расширении воздуха, имеющего начальную температуру 27° С.

III.18. Определите $\mathbf{M} = V/a$ и $\lambda = V/a^*$, а также максимальную скорость и скорость звука для струи воздуха, истекающей из сопла со скоростью, равной половине максимальной скорости. Температура воздуха в сосуде равна 15° С.

III.19. Найдите местное число Маха, соответствующее относительной скорости $\lambda = V/a^* = 2{,}2$ $(k = c_p/c_v = 1{,}4)$.

III.20. Определите, какую ошибку допускают в аэродинамике несжимаемой среды, полагая плотность воздуха, имеющего скорость $V_\infty = 100$ *м/сек* при температуре 15° С ($a_\infty = 341$ *м/сек*), величиной постоянной.

III.21. Вычислите при $\mathbf{M}_\infty = 0{,}8$ коэффициент давления в точке полного торможения.

III.22. Сверхзвуковой воздушный поток с числом Маха $\mathbf{M}_\infty=1{,}5$ и отношением удельных теплоемкостей $k=c_p/c_v=1{,}4$ имеет статическую температуру $t_\infty=-50°$ С. Определите критическую скорость звука для этого потока.

III.23. Какую наибольшую скорость воздуха можно получить в сверхзвуковой трубе без подогрева, если воздух сжижается при температуре 78 К [13]?

III.24. Напишите зависимости, устанавливающие связь между статическими параметрами, параметрами торможения и относительной скоростью λ движения газа, воспользовавшись известными газодинамическими функциями вида $p/p_0=[1+(k-1)\mathbf{M}^2/2]^{-k/(k-1)}$ и соответствующей зависимостью $\mathbf{M}=f(\lambda)$.

III.25. Какая связь между относительными скоростями λ и соответствующими значениями статических давлений, плотностей и температур двух потоков, имеющих одинаковые параметры торможения?

III.26. Воздух ($k=c_p/c_v=1{,}4$) движется в трубе переменного сечения, при этом число Маха в одном из сечений $\mathbf{M}_1=1$, а в другом $\mathbf{M}_2=2$. Найдите соотношение между скоростями воздуха в этих сечениях, а также определите, что произойдет с кинетической энергией единицы объема воздуха при движении от первого сечения ко второму [13].

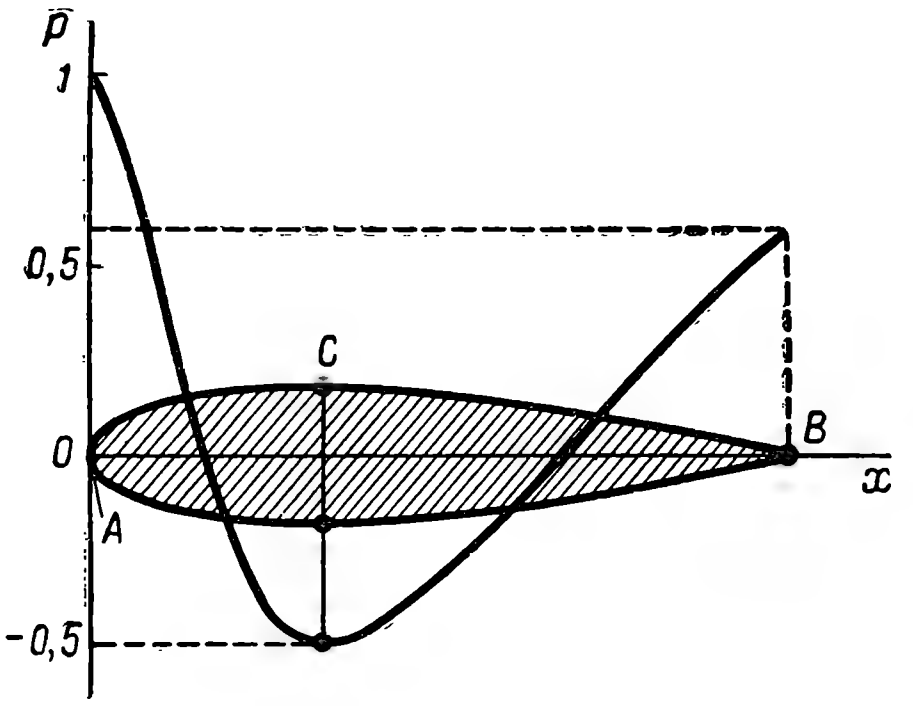


Рис. 2.III.1. Распределение коэффициента давления $\bar{p}$ по симметричному профилю, расположенному в потоке под нулевым углом атаки

III.27. Давление и температура заторможенного воздушного потока равны соответственно $p_0=1$ *кГ/см*^{2} и $T_0=1000$ К. Определите критические значения давления, плотности и температуры, принимая, что течение изэнтропическое и показатель адиабаты постоянен и равен $k=c_p/c_v=1{,}4$.

III.28. На рис. 2.III.1 показано распределение коэффициента давления $\bar{p}=(p-p_\infty)/(\rho V_\infty^2/2)$, полученное по результатам продувок профиля в малоскоростной аэродинамической трубе, дающей скорость потока в рабочей части $V_\infty=100$ *м/сек*. По данным этого распределения постройте кривые изменения скорости вдоль профиля и площади поперечного сечения воображаемой струйки, обтекающей этот профиль.

III.29. По испытаниям в аэродинамической трубе найдено распределение давления около поверхности, обтекаемой чисто дозвуковым воздушным потоком. Зная в заданной точке поверхности коэффициент давления $\bar{p}=(p-p_\infty)/(\rho_\infty V_\infty^2/2)=-0{,}3$, а также параметры в рабочей части трубы ($p_\infty=1$ *кГ/см*^{2}, $T_\infty=288$ К, $V_\infty=200$ *м/сек*), определите в этой точке абсолютное давление, скорость, число Маха, плотность, температуру, скорость звука и энтальпию.

III.30. Подберите площадь критического сечения сверхзвукового сопла, обеспечивающего весовой секундный расход воздуха $G=1$ *кГ/сек*, если истечение расчетное и происходит из резервуара, где давление $p_0=6$ *кГ/см*^{2} и температура $t_0=15°$ С.

III.31. Воздух вытекает из резервуара ($p_0=30$ *кГ/см*^{2}, $t_0=15°$ С) в атмосферу через сопло Лаваля. Определите скорость, температуру и плотность воздуха на выходе из этого сопла, считая течение адиабатическим и без потерь, а режим истечения расчетным.

III.32. Воздух истекает из резервуара в атмосферу через сопло Ла-

валя со скоростью $V_a=800$ *м/сек*, имея температуру $t_a=-70°$ С. При условиях адиабатического и без потерь течения, а также расчетного режима работы сопла определите давление, температуру и плотность воздуха в резервуаре.

III.33. В форкамере аэродинамической трубы находится воздух [$k=c_p/c_v=1{,}4$; $R=287$ *дж/(кг·град)*] при температуре $T_0=293$К. Определите давление p_0 и плотность ρ_0 в форкамере, скорость V_a, чи́сла M_a и λ_a, плотность ρ_a и температуру T_a в выходном сечении сопла, а также весовой расход газа при условии, что давление на срезе сопла $p_a=1$ *кГ/см*^{2}, отношение площади S^* критического сечения сопла к площади S_a выходного сечения $S^*/S_a=0{,}2$ и величина $S_a=0{,}16$ *м*^{2}.

III.34. Рассчитайте параметры газа [$k=c_p/c_v=1{,}2$; $R=333$ *дж/(кг·град)*], истекающего из резервуара ($p_0=41$ *кГ/см*^{2}, $T_0=3000$ К) через сверхзвуковое сопло, и постройте графики изменения давления, температуры, плотности, скорости звука, скорости течения и числа Маха по длине сопла, а также определите секундный весовой расход газа и режим работы сопла. Движение газа изэнтропическое и происходит в среде с давлением $p_н=4{,}1\cdot10^{-2}$ *кГ/см*^{2}. Размеры сопла приведены в табл. 2.III.1.

Таблица 2.III.1

№ сечения	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
x, *мм*	0	22	35	50	65	80	110	140	170	200
d, *мм*	100	79	35,6	20	26	32	44	55,4	68,8	80

Примечания: x — расстояние от входного сечения сопла *1*; d — диаметр рассматриваемого сечения; сечение *4* является критическим.

III.35. В выходном сечении сверхзвукового сопла известны скорость $V_a=8000$ *м/сек*, число $M_a=5$ и давление $p_a=0{,}01$ *кГ/см*^{2}. Определите необходимые для обеспечения этих параметров давление p_0 и температуру T_0 воздуха в форкамере аэродинамической трубы.

III.36. Давление и температура в форкамере аэродинамической трубы $p_0=100$ *кГ/см*^{2}, $T_0=12\,000$ К. Определите изменение плотности, давления, температуры, скорости и числа Маха при изэнтропическом истечении диссоциированного воздуха из сверхзвукового сопла, в выходном сечении которого площадью $S_a=0{,}16$ *м*^{2} задана скорость $V_a=8000$ *м/сек*.

IV.1. На рис. 2.IV.1 показаны три вида распространения малых (звуковых) возмущений в газовом потоке. Укажите, какой скорости движения газа — дозвуковой ($V<a$), сверхзвуковой ($V>a$) или звуковой ($V=a$) — соответствует каждая картина распространения возмущений.

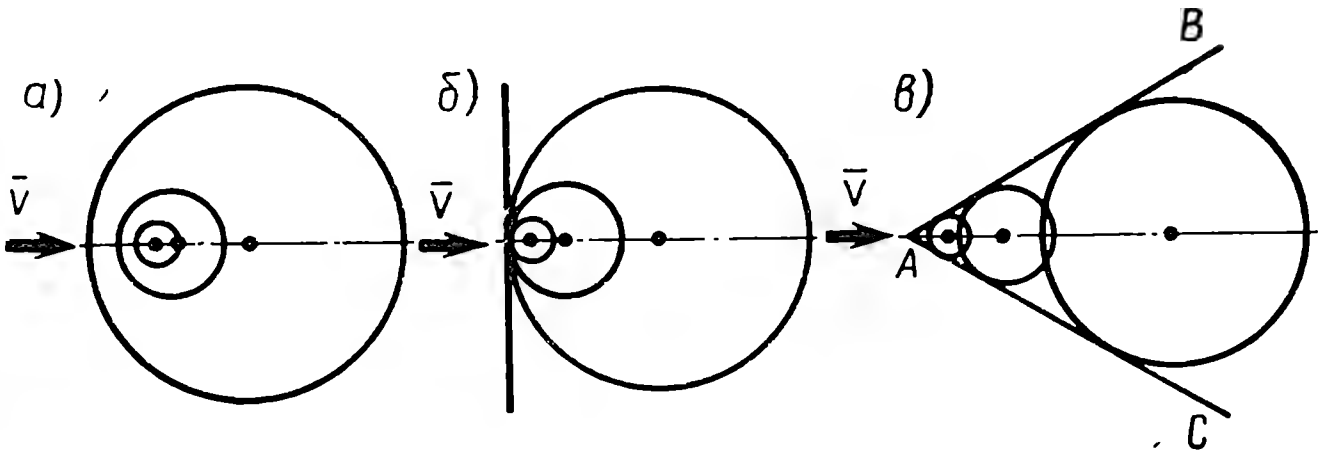


Рис. 2.IV.1. Схема распространения слабых возмущений в потоке

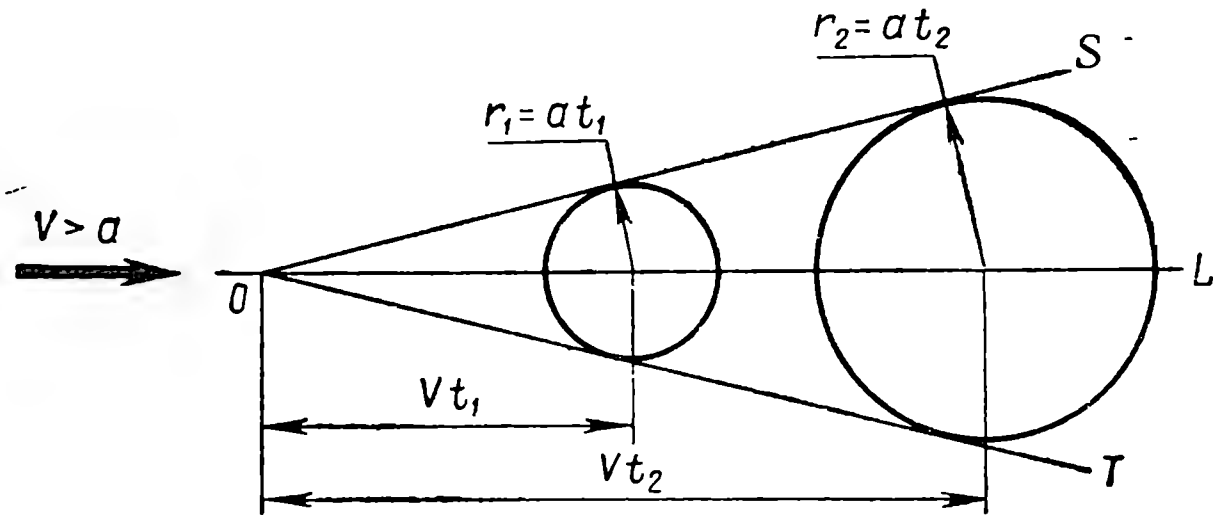


Рис. 2.IV.2. Схема распространения слабых возмущений в сверхзвуковом потоке

IV.2. Докажите, что касательная к круговым волнам звуковых возмущений в сверхзвуковом потоке (рис. 2.IV.2) является прямой (такая прямая называется линией или волной Маха).

IV.3. На рис. 2.IV.3 показана криволинейная волна Маха, возникшая в потоке газа с постоянными теплоемкостями. Покажите, как изменяется местное число **M** вдоль такой волны в направлении от точки A к точке B.

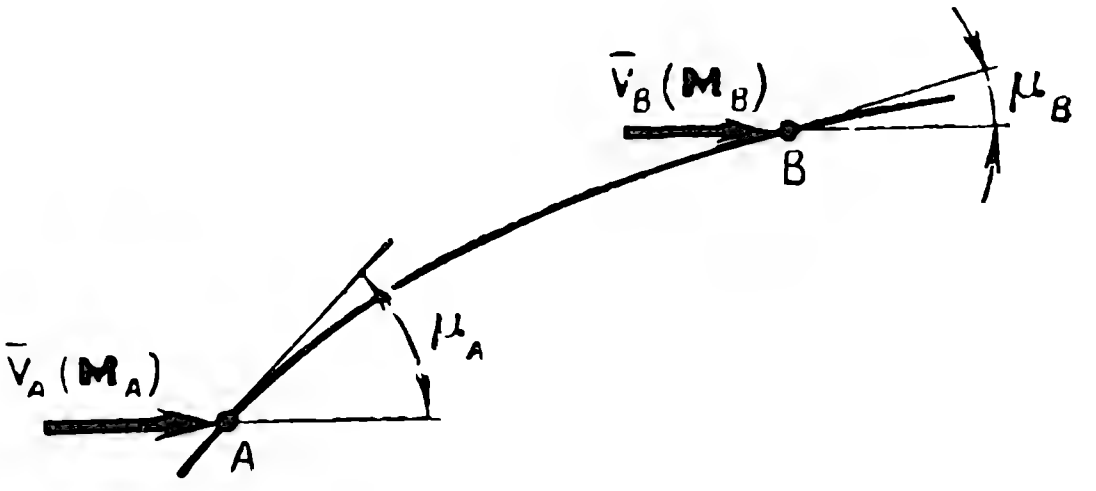


Рис. 2.IV.3. Криволинейная волна слабых возмущений (волна Маха)

IV.4. Изменится ли угол наклона линии Маха $\mu=\arcsin(1/M)$, если в потоке газа с постоянными теплоемкостями и одной и той же скоростью увеличится давление?

IV.5. Что произойдет с углом наклона линии Маха в потоке газа с постоянными теплоемкостями при неизменной скорости и уменьшении температуры?

IV.6. Как изменится наклон линии Маха, вычисленный в некоторой точке потока газа, если учесть влияние диссоциации?

IV.7. Как изменится угол наклона линии Маха в диссоциирующем газе при уменьшении давления?

IV.8. Что является причиной образования скачков уплотнения?

IV.9. Как известно, давление, плотность и температура за скачком уплотнения резко возрастают. В чем существенное отличие такого скачкообразного изменения параметров от плавного их возрастания в случае отсутствия скачков?

IV.10. Чем объяснить, что с ростом температуры газа за скачком уплотнения уменьшается скорость потока?

IV.11. Для определения неизвестных величин—отношений параметров газа за прямым скачком уплотнения и перед ним в случае постоянных теплоемкостей — должны быть известны число M_1 набегающего потока и показатель адиабаты $k_1 = c_p/c_v$. Какие дополнительные данные должны быть известны, если решается задача о скачке уплотнения, поток за которым диссоциирован?

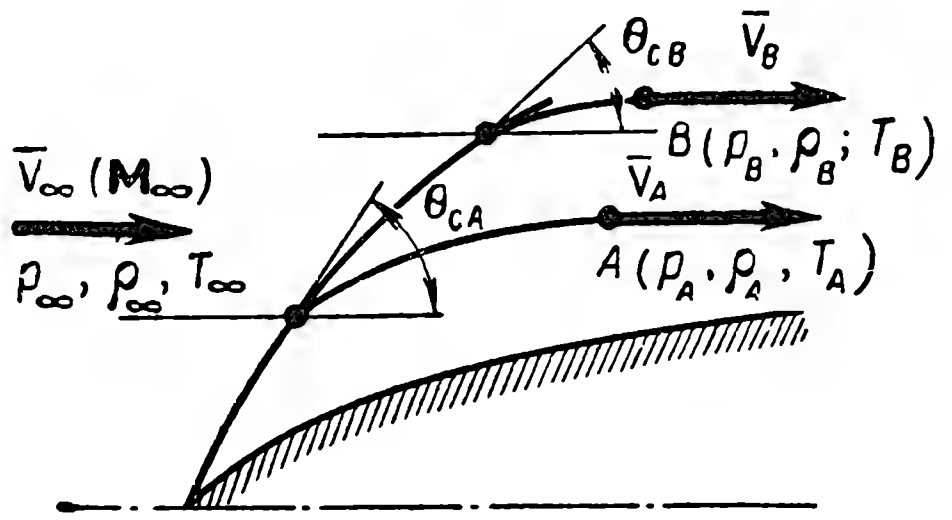


Рис. 2.IV.4. Схема течения газа через криволинейный скачок уплотнения

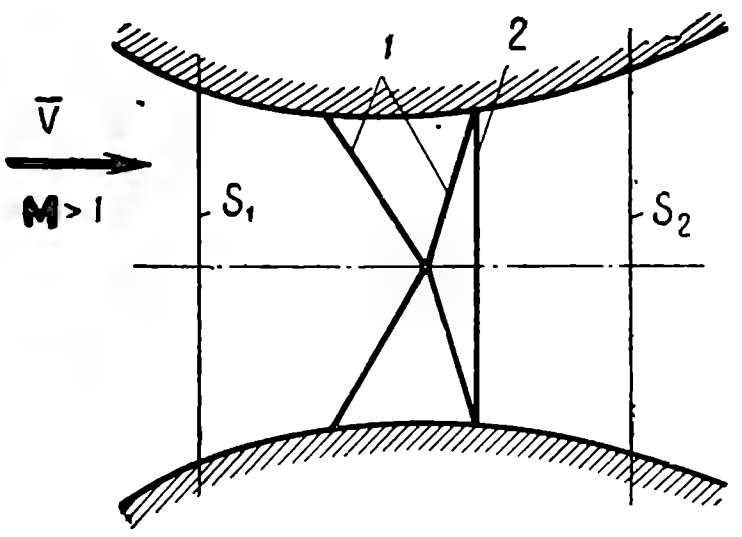


Рис. 2.IV.5. Система скачков в одномерном потоке:
1 — косые скачки; *2*—прямой скачок

IV.12. Параметры газа за косым скачком уплотнения можно рассматривать такими же, как их соответствующие значения за прямым скачком. При каком условии это возможно?

IV.13. Определите угол наклона присоединенного скачка уплотнения θ_c в плоском сверхзвуковом потоке, если заданы отношение плотностей $\rho_2/\rho_1 = 10$ и угол наклона преграды $\beta_c = 30°$.

IV.14. Найдите отношение скоростей V_2/V_1 после и до косого скачка уплотнения, присоединенного к заостренному клину с углом $\beta_c = 30°$. Отношение плотностей для условий непосредственно за скачком и перед ним задано и равно $\rho_2/\rho_1 = 10$.

IV.15. Разность давлений и отношение плотностей для условий диссоциированного газа $p_2 - p_1 = 30$ *кГ/см²*, $\rho_2/\rho_1 = 10$, а плотность $\rho_1 = 0{,}125$ *кГ·сек²/м⁴*. Определите разность энтальпий $i_2 - i_1$ для условий после скачка и перед ним.

IV.16. В точках A и B, расположенных за криволинейным скачком уплотнения на различных линиях тока (рис. 2.IV.4), одинаковы скорости ($V_A = V_B = V$). Сравните между собой соответствующие давления (p_A, p_B), плотности (ρ_A, ρ_B) и температуры (T_A, T_B).

IV.17. Получите уравнение расхода для одномерного установившегося движения газа с постоянными теплоемкостями в струйке, проходящей через систему скачков уплотнения (рис. 2.IV.5), в следующем виде:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{q(M_1)}{q(M_2)},$$

где $\nu = p_0'/p_0$ — коэффициент восстановления давления в системе скачков уплотнения (p_0 и p_0' — соответственно давление изэнтропического торможения и давление торможения за последним скачком уплотнения); S_1, S_2 — соответствующие площади поперечного сечения струйки; $q(M)$ — газодинамическая функция числа Маха, представляющая собой

отношение $\rho V/\rho^* a^*$ (здесь ρV — удельный расход в сечении с заданным числом Маха; $\rho^* a^*$ — значение удельного расхода в критическом сечении струйки).

IV.18. Как изменяются температура и скорость в потоке газа за скачком уплотнения по сравнению с изэнтропическим течением при одинаковом изменении давления?

IV.19. Найти параметры газа за присоединенным косым скачком уплотнения (p_2/p_1; ρ_2/ρ_1; a_2/a_1; T_2/T_1; $\mathbf{M}_2$; V_2/V_1), а также угол его наклона θ_c, если заданы угол клина $\beta_c = 30°$, число Маха $\mathbf{M}_1 = 5$ и показатель адиабаты $k = 1{,}2$.

IV.20. В рабочей части сверхзвуковой аэродинамической трубы расположено клиновидное тело A_0K (рис. 2.IV.6). Обтекание этого тела сопровождается возникновением у его вершины A_0 скачка уплотнения, который встречает стенку DA в точке A. Скорость за ним не параллельна стенке, поэтому она взаимодействует с потоком, вызывая появление отраженного скачка AB, за которым поток становится параллельным стенке. Определите угол отражения скачка при условии, что перед скачком A_0A число $\mathbf{M}_1 = 5$, а угол клина $\beta_{кл} = 15°$.

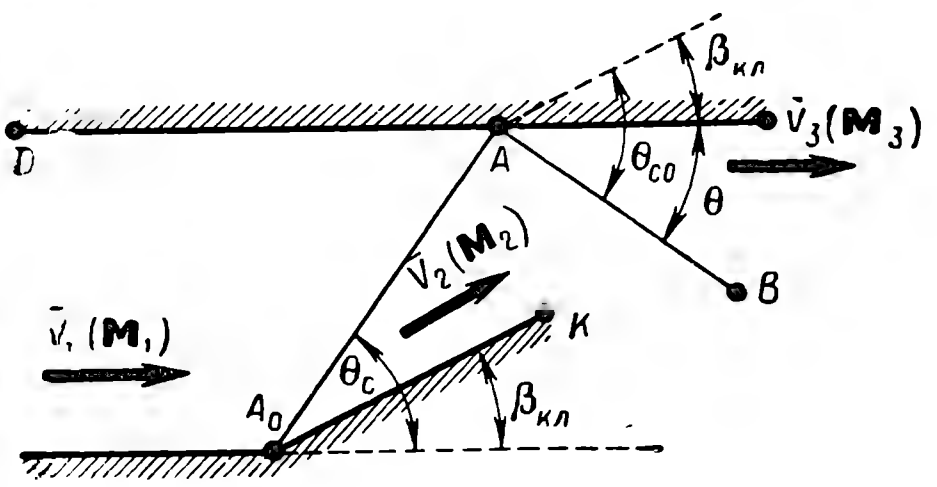


Рис. 2.IV.6. Схема отражения косого скачка уплотнения от твердой стенки

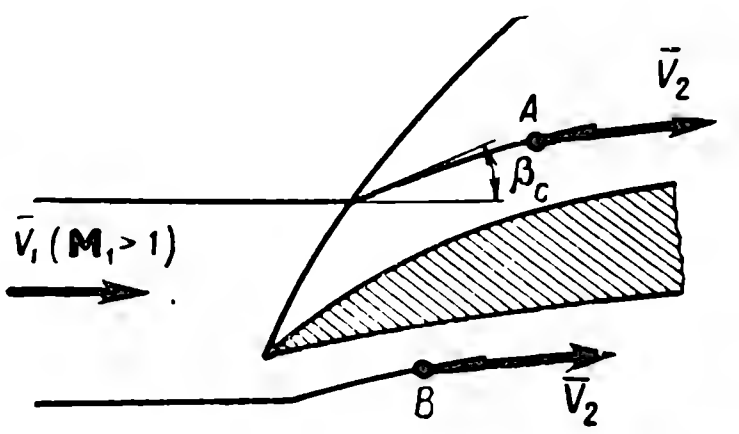


Рис. 2.IV.7. Схема обтекания сверхзвуковым потоком тела:
A — точка за скачком уплотнения; *B* — точка в изэнтропическом течении

IV.21. Определите коэффициент давления $\bar{p}_2$ за скачком уплотнения при условии, что угол его наклона $\theta_c = 30°$, а число Маха перед скачком $\mathbf{M}_1 = 5$. Сравните при этом два значения коэффициента давления, одно из которых вычислено для $k = 1{,}2$, а другое для $k = 1{,}4$. Найдите для $k = 1{,}2$ и $1{,}4$ предельные значения $\bar{p}_2$, соответствующие $\mathbf{M}_1 \to \infty$.

IV.22. На рис. 2.IV.7 показана картина обтекания некоторой поверхности сверхзвуковым потоком с числом $\mathbf{M}_1 = 5$ (статическое давление $p_1 = 1$ *кГ/см*^{2}, показатель адиабаты $k = 1{,}2$). Одна из линий тока проходит через скачок уплотнения, а другая расположена вне скачка на нижней стороне обтекаемой поверхности. Определите давления в точках A и B на этих линиях тока при условии, что скорости в этих точках одинаковы и равны $V_2 = 1{,}1\, V_1$.

IV.23. В сверхзвуковой трубе с закрытой рабочей частью прямоугольного сечения (рис. 2.IV.8, *а*) на входе в диффузор образуется система из двух пар наклонных к оси трубы скачков уплотнения (рис. 2.IV.8, *б*). При этом скачки $AB, A'B'$ по отношению к потоку в рабочей части являются косыми, а скачки $CB, C'B'$ — прямыми (по отношению к течению за скачками AB и $A'B'$). Определите давление торможения p_0 в форкамере, необходимое при такой системе скачков для получения потока с числом $\mathbf{M}_\infty$ в рабочей части и преодоления на выходе диффузора атмосферного противодавления ($p_B = 1$ *кГ/см*^{2}) при скорости потока, соответствующей $\mathbf{M}_B = 0{,}3$.

IV.24. Оптические исследования показали, что при сверхзвуковом истечении газа на выходе сопла (рис. 2.IV.9) в одном случае образуют-

ся волны разрежения (волны Маха), а в другом — скачки уплотнения. При каких условиях и почему возникает такая картина движения газа?

IV.25. Подберите угол клина $\beta_{кл}$, при котором число Маха за возникающим перед таким клином скачком уплотнения равно единице ($M_2=1$). Число Маха набегающего потока $M_1=4$; показатель адиабаты $k=1{,}4$.

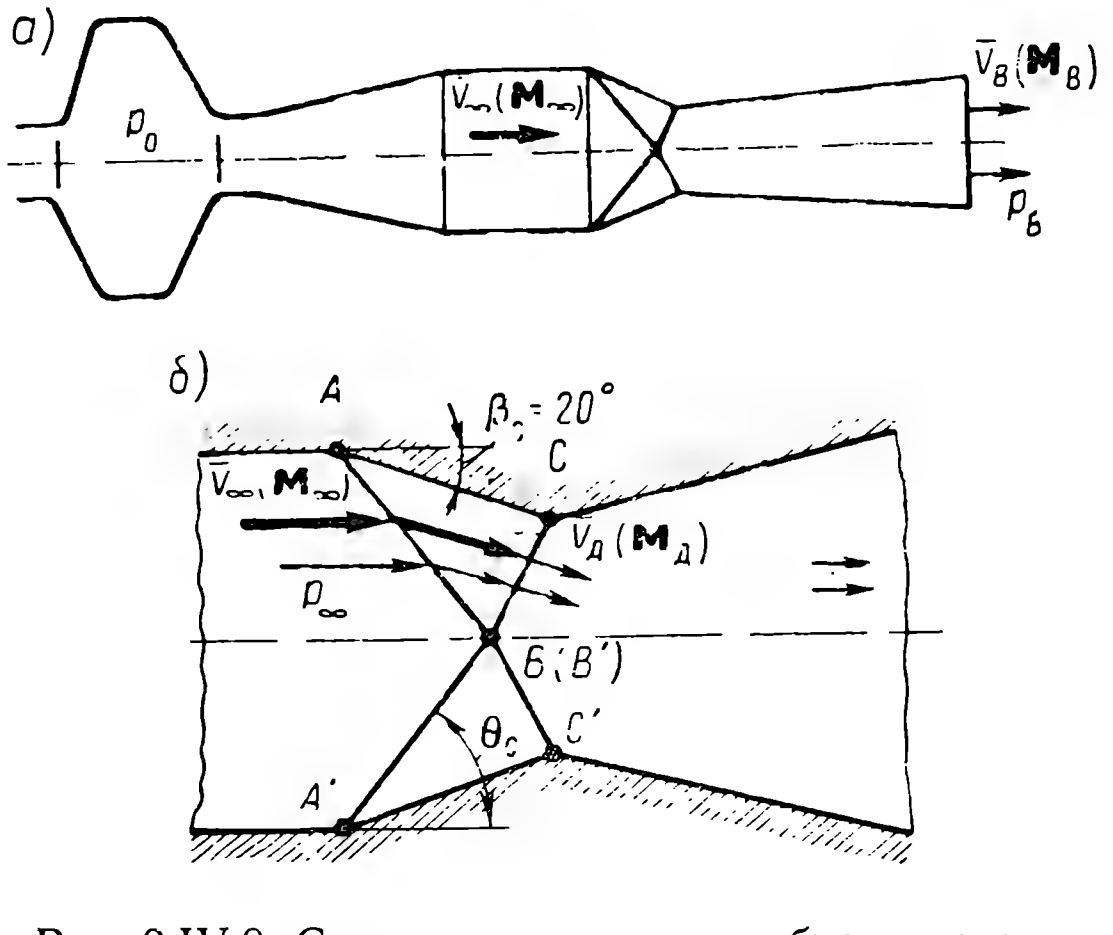


Рис. 2.IV.8. Схема к расчету потребного давления в форкамере:

а — схема сверхзвуковой аэродинамической трубы; *б* — система скачков уплотнения на входе в диффузор

IV.26. Найдите такое значение угла скачка $\theta_{ст}$, при котором будет происходить поворот потока за ним на наибольший угол $\beta_{ст}$. Определите величину этого угла в зависимости от числа M_1 и показателя адиабаты газа k.

IV.27. Коэффициент давления непосредственно после косого скачка уплотнения, за которым поток отклоняется на угол β_c, в общем случае может быть определен из зависимостей

$$\bar{p}=\frac{2(p_2-p_1)}{kp_1M_1^2}=\frac{4}{k+1}\left(\sin^2\theta_c-\frac{1}{M_1^2}\right) \qquad (2.IV.1)$$

и (3.IV.18), в которой $\beta_{кл}=\beta_c$. Покажите, что при малых углах β_c этот коэффициент можно представить с точностью до малых второго порядка в виде

$$\bar{p}=\frac{2}{\sqrt{M_1^2-1}}\beta_c+\frac{(k+1)M_1^4-4(M_1^2-1)}{2(M_1^2-1)^2}\beta_c^2.$$

IV.28. Как изменится критический угол поворота потока за скачком при увеличении давления?

IV.29. Что произойдет с критическим углом поворота потока при увеличении числа M_1?

IV.30. На рис. 2.IV.10 показана схема отсоединенного криволинейного скачка уплотнения. Каким будет характер изменения угла наклона вектора скорости β_c вдоль скачка в направлении от точки A (прямой скачок) до точки B (волна Маха)?

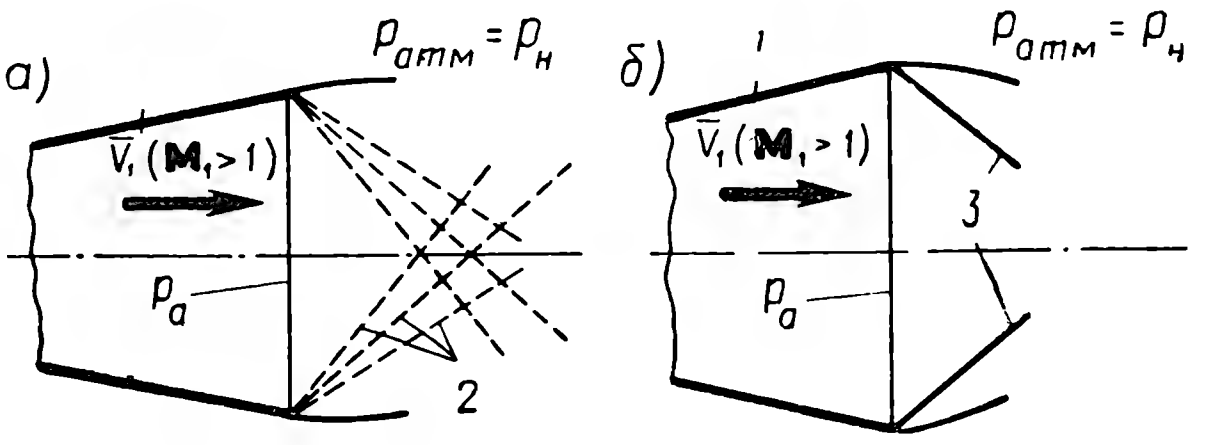


Рис. 2.IV.9. Схемы истечения сверхзвуковой струи в атмосферу:

а — поток с образованием волн разрежения; *б* — течение со скачками уплотнения; *1* — сопло; *2* — линии разрежения (волны Маха); *3* — скачки уплотнения

IV.31. Из формулы (3.IV.1) следует, что заданному углу β_c соответствуют два значения угла θ_c: одно из них — бо́льшее (знак плюс), другое — ме́ньшее (знак минус). Каким свойством характеризуются течения за скачками уплотнения, наклоненными под этими углами θ_c?

IV.32. Как изменяется угол наклона присоединенного скачка уплотнения θ_c при увеличении угла клина β_c?

IV.33. Что произойдет с углом θ_c, если увеличить число $\mathbf{M}_1$ набегающего потока?

IV.34. В двух сверхзвуковых потоках с различными числами Маха $\mathbf{M}_{\infty 1}$, $\mathbf{M}_{\infty 2}$ и показателями адиабаты k_1, k_2 расположены клиновидные поверхности с одинаковыми углами заострения ($\beta_{кл1}=\beta_{кл2}=\beta_{кл}$). Скачок уплотнения перед одной из этих поверхностей оказался присоединенным прямолинейным, а перед другой — отошедшим криволинейным (рис. 2.IV.11). Сравните между собой возможные значения чисел Маха и показателей адиабаты, которым соответствуют указанные скачки уплотнения.

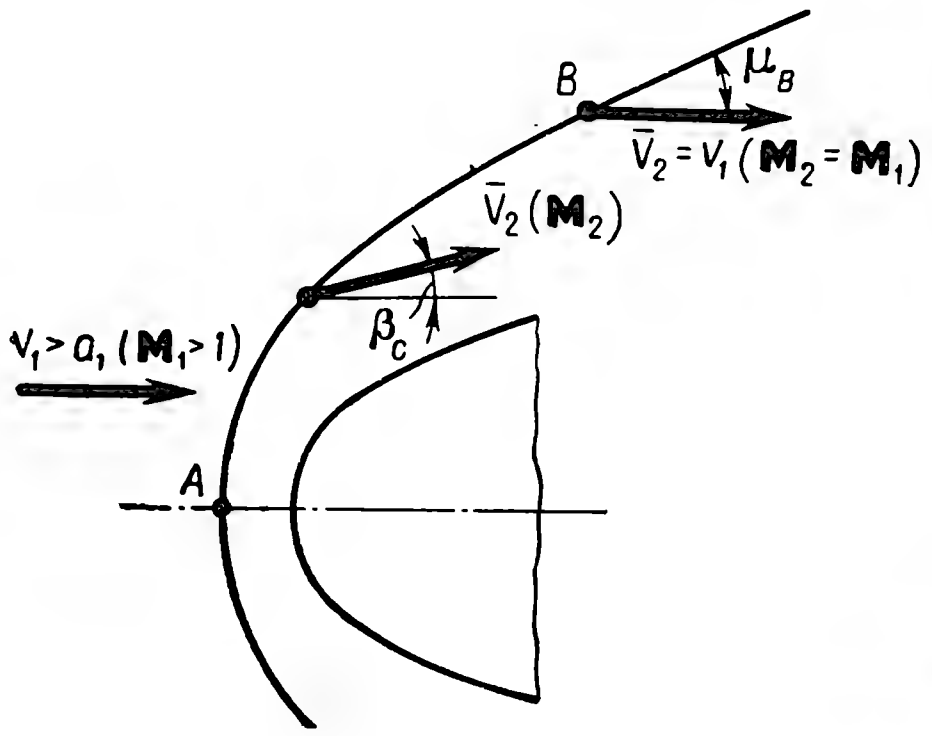


Рис. 2.IV.10. Схема отсоединенного криволинейного скачка уплотнения:

A — точка на участке прямого скачка; *B* — точка на волне Маха

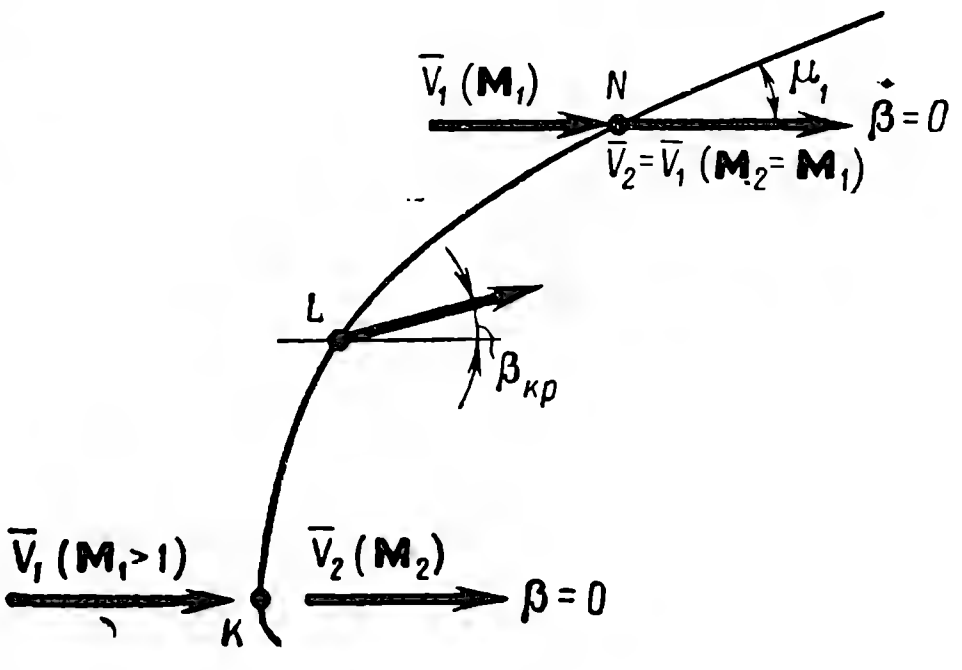


Рис. 2.IV.12. Характерные точки на скачке уплотнения:

K — точка на участке прямого скачка; *L* — точка максимального угла поворота; *N* — точка на волне Маха

IV.35. Покажите на рис. 3.IV.4 области применения ударной поляры для расчета сверхзвукового обтекания заостренного клина.

IV.36. На рис. 2.IV.12 показана схема отсоединенного скачка уплотнения. Покажите на ударной поляре (см. рис. 3.IV.4) точки, соответствующие точкам скачка, отмеченным на рис. 2.IV.12.

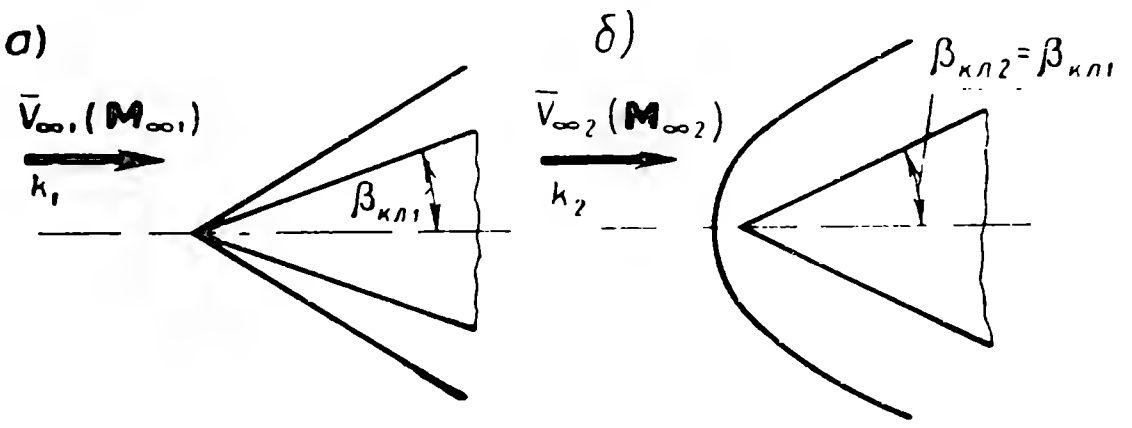


Рис. 2.IV.11. Схемы скачков уплотнения перед клином:

а — присоединенный прямолинейный; *б* — отошедший криволинейный

IV.37. Напишите уравнения годографа скорости за скачком уплотнения для случая невозмущенного потока газа с максимальной скоростью. Каков будет вид этого годографа?

IV.38. Определите изменение давления, температуры и скорости, а также число Маха за прямым скачком уплотнения, если известно, что отношение плотностей за этим скачком и перед ним $\rho_2/\rho_1=5$, а показатель адиабаты $k=1{,}2$.

IV.39. В чем отличие прямого скачка уплотнения от косого с точки зрения характера изменения скорости за ним?

IV.40. Определите коэффициенты давления в точке полного торможения за прямым скачком уплотнения при $\mathbf{M}_1=10$ для $k=1{,}2$ и 1,4. Сравните найденные значения этих коэффициентов между собой и с их предельными величинами, полученными для условия $\mathbf{M}_1\to\infty$.

IV.41. Найдите для прямого скачка уплотнения при постоянных теплоемкостях по известным значениям $\lambda_1=1{,}90$ и $k=1{,}40$ относительную

скорость после скачка λ_2, а также отношения ρ_2/ρ_1, T_2/T_1, p_2/p_1 и p_0'/p_0.

IV.42. Определите максимальное «загромождение» моделью (или устройством для ее крепления) потока в рабочей части сверхзвуковой аэродинамической трубы с числом $\mathbf{M}_\infty = 2{,}68$, при котором не будет происходить «запирания» трубы [такое запирание сопровождается прохождением через незагроможденную часть трубы (между стенкой трубы и моделью) «пускового» скачка уплотнения, течение за которым дозвуковое].

IV.43. Найдите для скачка уплотнения, за которым угол поворота потока $\beta_c = 30°$, отношение плотностей ρ_2/ρ_1, коэффициенты статического давления $\bar{p}_2$ и давления торможения $\bar{p}_0$, а также числа $\mathbf{M}_2$ в предельном случае сверхзвукового течения газа при $\mathbf{M}_1 \sin\theta_c \to \infty$ и значениях $k = 1{,}2$ и $1{,}4$.

IV.44. Сверхзвуковое течение перед скачком уплотнения характеризуется числом $\mathbf{M}_1 = 15$ и значением $k = 1{,}4$, а непосредственно за скачком — поворотом на угол $\beta_c = 5{,}73°$. Рассматривая другие сверхзвуковые потоки с очень большими числами Маха, подобными заданному, определите параметры газа за скачками уплотнения для $\mathbf{M}_1 = 10$, $\mathbf{M}_1 = 20$ при том же значении $k = 1{,}4$.

IV.45. Какой будет температура за скачком уплотнения в диссоциированном газе по сравнению с ее значением при постоянных теплоемкостях?

IV.46. Сверхзвуковой газовый поток обтекает поверхность клина с некоторым углом β_c. Каким будет угол наклона скачка θ_c при диссоциации по сравнению со случаем постоянных теплоемкостей?

IV.47. Как изменится давление за скачком уплотнения, если учесть влияние диссоциации газа?

IV.48. Сравните плотность за скачком уплотнения при постоянных теплоемкостях и в случае диссоциации.

IV.49. Что произойдет с критическим углом поворота потока за скачком уплотнения (критическим углом клина), если заменить поток с постоянными теплоемкостями течением диссоциирующего газа?

IV.50. Определите параметры газа непосредственно за прямым скачком уплотнения, а также значения соответствующих параметров в точке полного торможения за этим скачком при скорости $V_1 = 8{,}1$ *км/сек*, давлении $p_1 = 0{,}01$ *кГ/см*^{2}, среднем молекулярном весе $(\mu_{ср})_1 = 29{,}0$, температуре $T_1 = 236$ К и скорости звука $a_1 = 310$ *м/сек*.

IV.51. Рассчитайте параметры воздуха за косым скачком уплотнения для следующих условий: число $\mathbf{M}_1 = 11$, угол поворота потока за скачком $\beta_c = 45°$, высота полета $H = 5$ *км*.

IV.52. Определите параметры газа в точке полного торможения за прямым скачком уплотнения, рассматривая движение за ним как поток несжимаемой среды. Скорость воздуха перед скачком $V_1 = 8100$ *м/сек*. Сравните полученные значения давления, плотности и температуры с их значениями, найденными обычным расчетом с учетом диссоциации и сжимаемости газа за скачком. При определении параметров газа непосредственно за скачком уплотнения используйте исходные данные и решение задачи IV.50.

IV.53. Известны угол наклона косого скачка уплотнения $\theta_c = 55°$, угол поворота потока за этим скачком $\beta_c = 45°$, а также высота полета $H = 10$ *км*. Определите число $\mathbf{M}_1$ перед скачком, а также соответствующие параметры непосредственно за ним.

IV.54. Измерениями в точке полного торможения на летательном аппарате, совершающем полет на высоте $H = 5$ *км*, найдены давление $p_0' = 10$ *кГ/см*^{2} и температура $T_0' = 7500$ К. Определите скорость летательного аппарата и параметры газа за скачком уплотнения.

IV.55. Обработка интерферограмм показала, что за косым скачком уплотнения перед плоской преградой с углом $\beta_c = 30°$ плотность воздуха увеличилась при одном режиме работы аэродинамической трубы в 3,41 раза, а при другом — в 10 раз. Достаточно ли этих данных для определения отношений соответствующих значений скоростей и температур после и до скачка? Задайтесь в случае необходимости недостающими параметрами и найдите искомые отношения.

IV.56. Определите параметры за скачком уплотнения в воздухе, рассматриваемом как смесь чистых диссоциирующих азота и кислорода, полагая, что нормальная составляющая скорости перед скачком $V_{n1} = 1{,}5V_d$, а полет совершается на некоторой высоте, где $\rho_1 = 1{,}5 \cdot 10^{-7}\ \rho_d$ (V_d и ρ_d — соответственно характеристические скорость и плотность диссоциации).

IV.57. По данным задачи IV.51 определите степень диссоциации воздуха за скачком уплотнения, рассматривая его как двухатомную модель смеси кислорода и азота.

IV.58. Средний молекулярный вес воздуха за скачком уплотнения $(\mu_{ср})_2 = 23{,}2$. Определите соответствующую степень диссоциации α_2, полагая воздух перед скачком недиссоциированным ($\alpha_1 = 0$).

IV.59. Как изменится степень диссоциации за скачком уплотнения на участке длины пути релаксации?

IV.60. Определите параметры газа за прямым скачком уплотнения с учетом влияния неравновесности при условии, что до скачка $M_1 = 25$; $p_1 = 0{,}01$ *кГ/см*^{2}; $T_1 = 250$ K; $k_1 = 1{,}4$. Сравните эти параметры с соответствующими значениями при равновесной диссоциации, вычислите время и длину пути релаксации за скачком.

V.1. Уравнение неразрывности, преобразованное с помощью уравнения движения, написано в форме

$$\left(V_x^2 - a^2\right)\frac{\partial V_x}{\partial x} + V_x V_y\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) + \left(V_y^2 - a^2\right)\frac{\partial V_y}{\partial y} - \varepsilon\frac{a^2 V_y}{y} = 0. \quad (2.V.1)$$

Какие виды движения газа могут исследоваться при помощи этого уравнения?

V.2. Покажите, что при изменении энтропии или энтальпии торможения в потоке газа при переходе от одной линии тока к другой поток будет вихревым.

V.3. Выразите математически тот факт, что энтропия частицы газа, движение которой мы наблюдаем, остается при этом движении постоянной, если не учитывать внутреннее трение и перенос тепла вследствие теплопроводности, т. е. если термически процесс является изэнтропическим.

V.4. Вдоль линии тока величина энтальпии торможения $i_0 = i + V^2/2$, определяющая полную энергию единицы массы газа, не меняется. Покажите, что при этом выполняется также условие постоянства энтропии S.

V.5. Содержание задачи Коши заключается в отыскании в окрестности начальной кривой решения дифференциального уравнения для потенциала φ

$$\left(V_x^2 - a^2\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + 2V_x V_y\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} + \left(V_y^2 - a^2\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (2.V.2)$$

удовлетворяющего заданным на этой кривой некоторым дополнительным условиям. Назовите эти условия.

V.6. При решении задачи Коши об отыскании искомого потенциала φ можно ограничиться определением вторых производных ($u = \varphi_{xx}$, $s = \varphi_{xy}$, $t = \varphi_{yy}$) на заданной кривой, уравнение которой в общем виде $F(x, y, z) = 0$. Для этой цели необходимо решить следующую систему из трех уравнений:

$$\left.\begin{aligned} Au + 2Bs + Ct + H &= 0;\\ dx\cdot u + dy\cdot s + 0\,t - d\varphi_x &= 0;\\ 0\,u + dx\cdot s + dy\cdot t - d\varphi_y &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (2.V.3)$$

При каком условии неизвестные производные u, s, t определяются однозначно?

V.7. Известно, что если главный определитель Δ системы уравнений (2.V.3) равен нулю, то эта система будет иметь конечные, хотя и неоднозначные, решения только тогда, когда остальные три частных определителя Δ_u, Δ_s, Δ_t будут равны нулю. Покажите это на примере решения алгебраической системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 0x + 0y + 0z &= 0;\\ 2x + 2y + 0z &= 2;\\ -x + 5y + z &= 3. \end{aligned}\right\} \quad (2.V.4)$$

V.8. Из задачи Коши известно, что конечные, хотя и неоднозначные, решения искомой функции φ в окрестности некоторой начальной кривой существуют, если главный определитель Δ системы (2.V.3) равен нулю. Геометрически это означает, что начальная кривая совпадает с особой кривой — характеристикой, представляемой уравнением

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\frac{dy}{dx} + C = 0\left(A = V_x^2 - a^2,\ B = V_x V_y,\ C = V_y^2 - a^2\right), \quad (2.V.5)$$

называемым характеристическим. На основе анализа системы уравнений (2.V.3) укажите наряду с (2.V.5) дополнительное условие, которое должно быть выполнено, чтобы существовали указанные решения.

V.9. Решение квадратного характеристического уравнения (2.V.5) относительно производной dy/dx имеет вид

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = y'_{1,2} = \frac{1}{A}\left(B \pm \sqrt{B^2 - AC}\right). \qquad (2.V.6)$$

В чем геометрический смысл этого решения?

V.10. Что понимают в методе характеристик под условиями совместности и каков геометрический смысл этих условий?

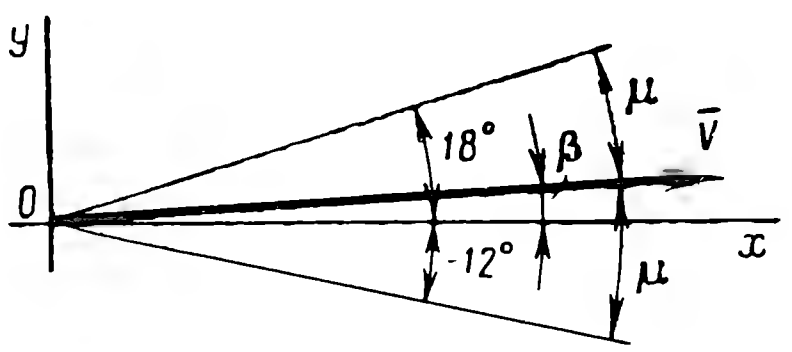


Рис. 2.V.1. Линии Маха в газовом потоке

V.11. В чем отличительная особенность характеристик от других кривых, проведенных в потоке?

V.12. В заданной точке потока вектор скорости наклонен к оси Ox под углом $\beta = 40°$. Определите направление характеристик, проходящих через эту точку, если число Маха в ней равно двум.

V.13. Покажите, что характеристическое уравнение в физической плоскости по внешней форме одинаково для двухмерных плоского и пространственного осесимметричного течений газа.

V.14. В некоторой точке потока найдены при помощи теневой фотографии углы наклона волн возмущения (линий Маха), равные 18° и —12° (рис. 2.V.1.). Определите направление вектора скорости и число Маха в этой точке.

V.15. В двух точках сверхзвуковых потоков — «холодном» и «горячем» (показатели адиабаты газа в этих потоках соответственно $k_1 > k_2$) — относительные скорости $\lambda = V/a^*$ одинаковы. Сравните углы наклона характеристик в этих точках (μ_1 и μ_2).

V.16. Определите углы наклона характеристик в заданной точке потока, если составляющие скорости в этой точке $V_x = 320$ *м/сек*, $V_y = 150$ *м/сек*, а скорость звука $a = 280$ *м/сек*.

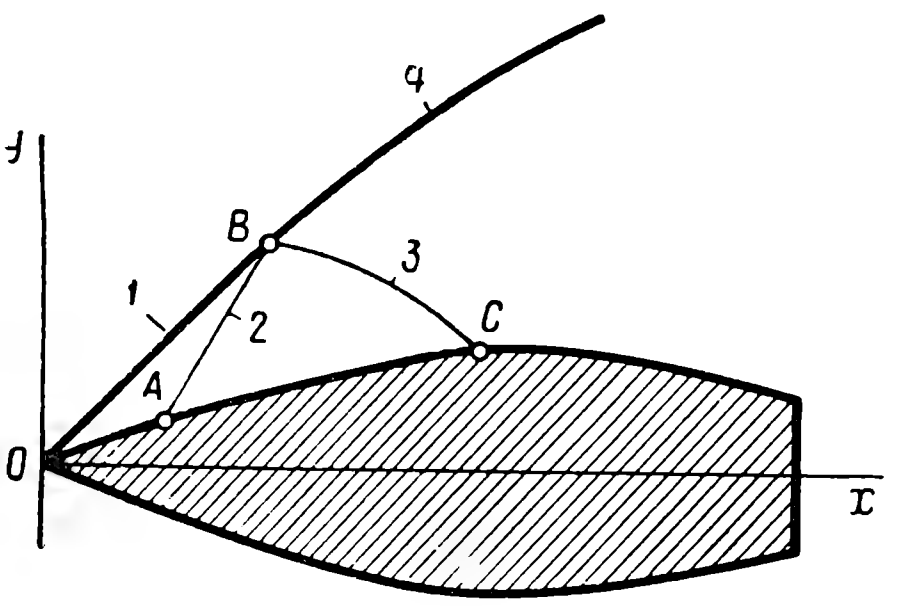


Рис. 2.V.2. Схема обтекания заостренного профиля:

1 — головной скачок уплотнения; *2* — падающая волна разрежения (характеристика первого семейства); *3* — отраженная волна разрежения (характеристика второго семейства); *4* — криволинейный скачок уплотнения

V.17. В физической плоскости характеристики первого и второго семейств наклонены соответственно под углом 45° и 13°. Определите направление сопряженных характеристик в плоскости годографа.

V.18. Как будет изменяться давление торможения p'_0 с увеличением энтропии газа ($dS/dn > 0$) при переходе от одной линии тока к другой?

V.19. Укажите область сверхзвукового течения около заостренного клина с криволинейной стенкой, которая должна рассчитываться методом характеристик с учетом вихревого влияния (рис. 2.V.2).

V.20. Уравнение для характеристик в плоскости годографа для плоского сверхзвукового потока имеет вид

$$\beta = \pm \omega + \beta_{1,2}, \qquad (2.V.7)$$

где угол ω определяется по выражению

$$\omega = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\,\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{k-1}{k+1}(M^2-1)} - \operatorname{arctg}\sqrt{M^2-1} \qquad (2.V.8)$$

или

$$\omega = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\,\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\lambda^2-1}{\lambda_{max}^2-\lambda^2}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{k+1}{k-1}\cdot\frac{\lambda^2-1}{\lambda_{max}^2-\lambda^2}}. \qquad (2.V.9)$$

Каков физический смысл этого угла?

V.21. В заданном сечении сверхзвуковой струи газа число $M_1=5$ (точка A на рис. 2.V.3). Определите угол отклонения $\Delta\beta$ струи от этого сечения при ее расширении до состояния, характеризующегося

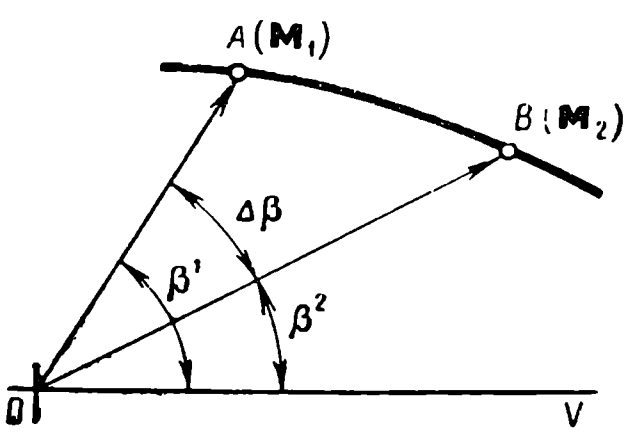


Рис. 2.V.3. К определению угла отклонения потока

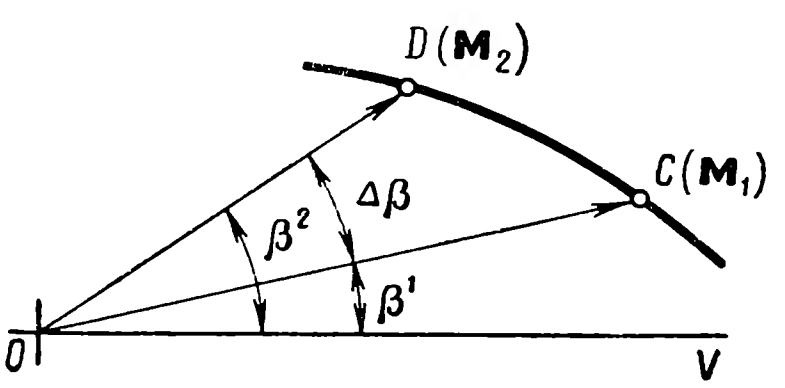


Рис. 2.V.4. Схема расчета числа **M** по углу отклонения газового потока

числом $M_2=10$ (в точке B). Течение — изэнтропическое, показатель адиабаты газа $k=c_p/c_v=1{,}4$.

V.22. Отклонение сверхзвукового потока от начального состояния в точке C (рис. 2.V.4), характеризуемого числом $M_1=3$, определяется углом $\Delta\beta=10°$. Найдите число Маха M_2 в точке D отклонившегося потока для $k=c_p/c_v=1{,}4$ и определите, происходит ли указанное отклонение потока со сжатием или с расширением.

V.23. Сверхзвуковой поток в некотором сечении струи газа ($k=1{,}4$) характеризуется числом $M_2=10$. На сколько отличается от предельного значения (ω_{max}) угол отклонения этого потока, отсчитываемый от начального состояния течения с числом $M_1=1{,}0$?

V.24. Найти предельное отклонение потока, необходимое для получения максимальной скорости, если угол этого отклонения отсчитывается от направления потока, в котором число $M=5$ ($k=c_p/c_v=1{,}4$).

V.25. Поток газа в некотором сечении струи характеризуется следующими параметрами: $M_1=3{,}2$; $p_1=0{,}12$ *кГ/см²*; $\rho_1=0{,}02$ *кГ·сек²/м⁴*; $T_1=209$ К. Определите соответствующие значения этих параметров, а также скорость V_2 при изэнтропическом движении газа с постоянными теплоемкостями ($k=1{,}4$) и отклонении струи на угол $\Delta\beta=-13°$.

V.26. Газовая струя с числом $M_a=2{,}3$ и давлением $p_a=0{,}56$ *кГ/см²* на срезе сверхзвукового сопла истекает в неподвижную среду с давлением $p_н=0{,}11$ *кГ/см²*. Определите угол поворота струи ($k=c_p/c_v=1{,}4$).

V.27. Покажите, что если в плоском потенциальном (сверхзвуковом) потоке одна из характеристик какого-либо семейства прямая, то и все другие характеристики этого семейства также будут прямыми.

V.28. На рис. 2.V.5 показано расположение сопряженных характеристик в физической плоскости x, y (рис. 2.V.5, *а*) и в плоскости годографа λ_x, λ_y (рис. 2.V.5, *б*, *в*). Рассмотрите виды сверхзвуковых течений, для которых имеет место такое расположение характеристик.

V.29. На рис. 2.V.6 показаны схемы обтекания плоским сверхзвуко-

вым потоком двух одинаковых поверхностей. На одной из этих схем характеристики имеют вид прямых линий, а на другой они — криволинейные. Чем можно объяснить это различие?

V.30. В двух точках A и B с координатами $x_A=10$ и $y_A=10$, $x_B=12$ и $y_B=8$ известны скорости плоского (или пространственного осе-

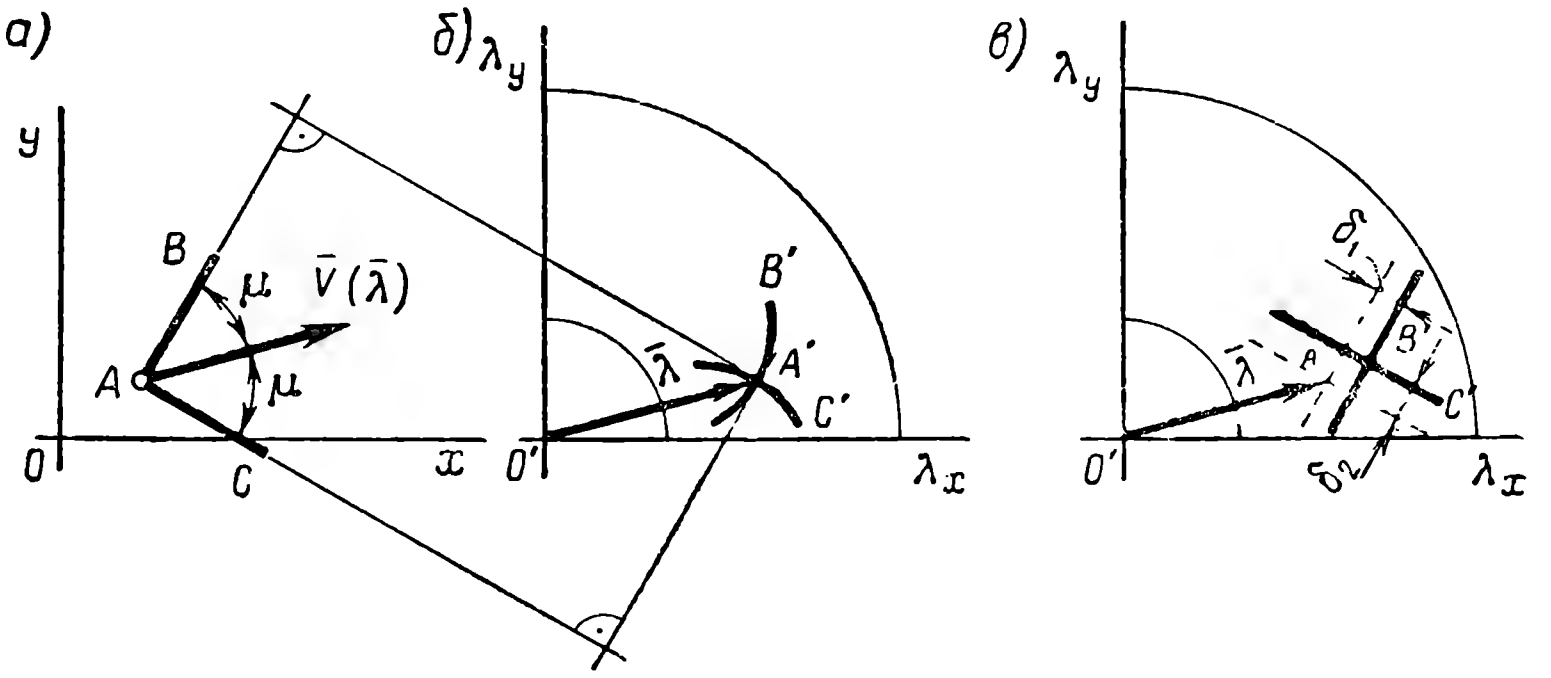


Рис. 2.V.5. Схема расположения сопряженных характеристик:
а — в физической плоскости; *б*, *в* — в плоскости годографа вектора скорости

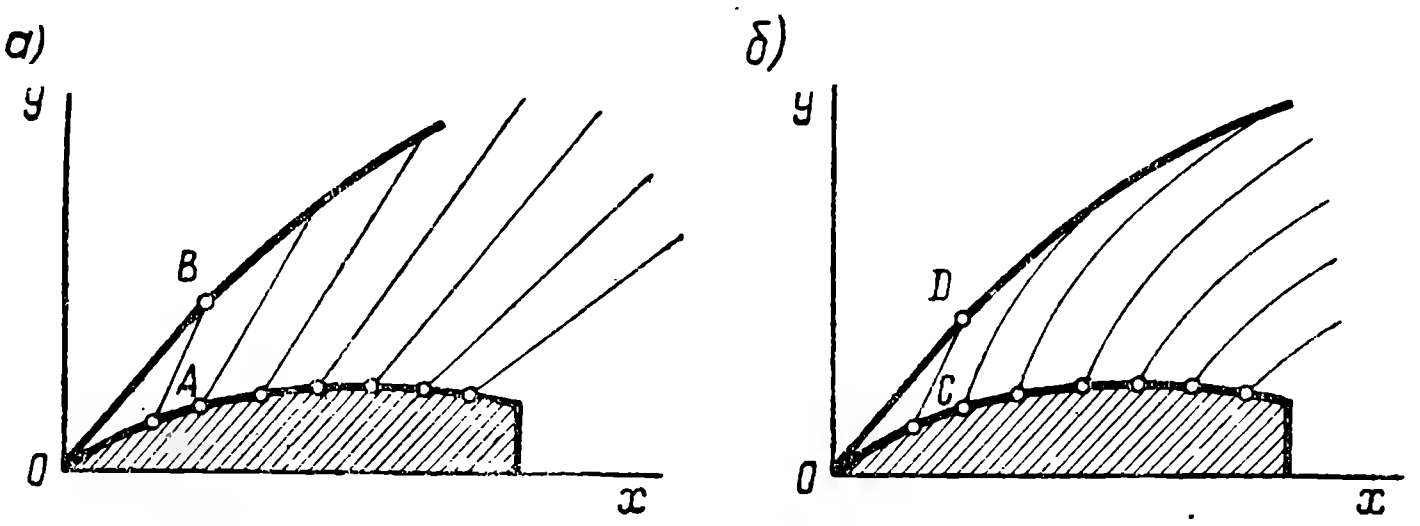


Рис. 2.V.6. Обтекание профиля сверхзвуковым потоком:
а — характеристики в виде прямых линий; *б* — криволинейные характеристики

симметричного) сверхзвукового газового потока $V_A=800$ *м/сек*, $V_B=820$ *м/сек* и их направления, определяемые соответственно углами $\beta_A=30°$, $\beta_B=32°$ (рис. 2.V.7). Найти скорость и угол отклонения потока в точке C на пересечении характеристик разных семейств, выходящих из точек A и B, при условии, что течение изэнтропическое, скорость невозмущенного потока $V_\infty=750$ *м/сек*, температура $T_\infty=228$ К, $k=c_p/c_v=1{,}4$.

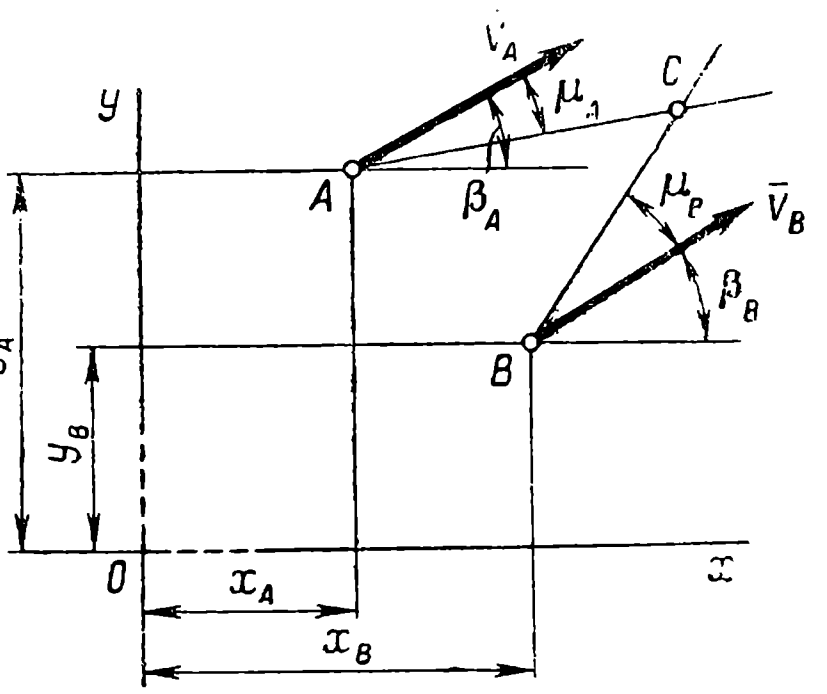


Рис. 2.V.7. Схема расчета скорости в точке C пересечения двух характеристик различных семейств

V.31. По условиям задачи V.30 рассчитайте скорость в точке C на пересечении характеристик разных семейств, проведенных из точек A и B, при условии, что течение неизэнтропическое. Изменение энтропии в точках A и B задано через изменение давления торможения ($p'_{0A}=0{,}8\ p_0$ в точке A; $p'_{0B}=0{,}77\ p_0$ в точке B; p_0 — давление торможения при изэнтропическом сжатии).

V.32. Определить скорость на поверхности тела вращения в месте пересечения характеристики второго семейства, проведенной из близко

расположенной точки D (рис. 2.V.8). Условия задачи следующие: скорость набегающего потока $V_\infty = 750$ *м/сек*; температура $T_\infty = 288$ К; $k = c_p/c_V = 1{,}4$; давление торможения на поверхности $p_0' = 0{,}77\ p_0$. Для точки D это давление $p_{0D}' = 0{,}8\ p_0$, а скорость в ней $V_D = 800$ *м/сек*. Уравнение образующей в окрестности точки D

$$y = y_m (x/x_m)(2 - x/x_m), \qquad (2.V.10)$$

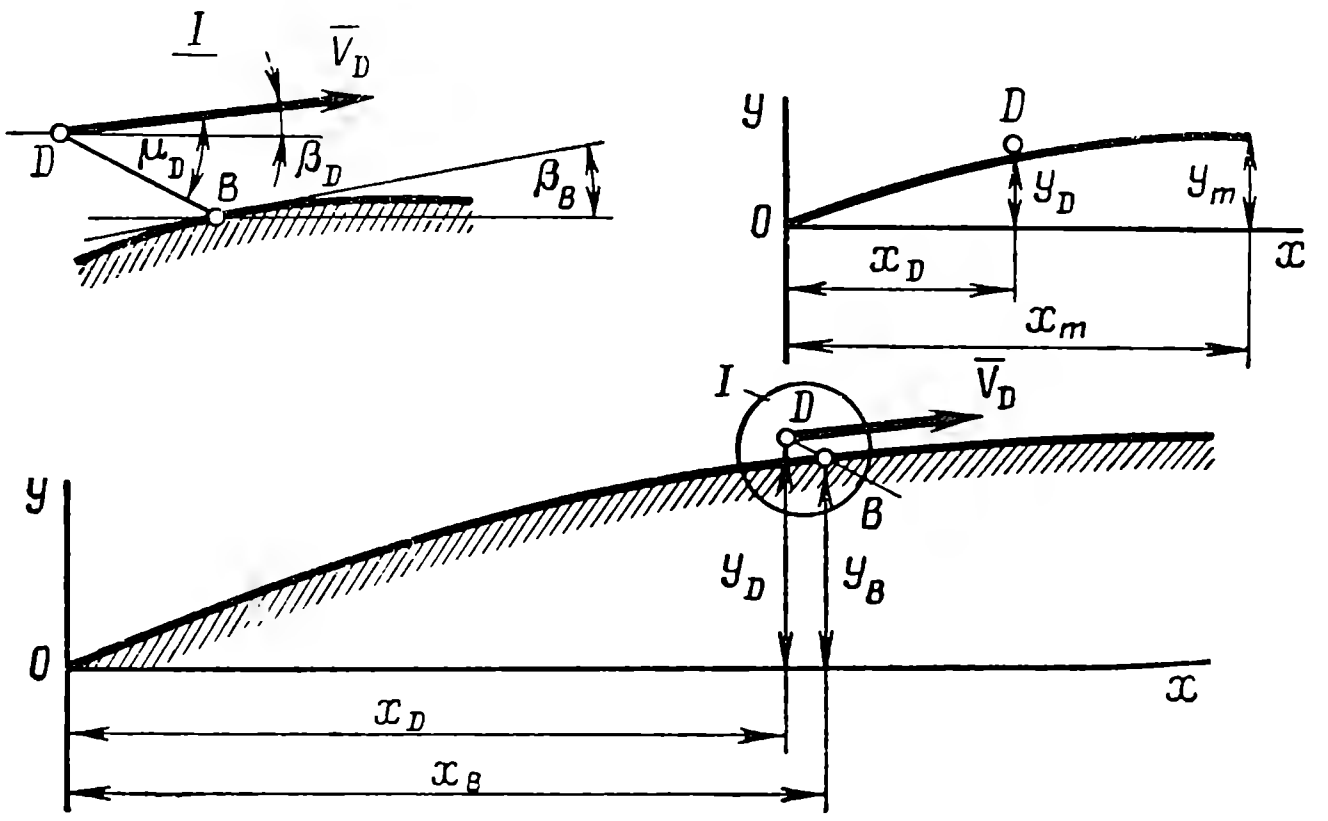


Рис. 2.V.8. Схема расчета скорости в точке пересечения характеристики со стенкой

где $y_m = 1$; $x_m = 10$. Координаты этой точки $x_D = 5$, $y_D = 0{,}8$, а угол наклона вектора скорости в ней $\beta_D = 5°$.

Сравните найденную скорость в точке B с соответствующим ее значением, полученным без учета влияния вихревого характера течения.

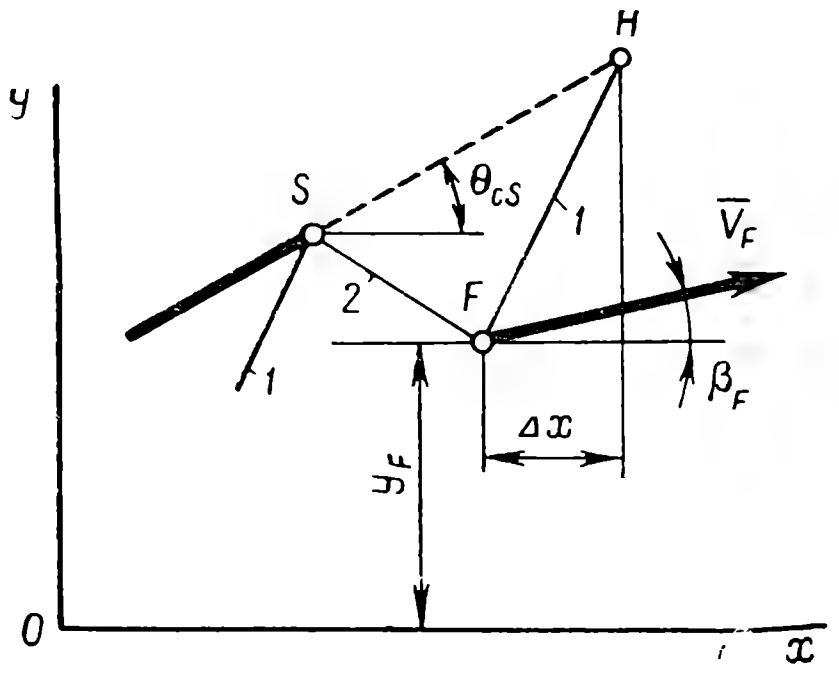


Рис. 2.V.9. К определению скорости в точке пересечения характеристики со скачком уплотнения:

1 — характеристика первого семейства;
2 — характеристика второго семейства

V.33. На прямолинейный скачок уплотнения с углом $\theta_c = 30°$ падают в точках S и H близко расположенные волны разрежения [характеристики *1* семейства (рис. 2.V.9)]. Вычислить скорость за скачком на участке SH и определить соответствующее изменение угла наклона скачка. В точке F с координатой $y_F = 10$, находящейся на пересечении характеристики второго семейства SF и характеристики первого семейства FH ($x_H - x_F = 0{,}5$), скорость $V_F = 950$ *м/сек*, угол отклонения потока $\beta_F = 11°$, скорость набегающего потока $V_\infty = 1020$ *м/сек*, температура $T_\infty = 288$ К, $k = c_p/c_v = 1{,}4$.

V.34. Найти параметры воздуха (давление p_0 и плотность ρ_0) в форкамере сверхзвуковой аэродинамической трубы с открытой рабочей частью, определить площадь критического сечения и выбрать форму криволинейного контура сопла, обеспечивающего получение на выходе параллельного сверхзвукового потока с числом $M_\infty = 3$ и давлением $p_\infty = 1$ *кГ/см²*. Квадратное сечение сопла на выходе имеет площадь $S = 0{,}16$ *м²*, температура воздуха в форкамере $T_0 = 290$ К.

VI. ПРОФИЛЬ И КРЫЛО КОНЕЧНОГО РАЗМАХА В ПОТОКЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

VI.1. Определите аэродинамические коэффициенты тонкого профиля, обтекаемого потоком несжимаемой жидкости под углом атаки $\alpha = 0{,}1$ *рад*. Контуры профиля, имеющего хорду $b = 1$ *м*, заданы в связанной системе осей координат уравнениями:

$$y_{1в} = 0{,}2\, x_1 (1 - x_1/b) \quad \text{(верхняя сторона)};$$

$$y_{1н} = -0{,}12\, x_1 (1 - x_1/b) \quad \text{(нижняя сторона)}.$$

VI.2. Определите при $\alpha = 0{,}1$ *рад* аэродинамические коэффициенты тонкого симметричного относительно хорды профиля, расположенного в несжимаемом потоке.

VI.3. Конформная формула

$$\sigma = \zeta + 1/\zeta$$

производит преобразование круга на плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ в отрезок на плоскости $\sigma = z + iy$. Найдите радиус круга и длину отрезка, а также определите, вдоль какой оси этот отрезок расположен.

VI.4. Конформная функция

$$\sigma = \zeta - 1/\zeta$$

преобразует отрезок на плоскости $\sigma = z + iy$ в окружность на плоскости $\zeta = \xi + i\eta$. Найдите радиус окружности и длину отрезка, а также определите характер расположения этого отрезка на плоскости σ.

VI.5. Комплексный потенциал несжимаемого потока около кругового цилиндра единичного радиуса в плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ имеет вид

$$W = -iV_\infty (\zeta + 1/\zeta),$$

где V_∞ — скорость невозмущенного потока. Найдите распределение давления и определите аэродинамическую силу, действующую на цилиндр.

VI.6. Найдите распределение коэффициента давления по поверхности пластинки, обтекаемой несжимаемым потоком в поперечном направлении (рис. 2.VI.1).

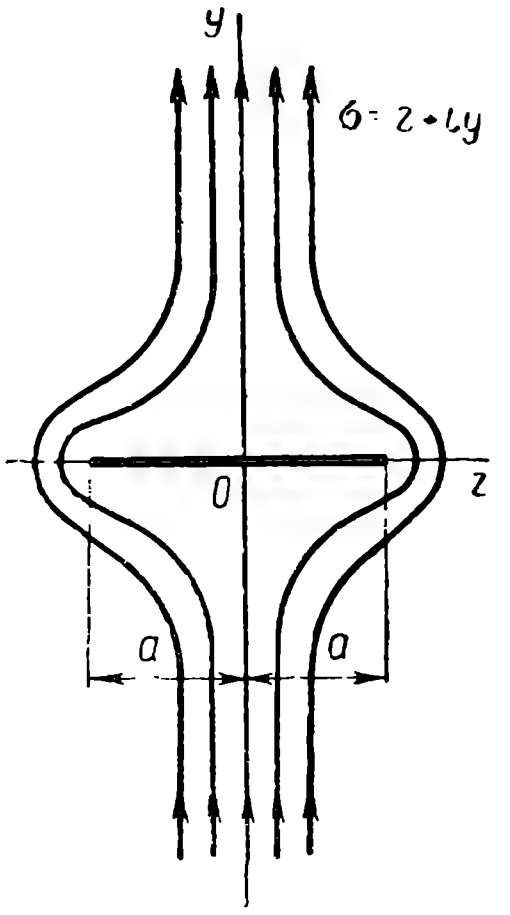


Рис. 2.VI.1. Поперечное обтекание пластинки

VI.7. Комплексный потенциал при обтекании кругового цилиндра единичного радиуса несжимаемым циркуляционно-поступательным потоком в плоскости $\sigma = x + iy$ (рис. 2.VI.2) имеет вид

$$W = V_\infty (\sigma + 1/\sigma) + i\,(\Gamma/2\pi) \ln \sigma.$$

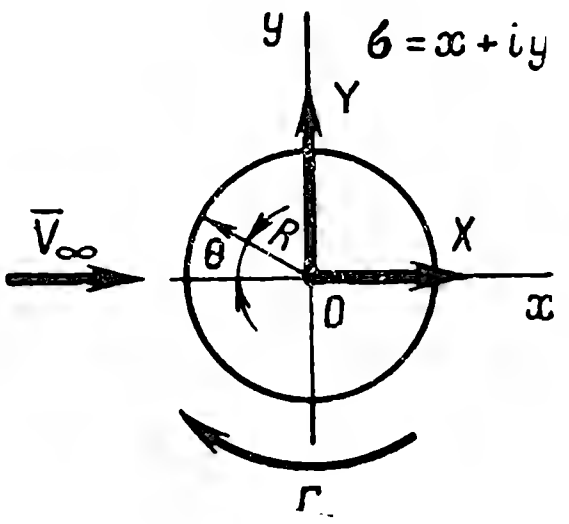


Рис. 2.VI.2. Цилиндр в циркуляционно-поступательном потоке

Найдите распределение скоростей (давлений) по поверхности цилиндра, определите подъемную силу Y и лобовое сопротивление X, а также положение критических точек (точек полного торможения) на цилиндре при скорости $V_\infty = 50$ *м/сек*, циркуляции $\Gamma = 314$ *м²/сек* и плотности воздушного потока $\rho_\infty = 0{,}125$ *кГ·сек²/м⁴*.

VI.8. Пластинка, имеющая хорду $2a = 2$ *м* и размах $l = 1$ *м*, обтекается несжимаемым воздушным потоком со скоростью $V_\infty = 100$ *м/сек* под малым углом атаки $\alpha = 0{,}1$ *рад*. Найдите распределение скоростей

и давлений, определите подъемную силу и циркуляцию скорости около пластинки.

VI.9. Крыло прямоугольной формы в плане с размахом $l=8$ *м* создает подъемную силу $Y=5000$ *кГ* при движении в атмосфере (плотность воздуха $\rho_\infty=0{,}125$ *кГ·сек²/м⁴*) со скоростью 360 *км/ч*. Определите угол скоса потока за крылом.

VI.10. Измерения показали, что угол ε скоса потока за крылом эллиптической формы в плане равен 2°. Определите подъемную силу этого крыла при условии, что его площадь в плане $S_{кр}=10$ *м²*, а размах $l=8$ *м*. Скорость воздушного потока $V_\infty=100$ *м/сек*, а плотность $\rho_\infty=0{,}125$ *кГ·сек²/м⁴*.

VI.11. Объясните, к чему приводит возникновение угла скоса потока за крылом конечного размаха.

VI.12. По условию задачи VI.10 определите коэффициент и силу индуктивного сопротивления эллиптического крыла.

VI.13. Как изменится угол скоса потока при переходе к крылу конечного размаха с меньшим удлинением?

VI.14. Что произойдет с истинным углом атаки крыла конечного размаха, если его удлинение возрастет?

VI.15. Сравните коэффициент индуктивного сопротивления крыла конечного размаха с соответствующим коэффициентом крыла такой же формы, но с бóльшим удлинением.

VII.1. Предположим, что линеаризованному потоку газа, обтекающему тонкий профиль, соответствует поток несжимаемой жидкости, имеющий тот же потенциал скоростей, что и для сжимаемого газа. Каким образом в данном случае будет деформироваться профиль и изменится ли угол атаки при переходе от сжимаемого потока к несжимаемому?

VII.2. Какова зависимость между коэффициентами подъемной силы и продольного момента профиля при обтекании его линеаризованным дозвуковым сжимаемым потоком газа ($M_\infty < M_{\infty кр}$) и потоком несжимаемой жидкости при одинаковых углах атаки?

VII.3. Коэффициент подъемной силы $c_{унсж}$ тонкого профиля с хордой $b=2$ *м*, обтекаемого несжимаемым потоком под углом атаки $\alpha=0{,}1$ *рад*, равен 0,3. Определите значение $c_{усж}$, а также циркуляцию скорости $\Gamma_{сж}$ для этого профиля, обтекаемого маловозмущенным (линеаризованным) потоком под тем же углом атаки при $M_\infty=0{,}5$ и температуре воздуха $T_\infty=288$ К ($a_\infty=340$ *м/сек*).

VII.4. Пусть для некоторого профиля известно критическое число Маха набегающего дозвукового потока ($M_{\infty кр}$). Как изменится это число, если профиль будет утолщен? Изменится ли критическое число Маха набегающего потока при увеличении угла атаки профиля?

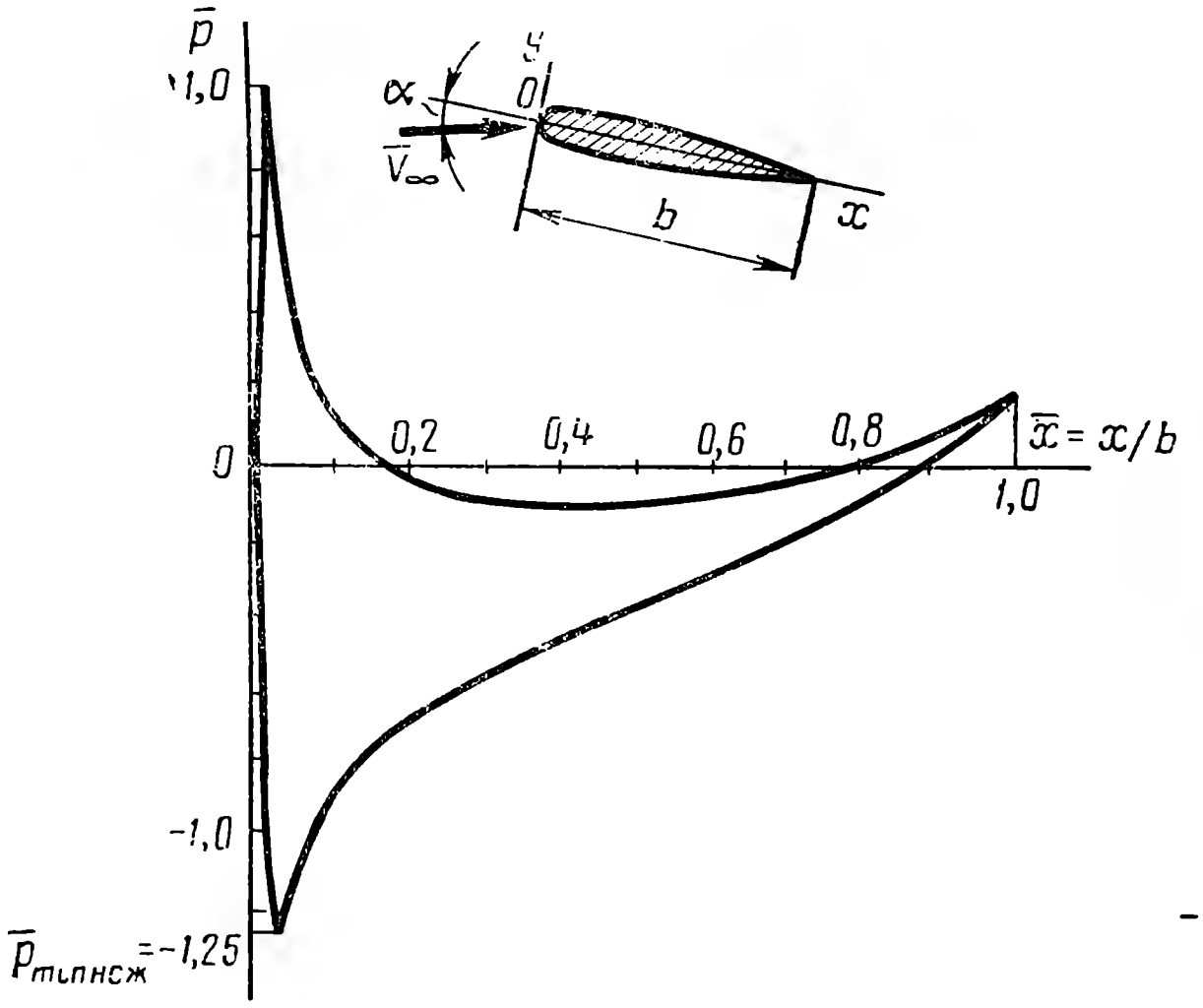


Рис. 2.VII.1. Распределение коэффициента давления по профилю, обтекаемому под углом атаки несжимаемым потоком

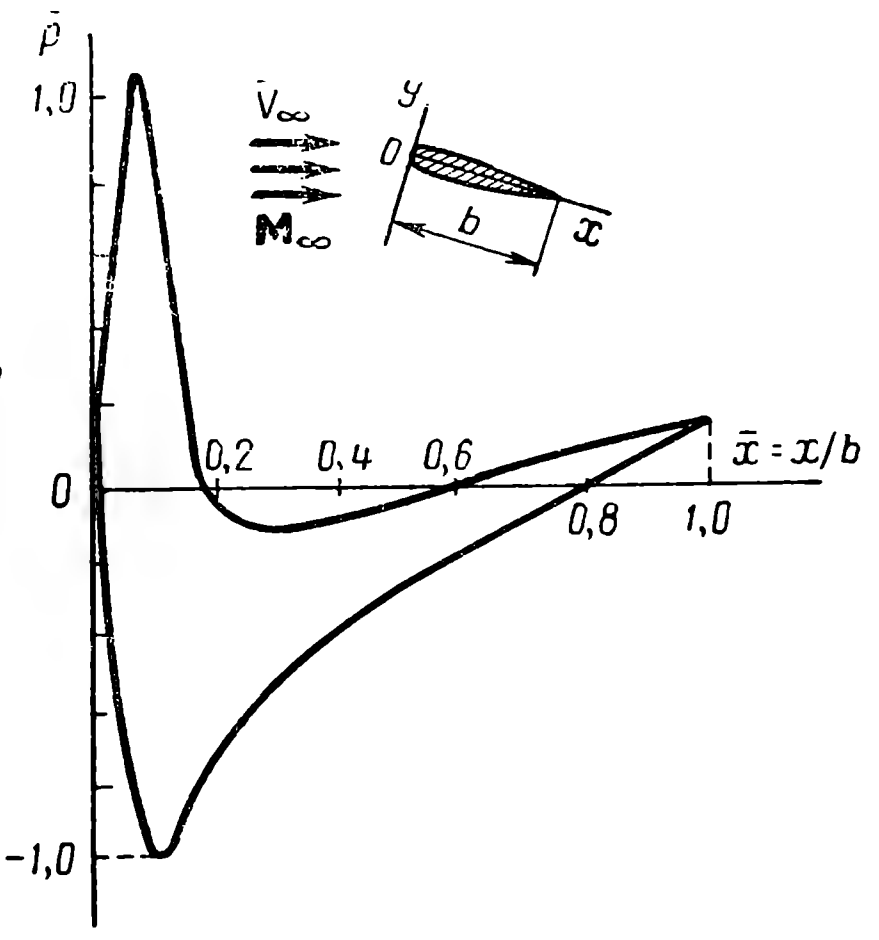


Рис. 2.VII.2. Распределение коэффициента давления по профилю, обтекаемому под углом атаки потоком с числом $M_\infty=0{,}5$

VII.5. На рис. 2.VII.1 показано распределение коэффициента давления около профиля, полученное путем продувки в малоскоростной аэродинамической трубе (при $M_\infty \approx 0$). Определите для этого профиля критическое число Маха ($M_{\infty кр}$).

VII.6. На рис. 2.VII.2 показано распределение коэффициентов давления около профиля, полученное при $M_\infty=0{,}5$. Найдите соответствующее этому распределению критическое число Маха набегающего воздушного потока ($M_{\infty кр}$).

VII.7. Пересчитайте кривую распределения коэффициента давления для профиля (рис. 2.VII.3), обтекаемого несжимаемым потоком воздуха, на число $M_\infty=0{,}5$.

VII.8. Дана кривая распределения коэффициента давления на профиле (рис. 2.VII.4), полученная при обтекании его потоком воздуха с числом $\mathbf{M}_{\infty 1}=0{,}4$. Пересчитайте эту кривую на число $\mathbf{M}_{\infty 2}=0{,}6$.

VII.9. Определите коэффициент волнового сопротивления профиля для ряда значений $\mathbf{M}_\infty$ ($\mathbf{M}_{\infty кр}<\mathbf{M}_\infty<1$) при условии, что известно распределение коэффициента давления около этого профиля, полученное при малых скоростях набегающего воздушного потока (см. задачу VII.5). Для одного из чисел $\mathbf{M}_\infty$ определите силу волнового сопротивления участка крыла размахом $l=1$ *м* (хорда профиля $b=2$ *м*) при полете в атмосфере вблизи поверхности Земли.

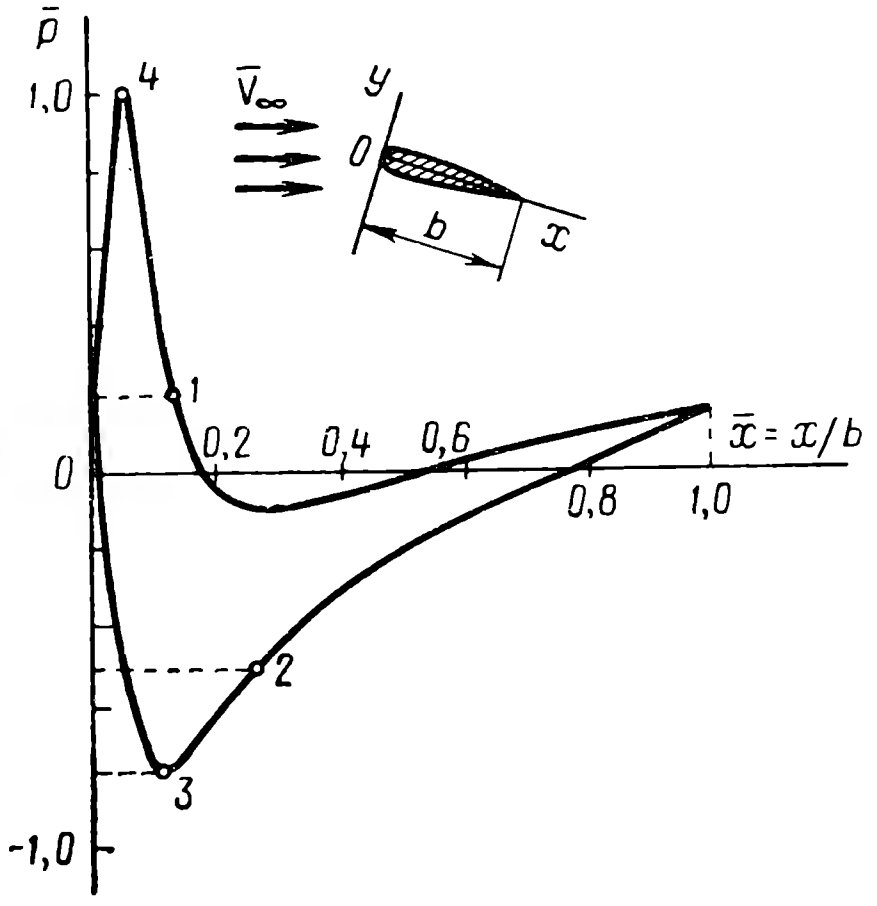


Рис. 2.VII.3. Координатная диаграмма $\bar{p}=f(\bar{x})$ для симметричного профиля в несжимаемом потоке при $\alpha\neq 0$

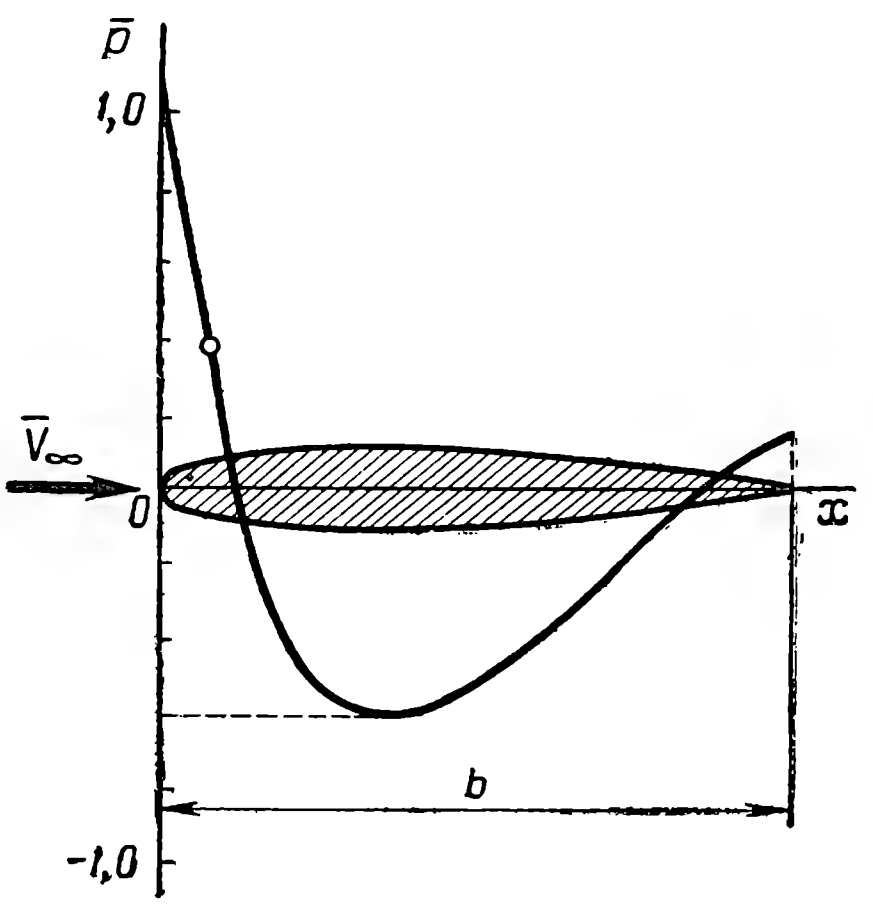


Рис. 2.VII.4. Координатная диаграмма $\bar{p}=f(x)$ для симметричного профиля, обтекаемого при нулевом угле атаки потоком с числом $\mathbf{M}_\infty=0{,}4$

VII.10. Обтекаемая плоская поверхность отклонена от направления скорости V_∞ набегающего потока воздуха на угол $\beta=30°$. Определите угол центрированной волны (веера разрежения), характер течения в этой волне, а также параметры газа на отклоненной поверхности при условии, что число $\mathbf{M}_\infty=2$ и $k=c_p/c_v=1{,}4$.

VII.11. Определите параметры возмущенного течения на верхней стороне пластинки, обтекаемой гиперзвуковым воздушным потоком с числом $\mathbf{M}_\infty=10$ и $k=c_p/c_v=1{,}4$ при $\alpha=0{,}1$ рад. Полагая, что течение около другой пластинки, расположенной под углом атаки $\alpha=0{,}05$ *рад*, будет аэродинамически подобным, вычислите параметры ее обтекания.

VII.12. Два крыла в виде тонких пластинок расположены в сверхзвуковых потоках воздуха ($k=c_p/c_v=1{,}4$), имеющих числа $\mathbf{M}_\infty=5$ и 20, под одинаковым углом атаки $\alpha=0{,}1$ *рад*. Определите аэродинамические характеристики этих крыльев.

VII.13. Определите параметры обтекания профиля сверхзвуковым воздушным потоком ($\mathbf{M}_\infty=5$; $k=c_p/c_v=1{,}4$) под углом атаки $\alpha=20°$. Контур профиля (рис. 2.VII.5) задан уравнением

$$y=\pm 2\Delta\,(x/b)\,(1-x/b),$$

где $\Delta=2$; $b=12$.

VII.14. Определите параметры сверхзвукового обтекания профиля (рис. 2.VII.6), контур которого на переднем участке представляет собой клин с половиной угла при вершине $\beta_0=15°$, а на остальной части — параболическую кривую с уравнением

$$y=2\Delta\,(x/b)\,(1-x/b),$$

где $\Delta=2$; $b=10$.

Число Маха набегающего потока $\mathbf{M}_\infty=5$, угол атаки $\alpha=0°$, отношение удельных теплоемкостей для воздуха $k=c_p/c_v=1{,}4$.

VII.15. Определите параметры изэнтропического обтекания двух одинаковых профилей под углом атаки $\alpha=0{,}1$ *рад* сверхзвуковыми воздушными потоками с числами $\mathbf{M}_\infty=3$ и $\mathbf{M}_\infty=20$ ($k=c_p/c_v=1{,}4$). Контур профилей (см. рис. 2.VII.5) задан уравнением

$$y = \pm 2\Delta\,(x/b)\,(1 - x/b),$$

где $\Delta=1$; $b=20$.

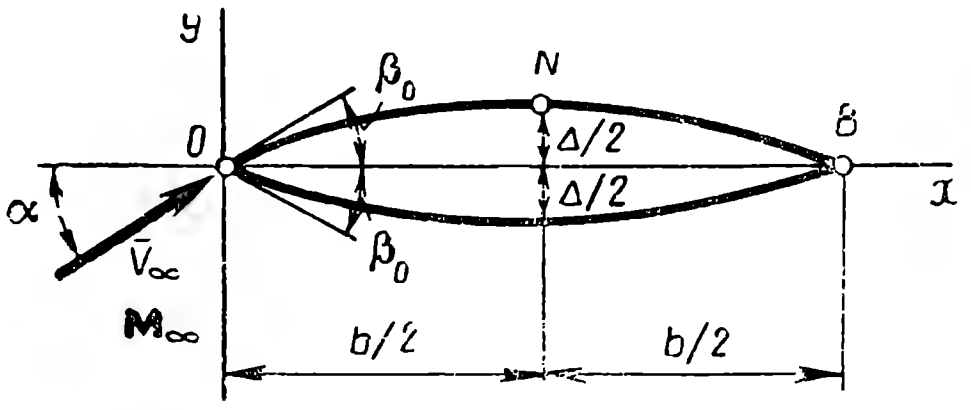


Рис. 2.VII.5. Симметричный сверхзвуковой профиль

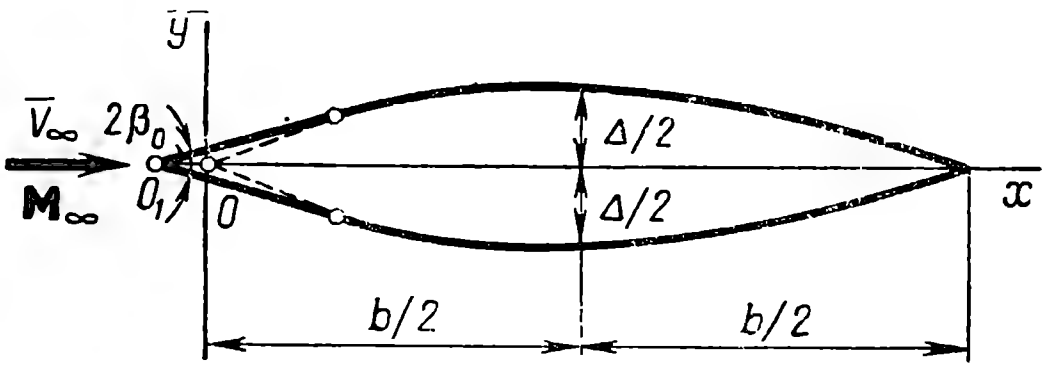


Рис. 2.VII.6. Симметричный профиль с клиновидным носком

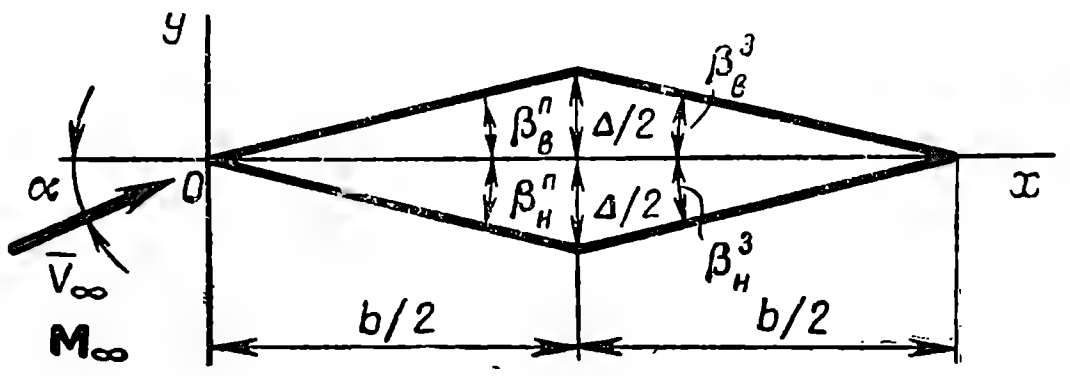


Рис. 2.VII.7. Симметричный ромбовидный профиль

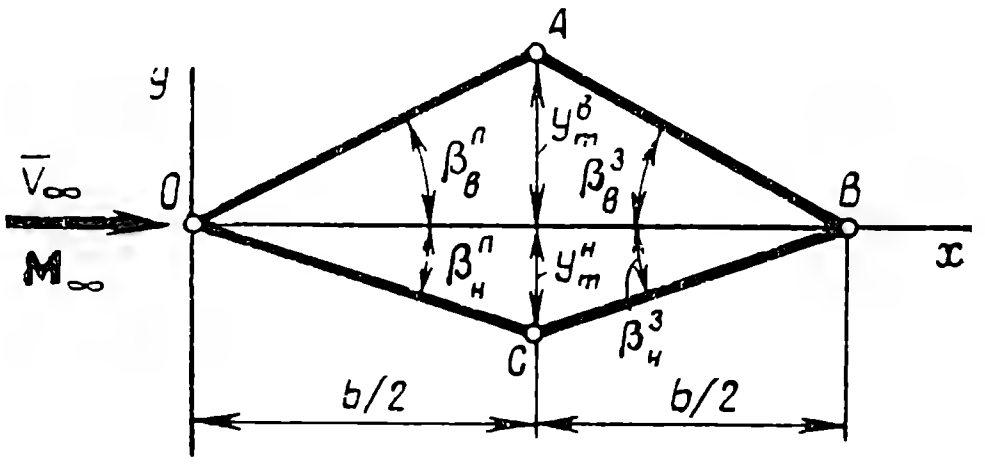


Рис. 2.VII.8. Несимметричный ромбовидный профиль

VII.16. Определите коэффициенты аэродинамических сил, момента тангажа, центра давления, а также аэродинамическое качество профиля (см. рис. 2.VII.5) с уравнением контура

$$y = \pm 2\Delta\,(x/b)\,(1 - x/b),$$

где $\Delta=1$; $b=20$.

Профиль расположен под углом атаки $\alpha=0{,}1$ *рад* в сверхзвуковом потоке в одном случае с числом $\mathbf{M}_\infty=3$, а в другом с числом $\mathbf{M}_\infty=20$. Отношение удельных теплоемкостей для воздуха $k=c_p/c_v=1{,}4$.

VII.17. Определите аэродинамические характеристики ромбовидного профиля ($\Delta=2$; $b=20$; рис. 2.VII.7), обтекаемого под углом атаки $\alpha=0{,}05$ рад сверхзвуковым потоком с числами $\mathbf{M}_\infty=3$ и 20. Отношение удельных теплоемкостей для воздуха $k=c_p/c_v=1{,}4$.

VII.18. Определите аэродинамические характеристики несимметричного ромбовидного профиля ($b/2=4$; $y_m^в=2$; $|y_m^н|=1$; рис. 2.VII.8), обтекаемого сверхзвуковым потоком с числом $\mathbf{M}_\infty=5$ и отношением удельных теплоемкостей $k=c_p/c_v=1{,}4$ под нулевым углом атаки.

VII.19. Определите аэродинамические коэффициенты и соответствующие силы и момент для участка длиной $\Delta z=1$ *м* тонкого крыла (рис. 2.VII.9) с углом скольжения $\chi=60°$, обтекаемого воздушным потоком со скоростью $V_\infty=100$ *м/сек* под углом атаки $\alpha=0{,}1$ *рад*. Контур профиля с хордой $b_n=1$ *м* задан уравнениями:

$$y_{1в} = 0{,}2\,x_1\,(1 - x_1/b_n),\quad y_{1н} = -0{,}12\,x_1\,(1 - x_1/b_n).$$

Плотность воздушного потока $\rho_\infty=0{,}125$ *кГ·сек²/м⁴*.

VII.20. Скользящее крыло (см. задачу VII.19 и рис. 2.VII.9) движется со скоростью, соответствующей числу $\mathbf{M}_\infty=0{,}5$, под углом атаки $\alpha=0{,}1$ *рад*. Определите аэродинамические коэффициенты этого крыла, рассчитанные по скоростному напору $q_\infty=0{,}5\,\rho_\infty V_\infty^2$.

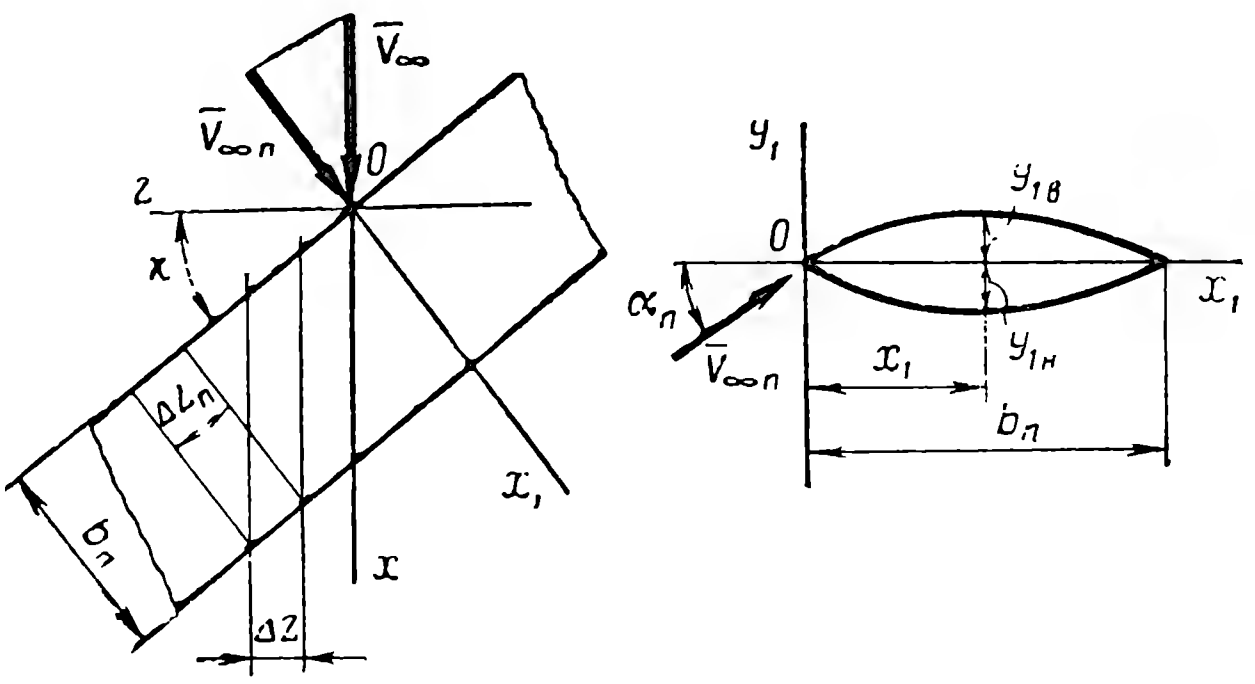


Рис. 2.VII.9. Скользящее крыло

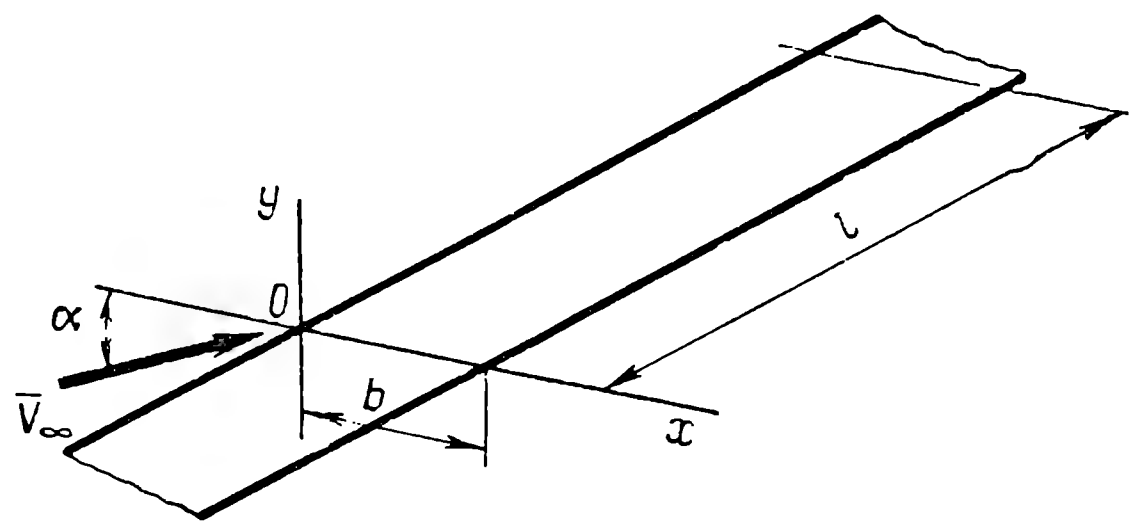


Рис. 2.VII.10. Пластинка под углом атаки в сверхзвуковом потоке

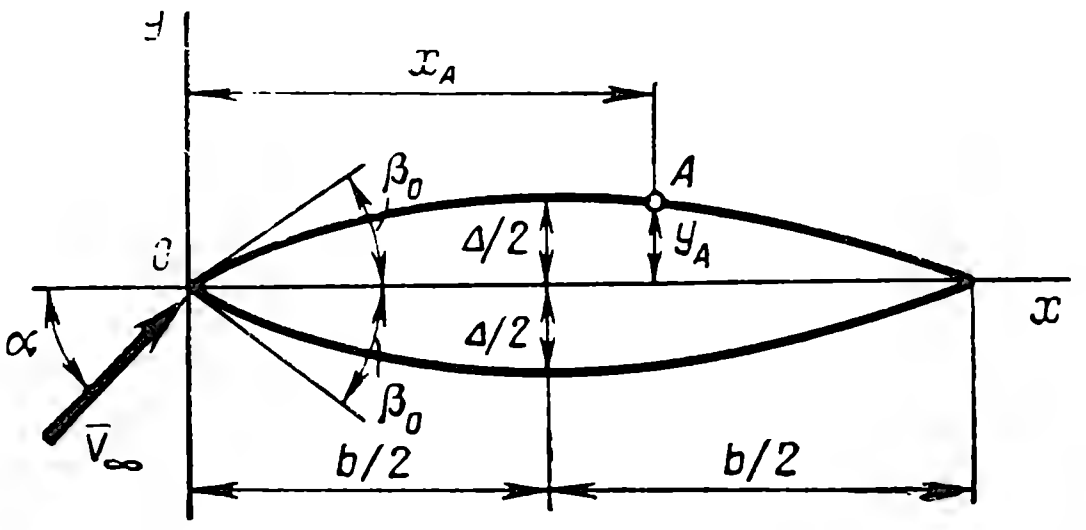


Рис. 2.VII.11. Симметричный криволинейный профиль

VII.21. Определите аэродинамические характеристики скользящего крыла (см. задачу VII.19 и рис. 2.VII.9), движущегося в атмосфере вблизи поверхности Земли с $\mathbf{M}_\infty=1{,}2$ под углом атаки $\alpha=0{,}1$ *рад*.

VII.22. Рассчитайте обтекание участка крыла длиной $\Delta z=1$ *м*, движущегося со скольжением под углом $\chi=60°$ с $\mathbf{M}_\infty=3$ в воздушной среде ($k=c_p/c_v=1{,}4$) с давлением $p_\infty=1$ *кГ/см*^{2}. Контур симметричного профиля в осях координат x_1Oy_1 (см. рис. 2.VII.9) задан уравнением

$$y_1=\pm 2\Delta\,(x_1/b_n)\,(1-x_1/b_n),$$

где $\Delta=0{,}05$ *м* — максимальная толщина; $b_n=1$ *м*—хорда профиля.

VII.23. Определите параметры обтекания диссоциирующим газовым потоком заостренного профиля (см. рис. 2.VII.5), контур которого задан уравнением

$$y=\pm 2\Delta\,(x/b)\,(1-x/b),$$

в котором $\Delta=2$; $b=4$.

Движение профиля происходит в воздушной атмосфере на высоте $H=20$ *км* со скоростью $V_\infty=5000$ *м/сек* под углом атаки $\alpha=5°$.

VII.24. Определите аэродинамические коэффициенты профиля крыла в виде плоской пластинки с хордой $b=2$ *м* и длиной $l=5$ *м* (рис. 2.VII.10), обтекаемой сверхзвуковым диссоциирующим потоком воздуха под углом атаки $\alpha=20°$, а также найдите соответствующие подъем-

ную силу, сопротивление и момент относительно передней кромки. Параметры набегающего потока: $V_\infty = 5000$ *м/сек*; $p_\infty = 0{,}01$ *кГ/см*^{2}; $T_\infty = 4000$ К.

VII.25. Определите параметры газа на верхней стороне профиля в точке A с координатой $x_A = 6$ при условии, что профиль обтекается диссоциирующим воздушным потоком под углом атаки $\alpha = 0{,}3$ *рад* со скоростью $V_\infty = 4000$ *м/сек*. Давление и температура набегающего потока соответственно $p_\infty = 0{,}01$ *кГ/см*^{2}, $T_\infty = 4000$ К.

Уравнение контура профиля (рис. 2.VII.11)

$$y = \pm 2\Delta\,(x/b)\,(1 - x/b),$$

где $\Delta = 1$; $b = 10$.

VII.26. На верхней стороне пластинки (рис. 2.VII.10), обтекаемой под углом атаки $\alpha = 20°$ диссоциирующим потоком воздуха, известны давление $p_в = 0{,}01$ *кГ/см*^{2}, температура $T_в = 3500$ К и скорость $V_в = 4000$ *м/сек*. Определите параметры набегающего потока.

VII.27. Профиль с уравнением контура (см. рис. 2.VII.11)

$$y = \pm 2\Delta\,(x/b)\,(1 - x/b),$$

где $\Delta = 1$, $b = 10$, обтекается диссоциирующим потоком под углом атаки $\alpha = 0{,}3$ *рад* со скоростью $V_\infty = 4000$ *м/сек*. Давление и температура воздуха в этом потоке соответственно $p_\infty = 0{,}01$ *кГ/см*^{2}, $T_\infty = 5000$ К. Найдите координаты y_A, x_A точки A, в которой значение числа Маха $\mathbf{M}_A = \mathbf{M}_\infty + 0{,}5$.

VIII.1. Консоль крыла треугольной формы с тонким симметричным профилем (рис. 2.VIII.1) расположена в сверхзвуковом потоке ($\mathbf{M}_\infty = 1{,}5$; $p_\infty = 1$ *кГ/см²*; $k = c_p/c_v = 1{,}4$) под нулевым углом атаки. Определите распределение давления на поверхности и вне крыла в окрестности корневой хорды и передней кромки, а также найдите волновое сопротивление консоли, имеющей размеры: $b_{кр} = 5$ *м*; $l/2 = 4$ *м*; $\lambda = 0{,}1$ *рад*.

VIII.2. Вычислите распределение давления на крыле и в окрестности его передних кромок, а также найдите волновое сопротивление этого

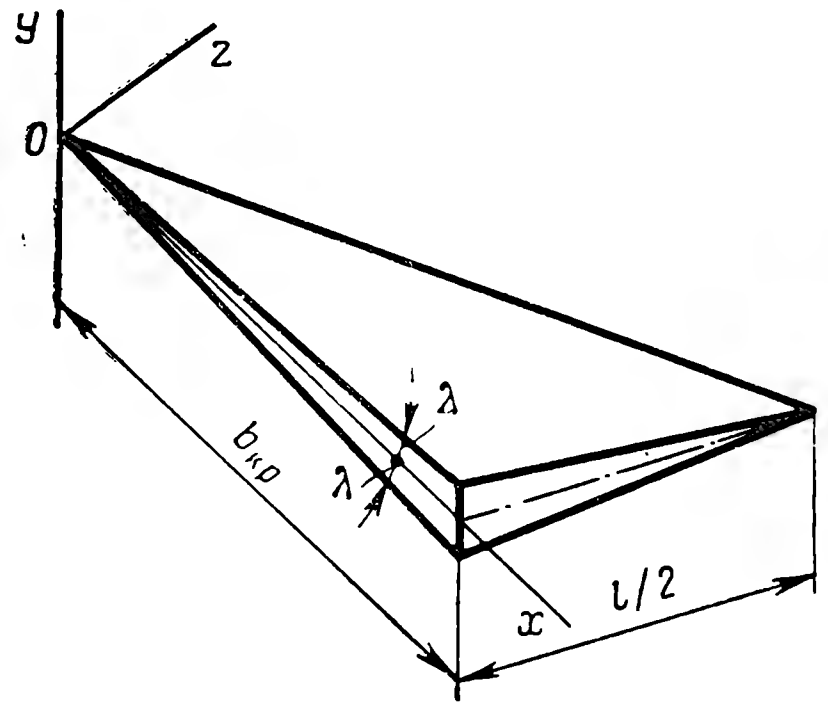


Рис. 2.VIII.1. Треугольная консоль крыла

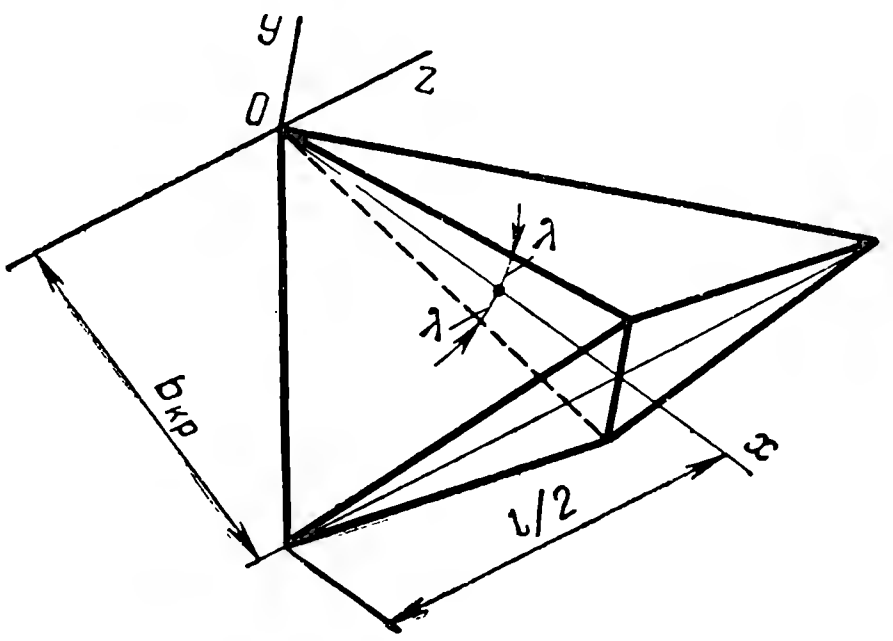


Рис. 2.VIII.2. Треугольное крыло, симметричное относительно оси *Ox*

крыла, обтекаемого сверхзвуковым потоком под нулевым углом атаки. Крыло (рис. 2.VIII.2) имеет следующие размеры: $b_{кр} = 5$ *м*; $l/2 = 4$ *м*; $\lambda = 0{,}1$ *рад*. Параметры набегающего потока: $\mathbf{M}_\infty = 1{,}5$; $p_\infty = 1$ *кГ/см²*, $k = c_p/c_v = 1{,}4$.

VIII.3. Бесконечное полукрыло, форма и размеры которого приведены в задаче VIII.1 (см. рис. 2.VIII.1), обтекается сверхзвуковым потоком с числом $\mathbf{M}_\infty = 2{,}5$ под нулевым углом атаки. Найдите распределение давления на поверхности крыла и в окрестности боковой кромки за его пределами, а также определите волновое сопротивление. Давление набегающего воздушного потока $p_\infty = 1$ *кГ/см²*, показатель адиабаты $k = c_p/c_v = 1{,}4$.

VIII.4. Крыло треугольной формы в плане, размеры которого даны в задаче VIII.2 (см. рис. 2.VIII.2), расположено под нулевым углом атаки в сверхзвуковом потоке ($\mathbf{M}_\infty = 2{,}5$; $p_\infty = 1$ *кГ/см²*; $k = c_p/c_v = 1{,}4$). Определите распределение давления на крыле и его волновое сопротивление.

VIII.5. Найдите распределение давления, силу сопротивления и коэффициент этой силы для тонкого треугольного крыла с симметричным профилем при обтекании сверхзвуковым потоком ($\mathbf{M}_\infty = 1{,}3$; $p_\infty = 1$ *кГ/см²*; $k = c_p/c_v = 1{,}4$) под нулевым углом атаки. Основные размеры этого крыла (рис. 2.VIII.3) следующие: $l = 6$ *м*; $b_{кр} = 5$ *м*; $b' = 2$ *м*; $\Delta = 0{,}2$ *м*.

VIII.6. Тонкое треугольное крыло с симметричным профилем (см. рис. 2.VIII.3) имеет следующие размеры: $l = 8$ *м*; $b_{кр} = 5$ *м*; $b' = 3$ *м*; $\Delta = 0{,}6$ *м*. Найдите распределение давления, силу сопротивления и коэффициент этой силы при условии, что крыло обтекается под нулевым углом атаки сверхзвуковым потоком с параметрами: $\mathbf{M}_\infty = 1{,}3$; $p_\infty = 1$ *кГ/см²*; $k = c_p/c_v = 1{,}4$.

VIII.7. Сверхзвуковой поток ($\mathbf{M}_\infty = 2$; $p_\infty = 1$ *кГ/см²*, $k = c_p/c_v = 1{,}4$) обтекает тонкое треугольное крыло с симметричным профилем (см. рис. 2.VIII.3), расположенное под нулевым углом атаки и имеющее размеры: $b_{кр} = 4$ *м*; $b' = 2$ *м*; $l = 8$ *м*, $\Delta = 0{,}4$ *м*. Вычислите распределение давления по крылу, его сопротивление и соответствующий коэффициент.

VIII.8. Найдите распределение давления, подъемную силу, сопротивление и момент, а также соответствующие аэродинамические коэффициенты для треугольного крыла в виде тонкой пластинки (рис. 2.VIII.4), обтекаемой сверхзвуковым потоком под малым углом атаки $\alpha=0{,}1$ *рад*. Размах и корневая хорда крыла соответственно равны $l=8$ *м*; $b_{кр}=5$ *м*. Параметры набегающего потока: $\mathbf{M}_\infty=1{,}4$; $p_\infty=1$ *кГ/см*^{2}; $k=c_p/c_v=1{,}4$.

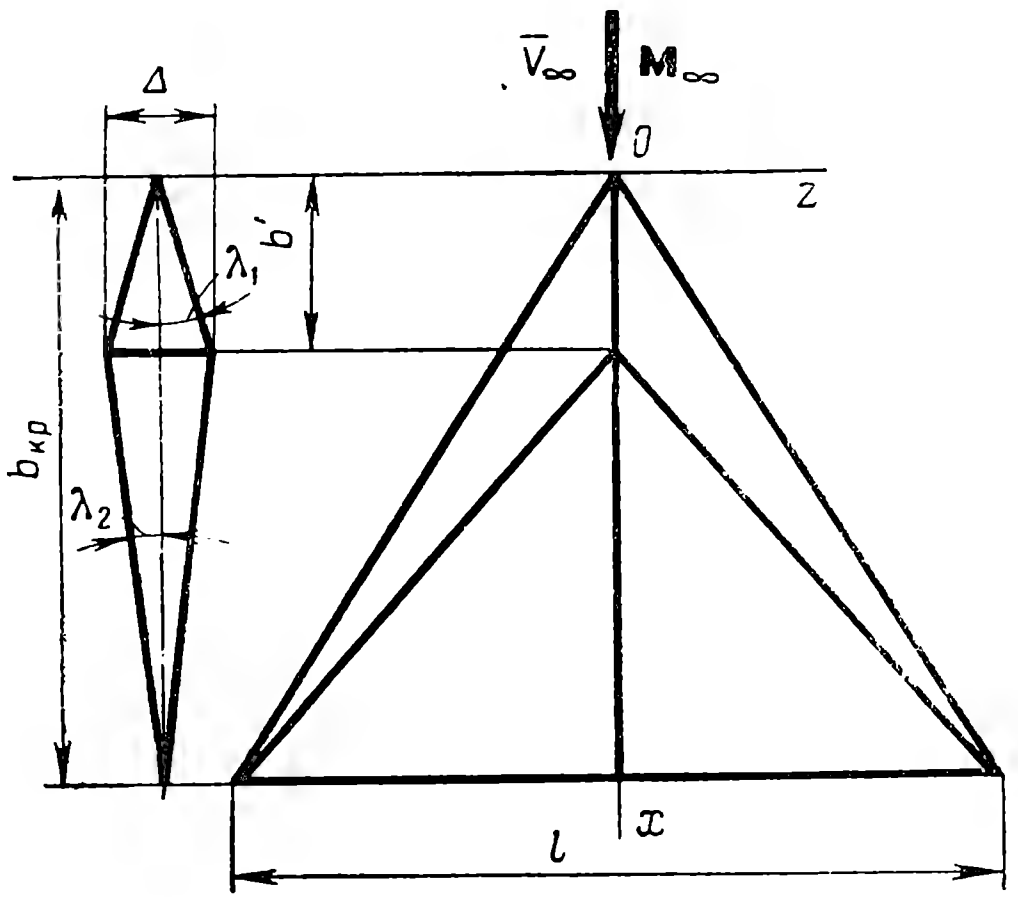


Рис. 2.VIII.3. Треугольное крыло с симметричным ромбовидным профилем

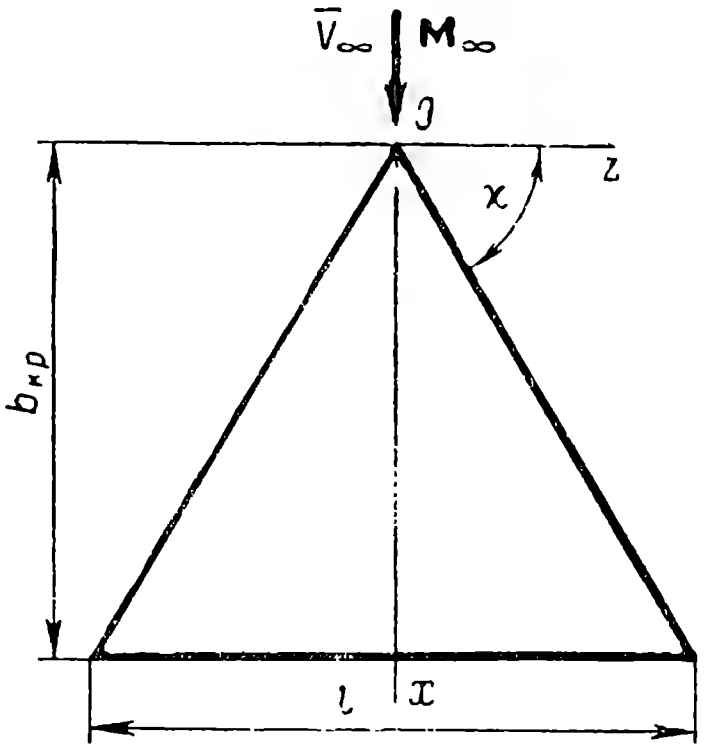


Рис. 2.VIII.4. Плоское треугольное крыло

VIII.9. Тонкое крыло треугольной формы в плане (см. рис. 2.VIII.4) расположено в сверхзвуковом потоке под малым углом атаки $\alpha=0{,}1$ *рад*. Найдите распределение давления, подъемную силу, сопротивление и момент, а также соответствующие аэродинамические коэффициенты для следующих параметров набегающего потока: $\mathbf{M}_\infty=2$; $p_\infty=1$ *кГ/см*^{2}; $k=c_p/c_v=1{,}4$. Размах и корневая хорда соответственно равны $l=5$ *м*; $b_{кр}=8$ *м*.

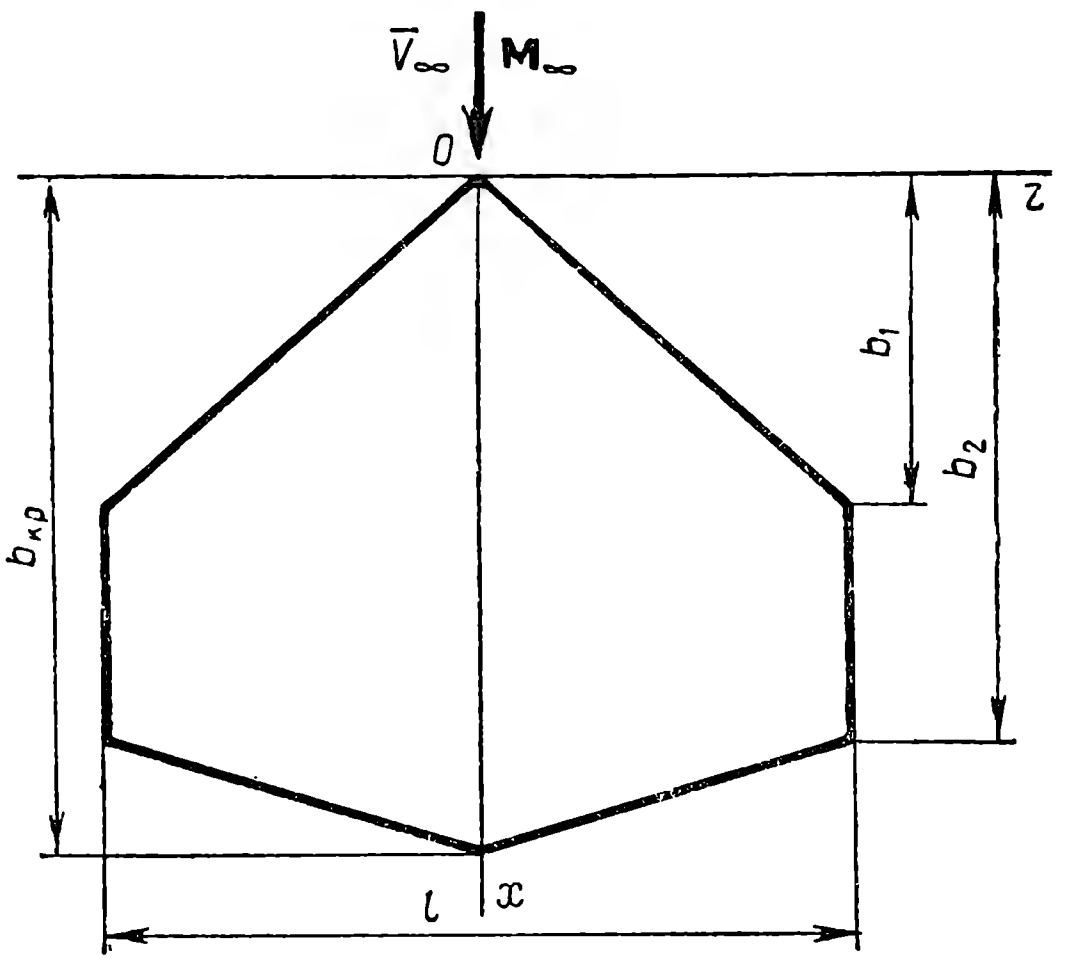


Рис. 2.VIII.5. Плоское шестиугольное крыло

VIII.10. Тонкое шестиугольное крыло (рис. 2.VIII.5), имеющее размеры $b_{кр}=7$ *м*, $b_1=3$ *м*, $b_2=6$ *м*, $l=5$ *м*, обтекается сверхзвуковым потоком под малым углом атаки $\alpha=0{,}1$ *рад*. Определите распределение давления, подъемную силу и сопротивление, а также соответствующие аэродинамические коэффициенты. Параметры набегающего потока: $\mathbf{M}_\infty=1{,}4$; $p_\infty=1$ *кГ/см*^{2}; $k=c_p/c_v=1{,}4$.

VIII.11. Найдите подъемную силу, лобовое сопротивление и момент, а также соответствующие аэродинамические коэффициенты для тонкого прямоугольного крыла, движущегося в воздушной атмосфере ($p_\infty=1$ *кГ/см*^{2}, $k=c_p/c_v=1{,}4$) со сверхзвуковой скоростью ($\mathbf{M}_\infty=2$) под малым углом атаки $\alpha=0{,}1$ *рад*. Хорда крыла $b=2$ *м*, размах $l=6$ *м*.

VIII.12. Рассчитайте параметры обтекания тонкого прямоугольного крыла, расположенного в сверхзвуковом потоке с числом $\mathbf{M}_\infty=1{,}4$ ($p_\infty=1$ *кГ/см*^{2}, $k=c_p/c_v=1{,}4$) под малым углом атаки $\alpha=0{,}1$ *рад*. Хорда крыла $b=4$ *м*, размах $l=6$ *м*.

IX.1. Какие сверхзвуковые течения по своему характеру являются коническими?

IX.2. На рис. 2.IX.1 изображена «яблоковидная» кривая — геометрическое место концов векторов скорости $V_к$ конического течения непосредственно на обтекаемом конусе. Здесь же показаны годографы скорости, т. е. геометрические места концов векторов скорости в возмущенной области течения между обтекаемой поверхностью и скачками уплотнения для трех конусов с углами при вершине $\beta_{к1}$, $\beta_{к2}$, $\beta_{к3}$. Проанализировав рис. 2.IX.1, укажите характерные особенности этих трех течений.

IX.3. Что такое «критический» угол конуса?

IX.4. Какой из критических углов больше: для конуса или для клина?

IX.5. Определите угол полураствора конуса $\beta_к$ и параметры обтекающего конус воздуха, если известно, что скачок уплотнения наклонен к вектору скорости набегающего потока под углом $\theta_с=30°$. Величина скорости набегающего потока $V_\infty=1700$ *м/сек* ($\mathbf{M}_\infty=5$).

IX.6. На рис. 2.IX.2 показана головная ударная волна OA перед конусом OBC. Как видно, на переднем участке эта волна прямолинейная, а начиная с точки A она искривляется. Объясните, чем обусловлена такая форма ударной волны.

IX.7. Как изменяется угол $\theta_с$ наклона скачка уплотнения перед острым конусом с ростом числа $\mathbf{M}_\infty$ полета?

IX.8. Как изменяются степень диссоциации, давление и температура газа на поверхности конуса с увеличением его угла $\beta_к$?

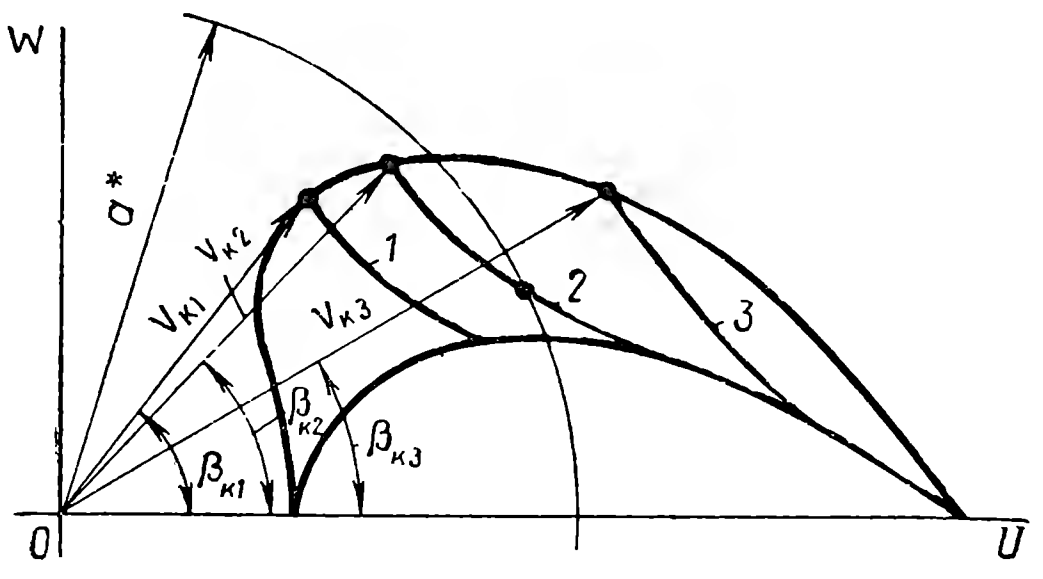


Рис. 2.IX.1. Годограф скоростей конических течений

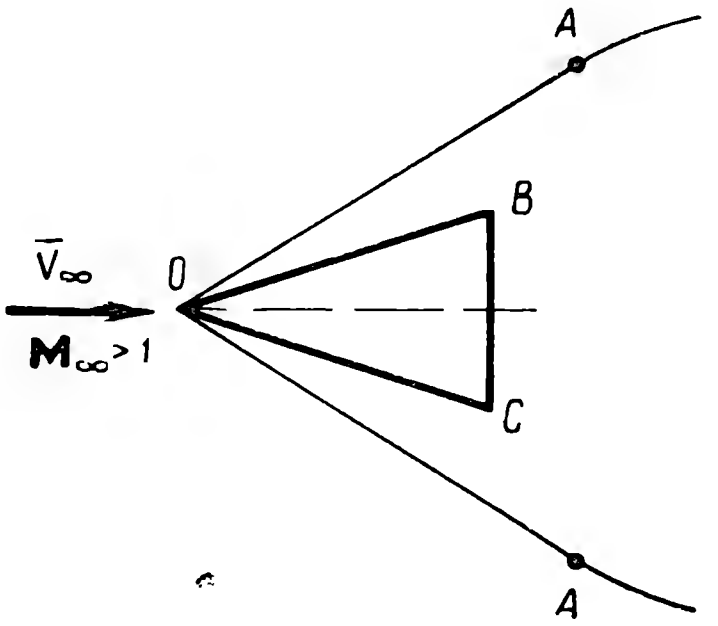


Рис. 2.IX.2. Схема обтекания конуса сверхзвуковым потоком газа

IX.9. Рассчитайте обтекание острого конуса, а также найдите соответствующий угол $\beta_к$ при условии, что $\mathbf{M}_\infty=20$, угол скачка перед конусом $\theta_с=50°$, а параметры набегающего потока соответствуют высоте полета $H=5$ *км*.

IX.10. Что произойдет с углом наклона скачка уплотнения, возникающего перед острым конусом, который совершает полет, удаляясь от Земли с гиперзвуковой скоростью при постоянном значении числа $\mathbf{M}_\infty$?

IX.11. Как изменяется коэффициент волнового сопротивления $c_{xв}$ острого конуса в зависимости от числа $\mathbf{M}_\infty$ полета, если угол атаки $\alpha=0$?

IX.12. Определите положение центра давления острого конуса, высота которого $x_к$, если он движется со сверхзвуковой скоростью под малым углом атаки.

IX.13. Чем вызвано применение в современной аэродинамике летательных аппаратов с затупленными головными частями?

IX.14. На затупленном и заостренном конусах с одинаковым углом $\beta_к$ наклона образующей определены каким-либо путем равные по величине давления $p_{к1}=p_{к2}=p_к$. Найдите зависимости для соответствующих скоростей $V_{к1}$ и $V_{к2}$ и сравните их значения при условии, что сверхзвуковое обтекание заостренного конуса будет докритическим (т. е. скачок имеет конический вид).

IX.15. Покажите, как будет изменяться с подъемом на высоту при $M_\infty=\text{const}$ коэффициент волнового сопротивления $c_{xв}$ полусферы в предположении постоянных теплоемкостей, а также в реальных условиях.

IX.16. Сфера радиуса $R_т=2$ *м* движется со сверхзвуковой скоростью, соответствующей числу $M_\infty=15$, в атмосфере Земли на высоте

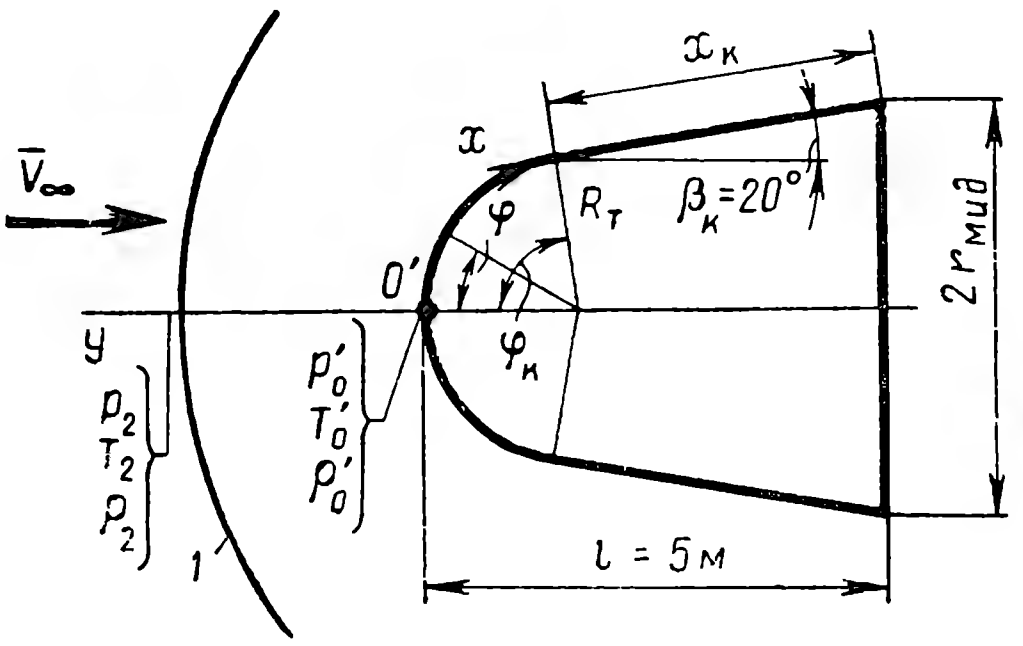


Рис. 2.IX.3. Конус со сферическим затуплением:

1 — скачок уплотнения; $R_т=2$ *м*; $\beta_к=20°$

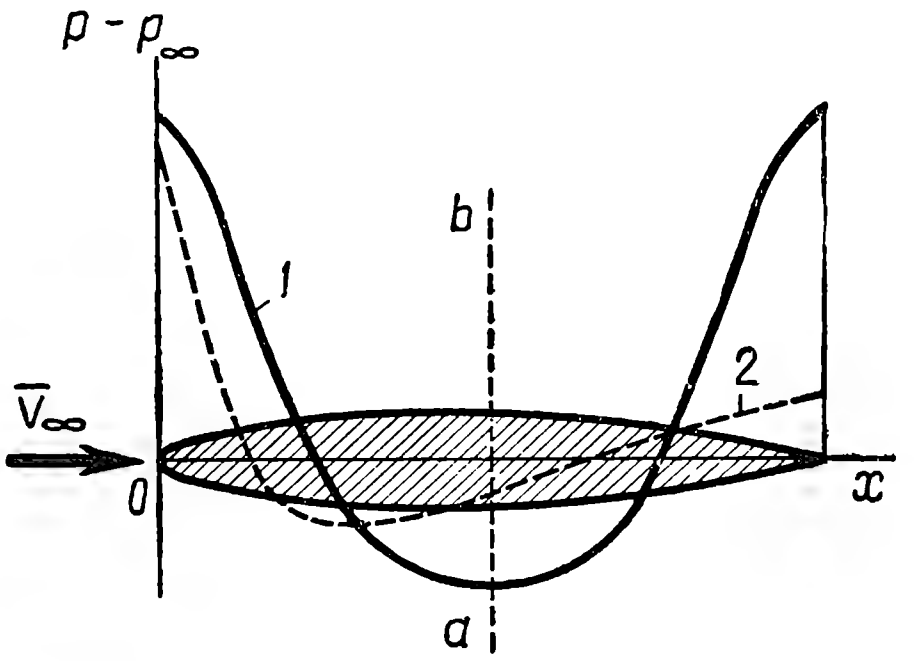


Рис. 2.IX.4. Распределение давления по поверхности тела вращения

$H=15$ *км*. Определите отход и форму ударной волны перед обтекаемой поверхностью.

IX.17. Найдите градиент скорости в окрестности точки полного торможения, а также распределение скорости по сферической поверхности носовой части летательного аппарата, движущегося в воздухе на высоте $H=30$ *км* со скоростью $V_\infty=4000$ *м/сек*. Радиус сферической поверхности $R_т=2$ *м*.

IX.18. Определите коэффициент волнового сопротивления $c_{xв}$, градиент скорости и скорость на поверхности затупленного по сфере конуса, движущегося в атмосфере Земли на высоте $H=10$ *км* со скоростью $V_\infty=5000$ *м/сек*. Форма и размеры конуса показаны на рис. 2.IX.3.

IX.19. При равновесном обтекании затупленной поверхности возросло давление набегающего потока. Как изменится отход ударной волны в газе с постоянными теплоемкостями, а также при учете диссоциации?

IX.20. В точке полного торможения на затупленной поверхности головной части летательного аппарата установилась равновесная температура. За этой точкой течение будет неравновесным. Объясните характер изменения температуры в таком течении и сравните ее с соответствующим значением в случае равновесной диссоциации.

IX.21. Как изменится отход ударной волны от обтекаемой поверхности сферы, если учесть излучение тепла газом, находящимся между скачком и поверхностью тела в окрестности точки полного торможения?

IX.22. На рис. 2.IX.4 показано распределение избыточного давления по поверхности тела вращения (кривые *1* и *2*). Укажите основные особенности обтекающего потока, обусловившие различие в этом распре-

делении, и дайте физическое истолкование изменения давления в каждом случае.

IX.23. Методом характеристик были рассчитаны распределения давления по телу вращения, обтекаемого идеальным (невязким) газом (кривые *1* и *2* на рис. 2.IX.5). Объясните различие в этих распределениях и укажите скорости сверхзвукового потока, при которых это различие будет существенным.

IX.24. Расскажите, в чем заключается линеаризация уравнений движения газа около тонких тел вращения.

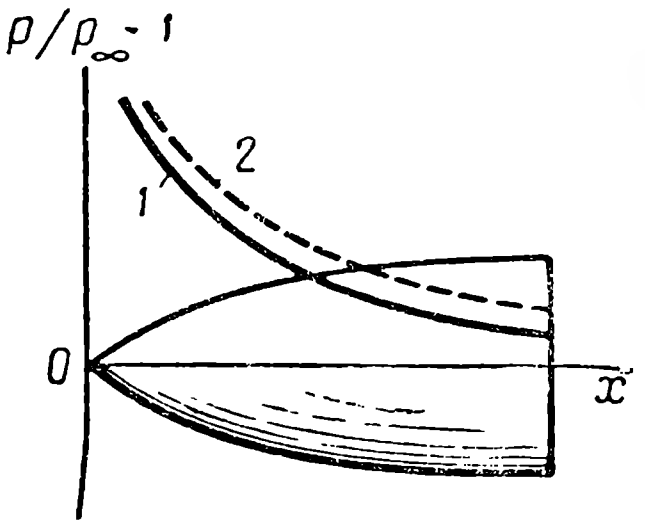


Рис. 2.IX.5. Распределение давления по поверхности тела вращения, рассчитанное методом характеристик

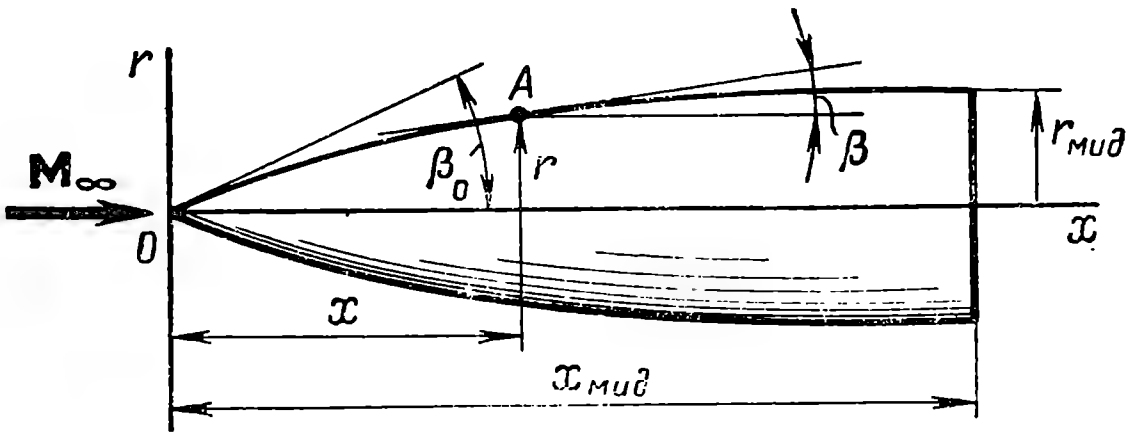


Рис. 2.IX.6. Заостренное тело вращения с параболической образующей

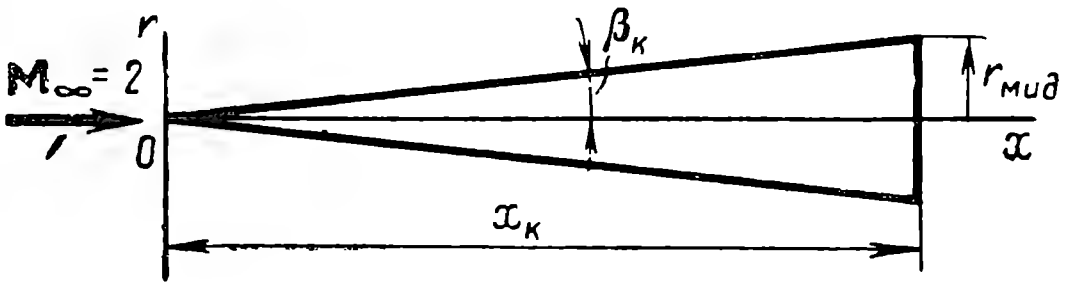


Рис. 2.IX.7. Тонкий конус:
$r_{мид}=0{,}5$; $x_к=10$

IX.25. Напишите в общем виде выражение для потенциала скоростей линеаризованного потока, обтекающего тонкое тело вращения под малым углом атаки.

IX.26. В чем сущность метода источников, применяемого для решения задачи обтекания тонких тел вращения сверхзвуковым потоком?

IX.27. Полет тонкого тела происходит с возрастающей сверхзвуковой скоростью. Можно ли использовать для всех скоростей линеаризованные методы расчета?

IX.28. Найдите распределение коэффициента давления и соответствующую величину волнового сопротивления тонкого заостренного тела вращения, обтекаемого линеаризованным сверхзвуковым потоком с числом $M_\infty=2$ под нулевым углом атаки. Форма тела вращения представлена на рис. 2.IX.6. Уравнение образующей: $r=(r_{мид}/x_{мид})x\times$ $\times(2-x/x_{мид})$; $r_{мид}=0{,}5$; $x_{мид}=10$.

IX.29. Определите коэффициент и силу волнового сопротивления, действующую на тонкий конус при его движении со сверхзвуковой скоростью ($M_\infty=2$) вблизи поверхности Земли. Размеры конуса показаны на рис. 2.IX.7.

IX.30. Требуется найти нормальную силу и момент, а также соответствующие аэродинамические коэффициенты для тонкого тела вращения, изображенного на рис. 2.IX.6. Движение происходит вблизи поверхности Земли под малым углом атаки $\alpha=0{,}1$ со сверхзвуковой скоростью ($M_\infty=2$).

IX.31. Для тонкого конуса, изображенного на рис. 2.IX.7, определите аэродинамические силы и момент тангажа относительно оси, проходящей через носок, а также соответствующие коэффициенты при условии, что угол атаки $\alpha=0{,}1$, число $M_\infty=2$, а движение конуса происходит вблизи поверхности Земли.

X.1. Плоская пластинка с теплоизолированной поверхностью движется со скоростью $V_\infty = V_\delta = 700$ *м/сек* в воздушной атмосфере на высоте $H = 10$ *км*.

Определите местные параметры трения на ламинарном участке обтекаемой поверхности (напряжение и коэффициенты трения, толщину пограничного слоя) при условии, что критическое число Рейнольдса $\mathbf{Re}_{кр} = 10^5$. Найдите также средний коэффициент и сопротивление трения для этого участка пластинки. Размеры пластинки показаны на рис. 2.X.1.

X.2. Найдите параметры пограничного слоя (местный коэффициент трения; толщину слоя) на участке турбулентного обтекания плоской пластинки (см. рис. 2.X.1), а также средний коэффициент и силу трения. Условия обтекания потоком со скоростью $V_\infty = V_\delta = 700$ *м/сек* соответствуют высоте атмосферы $H = 10$ *км*. Критическое число Рейнольдса $\mathbf{Re}_{кр} = 10^5$.

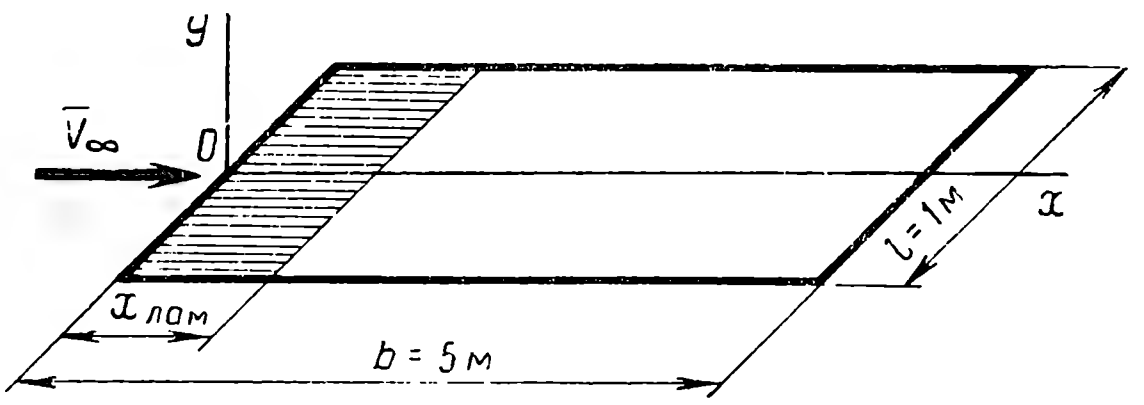


Рис. 2.X.1. К расчету параметров пограничного слоя на плоской пластинке

X.3. Пластинка с теплоизолированной поверхностью шириной (хордой) $b = 5$ *м* и размахом $l = 1$ *м* обтекается сверхзвуковым потоком со скоростью $V_\infty = V_\delta = 4000$ *м/сек*. Условия обтекания соответствуют полету на высоте воздушной атмосферы $H = 20$ *км*. Найдите местные и средний коэффициенты трения, распределение толщин ламинарного пограничного слоя, а также силу трения пластинки.

X.4. Для условий задачи X.3 найдите местные и средний коэффициенты трения, распределение толщин турбулентного пограничного слоя, а также силу трения пластинки.

X.5. Определите параметры пограничного слоя (местный и средний коэффициенты трения, распределение толщин слоя), а также сопротивление трения для теплоизолированной поверхности конуса, движущегося со скоростью $V_\infty = 5000$ *м/сек* на высоте $H = 10$ *км*. Длина образующей конуса $x_к = 5$ *м*, половина угла при его вершине $\beta_к = 40°$.

X.6. Профиль крыла, форма и размеры которого показаны на рис. 2.X.2, движется под нулевым углом атаки со сверхзвуковой скоростью, соответствующей числу $\mathbf{M}_\infty = 2$. Определите параметры ламинарного пограничного слоя на этом профиле для условий полета на высоте $H = 20$ *км*.

X.7. Определите тепловые потоки на ламинарном и турбулентном участках обтекания пластинки, расположенной в воздушном потоке, скорость которого $V_\infty = V_\delta = 4000$ *м/сек*. Критическое число Рейнольдса $\mathbf{Re}_{кр} = 10^6$. Условия обтекания пластинки шириной $b = 5$ *м* и размахом $l = 1$ *м* соответствуют высоте атмосферы $H = 10$ *км*. Температура стенки поддерживается постоянной и равной $T_{ст} = 300$ К.

X.8. Летательный аппарат в виде конуса движется со скоростью $V_\infty = 3500$ *м/сек* на высоте $H = 10$ *км*. Определите тепловой поток к его поверхности при условии, что температура поверхности поддерживается постоянной и равной $T_{ст} = 600$ К. Высота конуса $h = 5$ *м*, угол полураствора $\beta_к = 40°$.

X.9. Требуется рассчитать ламинарную теплопередачу на затупленном по сфере конусе, движущемся со скоростью $V_\infty = 4000$ *м/сек* на высоте $H = 20$ *км*. Условия обтекания этого конуса соответствуют равен-

ству числа Льюиса — Семенова единице (**Le**=1). Температура стенки поддерживается постоянной и равной $T_{ст}$=500 К. Форма и размеры затупленного конуса показаны на рис. 2.X.3.

X.10. Летательный аппарат, имеющий форму конуса со сферической носовой частью, движется со скоростью V_∞=4000 *м/сек* на высоте H=20 *км*. Определите дополнительный тепловой поток к обтекаемой поверхности, обусловленный диффузией в пограничном слое. Температура поверхности поддерживается постоянной и равной $T_{ст}$=500 К. Форма и размеры конуса показаны на рис. 2.X.3.

X.11. Найдите равновесную радиационную температуру стенки в окрестности точки полного торможения конического летательного аппарата, движущегося со скоростью V_∞=4000 *м/сек* на высоте H=20 *км* при условии, что теплопередача рассчитывается с учетом влияния диффузии в пограничном слое. Материал стенки — стекловидное вещество (константа скорости каталитической реакции для этого вещества $k_{ст}$=10 *см/сек*). Степень черноты поверхности принимается равной ε=0,7. Форма и размеры летательного аппарата показаны на рис. 2.X.3.

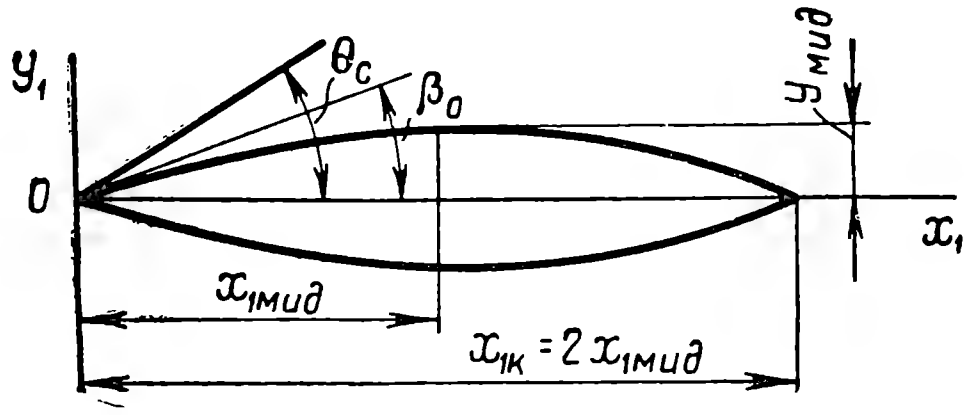


Рис. 2.X.2. Профиль крыла в сверхзвуковом потоке. Уравнение профиля и размеры:

$y_1=(y_{1мид}/x_{1мид})(2-x_1/x_{1мид})x_1$; $x_{1мид}$=1 *м*; $y_{1мид}$=0,04 *м*

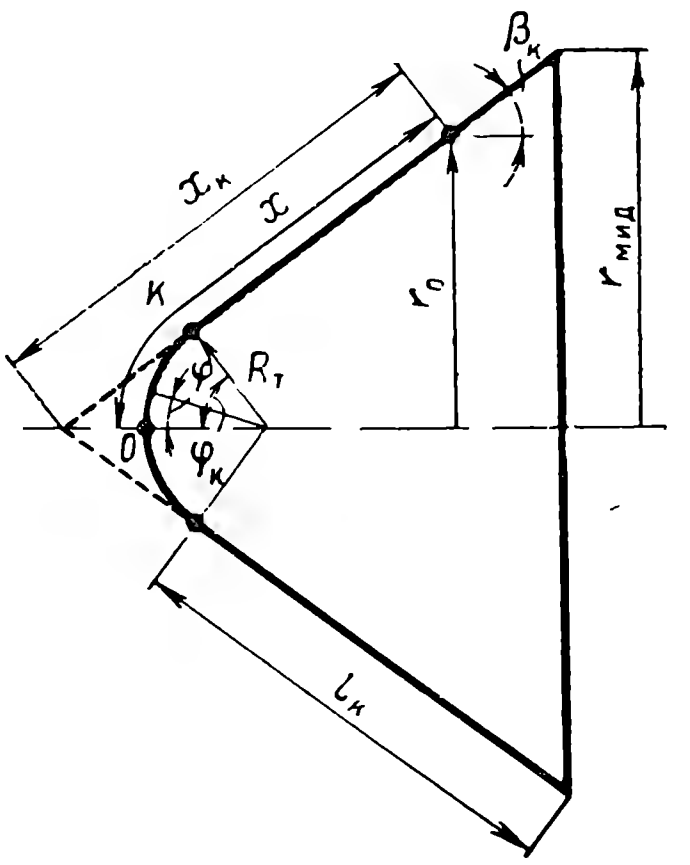


Рис. 2.X.3. К расчету теплопередачи на затупленном по сфере конусе:

$R_т$=1,5 *м*; $l_к$=5 *м*; $\beta_к$=40°

X.12. Летательный аппарат в виде затупленного по сфере тела вращения (см. рис. 2.X.3) движется со скоростью V_∞=4000 *м/сек* на высоте H=20 *км*. Требуется определить унос массы и снижение теплопередачи в окрестности точки полного торможения, обусловленные абляцией материала покрытия. Принять константу скорости каталитической реакции $k_{ст}$=0, а число Льюиса — Семенова **Le**=1.

Расчет провести для тефлона $(C_2F_4)_n$ (с учетом частичного сгорания его паров в пограничном слое) и стекловидного вещества.

X.13. Выбрать материал теплозащитного покрытия и определить его толщину для летательного аппарата в виде сферы диаметром $2R_т$=2 *м*, весом 1250 *кГ*, совершающего вход в плотные слои атмосферы на высоте H=20 *км* со второй космической скоростью под углом 30°.

XI.1. Что такое аэродинамическая интерференция?

XI.2. Как изменится подъемная сила изолированного крыла (или оперения), если его присоединить к корпусу?

XI.3. В каком случае подъемная сила корпуса больше: когда он изолирован или когда к нему присоединено крыло?

XI.4. Чем определяются размеры зон взаимного влияния крыла и корпуса в линеаризованном сверхзвуковом потоке?

XI.5. Найдите коэффициент подъемной силы крыла, расположенного на корпусе в виде тонкого тела вращения, если известны величина этого коэффициента для всей модели летательного аппарата $c_{y\text{кр.т}}=1{,}9$, а также значения $K_{\text{т.и}}=c_{y\text{т}}/c_{y\text{кр}}=0{,}5$, $K_{\text{кр}}=\Delta c_{y\text{кр(т)}}/c_{y\text{кр}}=1{,}45$ и $K_{\text{т}}=\Delta c_{y\text{т(кр)}}/c_{y\text{кр}}=0{,}8$. Здесь $c_{y\text{кр}}$, $c_{y\text{т}}$ — коэффициенты подъемной силы соответственно крыла и корпуса; $\Delta c_{y\text{кр(т)}}$, $\Delta c_{y\text{т(кр)}}$ — аналогичные коэффициенты для крыла в присутствии корпуса и корпуса в присутствии крыла; $K_{\text{кр}}$, $K_{\text{т}}$ — соответствующие коэффициенты интерференции.

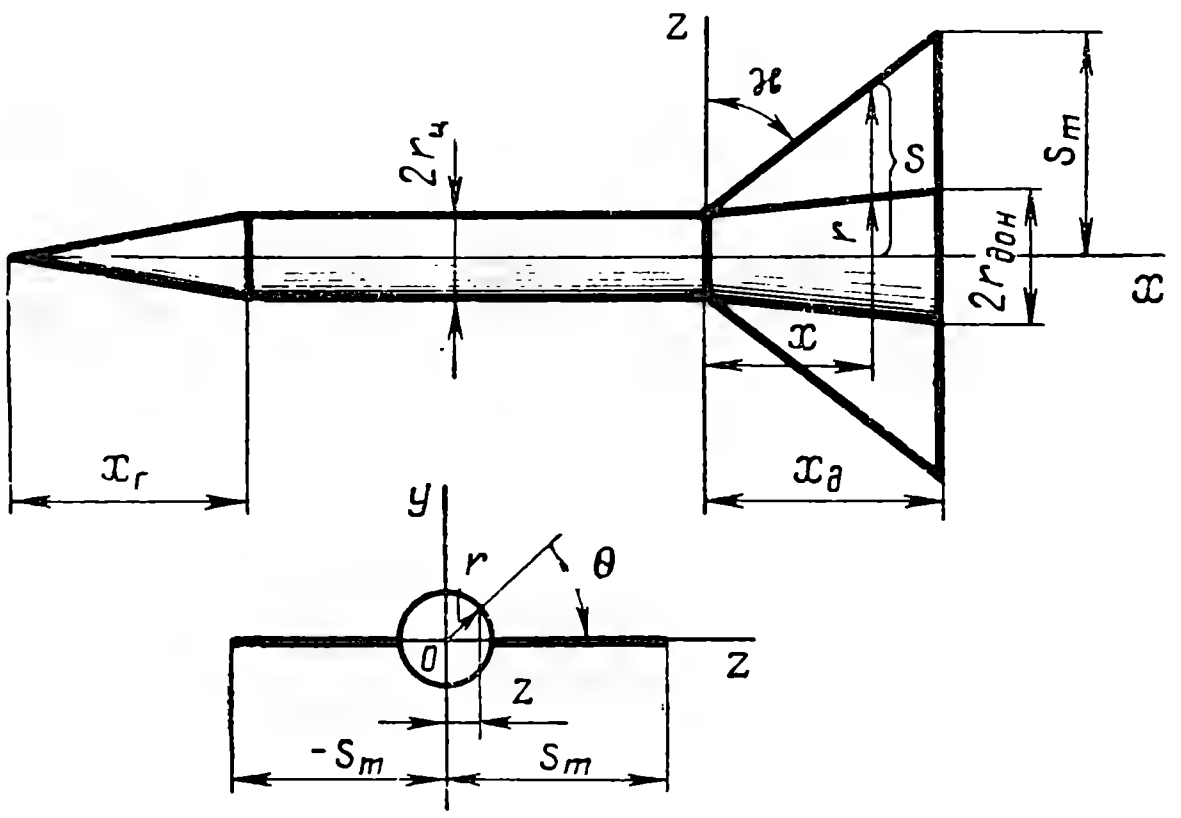


Рис. 2.XI.1. Схема и размеры летательного аппарата с плоским оперением:

$x_г=3$ *м*, $x_д=3$ *м*, $r_ц=0{,}5$ *м*, $r_{дон}=0{,}8$ *м*, $s_m=3{,}2$ *м*

XI.6. Определите коэффициент подъемной силы изолированного корпуса крылатого летательного аппарата, если радиус этого корпуса $r=1$ *м*, полуразмах крыла $s_m=2$ *м*, коэффициент подъемной силы всего аппарата $c_{y\text{т.кр}}=1{,}72$, а изолированного крыла $c_{y\text{кр}}=0{,}637$.

XI.7. Каково влияние интерференции на положение центров давления консолей крыла и корпуса?

XI.8. Тонкое тело вращения с оперением (крыльями) в виде плоских треугольных пластин расположено в сверхзвуковом потоке воздуха ($k=1{,}4$) с числом маха $\mathbf{M}_\infty=1{,}5$ и давлением $p_\infty=1$ *кГ/см*^{2} под малым углом атаки $\alpha=0{,}1$ *рад*. Найдите распределение давления на оперении, а также аэродинамические силы, приложенные к летательному аппарату. Форма и размеры аппарата показаны на рис. 2.XI.1.

XI.9. Объясните физический смысл интерференции между корпусом и установленным на нем крылом при наличии угла крена.

XI.10. Как изменится подъемная сила плоской комбинации корпус — крыло, если имеется угол крена?

XI.11. Что произойдет с боковой силой (в направлении оси Oz_1) плоской комбинации корпуса и крыла нулевой толщины при наличии угла крена (см. рис. 3.XI.3)?

XI.12. Тонкое тело вращения с крыльями в виде треугольных пластинок (см. рис. 2.XI.1), движущееся под углом атаки $\alpha=0{,}1$ *рад*, поворачивается на угол крена $\varphi=20°$. Рассчитать аэродинамические характеристики летательного аппарата при условии, что число $\mathbf{M}_\infty=1{,}5$, $p_\infty=10^4$ *кГ/м*^{2}.

XI.13. В чем особенность интерференции (в рамках аэродинамической теории тонкого тела) корпуса и расположенного на нем крестообразного крыла по сравнению с плоской комбинацией?

XI.14. В каком случае центр давления смещается больше: для интерференционных сил при $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ или для сил, вызванных креном ($\alpha \neq 0$; $\beta \neq 0$)?

XI.15. Чему равен момент крена тонкой крестообразной комбинации с одинаковыми консолями, находящейся в слабовозмущенном сверхзвуковом потоке под углами атаки α и скольжения β?

XI.16. Как влияет интерференция крыла с корпусом на положение центра давления летательного аппарата в виде тонкой крестообразной

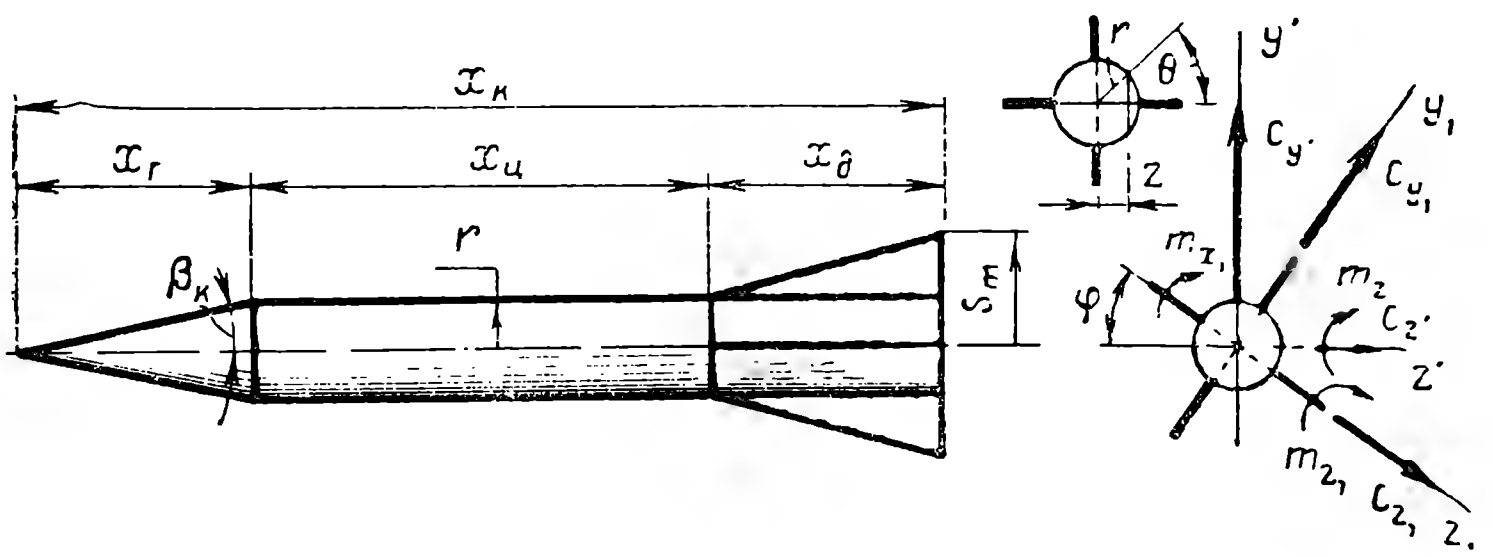


Рис. 2.XI.2. Схема и размеры летательного аппарата с крестообразным оперением:

$r=0{,}5$ *м*; $s_m=3{,}5$ *м*; $x_д=3$ *м*; $x_к=12$ *м*

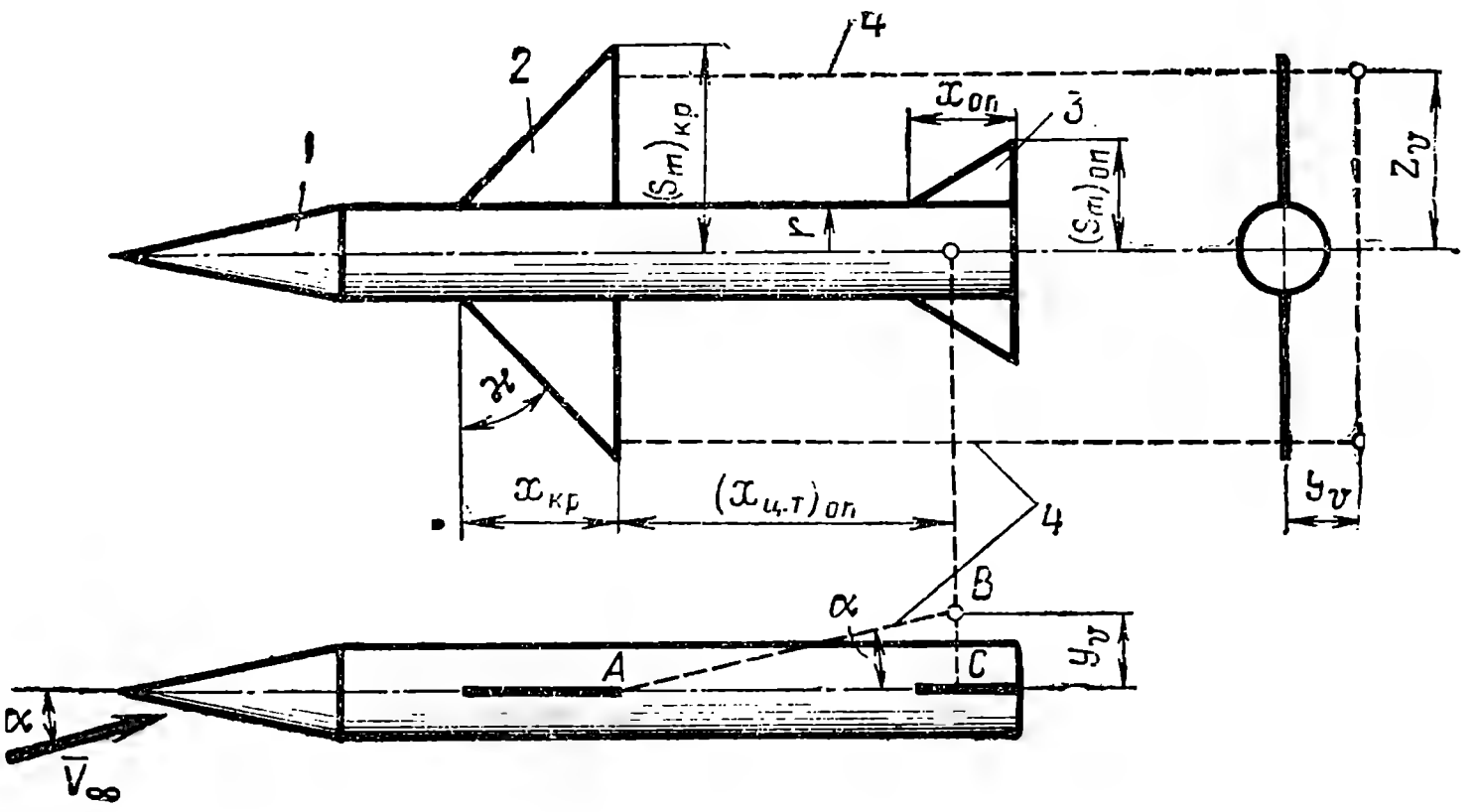


Рис. 2.XI.3. Схема и размеры крылатого оперенного летательного аппарата:

1 — корпус; *2* — крыло; *3* — оперение; *4* — вихревые жгуты; $(s_m)_{кр}=2{,}5$ *м*; $(s_m)_{оп}=1{,}5$ *м*; $(x_{ц.т})_{оп}=4$ *м*; $x_{кр}=2$ *м*; $x_{оп}=1{,}5$ *м*; $r=0{,}5$ *м*

комбинации, находящегося в слабовозмущенном сверхзвуковом потоке под углами атаки и скольжения?

XI.17. Как изменяется влияние хвостовой части корпуса, расположенного за консолями крыла (см. рис. 3.XI.2), на аэродинамические характеристики летательного аппарата при уменьшении числа $\mathbf{M}_\infty$?

XI.18. Как смещается центр давления летательного аппарата под влиянием хвостовой части корпуса, расположенной за консолями крыла (см. рис. 3. XI.2)?

XI.19. Определите аэродинамические характеристики летательного аппарата в виде крестообразной комбинации корпуса и тонких треугольных консолей при условии, что число $\mathbf{M}_\infty=1{,}5$, давление $p_\infty=10^4$ *кГ/м*^{2}, угол атаки $\alpha=0{,}1$ *рад*, угол крена $\varphi=20°$. Форма и размеры летательного аппарата показаны на рис. 2.XI.2.

XI.20. В чем заключается физическая природа интерференции между оперением и расположенным перед ним крылом?

XI.21. Какое крыло сильнее скашивает поток: изолированное или присоединенное к корпусу?

XI.22. Что представляет собой упрощенная вихревая модель комбинации корпус — крыло, применяемая при исследовании интерференции оперения с крылом при сверхзвуковых скоростях?

XI.23. На рис. 2.XI.3 приведена схема и показаны размеры летательного аппарата, представляющего собой комбинацию корпуса, крыльев и оперения в виде тонких треугольных пластинок. Определите эффек-

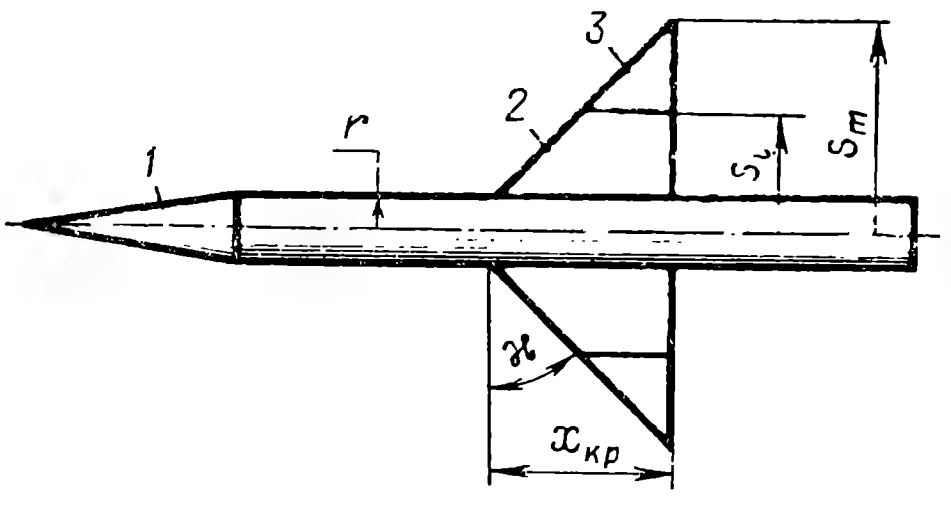


Рис. 2.XI.4. Схема и размеры крылатого летательного аппарата с внешним рулем:

1 — корпус; *2* — крыло; *3* — руль; $S_m=2{,}5$ *м*; $s_i=1{,}25$ *м*; $r=0{,}5$ *м*; $x_{кр}=2$ *м*

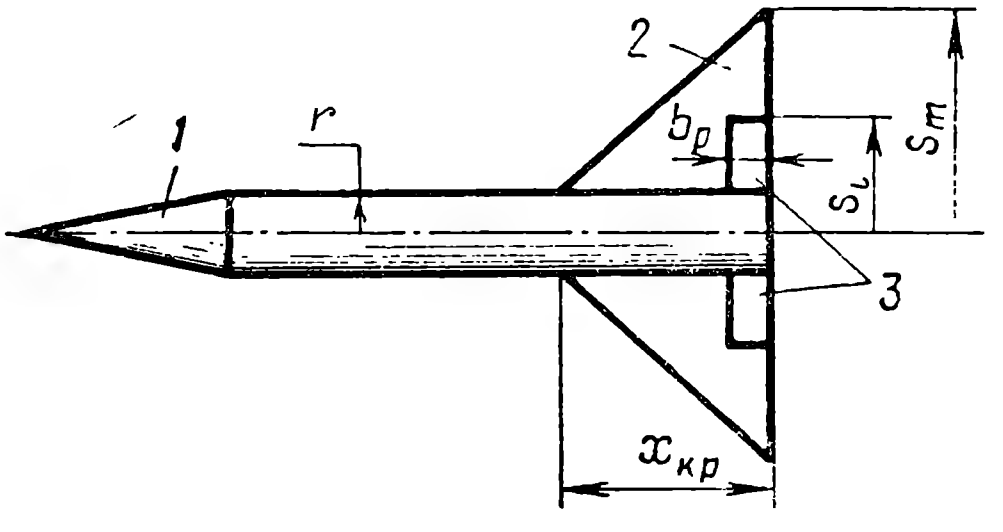


Рис. 2.XI.5. Схема и размеры летательного аппарата с внутренним рулем:

1 — корпус; *2* — крыло; *3* — внутренний руль; $x_{кр}=2$ *м*; $s_i=1{,}5$ *м*; $r=0{,}5$ *м*; $b_р=0{,}25$ *м*; $s_m=2{,}5$ *м*

тивность оперения при условии, что $M_\infty=1{,}5$, а угол атаки $\alpha=0{,}1$ *рад*.

XI.24. Влияет ли форма рулевой поверхности в плане на величину создаваемой ею силы, если исходить из аэродинамической теории тонкого тела?

XI.25. На тонком корпусе летательного аппарата с радиусом $r=0{,}6$ *м* установлен орган управления в виде поворотного крыла (пластинки) с полуразмахом $s_m=1{,}5$ *м*. Такое изолированное крыло при полете под углом атаки $\alpha=5°$ создает подъемную силу $Y_{кр}=9000$ *кГ*. Определите составляющие управляющей силы $Y_р$, возникающие соответственно на корпусе ($\Delta Y_{т(кр)\delta}$) и консолях крыла ($\Delta Y_{кр(т)\delta}$) при повороте этих консолей на угол $\delta=5°$ и значении угла атаки летательного аппарата (корпуса) $\alpha=5°$.

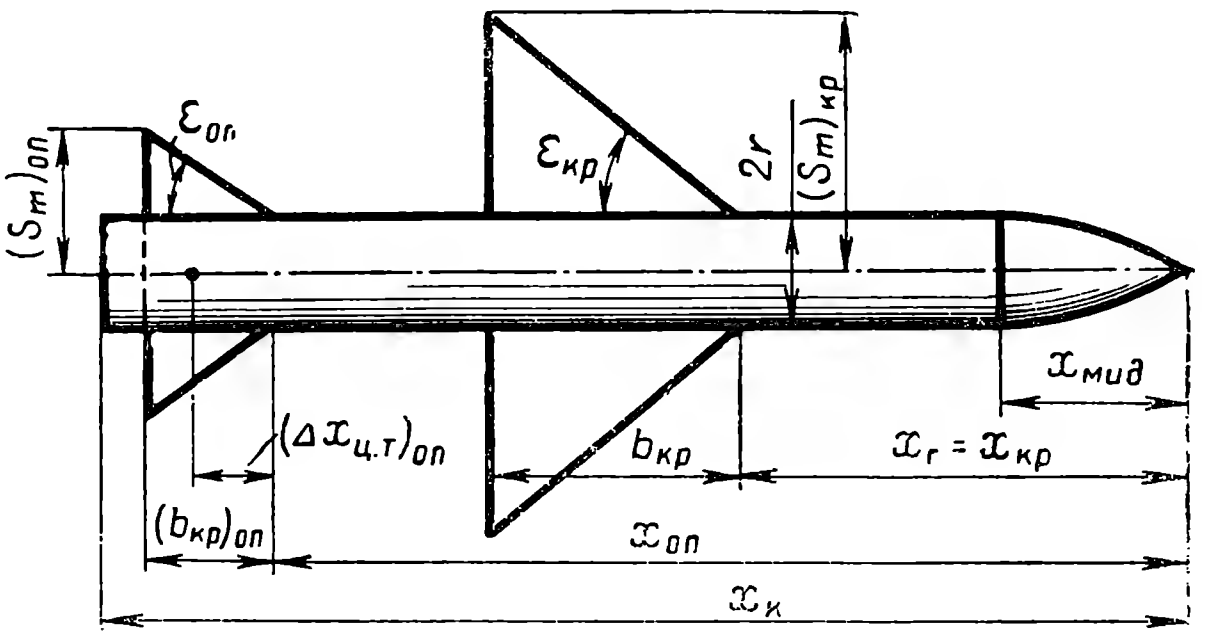


Рис. 2.XI.6. Модель крылатого оперенного летательного аппарата:

$x_{кр}=10{,}7$; $b_{кр}=4{,}7$; $(b_{кр})_{оп}=1{,}5$; $x_к=21$; $(s_m)_{кр}=4{,}1$; $(s_m)_{оп}=2$; $2r=2$; $x_{мид}=5{,}5$; $x_{оп}=18$

XI.26. Вычислите коэффициент управляющей (подъемной) силы, создаваемой рулем, который представляет собой часть внешней поверхности крыла. Такое крыло движется со скоростью, соответствующей числу $M_\infty=1{,}5$, а руль повернут на угол $\delta=0{,}1$. Форма и размеры крыла с участком рулевой поверхности показаны на рис. 2.XI.4.

XI.27. Определите эффективность органа управления в виде подвижного крыла (см. рис. 2.XI.4) при условии, что число $M_\infty=1{,}5$, а угол поворота руля $\delta=0{,}1$ *рад*.

XI.28. Для комбинации корпус — крыло — оперение (см. рис. 2.XI.3) определите аэродинамические коэффициенты подъемной силы при условии, что крылья и оперение играют одновременно роль управляющих

устройств, которые поворачиваются относительно корпуса соответственно на углы $\delta_{кр}=0{,}05$ и $\delta_{оп}=0{,}1$ *рад*. Число Маха обтекающего потока $M_\infty=1{,}5$, давление $p_\infty=10^4$ *кГ/м*^{2}, угол атаки $\alpha=0{,}1$ *рад*.

XI.29. Определите управляющую (подъемную) силу руля, представляющего собой часть внутренней поверхности крыла, которая отклоняется на угол $\delta=0{,}1$ *рад*. Размеры и форма крыла и рулевого участка показаны на рис. 2.XI.5. Число Маха обтекающего потока $M_\infty=1{,}5$.

XI.30. Рассчитайте аэродинамические характеристики плоской модели комбинации корпус — крыло — оперение (рис. 2.XI.6) для $M_\infty=2{,}68$. Все линейные геометрические параметры на рисунке являются безразмерными и отнесены к радиусу цилиндрической части корпуса ($r=r_{мид}=20$ *мм*), а расстояние от носка до центра вращения принято равным $x_{вр}=10{,}5$.

XII.1. Крыло в виде тонкой пластинки с хордой $L=5$ *м* движется со скоростью $V_\infty=3000$ *м/сек* в атмосфере Земли на высоте $H=100$ *км*. Охарактеризуйте режим обтекания этого крыла.

XII.2. Летательный аппарат, имеющий форму тонкой пластинки с хордой $L=10$ *м*, производит спуск в атмосфере Земли с постоянной скоростью $V_\infty=5000$ *м/сек*. Определите предельную высоту спуска, для которой режим обтекания пластинки соответствует свободномолекулярному течению воздуха.

XII.3. В каких случаях реализуется схема зеркального отражения молекул от обтекаемой поверхности и когда вероятней диффузное отражение?

XII.4. Средняя скорость беспорядочного движения молекул в газе $\bar{c}_i=832$ *м/сек*. Найдите наиболее вероятную скорость молекул и соответствующую скорость звука при условии, что $k=c_p/c_v=1{,}4$.

XII.5. От чего зависит давление на обтекаемой поверхности при взаимодействии с ней молекул?

XII.6. Чем обусловлено возникновение напряжения трения при взаимодействии молекул со стенкой?

XII.7. Определите давление и напряжение трения на профиле в точках с координатами $x=2{,}5$ *м* и $7{,}5$ *м* при обтекании его свободномолекулярным потоком ($k=c_p/c_v=1{,}4$) со скоростью $V_\infty=7000$ *м/сек*. Условия обтекания соответствуют полету на высоте $H=160$ *км*, полностью диффузному отражению и значению коэффициента аккомодации $\eta=1$. Форма и размеры профиля показаны на рис. 2.XII.1.

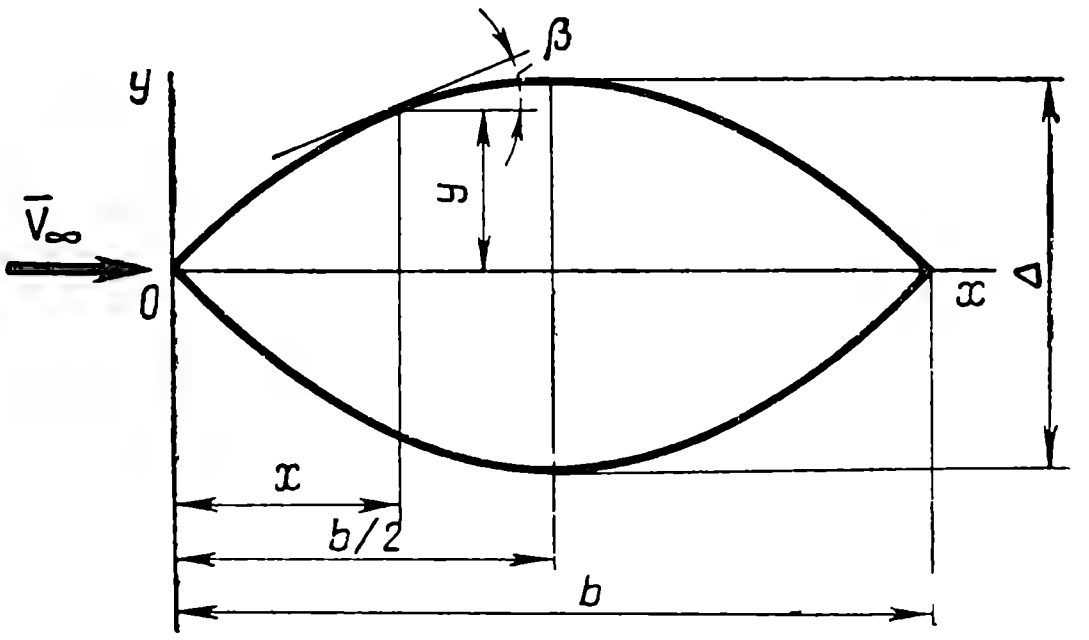


Рис. 2.XII.1. Схема профиля. Уравнение образующей и размеры:
$y=(\Delta/b)x(2-2x/b)$; $\Delta=5$ *м*; $b=10$ *м*

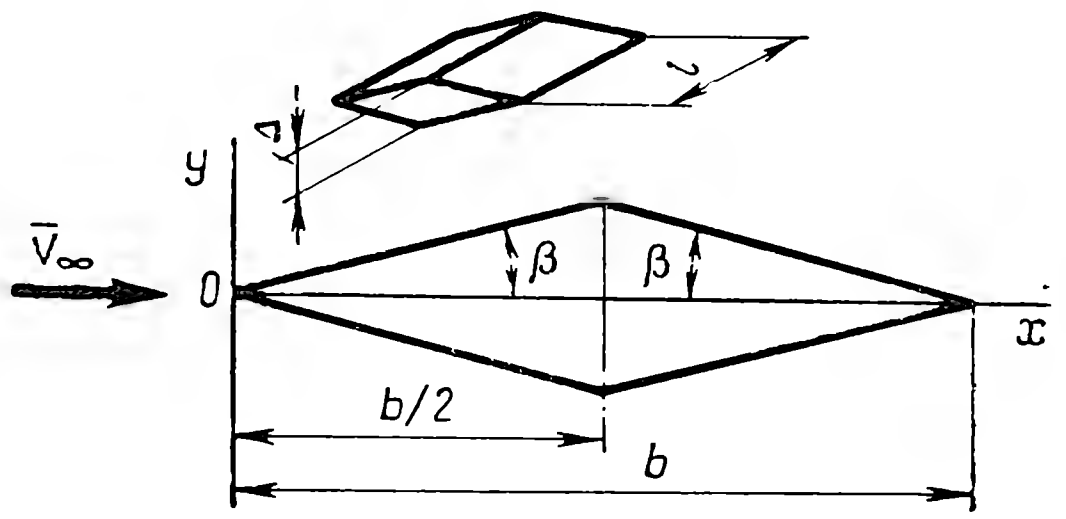


Рис. 2.XII.2. Крыло с ромбовидным профилем
$\Delta=2$ *м*; $b=8$ *м*, $l=4$ *м*

XII.8. Покажите, что при зеркальном отражении молекул от обтекаемой поверхности коэффициент аккомодации $f=0$.

XII.9. Как изменяется коэффициент давления $\bar{p}_f$ на передней площадке обтекаемой поверхности при увеличении коэффициента аккомодации?

XII.10. Пластинка движется под углом атаки $\alpha=10°$ в разреженной воздушной атмосфере на высоте $H=100$ *км* со скоростью $V_\infty=3000$ *м/сек*. Определите давление и напряжение трения на этой пластинке при условии, что примерно 90% молекул отражается диффузно, а остальная часть — зеркально. Материал пластинки — сталь или алюминий с обработанной поверхностью, для которой температура $T_{ст}\approx 300$ К, а коэффициент термической аккомодации $\eta=0{,}7$.

XII.11. По условиям задачи XII.10 рассчитайте энергию падающих и отраженных частиц.

XII.12. По условиям задачи XII.10 определите лобовое сопротивление и подъемную силу пластинки, а также соответствующие аэродинамические коэффициенты.

XII.13. По условиям задачи XII.10 вычислите тепловые потоки на пластинке, а также равновесную температуру ее поверхности. Хорда пластинки $L=5$ *м*, размах $l=2$ *м*.

XII.14. Крыло с ромбовидным профилем движется в атмосфере Земли на высоте $H=160$ *км* со скоростью $V_\infty=4000$ *м/сек* под нулевым углом атаки. Требуется определить лобовое сопротивление при условии, что коэффициент аккомодации принимается равным единице. Форма и размеры крыла показаны на рис. 2.XII.2.

XII.15. Летательный аппарат в виде конуса высотой $h=5$ *м* с половиной угла при вершине $\beta_к=15°$ движется в атмосфере на высоте $H=200$ *км* со скоростью $V_\infty=4500$ *м/сек* под нулевым углом атаки. Найдите аэродинамическое сопротивление при условии, что отражение молекул полностью диффузное, а термический коэффициент аккомодации равен единице.

XII.16. Летательный аппарат в виде круглого цилиндра радиусом $R_т=2$ *м* и длиной $l=5$ *м* движется в направлении нормали к продольной оси в атмосфере на высоте $H=100$ *км* со скоростью $V_\infty=4000$ *м/сек*. Вычислите аэродинамическое сопротивление при условии, что коэффициент аккомодации импульса f и термический коэффициент аккомодации η равны единице.

XII.17. Сравните коэффициенты лобового сопротивления конуса и параболической головки с одинаковым удлинением $\lambda_{мид}=2$ и миделевым сечением при условии зеркального отражения молекул от гладкой поверхности. Параболическая образующая задана уравнением $\bar{r}=\bar{x}\times(2-\bar{x})$, в котором $\bar{r}=r/r_{мид}$, $\bar{x}=x/x_{мид}$ (см. рис. 2.IX.6).

XII.18. Определите коэффициент сопротивления c_x конуса с половиной угла при вершине $\beta_к=30°$, принимая следующие схемы взаимодействия между частицами воздуха и поверхностью: зеркальное (упругое) отражение; диффузное отражение; смешанное (одновременно зеркальное и диффузное отражение); ньютоновские схемы ударного и эластичного отражений. Полет происходит под нулевым углом атаки на высоте $H=100$ *км* со скоростью, соответствующей числу $M_\infty=V_\infty/a_i=2$ (a_i — скорость звука в атмосфере). Коэффициент аккомодации импульса $f=0{,}8$.

XII.19. Определите аэродинамическое качество крыла в виде тонкой пластинки, совершающей полет на высоте $H=160$ *км* под углом атаки $\alpha=30°$. Рассмотрите случаи, соответствующие значениям коэффициента аккомодации $f=0$; 0,8 и 1,0, при условии, что число $M_\infty=3{,}0$. Сравните полученные величины с теми, которые соответствуют схемам ударного и эластичного отражений.

XII.20. Летательный аппарат сферической формы движется с первой космической скоростью на высоте $H=100$ *км*. Определите тепловой поток к поверхности, а также равновесную температуру стенки при условии, что термический коэффициент аккомодации $\eta=0{,}7$, а степень черноты поверхности $\varepsilon=0{,}8$. Причем такие потоки тепла, как солнечная или земная радиация, а также тепло оборудования, не учитываются, а стенка хорошо охлаждается.

РАЗДЕЛ ТРЕТИЙ

ОТВЕТЫ НА ВОПРОСЫ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО АЭРОДИНАМИКЕ

I. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ АЭРОДИНАМИКИ

I.1. Силовое воздействие вязкого газа на движущееся в нем тело характеризуется возникновением на каждом элементе поверхности тела поверхностной силы $\bar{P}$, являющейся векторной суммой $\bar{P}_n+\bar{P}_\tau$ двух составляющих: сил нормального напряжения $\bar{P}_n$ и трения $\bar{P}_\tau$ (рис. 3.I.1). В идеальной жидкости, в которой предполагается отсутствие вязкости (трения), силовое воздействие на площадку dS сводится только к силам от нормального напряжения (давления), т. е. $\bar{P}_n=\bar{P}$. Поверхностные силы, представляющие собой пространственную систему, могут быть приведены в соответствии с правилами механики к силе $\bar{F}$ — главному вектору системы элементарных аэродинамических сил $\bar{P}$ — и к моменту $\bar{M}$ — главному моменту тех же сил относительно какой-либо точки приведения.

I.2. Для вязкой жидкости характерны два вида движения. Первое из них — ламинарное (слоистое) — отличается упорядоченным расположением струек, не смешивающихся между собой во все время движения. В ламинарном потоке перенос количества движения и вещества из одного слоя в другой происходит за счет межмолекулярного проникновения, а тепла — за счет теплопроводности. Такое движение возникает и сохраняется обычно при небольших скоростях. Если эта скорость возрастает, то при некотором ее значении ламинарное движение разрушается и переходит в новый вид движения, для которого характерно поперечное по отношению к основному потоку перемещение частиц, что вызывает перемешивание жидкости. Упорядоченное, слоистое течение исчезает, переходя в турбулентное. На молекулярное хаотическое движение, которое было характерным для ламинарного течения, в турбулентном потоке накладывается перемешивание макроскопических частиц. Это течение имеет неустановившийся характер, при котором скорость и другие параметры в данной точке меняются во времени. Наличие интенсивного перемешивания потока при турбулентном течении приводит к дополнительным напряжениям в жидкости, к более интенсивному переносу в ней вещества и тепла.

I.3. Возникновение сил трения в ламинарном потоке объясняется перемещением в нем молекул, приводящим к переносу количества движения из одного слоя в другой. При наличии относительного движения этих

слоев жидкости такой обмен молекулами вызывает появление сил трения между слоями.

В соответствии с гипотезой, высказанной Ньютоном, напряжение трения $\tau_л$ пропорционально градиенту скорости по нормали к поверхности, разделяющей два слоя жидкости:

$$\tau_л = \mu\,(\partial V/\partial n), \qquad (3.I.1)$$

где μ — коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом динамической вязкости.

В турбулентном потоке возникновение сил вязкости также связано с проникновением из одного слоя в другой, но уже не только отдельных

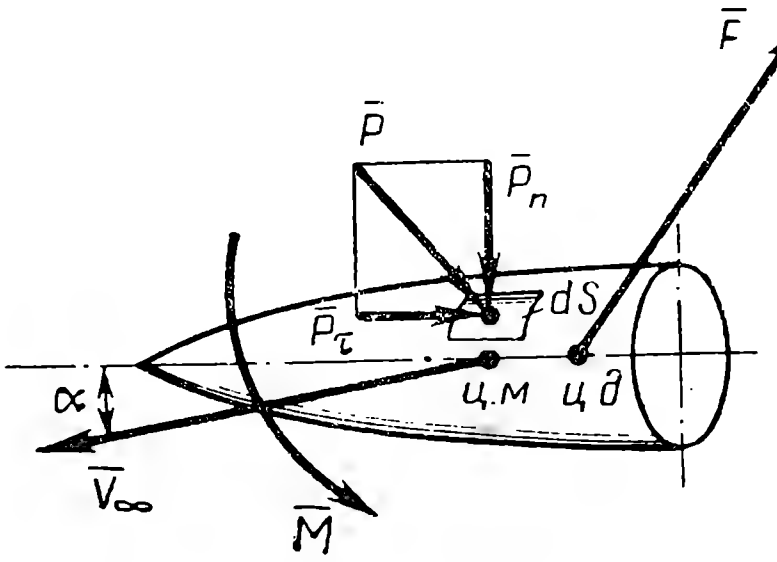


Рис. 3.I.1. Силовое воздействие вязкого газа на движущееся в нем тело

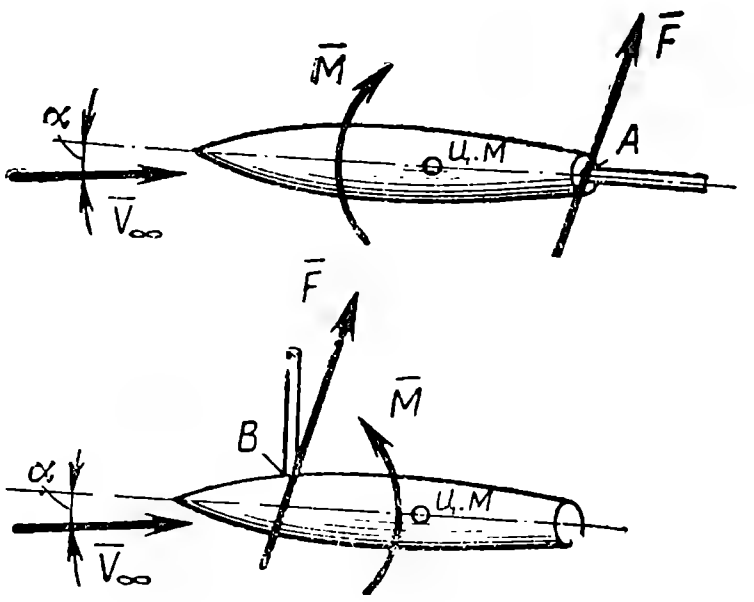


Рис. 3.I.2. Действие аэродинамических сил и моментов на тело вращения в зависимости от положения точек приведения

молекул, но и макроскопических частиц. Величина напряжения трения может быть найдена следующим образом.

Рассмотрим два соприкасающихся слоя жидкости, расположенных на малом расстоянии l' друг от друга. Известно, что осредненная скорость в направлении оси x в некоторой точке турбулентного течения равна $\overline{V}_x$. Для соседнего слоя осредненная скорость будет $\overline{V}_x + (d\overline{V}_x/dy)\,l'$. Положим, что частица, переместившаяся из первого слоя во второй, сохраняет свою скорость $\overline{V}_x$ и, следовательно, в момент появления этой частицы во втором слое, имеющем свою скорость, будет наблюдаться пульсационная скорость

$$V'_x = (d\overline{V}_x/dy)\,l'. \qquad (3.I.2)$$

Макрочастица жидкости совершает перемещение из первого слоя во второй вдоль оси координат y со скоростью $V'_y \approx V'_x$. Количество движения, которое переносится массой макрочастиц $\rho V'_y dS$ через элементарную площадку dS, будет равно по абсолютной величине $\rho V'_y(\overline{V}_x + V'_x)\,dS$. Это количество движения обусловливает дополнительное напряжение $\tau_т$, происходящее от пульсационных скоростей.

I.4. Такое утверждение неправильно. В непосредственной близости к обтекаемой поверхности поток сохранится ламинарным. Здесь турбулентное течение не образуется, так как стенка препятствует макроскопическому перемешиванию в соседних слоях.

I.5. Расположение и направление действующих на летательные аппараты главного вектора сил $\overline{F}$ и главного вектор-момента $\overline{M}$ будут в соответствии с условием задачи такими, как показано на рис. 3.I.2. Главные векторы $\overline{F}$ будут приложены в точках A и B, а моменты $\overline{M}$ в первом и втором случаях будут иметь разные величины и разные направления.

I.6. Переход от одной системы (x, y, z) прямоугольных координат

к другой (x_1, y_1, z_1) осуществляется по известным из аналитической геометрии формулам преобразования:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_1x + a_2y + a_3z;\\ y_1 &= b_1x + b_2y + b_3z;\\ z_1 &= c_1x + c_2y + c_3z; \end{aligned}\right\} \qquad (3.I.3)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1;\\ y &= a_2x_1 + b_2y_1 + c_2z_1;\\ z &= a_3x_1 + b_3y_1 + c_3z_1, \end{aligned}\right\} \qquad (3.I.4)$$

в которых a_n, b_n, c_n $(n=1, 2, 3)$ представляют собой соответствующие направляющие косинусы.

В общем случае их значения могут быть вычислены через тригонометрические функции трех независимых углов Эйлера φ, ψ и θ (см. рис. 2.I.3, *а*):

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta; \quad a_2 = \sin\varphi\cos\psi +\\ &+ \cos\varphi\sin\psi\cos\theta; \quad a_3 = -\cos\varphi\sin\theta; \quad b_1 =\\ &= -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\theta; \quad b_2 = \cos\varphi\cos\psi -\\ &- \sin\varphi\sin\psi\cos\theta; \quad b_3 = \sin\varphi\sin\theta; \quad c_1 = \cos\psi\sin\theta;\\ c_2 &= \sin\psi\sin\theta; \quad c_3 = \cos\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (3.I.5)$$

В случае движения летательного аппарата, имеющего продольную симметрию, поворот связанных и скоростных осей происходит таким образом, что вертикальные оси Oy_1 и Oy располагаются в одной плоскости симметрии (см. рис. 2.I.3, *б*). При этом один из углов Эйлера ψ оказывается равным нулю. Сравнивая рис. 2.I.3, *а* и 2.I.3, *б*, нетрудно убедиться в том, что оставшиеся углы φ и θ соответственно равны углам атаки α и скольжения β.

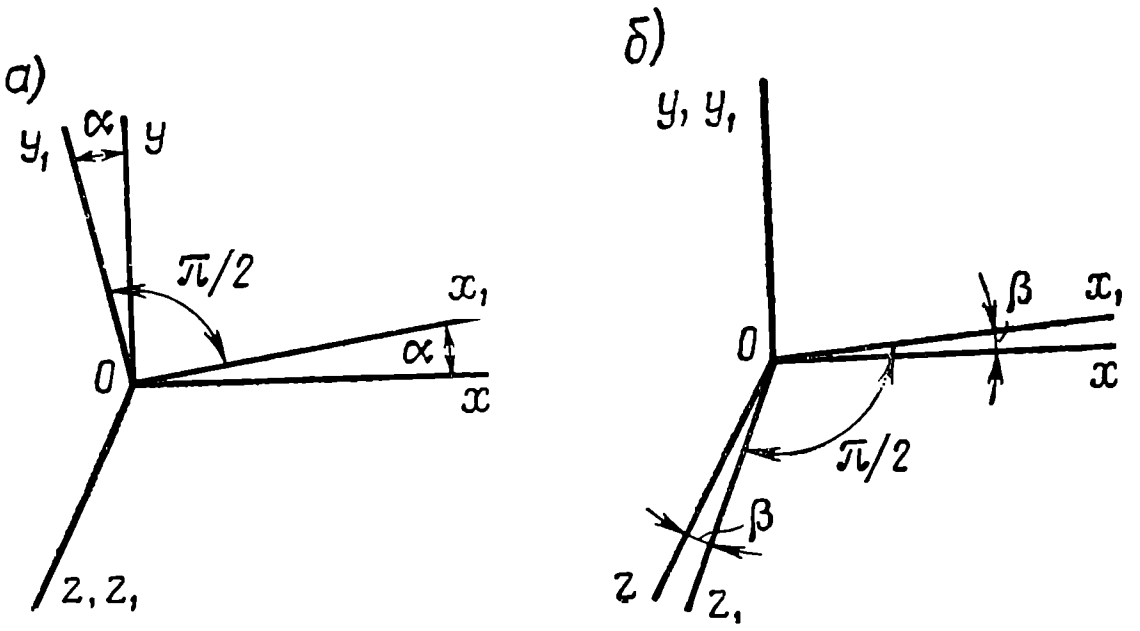


Рис. 3.I.3. Расположение связанной и скоростной систем координат при различных видах движения летательного аппарата

В соответствии с этим:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \cos\alpha\cos\beta; \quad a_2 = \sin\alpha; \quad a_3 = -\cos\alpha\sin\beta;\\ b_1 &= -\sin\alpha\cos\beta; \quad b_2 = \cos\alpha; \quad b_3 = \sin\alpha\sin\beta;\\ c_1 &= \sin\beta; \quad c_2 = 0; \quad c_3 = \cos\beta: \end{aligned}\right\} \qquad (3.I.6)$$

Отсюда видно, что для осуществления пересчета аэродинамических коэффициентов с одной системы координат в другую требуются по существу два угла, а именно: угол атаки α и угол скольжения β.

I.7. Углом атаки α называется угол между продольной осью Ox_1 летательного аппарата и проекцией вектора скорости $\overline{V}_\infty$ его центра масс на плоскость x_1Oy_1. Угол скольжения β — это угол между вектором скорости $\overline{V}_\infty$ центра масс и плоскостью x_1Oy_1 (рис. 2.I.3, *б*).

Графическое изображение относительного расположения скоростной и связанной систем координат для случаев движения летательного аппарата без скольжения под углом атаки и со скольжением под нулевым углом атаки приведено соответственно на рис. 3.I.3, *а* и *б*.

I.8. Связь между составляющими аэродинамических сил и моментов в скоростной и связанной системах координат определяется правилами аналитической геометрии. Зная углы атаки α и скольжения β, можно осуществить этот пересчет, воспользовавшись табл. 3.I.1.

Таблица 3.I.1

Связанная система	Скоростная система		
	Ox	Oy	Oz
Ox_1	$\cos\alpha\cos\beta$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha\sin\beta$
Oy_1	$-\sin\alpha\cos\beta$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha\sin\beta$
Oz_1	$\sin\beta$	O	$\cos\beta$

В соответствии с данными этой таблицы формулы пересчета, в частности для силы лобового сопротивления

$$X = X_1\cos(\hat{x_1 x}) + Y_1\cos(\hat{y_1 x}) + Z_1\cos(\hat{z_1 x})$$

и момента крена

$$M_x = M_{x1}\cos(\hat{x_1 x}) + M_{y1}\cos(\hat{y_1 x}) + M_{z1}\cos(\hat{z_1 x}),$$

принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} X &= X_1\cos\alpha\cos\beta - Y_1\sin\alpha\cos\beta + Z_1\sin\beta;\\ M_x &= M_{x1}\cos\alpha\cos\beta - M_{y1}\sin\alpha\cos\beta + M_{z1}\sin\beta. \end{aligned}\right\} \quad (3.I.7)$$

Аналогично можем получить формулы пересчета и для других составляющих:

$$\left.\begin{aligned} Y &= -X_1\sin\alpha + Y_1\cos\alpha;\\ M_y &= M_{x1}\sin\alpha + M_{y1}\cos\alpha; \end{aligned}\right\} \quad (3.I.8)$$

$$\left.\begin{aligned} Z &= -X_1\cos\alpha\sin\beta + Y_1\sin\alpha\sin\beta + Z_1\cos\beta;\\ M_z &= -M_{x1}\cos\alpha\sin\beta + M_{y1}\sin\alpha\sin\beta + M_{z1}\cos\beta. \end{aligned}\right\} \quad (3.I.9)$$

При необходимости произвести пересчет со скоростной на связанную систему координат формулы записывают в виде:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= X\cos\alpha\cos\beta + Y\sin\alpha - Z\cos\alpha\sin\beta;\\ M_{x1} &= M_x\cos\alpha\cos\beta + M_y\sin\alpha - M_z\cos\alpha\sin\beta; \end{aligned}\right\} \quad (3.I.10)$$

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= -X\sin\alpha\cos\beta + Y\cos\alpha + Z\sin\alpha\sin\beta;\\ M_{y1} &= -M_x\sin\alpha\cos\beta + M_y\cos\alpha + M_z\sin\alpha\sin\beta; \end{aligned}\right\} \quad (3.I.11)$$

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= X\sin\beta + Z\cos\beta;\\ M_{z1} &= M_x\sin\beta + M_z\cos\beta. \end{aligned}\right\} \quad (3.I.12)$$

Применяя формулы (3.I.7) $\div$ (3.I.12), получаем для движения симметричного летательного аппарата без скольжения ($\beta=0$) под углом атаки ($\alpha\neq 0$) следующие результаты. Силы Z_1 и Z равны нулю, так как нет физических причин, вызывающих их появление (аппарат симметричен и угол $\beta=0$); моменты M_y, M_{y1}, M_x и M_{x1} также равны нулю в силу тех же причин.

С учетом знаков величин X, X_1, Y, Y_1 получаем в скоростной системе:

$$-X = -X_1 \cos\alpha - Y_1 \sin\alpha;$$

$$Y = -X_1 \sin\alpha + Y_1 \cos\alpha;$$

$$M_z = M_{z1}.$$

Для связанной системы:

$$-X_1 = -X \cos\alpha + Y \sin\alpha;$$

$$Y_1 = X \sin\alpha + Y \cos\alpha;$$

$$M_{z1} = M_z.$$

Полученные результаты графически изображены на рис. 3.I.4, *а*.

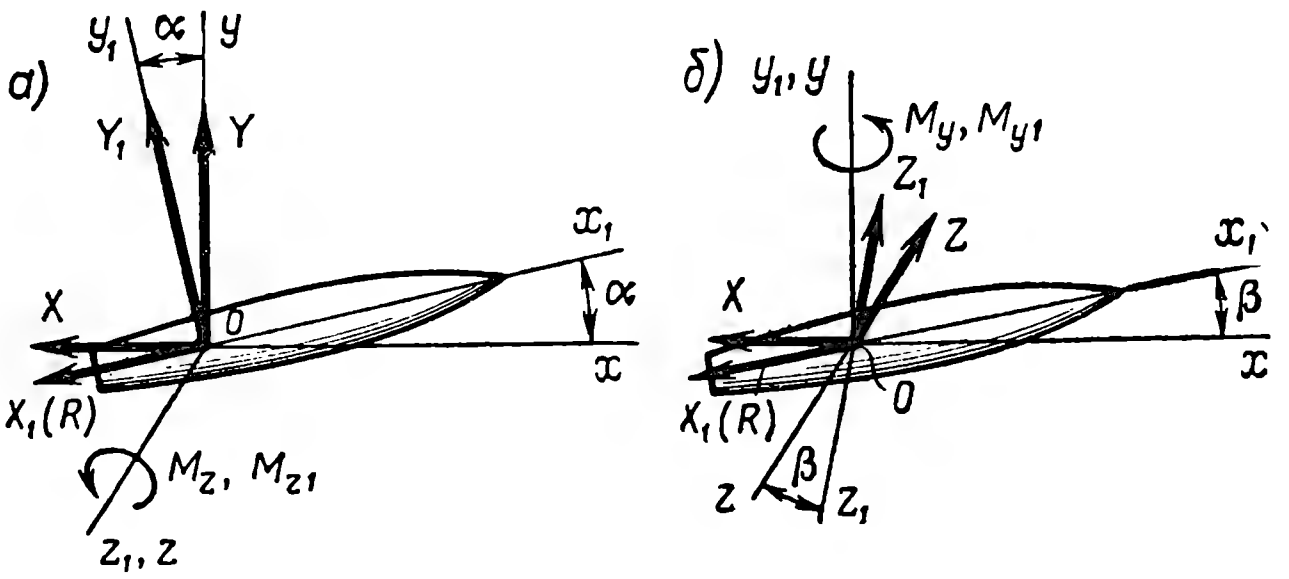


Рис. 3.I.4. К пересчету сил и моментов из скоростной в связанную систему координат

Для движения симметричного аппарата без угла атаки ($\alpha=0$), но со скольжением ($\beta\neq0$) имеем $Y_1=Y=0$, а также $M_{x1}=M_x=M_{z1}=M_z=0$. При этом также в скоростной системе координат:

$$-X = -X_1 \cos\beta - Z_1 \sin\beta;$$

$$-Z = X_1 \sin\beta - Z_1 \cos\beta;$$

$$M_y = M_{y1},$$

а в связанной:

$$-X_1 = -X \cos\beta + Z \sin\beta;$$

$$-Z_1 = -X \sin\beta - Z \cos\beta;$$

$$M_{y1} = M_y.$$

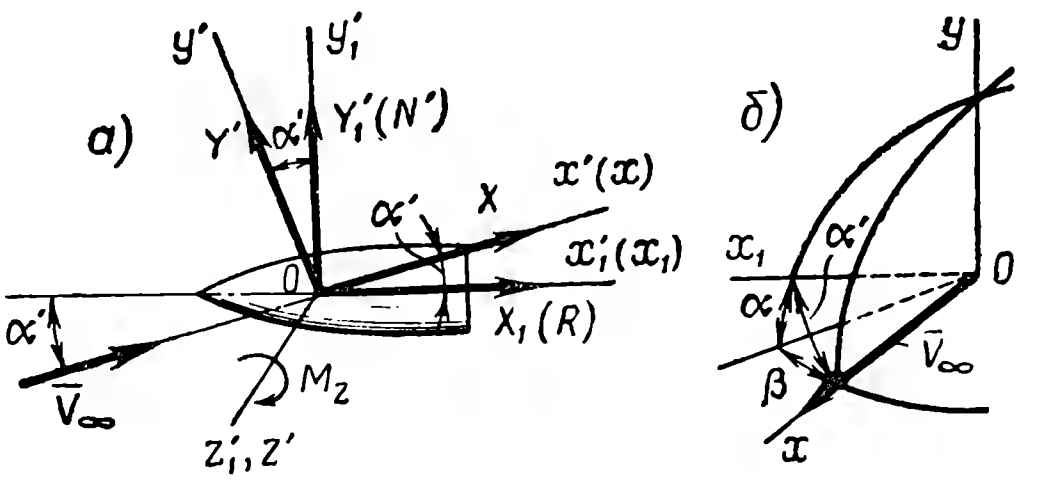


Рис. 3.I.5. Схемы для пересчета аэродинамических сил и моментов

Графически эти результаты изображены на рис. 3.I.4, *б*.

I.9. Для тел вращения вместо двух углов (α и β), характеризующих связь между поточными и связанными координатами, иногда применяют лишь один угол атаки (α'), измеряемый между вектором скорости центра масс летательного аппарата и его продольной осью симметрии Ox_1 (рис. 3.I.5, *а*).

Переход к новому углу атаки α' определит собой новую систему координат, в которой: ось Ox' совпадает с осью Ox (т. е. направлена по вектору скорости $\bar{V}_\infty$); ось Oy' перпендикулярна оси Ox' и лежит в плоскости угла α'; боковая ось Oz' направлена перпендикулярно плоскости $x'Oy'$. Это будет как бы новая поточная система координат x', y', z'. Так как скольжения летательного аппарата не будет (по условию, $\beta=0$), то новая связанная система координат x_1', y_1', z_1' относительно новой поточной x', y', z' расположится так, как показано на рис. 3.I.5, *а*. При переходе к новой системе координат остались неизменными положения осей

Ox' (Ox) и Ox_1' (Ox_1), следовательно, лобовое сопротивление X и продольная сила X_1 (R) также не изменяются.

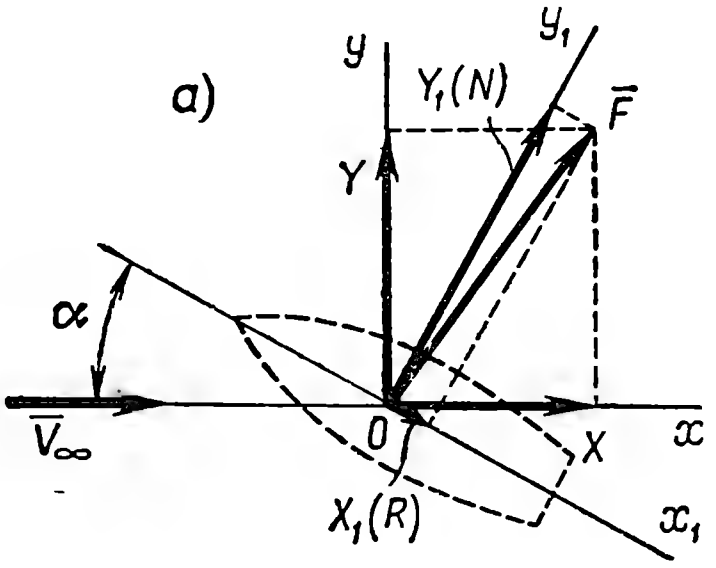
Из анализа рис. 3.I.5 ясно, что $M_z' = M_{z1}'$, а составляющие момента M_x', M_{x1}', M_y' и M_{y1}' будут равны нулю, так как нет причин для их возникновения.

Угол атаки α' может быть найден по формуле сферической тригонометрии, в соответствии с которой для прямоугольного сферического треугольника (рис. 3.I.5,*б*) косинус гипотенузы равен произведению косинусов катетов:

$$\cos(\hat{xx_1}) = \cos\alpha\cos\beta,$$

откуда

$$\cos\alpha' = \cos\alpha\cos\beta.$$



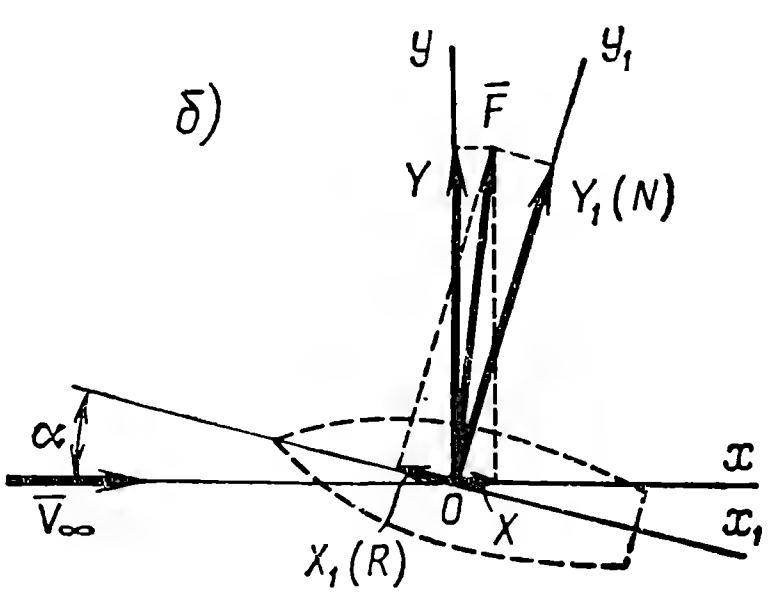


Рис. 3.I.6. Проекции главного вектора аэродинамических сил на оси связанной системы координат

I.10. Неправдоподобность схемы, приведенной на рис. 2.I.6, *б*, — кажущаяся, что видно из картины действия аэродинамических сил на движущееся тело, которая изображена на рис. 3.I.6. В зависимости от угла атаки главный вектор аэродинамических сил $\bar{F}$, проектируясь на оси связанной системы координат, дает либо положительную (рис. 3.I.6, *б*), либо отрицательную (рис. 3.I.6, *а*) проекцию — осевую силу $X_1(R)$. Однако механизм образования толкающей силы R_2 (см. рис. 2.I.6) нельзя объяснить только закономерностями проецирования. Экспериментальные данные, полученные в аэродинамических трубах, показывают, что при дозвуковом обтекании профиля крыла под углом атаки на передней кромке его образуется сильное разрежение, создающее тянущую силу, как это изображено на рис. 2.I.6, *б*.

Из приведенных на рис. 3.I.6 схем ясна разница между осевой силой $X_1(R)$ — проекцией главного вектора $\bar{F}$ на ось Ox_1 тела и лобовым сопротивлением X — проекцией F на ось Ox, совпадающую с вектором скорости $\bar{V}_\infty$.

I.11. Для определения величины аэродинамических сил воспользуемся данными табл. 3.I.1 и формулами пересчета (3.I.7) ÷ (3.I.12). Подъемная сила Y в зависимости от осевой R и нормальной N сил при условии $\beta = 0$ и $\alpha \neq 0$

$$Y = -R\sin\alpha + N\cos\alpha.$$

Нормальная сила при тех же условиях

$$N = X\sin\alpha + Y\cos\alpha.$$

Преобразуем полученные зависимости, приняв для малых углов атаки $\sin\alpha \approx \alpha$, $\cos\alpha \approx 1 - \alpha^2/2$. В соответствии с этим:

$$Y = -R\alpha + N(1 - \alpha^2/2);$$
$$N = X\alpha + Y(1 - \alpha^2/2).$$

I.12. По известным составляющим главного вектора момента $\bar{M}$ в связанных координатах (M_{x1}, M_{y1} и M_{z1}) можно найти его составляющие

в поточной и скоростной системах координат. При этом следует иметь в виду, что переход от поточной системы координат к скоростной (и наоборот) не изменяет ни направления вращения, ни величины рассматриваемой составляющей момента, поэтому можно пользоваться табл. 3.I.1 без каких-либо корректив.

В общем случае (движение аппарата совершается под некоторым углом атаки α со скольжением под углом β) формулы для пересчета будут иметь вид:

$$M_x = M_{x1}\cos\alpha\cos\beta - M_{y1}\sin\alpha\cos\beta + M_{z1}\sin\beta;$$
$$M_y = M_{x1}\sin\alpha + M_{y1}\cos\alpha;$$
$$M_z = -M_{x1}\cos\alpha\sin\beta + M_{y1}\sin\alpha\sin\beta + M_{z1}\cos\beta.$$

В случае движения без скольжения в этих формулах надо принять $\beta=0$:

$$M_x = M_{x1}\cos\alpha - M_{y1}\sin\alpha;$$
$$M_y = M_{x1}\sin\alpha + M_{y1}\cos\alpha;$$
$$M_z = M_{z1}.$$

При условии, что $\alpha=0$, $\beta\neq0$:

$$M_x = M_{x1}\cos\beta + M_{z1}\sin\beta;$$
$$M_y = M_{y1};$$
$$M_z = -M_{x1}\sin\beta + M_{z1}\cos\beta.$$

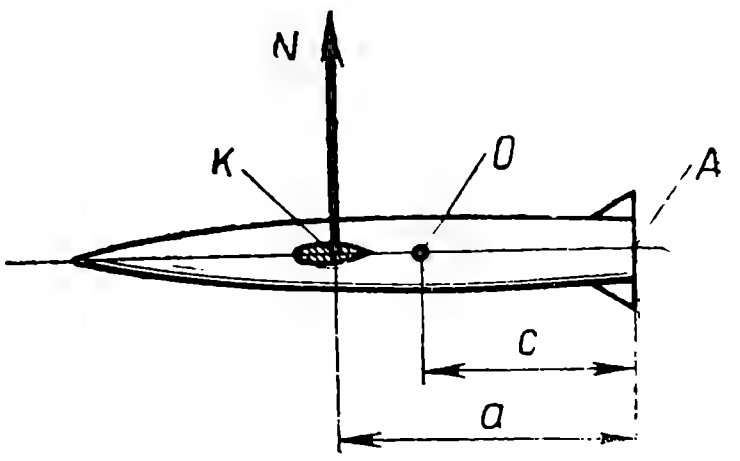


Рис. 3.I.7. Схема для пересчета аэродинамического момента от точки A к точке O

I.13. Общее выражение для силы лобового сопротивления, как известно, имеет вид $X=c_x q_\infty S$ (где S — характерная площадь летательного аппарата, а c_x — соответствующий этой площади аэродинамический коэффициент). Записав эту формулу дважды:

$$X = c_{x1} q_\infty S_{\text{мид}} \quad \text{и} \quad X = c_{x2} q_\infty S_{\text{кр}},$$

получаем следующую зависимость между аэродинамическими коэффициентами:

$$c_{x1} = c_{x2} S_{\text{кр}}/S_{\text{мид}}.$$

I.14. Запишем формулы для определения необходимых аэродинамических сил:

$$Y = c_y q_\infty S_{\text{кр}},\ N = c_N q_\infty S_{\text{кр}},\ R = c_R q_\infty S_{\text{мид}}.$$

Формула для пересчета из связанной системы координат в скоростную имеет вид (3.I.8)

$$Y = R\sin\alpha + N\cos\alpha.$$

Подставив сюда найденные значения R и N, получаем

$$c_y = c_R (S_{\text{мид}}/S_{\text{кр}})\sin\alpha + c_N\cos\alpha.$$

I.15. Для летательного аппарата, симметричного относительно горизонтальной плоскости, проходящей через продольную ось, моменты относительно точек A и O создает нормальная сила N, точка приложения которой в рассматриваемом случае нам неизвестна. Допустим, что такой точкой является точка K (рис. 3.I.7).

Момент силы N относительно точки A можно записать в соответствии с условием задачи следующим образом:

$$M_{zA} = Na = c_N q_\infty S_{\text{кр}} a$$

или

$$M_{zA} = m_{zA} q_\infty S_{\text{мид}} x_{\text{к}}.$$

Относительно точки O соответствующие выражения для момента принимают вид:

$$M_{zO} = N(a - c) = c_N q_\infty S_{кр}(a - c)$$

и

$$M_{zO} = m_{zO} q_\infty S_{кр} b_{кр}.$$

После некоторых преобразований получаем

$$m_{zO} = c_N \frac{a}{b_{кр}} - c_N \frac{c}{b_{кр}}$$

и

$$m_{zA} = c_N \frac{a}{b_{кр}} \cdot \frac{S_{кр}}{S_{мид}} \cdot \frac{b_{кр}}{x_к}.$$

С учетом этого

$$m_{zO} = m_{zA}\left(\frac{S_{мид}\, x_к}{S_{кр}\, b_{кр}} - \frac{c}{a} \cdot \frac{S_{мид}}{S_{кр}} \cdot \frac{x_к}{b_{кр}}\right)$$

или

$$m_{zO} = m_{zA} \frac{S_{мид}}{S_{кр}} \cdot \frac{x_к}{b_{кр}} - c_N \frac{c}{b_{кр}}.$$

I.16. В соответствии с условиями задачи запишем:

$$M_x = m_x q_\infty S_{кр} l;$$

$$M_{x1} = m_{x1} q_\infty S_{кр} l,\ M_{y1} = m_{y1} q_\infty S_{кр} l;$$

$$M_{z1} = m_{z1} q_\infty S_{кр} x_к.$$

Считая, что движение летательного аппарата происходит под углами атаки α и скольжения β, получим, воспользовавшись формулами пересчета (3.I.7) ÷ (3.I.12),

$$M_x = M_{x1} \cos\alpha \cos\beta - M_{y1} \sin\alpha \cos\beta + M_{z1} \sin\beta.$$

Переходя к аэродинамическим коэффициентам, найдем

$$m_x = m_{x1} \cos\alpha \cos\beta - m_{y1} \sin\alpha \cos\beta + m_{z1} (x_к/l) \sin\beta.$$

I.17. Аэродинамические силы и моменты определяются в общем случае по формулам:

$$R = c_R q_\infty S \ \text{и}\ M = m q_\infty S l; \qquad (3.I.13)$$

здесь S и l — характерные геометрические размеры летательного аппарата.

При осуществлении расчетов в качестве таких размеров для летательных аппаратов самолетных схем принято выбирать следующие: $S_{кр}$ — площадь крыла в плане; l — размах крыла; b — хорда крыла. Если крыло имеет переменную по размаху хорду, то в качестве характерного размера выбирается средняя аэродинамическая хорда $b_{САХ}$. Из двух длин l и b таким характерным размером выбирают размах крыла при определении моментов M_y, M_{y1}, M_x, M_{x1} и хорду в случае вычисления моментов тангажа M_z, M_{z1}.

I.18. Определение аэродинамической силы или момента можно осуществить, если известны [см. (3.I.13)] помимо аэродинамических коэффициентов также скоростной напор $q_\infty = \rho_\infty V_\infty^2/2$ и характерные геометрические размеры летательного аппарата (S и l). По условию, кроме аэродинамических коэффициентов известны также высота и скорость полета, т. е. можно определить скоростной напор. Однако, так как не за-

даны геометрические размеры летательного аппарата, вычислить аэродинамические силу и момент не представляется возможным.

1.19. Полный коэффициент сопротивления тела вращения определим в виде суммы составляющих:

$$c_x = c'_{xp} + c'_{xf} + c'_{x\,\text{дон}};$$

здесь коэффициент c_x, как и его составляющие в правой части, должен быть рассчитан по одному и тому же характерному геометрическому размеру. Для летательного аппарата в виде тела вращения таким размером является площадь миделевого сечения $S_{\text{мид}}$. По условию, коэффициент сопротивления от давления рассчитан по $S_{\text{мид}}$ (т. е. $c'_{xp} = c_{xp}$). Найдем выражения коэффициентов c'_{xf} и $c'_{x\text{дон}}$ соответственно через заданные значения c_{xf} и $c_{x\text{дон}}$. Очевидно, что действующие силы не зависят от того, по каким коэффициентам они вычисляются, т. е. для силы трения можем написать

$$X_f = c_{xf} q_\infty S_{\text{п}} = c'_{xf} q_\infty S_{\text{мид}},$$

а для донного сопротивления

$$X_{\text{дон}} = c_{x\,\text{дон}} q_\infty S_{\text{дон}} = c'_{x\,\text{дон}} q_\infty S_{\text{мид}}.$$

Таким образом,

$$c'_{xf} = c_{xf} S_{\text{п}}/S_{\text{мид}}, \quad c'_{x\,\text{дон}} = c_{x\,\text{дон}} S_{\text{дон}}/S_{\text{мид}}.$$

В сответствии с этим полный коэффициент

$$c_x = c_{xp} + c_{xf} S_{\text{п}}/S_{\text{мид}} + c_{x\,\text{дон}} S_{\text{дон}}/S_{\text{мид}}.$$

Подставляя данные, находим

$$c_x = 0{,}2 + 0{,}01 \cdot 1/0{,}1 + 0{,}3 \cdot 1/1{,}2 = 0{,}55.$$

1.20. К геометрическим характеристикам крыла помимо площади в плане $S_{\text{кр}}$ и размаха l относится также удлинение λ, равное отношению квадрата его размаха к площади крыла в плане:

$$\lambda = l^2/S_{\text{кр}},$$

а также сужение

$$\eta = b_{\text{кр}}/b_{\text{кц}},$$

где $b_{\text{кр}}$ — корневая, а $b_{\text{кц}}$ — концевая хорды крыла (см. рис. 2.1.10, *б*).

Площади в плане прямоугольного, трапециевидного, треугольного крыльев будут соответственно следующими:

$$S_{\text{кр1}} = lb; \quad S_{\text{кр2}} = l\,\frac{b + b/2}{2}; \quad S_{\text{кр3}} = \frac{1}{2}\,lb.$$

По этим значениям площадей можем найти удлинения:

$$\lambda_1 = \frac{l^2}{S_{\text{кр1}}} = \frac{l}{b}; \quad \lambda_2 = \frac{l^2}{S_{\text{кр2}}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{l}{b}; \quad \lambda_3 = \frac{l^2}{S_{\text{кр3}}} = 2\,\frac{l}{b}.$$

Сужения рассматриваемых крыльев, очевидно, равны:

$$\eta_1 = 1; \quad \eta_2 = 2, \quad \eta_3 = \infty.$$

1.21. Средней геометрической хордой крыла $b_{\text{ср}}$ называют отношение площади крыла $S_{\text{кр}}$ к размаху l:

$$b_{\text{ср}} = S_{\text{кр}}\, l,$$

а средней аэродинамической хордой $b_{\text{САХ}}$ — хорду такого эквивалентного прямоугольного крыла, моментные характеристики которого и аэродинамические силы равны соответствующим их значениям для крыла заданной формы с той же площадью, что и у эквивалентного крыла.

В соответствии со сказанным моменты для прямоугольного крыла $M_z = m_z S_{кр} q_\infty b_{САХ}$ и для заданного крыла $M_z = 2\int_0^{l/2} m_z' \; q_\infty b^2 \cdot dz$ должны быть равны. Считая m'_z неизменным вдоль размаха крыла и полагая $m'_z = m_z$, найдем

$$b_{САХ} = \frac{2}{S_{кр}} \int_0^{l/2} b^2 dz.$$

Для стреловидного крыла это выражение может быть представлено в виде

$$b_{САХ} = \frac{2}{3} b_{кр} \frac{\eta^2 + \eta + 1}{\eta (1 + \eta)},$$

где $\eta = b_{кр}/b_{кц}$ — сужение крыла.

Определим величины, необходимые для вычисления средних геометрической и аэродинамической хорд:

$$S_{кр} = l (b_{кр} + b') - \frac{1}{2} lb' - \frac{1}{2} l[(b_{кр} + b') - b_{кц}] =$$

$$= \frac{1}{2} l (b_{кр} + b_{кц}) = \frac{5}{2} (1 + 0{,}2) = 3;$$

$$\eta = b_{кр}/b_{кц} = 1/0{,}2 = 5.$$

Таким образом

$$b_{ср} = \frac{3}{5} = 0{,}6; \quad b_{САХ} = \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \frac{5^2 + 5 + 1}{5 (1 + 5)} = 0{,}689.$$

I.22. Нормальная сила N, приложенная в центре давления (ц. д), создает момент

$$M_z = -Nx_{ц.д} = -c_N q_\infty S x_{ц.д}$$

относительно носка (точка 0). С другой стороны, тот же момент

$$M_z = m_z q_\infty S b.$$

Из этих двух выражений получаем

$$x_{ц.д}/b = c_{ц.д} = -m_z/c_N.$$

При малых углах атаки, когда коэффициенты подъемной и нормальной сил приблизительно равны ($c_N \approx c_y$),

$$c_{ц.д} = -m_z/c_y.$$

Как показали исследования, центр давления меняет свое положение с изменением угла атаки. Для летательных аппаратов, не имеющих горизонтальной симметрии, их летные свойства удобнее оценивать не по центру давления, а по фокусному расстоянию. Из рис. 2.I.12 следует, что для линейной зависимости c_y от m_z можно написать

$$m_z = m_{z0} + c_y (\partial m_z/\partial c_y).$$

В соответствии с этим

$$c_{ц.д} = -(m_{z0}/c_y + \partial m_z/\partial c_y),$$

где m_{z0} — значение коэффициента момента при $c_y = 0$ (см. рис. 2.I.12). Величина $\partial m_z/\partial c_y$ равна $\operatorname{tg}\varphi$ или, согласно рисунку,

$$\partial m_z/\partial c_y = \operatorname{tg}\varphi = -0{,}2/0{,}47 = -0{,}426.$$

Эта величина и определяет безразмерную координату фокуса в соответствии с зависимостью

$$\bar{x}_F = x_F/b = -\partial m_z/\partial c_y = 0{,}426.$$

Для коэффициента центра давления получим

$$c_{\text{ц.д}} = -m_{z0}/c_y + \bar{x}_F.$$

Из рис. 2.I.12 видно, что $m_{z0}=-0{,}1$. Таким образом,

$$c_{\text{ц.д}} = 0{,}1/c_y + 0{,}426.$$

Для нескольких значений c_y, взятых из того же рисунка, подсчитаны следующие значения $c_{\text{ц.д}}$:

c_y	0,6	0,4	0,2	0,1	0	—0,1
$c_{\text{ц.д}}$	0,593	0,676	0,926	1,426	∞	—1,426

Как следует из полученных результатов, координата точки фокуса не изменяется, в то время как центр давления является функцией коэффициента c_y (или угла атаки).

I.23. Поляра профиля устанавливает связь между подъемной силой и лобовым сопротивлением, или, что то же самое, между соответствующими аэродинамическими коэффициентами, и представляет собой геометрическое место концов векторов полной аэродинамической силы $\bar{F}$, действующей на профиль при разных углах атаки, или соответствующего вектора коэффициента $\bar{c}_F$ этой силы, определяемого в соответствии с соотношением $c_F = F/(q_\infty S)$.

Поляра позволяет определить для любого угла атаки аэродинамические характеристики профиля. Так, например, аэродинамическое качество профиля [если на графике масштабы $c_y(Y)$ и $c_x(X)$ одинаковы]

$$K = c_y/c_x = Y/X$$

и может быть определено как тангенс угла наклона к оси абсцисс вектора, проведенного из начала координат (полюса) в точку полярной диаграммы, соответствующую выбранному углу атаки (рис. 3.I.8).

Наивыгоднейший угол атаки $\alpha_{\text{наив}}$, соответствующий максимальному качеству $K_{\max}=\operatorname{tg}\varphi_{\max}$ (см. рис. 3.I.8, *а*), находят, проведя из начала координат касательную к поляре. Точка, в которой касательная встретится с полярой, определяет $\alpha_{\text{наив}}$.

Максимальная подъемная сила соответствует точке поляры, в которой $c_y = c_{y\max}$, и достигается при движении с так называемым критическим углом атаки $\alpha_{\text{кр}}$. Поляра на рис. 2.I.13, *а* соответствует несимметричному профилю, а на рис. 2.I.13, *б* — симметричному. В соответствии с этими рисунками находим для несимметричного профиля: $K_{\max} = \operatorname{tg}\varphi_{\max} = 21{,}5$; $\alpha_{\text{наив}} = 1°15'$; $c_{y\max} = 1{,}18$; $\alpha_{\text{кр}} = 14°$, а для симметричного: $K_{\max} = 21{,}6$; $\alpha_{\text{наив}} = 4°10'$; $c_{y\max} = 1{,}18$; $\alpha_{\text{кр}} = 18°$.

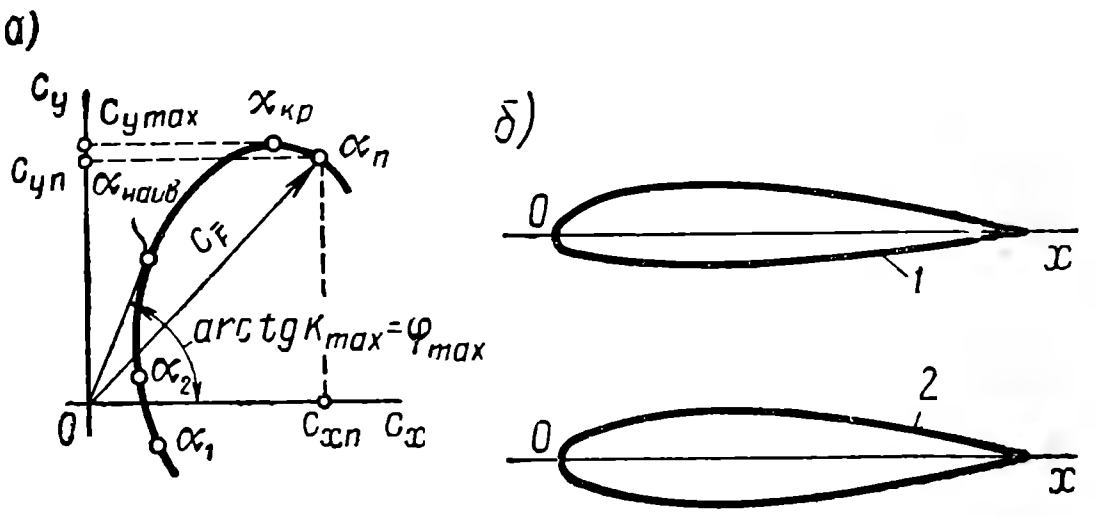


Рис. 3.I.8. Определение с помощью поляры (*а*) аэродинамических характеристик профилей (*б*):
1 — несимметричный; *2* — симметричный

I.24. Определение положения центра давления связано с расчетом статической устойчивости тела вращения в полете. Эта устойчивость зависит от нескольких факторов: геометрической формы тела; положения его центра массы; скорости полета; угла атаки; величины аэродинамической силы и точки ее приложения. Эти факторы будут определять величину момента относительно центра массы.

Движение тела может характеризоваться различным взаимным расположением центров давления и масс. На рис. 3.I.9, *а* показано зад-

нее расположение центра давления. Нетрудно видеть, что при этом увеличению возникшего угла атаки будет препятствовать момент силы $\bar{F}$ относительно центра массы, стремящийся восстановить равновесие. Полет такого тела будет статически устойчивым. При заданной аэродинамической форме тела заднее расположение центра давления обусловлено утяжелением носовой части этого тела и соответствующим смещением центра массы.

На рис. 3.I.9, *б* центр давления совпадает с центром массы летательного аппарата. В этом случае момент, восстанавливающий равновесие, будет равен нулю. Поэтому тело может вращаться относительно цент-

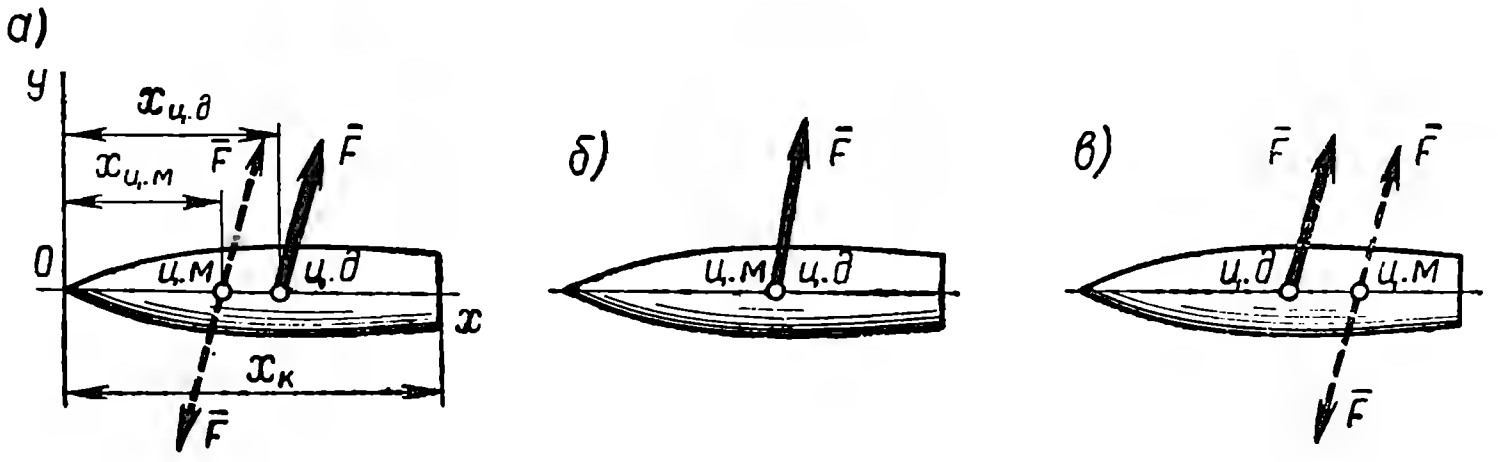


Рис. 3.I.9. Взаимное расположение центра давления и центра массы для статически устойчивого (*а*) и статически неустойчивого (*в*) тел, а также тела (*б*), нейтрального в отношении статической устойчивости

ра массы и полет будет неустойчивым. Правда, отклонение на достаточно большой угол атаки приведет к возникновению аэродинамической силы, отличной от первоначальной ($\bar{F}$) и приложенной в другой точке, не совпадающей с центром массы, т. е. появится момент, стремящийся восстановить равновесие. Однако такой полет статически устойчивого тела с большими колебаниями около центра массы рассматривается динамически неустойчивым. Такое совмещенное положение центров давления и массы при заданной форме тела могло произойти за счет соответствующей «центровки» тела, при которой несколько облегчена его носовая часть.

На рис. 3.I.9, *в* показан случай статически неустойчивого тела, которому соответствует переднее расположение центра давления. Появившийся угол атаки продолжает возрастать, чему способствует момент от силы $\bar{F}$ около центра массы (дестабилизирующий момент). Такое смещение центра давления относительно центра массы в рассматриваемом случае могло произойти за счет перераспределения массы и утяжеления хвостовой части тела вращения.

I.25. Эта особенность заключается в учете влияния сжимаемости газа на аэродинамические характеристики обтекаемых тел.

При движении с большими скоростями в газе около обтекаемой поверхности возникают значительные перепады давления. Это влечет за собой изменение плотности газа, а следовательно, изменение характера и величины силового и теплового воздействий на летательный аппарат по сравнению с несжимаемой жидкостью.

При малых скоростях движения газа изменение давления в потоке незначительно, поэтому плотность меняется мало и влияние сжимаемости невелико. В силу этого при скоростях до 70÷80 *м/сек* можно рассчитывать давление в потоке газа так, как если бы этот газ был несжимаемым. Но с ростом скорости ошибка в расчетах по формулам для несжимаемой жидкости растет. Например, при скорости полета, равной 68 *м/сек*, ошибка в определении плотности составляет 2%, а при скорости 270 *м/сек* она уже равна 35%. Поэтому при больших скоростях в аэродинамических расчетах следует пользоваться соответствующими зависимостями для сжимаемой жидкости.

I.26. При торможении воздуха, движущегося с очень большими скоростями, развиваются высокие температуры. При этом нагрев газа влечет за собой изменение его термодинамических параметров, а также различные физико-химические превращения. Например, в случае нагрева воздуха, находящегося под давлением в одну атмосферу, до температуры около 1500 К начинается заметное возбуждение колебательных уровней внутренней энергии молекул; при нагреве до температуры порядка 3000 К эти уровни для кислорода оказываются полностью возбужденными и дальнейшее нагревание приводит к его диссоциации, завершающейся при температуре около 6000 К. При такой температуре одновременно идет интенсивная диссоциация азота и развивается процесс

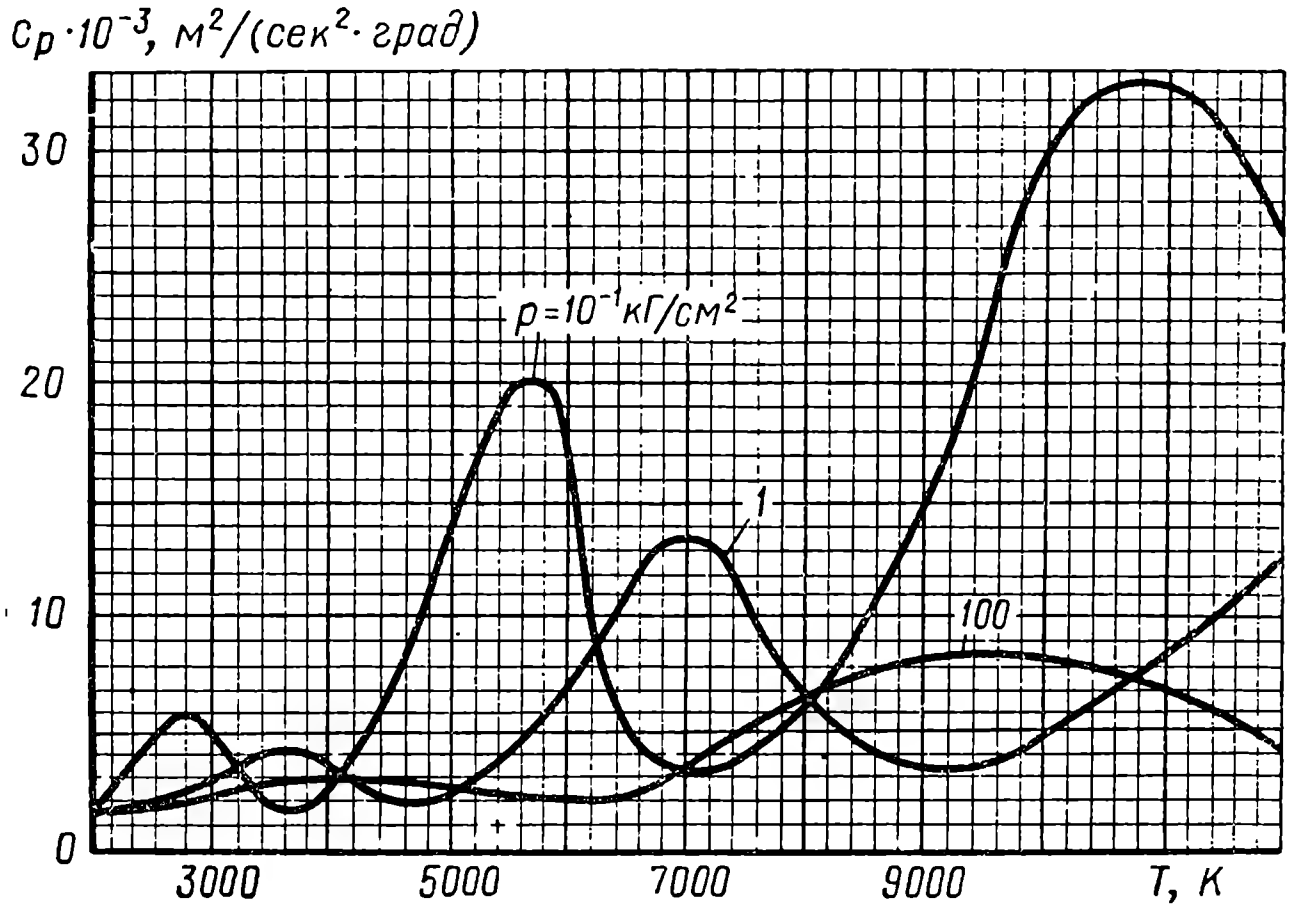


Рис. 3.I.10. Зависимость $c_p = c_p(T, p)$ для диссоциирующего воздуха

возбуждения электронных степеней свободы, что при дальнейшем повышении температуры приводит к появлению в газе свободных электронов.

I.27. Степенью диссоциации называется отношение числа образовавшихся при диссоциации частиц к общему числу частиц в заданном объеме газа. В частности, для двухатомного газа, в котором диссоциация происходит по уравнению $A_2 \rightleftarrows 2A$, степень диссоциации

$$\alpha = n_A/(n_A + 2n_{A2}),$$

где n_A — число атомов, получившихся в результате диссоциации. По условию задачи, $n_A = 2n$, $2n_{A2} = 2(m-n)$, следовательно,

$$\alpha = 2n/[2n + 2(m-n)] = n/m.$$

I.28. Известно, что процесс диссоциации определяется температурой, общим давлением, под которым находится газовая смесь, а также весовыми долями химических элементов этой смеси. Наибольшее влияние на диссоциацию газа оказывают его температура и меньшее — давление. При этом снижение давления способствует более интенсивному распаду молекул на атомы, т. е. увеличению степени диссоциации. Наоборот, повышение давления препятствует этому распаду, т. е. как бы подавляет диссоциацию. Это не относится к таким смесям, в которых химическая реакция протекает без изменения числа молей (например, реакция $2NO \rightleftarrows N_2 + O_2$). В этом случае изменение давления не влияет на состав диссоциирующей смеси.

I.29. Исследования показывают, что удельные теплоемкости воздуха значительно меняются в зависимости от давлений и температур

(рис. 3.I.10). Характер этого изменения имеет свои особенности. Так, при температуре примерно до 1500 К теплоемкости не зависят от давления, но величина их меняется с изменением температуры. Происходит это от того, что по мере нагрева воздуха подводимое тепло идет не только на увеличение энергии поступательного и вращательного движений молекул, но и на возбуждение колебательных степеней свободы атомов в молекулах, а при повышении температуры свыше 1500÷2000 К — и на диссоциацию. Поэтому здесь удельные теплоемкости растут.

При наступлении диссоциации удельные теплоемкости зависят не только от температуры, но и от давления. Причем общая тенденция, наблюдаемая при таком изменении, такова, что с уменьшением давления и повышением, следовательно, степени диссоциации и ионизации удельные теплоемкости возрастают, хотя и немонотонно (см. рис. 3.I.10).

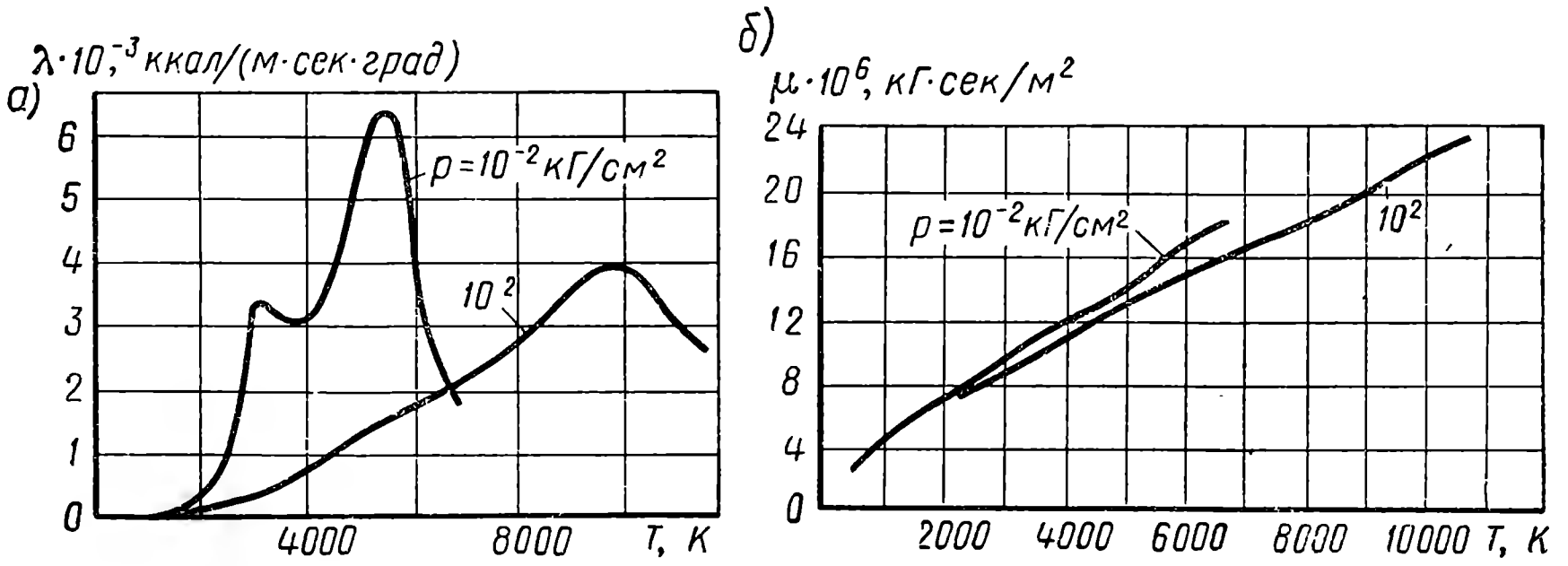


Рис. 3.I.11. Зависимость кинетических характеристик воздуха (λ и μ) от температуры и давления

I.30. Правильным является третий ответ. Систематизированные расчеты [17] показали, что при отсутствии диссоциации коэффициенты динамической вязкости μ и теплопроводности λ зависят лишь от температуры, в то время как в диссоциирующем газе на них влияют и температура и давление.

Происхождение сил вязкости и возникновение процесса теплопроводности в газе связано с молекулярным строением вещества. Перемещение молекул приводит к переносу массы, энергии и количества движения. При этом изменение количества движения вызывает появление силы вязкости, а перенос энергии обусловливает теплопроводность. Отсюда следует, что с ростом температуры увеличиваются коэффициенты теплопроводности и динамической вязкости в газе (рис. 3.I.11, *а* и *б*). При возникновении диссоциации происходит изменение химического состава воздуха вследствие нарушения внутримолекулярных связей. На это расходуется часть тепла и коэффициент теплопроводности уменьшается (см. рис. 3.I.11, *а*). Однако дальнейшее повышение степени диссоциации приводит к росту числа частиц, участвующих в процессах переноса и, как следствие, к увеличению кинетических коэффициентов μ и λ.

I.31. Если предположить, что диссоциация отсутствует, то [20]

$$c_p/c_{p\infty} = (T/T_\infty)^{\varphi}.$$

Полагая здесь $\varphi = 0{,}1$; $T_\infty = 288$ К; $c_p = 0{,}24$ *ккал/(кГ·град)* [1002 *м²/(сек²·град)*], найдем

$$c_p = 1002\,(5000/288)^{0{,}1} = 1{,}35\cdot 10^3\ м^2/(сек^2\cdot град).$$

С учетом диссоциации соответствующую величину удельной теплоемкости найдем из таблиц [33] по значениям $T=5000$ К и $p=0{,}1$ *кГ/см²*: $c_p=12\cdot10^3$ *м²/(сек²·град)*.

Таким образом, удельная теплоемкость, вычисленная без учета диссоциации, меньше действительного значения примерно в девять раз.

I.32. Плотность недиссоциированного воздуха уменьшилась бы, как и давление, в 100 раз (это следует из уравнения состояния $p=\rho RT$). Однако при диссоциации изменение будет иным, так как плотность в этом случае будет зависеть от степени диссоциации воздуха.

Непосредственно из рис. 1.4.6 [20] или рис. 1-1 [17] можно найти, что при $T=4000$ К и $p_1=1$ *кГ/см²* плотность $\rho_1=8\cdot10^{-3}$ *кГ·сек²/м⁴*, а при $T=4000$ К и $p_2=10^{-2}$ *кГ/см²* плотность $\rho_2=10^{-4}$ *кГ·сек²/м⁴*. Таким образом, при снижении давления в 100 раз уменьшение плотности диссоциирующего газа определяется величиной $\rho_2/\rho_1=1{,}25\cdot10^{-2}$.

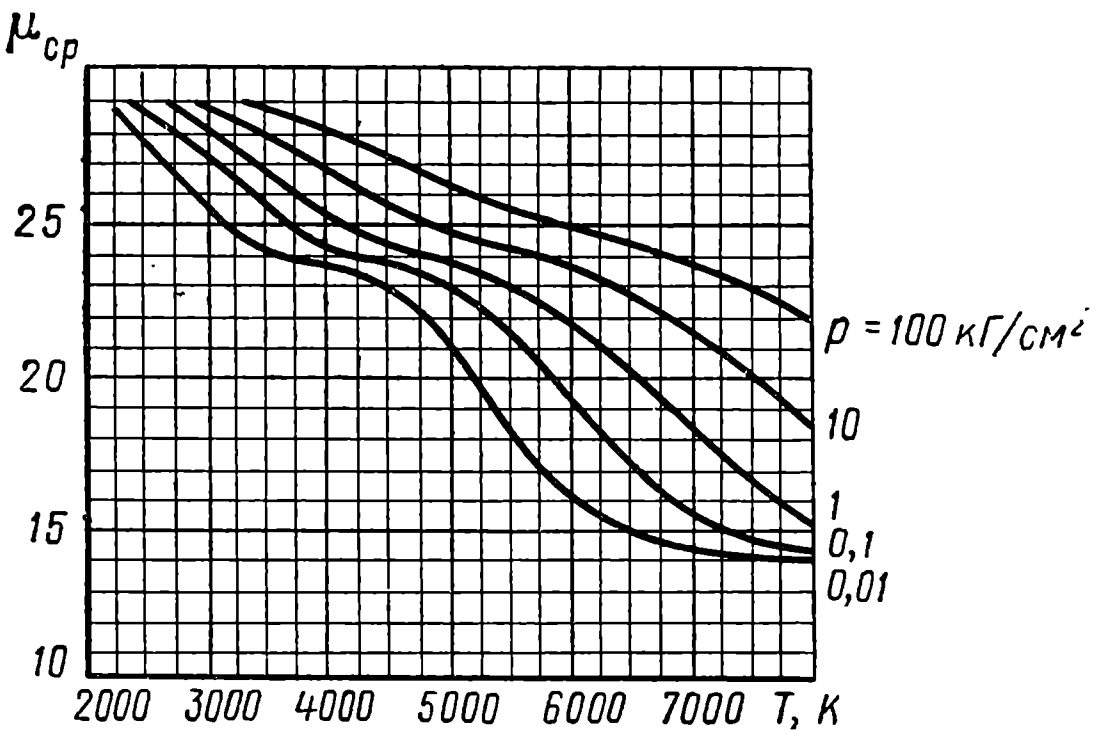


Рис. 3.I.12. Изменение среднего молекулярного веса воздуха в зависимости от температуры и давления

I.33. Средний молекулярный вес воздуха $\mu_{ср}$ не изменяется под воздействием давления и температуры, пока в нем не начались физико-химические превращения (диссоциация). Графики на рис. 3.1.12, полученные расчетным путем [33], позволяют проследить характер влияния давления и температуры на величину $\mu_{ср}$. Повышение температуры способствует распаду молекул воздуха на атомы, а затем вызывает отрыв электронов от этих атомов. Все это обусловливает уменьшение молекулярного веса диссоциирующего и ионизирующего газа (см. рис. 3.1.12). При этом повышение давления в таком газе способствует более интенсивной рекомбинации, что приводит к росту $\mu_{ср}$.

I.34. Из рис. 1.4.8 [20] определяем по значениям $T=3500$ К и $p=0{,}01$ *кГ/см²* скорость звука с учетом диссоциации $a_{дисс}=1230$ *м/сек*. При постоянных удельных теплоемкостях и величине $k=c_p/c_V=1{,}4$ эта скорость

$$a_{пост}=\sqrt{kRT}=\sqrt{1{,}4\cdot287\cdot3500}=1183\ м/сек,$$

что несколько меньше по сравнению со случаем диссоциации.

Предполагая, что диссоциация отсутствует, а удельные теплоемкости являются функциями температуры, найдем (рис. 1.4.3 [20] $k=c_p/c_v=1{,}27$. В соответствии с этим

$$a_{пер}=\sqrt{kRT}=\sqrt{1{,}27\cdot287\cdot3500}=1129\ м/сек.$$

Как видим, скорость звука стала еще меньше по сравнению с ее действительным значением в диссоциированном газе.

I.35. Для диссоциированного воздуха энтальпию i определим из рис. 1.4.6 [20] по давлению $p=0{,}1$ *кГ/см²* и температуре $T=4000$ К: $i_{дисс}=8{,}3\cdot10^6$ *м²/сек²*. Полагая c_p и c_v постоянными, а значение $k=1{,}4$, найдем

$$i_{пост}=\frac{k}{k-1}\cdot\frac{p}{\rho}=\frac{kRT}{k-1}=\frac{1{,}4\cdot287\cdot4000}{1{,}4-1}=4{,}03\cdot10^6\ м^2/сек^2\ (48{,}6\%).$$

В процентах указана разница в сравнении с энтальпией, полученной с учетом диссоциации. Теперь примем, что удельные теплоемкости являются функциями температуры. В этом случае

$$i_{\text{пер}} = pc_p/(\rho R) = c_p T.$$

Для $T=4000$ К и $p=0{,}1$ *кГ/см²* из рис. 1.4.2 [20] найдем $c_p=2{,}3\cdot 10^3$ *м²/(сек²·град)*. В соответствии с этим значением

$$i_{\text{пер}}=2{,}3\cdot 10^3\cdot 4000=9{,}2\cdot 10^6 \text{ м}^2/\text{сек}^2 \ (11{,}1\%).$$

I.36. В целях упрощения исследований процессов, происходящих в диссоциирующем воздухе, можно вместо такого реального воздуха рассматривать его модель, состоящую из смеси диссоциирующих компонентов N_2 и O_2, не взаимодействующих между собой, но подвергающихся диссоциации. При этом каждый компонент рассматривается как некоторый условный двухатомный газ, состоящий из молекул одного вида, которые в результате соударений диссоциируют на два атома. В свою очередь атомы могут рекомбинировать в молекулы. Если при этом предполагается, что диссоциация равновесная, то исследуется химическая реакция вида

$$A_2 \underset{r_R}{\overset{r_D}{\rightleftarrows}} 2A.$$

В этой реакции скорости ее протекания слева направо r_D и справа налево r_R (соответственно скорости диссоциации и рекомбинации) одинаковы.

I.37. Для определения степени равновесной диссоциации двухатомной модели кислорода используем зависимость [20]

$$\alpha^2/(1-\alpha) = 1/(\bar{\rho}e^{1/\bar{T}}) \qquad (3.I.14)$$

и уравнение состояния

$$\bar{p} = \bar{\rho}\,\bar{T}(1+\alpha), \qquad (3.I.15)$$

где $\bar{p}=p/p_d$; $\bar{\rho}=\rho/\rho_d$; $\bar{T}=T/T_d$; значения p_d, ρ_d, T_d представляют собой соответственно характеристические давление, плотность и температуру диссоциации.

Исключая из (3.I.14) и (3.I.15) плотность $\bar{\rho}$, найдем

$$\alpha = \left(1 + \frac{\bar{p}}{\bar{T}} e^{1/\bar{T}}\right)^{-1/2}. \qquad (3.I.16)$$

В соответствии с данными табл. 1.5.1 [20]

$$\bar{p} = 0{,}01/(23\cdot 10^7) = 0{,}435\cdot 10^{-9}; \quad \bar{T} = 3000/59000 = 0{,}051.$$

Таким образом,

$$\alpha = \left(1 + \frac{0{,}435\cdot 10^{-9}}{0{,}051} e^{1/0{,}051}\right)^{-1/2} = 0{,}515.$$

I.38. Для определения среднего молекулярного веса диссоциированного азота воспользуемся формулой

$$\mu_{\text{ср}} = \mu_{\text{ср0}}/(1+\alpha), \qquad (3.I.17)$$

где $\mu_{\text{ср0}}$ — средний молекулярный вес недиссоциированного азота. Как видно, величину $\mu_{\text{ср}}$ можно вычислить, найдя степень диссоциации α. Для этого воспользуемся зависимостью (3.I.16). Из табл. 1.5.1 [20] находим:

$$p_d = 4{,}1\cdot 10^7 \text{ кГ/см}^2, \quad T_d = 113000 \text{ К}.$$

В соответствии с этим для $p=0{,}01$ *кГ/см²* и $T=5000$ К получаем

$$\bar{p}_d = \frac{p}{p_d} = \frac{0{,}01}{4{,}1\cdot 10^7} = 0{,}244\cdot 10^{-9}, \quad \bar{T}_d = \frac{T}{T_d} = \frac{5000}{113\,000} = 0{,}0442.$$

Следовательно, степень диссоциации

$$\alpha = \left(1 + \frac{0{,}244 \cdot 10^{-9}}{0{,}0442} e^{1/0{,}0442}\right)^{-1/2} = 0{,}164,$$

а соответствующий средний молекулярный вес

$$\mu_{ср} = 28/(1 + 0{,}164) = 24{,}1.$$

I.39. Для решения задачи нам потребуются значения p_d, T_d и u_d, представляющие собой соответственно характеристические давление, температуру и энергию диссоциации. Эти значения для азота определяем из табл. 1.5.1 [20]:

$$p_d = 4{,}1 \cdot 10^7\ кГ/см^2, \quad T_d = 113\,000\ \text{K}, \quad u_d = 3{,}4 \cdot 10^7\ м^2/сек^2.$$

Температуру газа можно определить, воспользовавшись уравнением (3.I.16). Внося значения $\alpha = 0{,}5$, $\bar{p}_d = p/p_d = 0{,}01/(4{,}1 \cdot 10^7) = 0{,}244 \cdot 10^{-9}$ и решая это уравнение, найдем $\bar{T} = 0{,}0494$. Следовательно,

$$T = \bar{T} \cdot T_d = 0{,}0494 \cdot 113\,000 = 5670\ \text{K}.$$

Энтальпию двухатомного газа вычислим при помощи формулы

$$\bar{i} = \alpha + \bar{T}(4 + \alpha), \qquad (3.I.18)$$

в которой $\bar{i} = i/u_d$. После подстановки находим

$$\bar{i} = 0{,}5 + 0{,}0494(4 + 0{,}5) = 0{,}722.$$

Таким образом,

$$i = \bar{i} u_d = 0{,}722 \cdot 3{,}4 \cdot 10^7 = 2{,}45 \cdot 10^7\ м^2/сек^2.$$

Соответствующая безразмерная величина внутренней энергии

$$\bar{u} = 3\bar{T} + \alpha,$$

где $\bar{u} = u/u_d$. В результате подстановки находим

$$\bar{u} = 3 \cdot 0{,}0494 + 0{,}5 = 0{,}639.$$

Следовательно, внутренняя энергия

$$u = \bar{u} u_d = 0{,}639 \cdot 3{,}4 \cdot 10^7 = 2{,}17 \cdot 10^7\ м^2/сек^2.$$

I.40. Для определения степени диссоциации разогретого воздуха, рабочая модель которого представляет собой совокупность чистых диссоциирующих компонентов N_2 и O_2, применяем формулу (3.I.16). Найдем относительные величины $p = p/p_d$ и $T = T/T_d$, входящие в эту формулу. Для этого необходимо знать характеристические давление p_d и температуру T_d воздушной смеси. Исходя из того, что кислорода в ней 23,5%, а азота 76,5%, получаем:

$$p_d = 0{,}765 p_{d\,N_2} + 0{,}235 p_{d\,O_2} =$$

$$= 0{,}765 \cdot 4{,}1 \cdot 10^7 + 0{,}235 \cdot 2{,}3 \cdot 10^7 = 3{,}7 \cdot 10^7\ кГ/см^2;$$

$$T_d = 0{,}765 T_{d\,N_2} + 0{,}235 T_{d\,O_2} = 0{,}765 \cdot 113 \cdot 10^3 + 0{,}235 \cdot 59 \cdot 10^3 = 10^5\ \text{K},$$

где соответствующие значения p_d и T_d для азота и кислорода определены из табл. 1.5.1 [20]. В соответствии с полученными величинами p_d и T_d для смеси газов безразмерные давление и температура:

$$\bar{p} = 0{,}01/(3{,}7 \cdot 10^7) = 0{,}27 \cdot 10^{-9}; \quad \bar{T} = 4500/100000 = 4{,}5 \cdot 10^{-2}.$$

Таким образом, степень диссоциации

$$\alpha = \left(1 + \frac{0{,}27 \cdot 10^{-9}}{0{,}045} e^{2{,}22 \cdot 10}\right)^{-1/2} = 0{,}19.$$

Относительная энтальпия смеси

$$\bar{i} = \alpha + \bar{T}(4 + \alpha) = 0{,}19 + 0{,}045(4 + 0{,}19) = 0{,}38.$$

Так как характеристическая энергия диссоциации модели воздуха (см. табл. 1.5.1 [20])

$$u_d = 0{,}765 u_{d\,N_2} + 0{,}235 u_{d\,O_2} = 0{,}765 \cdot 3{,}4 \cdot 10^7 + \\ + 0{,}235 \cdot 1{,}5 \cdot 10^7 = 3 \cdot 10^7 \; м^2/сек^2,$$

то энтальпия воздушной смеси

$$i = \bar{i} u_d = 0{,}38 \cdot 3 \cdot 10^7 = 1{,}14 \cdot 10^7 \; м^2/сек^2.$$

Далее определим относительную величину внутренней энергии:

$$\bar{u} = 3\bar{T} + \alpha = 3 \cdot 0{,}045 + 0{,}19 = 0{,}325.$$

Соответствующее абсолютное значение

$$u = \bar{u} u_d = 0{,}325 \cdot 3 \cdot 10^7 = 0{,}975 \cdot 10^7 \; м^2/сек^2.$$

I.41. Средний молекулярный вес воздушной смеси определим по формуле (3.I.17). Полагая в ней $\mu_{ср0} = 29$, получим

$$\mu_{ср} = 29/(1 + 0{,}19) = 24{,}4.$$

Для коэффициента динамической вязкости воспользуемся зависимостью, учитывающей влияние диссоциации [20]:

$$\frac{\mu}{\mu_\infty} = \left(\frac{T}{T_\infty}\right)^{1/2} \frac{1 + 111/T_\infty}{1 + 111/T} \left[\frac{1}{1 + 0{,}89\alpha/(1-\alpha)} + \frac{1{,}42}{1 + 1{,}26\,(1-\alpha)/\alpha}\right].$$

Подставляя известные величины, находим

$$\frac{\mu}{\mu_\infty} = \left(\frac{4500}{288}\right)^{1/2} \frac{1 + 111/288}{1 + 111/4500} \left[\frac{1}{1 + 0{,}89 \cdot 0{,}19/(1 - 0{,}19)} + \right. \\ \left. + \frac{1{,}42}{1 + 1{,}26\,(1 - 0{,}19)/0{,}19}\right] = 5{,}6.$$

Полагая при $T_\infty = 288$ K значение $\mu_\infty = 1{,}82 \cdot 10^{-6}$ $кГ \cdot сек/м^2$, найдем

$$\mu = (\mu/\mu_\infty)\,\mu_\infty = 5{,}6 \cdot 1{,}82 \cdot 10^{-6} = 1{,}02 \cdot 10^{-5} \; кГ \cdot сек/м^2.$$

II.1. В методе Эйлера изучается поле скоростей в пространстве, заполненном движущейся жидкостью. В соответствии с этим методом рассматривается некоторая точка с координатами x, y, z и изучается как изменение скоростей в указанной точке с течением времени, так и изменение скоростей вследствие перехода к другим точкам пространства. Следовательно, скорость представляется как функция координат и времени:

$$\left.\begin{aligned} V_x &= f_1(x, y, z, t); \\ V_y &= f_2(x, y, z, t); \\ V_z &= f_3(x, y, z, t). \end{aligned}\right\} \qquad (3.II.1)$$

Произведя здесь замену $V_x = dx/dt$, $V_y = dy/dt$, $V_z = dz/dt$, получим систему дифференциальных уравнений, интегрируя которую, найдем уравнение траектории в параметрической форме:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi_1(a, b, c, t); \\ y &= \varphi_2(a, b, c, t); \\ z &= \varphi_3(a, b, c, t). \end{aligned}\right\} \qquad (3.II.2)$$

Исключая отсюда параметр t, можно получить уравнение траектории в обычной форме. В этом уравнении произвольные постоянные a, b, c определяются из начальных условий.

В методе Лагранжа исследуется движение индивидуальных частиц жидкости вдоль их траекторий. Так как частиц бесчисленное множество, то для задания траектории необходимо определенным образом охарактеризовать ту частицу, к которой эта траектория относится.

В качестве характеристики частицы выбирают координаты a, b, c в начальный момент времени $t = t_0$. Таким образом, координаты жидкой частицы x, y, z будут зависеть от величин a, b, c и времени t [см. (3.II.2)].

Составляющие скорости в этом случае находятся в результате дифференцирования (3.II.2):

$$V_x = \partial\varphi_1/\partial t; \quad V_y = \partial\varphi_2/\partial t; \quad V_z = \partial\varphi_3/\partial t. \qquad (3.II.3)$$

Заданное условиями задачи движение жидкости является плоским ($V_z = 0$) и неустановившимся, поскольку параметры потока являются функциями не только координат точки, но и времени (время t входит в выражения для V_x и V_y в явном виде).

Для перехода от переменных Эйлера к переменным Лагранжа и определения уравнения траектории следует проинтегрировать уравнения:

$$dx/dt = V_x = mx + nt; \qquad (3.II.4)$$

$$dy/dt = V_y = -ky + lt. \qquad (3.II.5)$$

При интегрировании (3.II.4) положим

$$x = u(t) \cdot v(t); \qquad (3.II.6)$$

тогда

$$dx/dt = v(du/dt) + u(dv/dt). \qquad (3.II.7)$$

Подставляя (3.II.7) в (3.II.4), найдем

$$v(du/dt - mu) + u(dv/dt) - nt = 0. \qquad (3.II.8)$$

Пользуясь произволом в выборе одной из функций, $u(t)$ или $v(t)$, выберем функцию $u(t)$ такой, чтобы

$$du/dt - mu = 0. \qquad (3.II.9)$$

В соответствии с этим

$$u\,(dv/dt) - nt = 0. \tag{3.II.10}$$

Решение уравнения (3.II.9) имеет вид

$$u = c_1 e^{mt}. \tag{3.II.11}$$

Подставляя (3.II.11) в (3.II.10), получим

$$dv/dt = (n/c_1)\, e^{-mt}\, t. \tag{3.II.12}$$

Интегрируя (3.II.12), найдем

$$v = (n/c_1 m^2)\,(-mte^{-mt} - e^{-mt}) + c_2. \tag{3.II.13}$$

Подставляя (3.II.11) и (3.II.13) в (3.II.6), получим

$$x = c_3 e^{mt} - nt/m - n/m^2. \tag{3.II.14}$$

Аналогично интегрируется (3.II.5):

$$y = c_4 e^{-kt} + lt/k - l/k^2. \tag{3.II.15}$$

Константы c_3 и c_4 найдем из начальных условий, полагая $t=0$, т. е.

$$c_3 = x + n/m^2; \tag{3.II.16}$$

$$c_4 = y + l/k^2. \tag{3.II.17}$$

В соответствии с методом Лагранжа координаты частицы жидкости, движение которой изучается вдоль траектории, должны быть известны в начальный момент времени ($t=0$). Выберем эти координаты равными $x=-n/m^2$; $y=-l/k^2$. Тогда на основании (3.II.16) и (3.II.17) $c_3=c_4=0$. Таким образом, для искомой траектории:

$$x = -nt/m - n/m^2; \tag{3.II.18}$$

$$y = lt/k - l/k^2, \tag{3.II.19}$$

откуда, исключая время t, найдем уравнение траектории:

$$y + \frac{lm}{kn}\,x = -\frac{l}{k}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{k}\right), \tag{3.II.20}$$

представляющей собой прямую линию.

II.2. 1. Движение жидкости задано проекциями скоростей:

$$V_x = -ay,\ V_y = ax,\ V_z = 0. \tag{3.II.21}$$

Определим линии тока, представляющие собой в общем случае кривые, которые характеризуются тем, что в данный момент времени t касательные к ним в любой точке совпадают по направлению с вектором скорости. Дифференциальные уравнения линий тока имеют следующий вид:

$$dx/V_x = dy/V_y = dz/V_z. \tag{3.II.22}$$

Траектория — кривая, по которой перемещается частица жидкости в пространстве. Касательная к этой траектории совпадает с вектором скорости, однако в отличие от линии тока, построение которой производится в фиксированный момент времени, понятие о траектории связано с некоторым промежутком времени, в течение которого частица проходит определенный путь. Из этого следует, что линия тока и траектория, являющаяся следом движения одной и той же частицы, совпадают в установившемся течении.

Исследуемое движение плоское (так как $V_z=0$) и установившееся, поскольку составляющие скорости V_x и V_y от времени не зависят.

В случае плоского движения дифференциальное уравнение линий тока (3.II.22) можно записать в следующем виде:

$$dx/V_x = dy/V_y$$

или, после подстановки значений V_x и V_y,

$$dx/(-ay) = dy/(ax).$$

Разделяя переменные, получим

$$xdx + ydy = 0.$$

Интегрируя, найдем линии тока:

$$x^2 + y^2 = c, \qquad (3.II.23)$$

которые представляют собой семейство концентрических окружностей с центром в начале координат (рис 3.II.1). Поскольку рассматриваемое течение установившееся, то траектории совпадают с линиями тока.

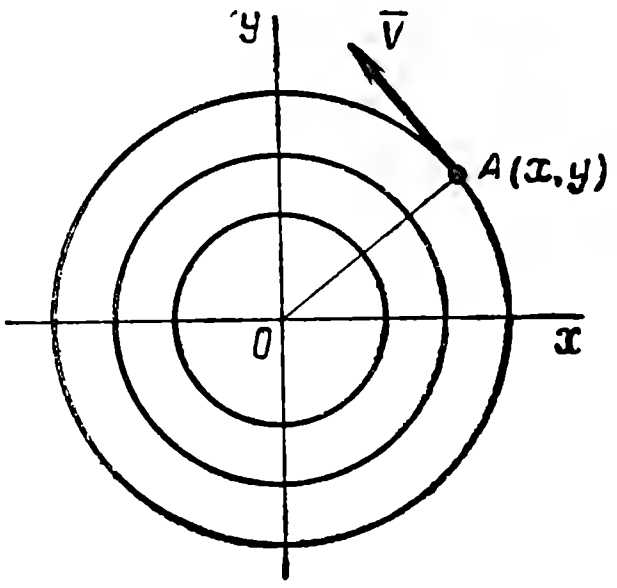


Рис. 3.II.1. Линии тока течения жидкости, составляющие скорости которого $V_x = -ay$, $V_y = ax$

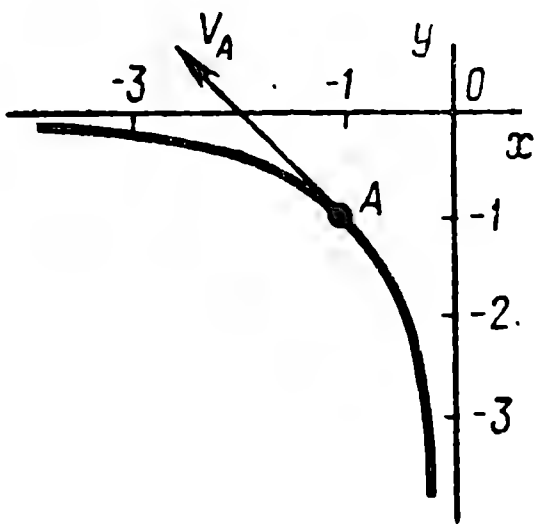


Рис. 3.II.2. Линия тока, проходящая в момент времени t через точку A (—1, —1)

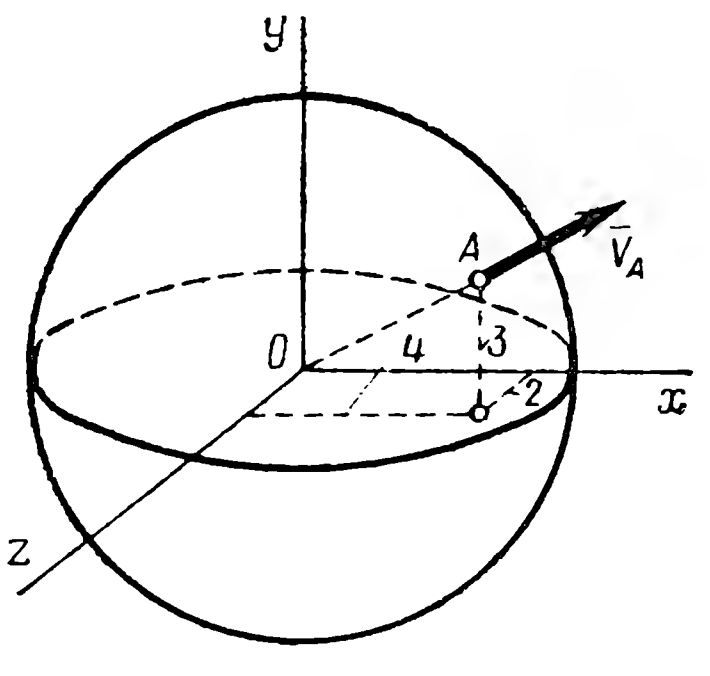


Рис. 3.II.3. Пространственный источник

Для определения направления движения жидкости следует найти косинусы углов между вектором скорости и осями координат:

$$\cos(\bar{V}, x) = V_x/V = -y/\sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\cos(\bar{V}, y) = V_y/V = +x/\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Так как для точки с положительными значениями координат $\cos(\bar{V}, y) > 0$, а $\cos(\bar{V}, x) < 0$, то скорость образует с осью x угол, бо́льший $\pi/2$, и, следовательно, движение происходит против часовой стрелки.

2. Движение жидкости задано проекциями скоростей:

$$V_x = x + t, \; V_y = -y + t, \; V_z = 0. \qquad (3.II.24)$$

Это движение жидкости плоское ($V_z = 0$) и неустановившееся, поскольку составляющие скорости V_x, V_y зависят не только от координат точки, но и от времени. Следовательно, в данном случае траектории и линии тока не совпадают.

Дифференциальное уравнение линий тока (3.II.22) имеет вид

$$dx/(x + t) = dy/(-y + t).$$

Интегрируя это уравнение и считая при этом время t фиксированным, получим

$$(x + t)(t - y) = c, \qquad (3.II.25)$$

т. е. линии тока представляют в каждый момент времени семейство гипербол.

На рис. 3.II.2 построена линия тока, проходящая в момент времени $t = 0$ через точку A (—1, —1). Соответствующее уравнение гиперболы имеет вид

$$xy = 1. \qquad (3.II.26)$$

Для определения траекторий необходимо проинтегрировать уравнения:

$$dx/dt = x + t; \tag{3.II.27}$$

$$dy/dt = -y + t. \tag{3.II.28}$$

При интегрировании (3.II.27) положим, как и в предыдущей задаче,

$$x = uv.$$

После дифференцирования, соответствующих подстановок и интегрирования (3.II.7)÷(3.II.10) найдем:

$$u = c_1 e^t;\ v = \frac{1}{c_1}(-te^{-t} - e^{-t}) + c_2.$$

Подставляя значения u и v, получим для x следующее выражение:

$$x = c_3 e^t - t - 1. \tag{3.II.29}$$

Аналогично можно найти зависимость:

$$y = c_4 e^{-t} + t - 1. \tag{3.II.30}$$

Для определения траектории, которую описывает частица жидкости, находящаяся в момент времени $t=0$ в точке A $(-1, -1)$, найдем значения констант c_3, c_4. Подставляя в (3.II.29) и (3.II.30) $t=0$, $x=-1$, $y=-1$, получим $c_3=c_4=0$. Следовательно, для искомой траектории

$$x = -t - 1,\ y = t - 1,$$

или, исключая время t,

$$x + y = -2. \tag{3.II.31}$$

Сопоставляя (3.II.26) и (3.II.31), нетрудно заметить, что при неустановившемся движении линии тока и траектории не совпадают.

3. Движение жидкости задано проекциями скоростей:

$$V_x = ax/R^3,\ V_y = ay/R^3,\ V_z = az/R^3. \tag{3.II.32}$$

Исследуемое течение является пространственным и установившимся (параметры от времени t не зависят). Следовательно, траектории и линии тока совпадают. Дифференциальное уравнение линий тока (3.II.22) принимает в этом случае следующий вид:

$$dx/x = dy/y = dz/z.$$

Интегрируя его, найдем:

$$x = cy,\ x = c_1 z,\ y = c_2 z. \tag{3.II.33}$$

Система уравнений (3.II.33) представляет собой уравнения прямых линий в пространстве, проходящих через начало координат. Значения констант c, c_1, c_2 определяются координатами точки, через которую проходит линия тока (траектория).

Рассмотрим линию тока, проходящую через точку A (4; 3; 2) (рис. 3.II.3). В соответствии с этими условиями $c=4/3$, $c_1=2$, $c_2=3/2$. Уравнение этой линии тока можно представить в виде системы

$$3x - 4y = 0,\ x - 2z = 0.$$

Поток жидкости, линии тока которого представляют собой лучи, исходящие из начала координат, называется источником ($a>0$). Течение с линиями тока в виде прямых, сходящихся в начале координат, называется стоком ($a<0$).

II.3. В отличие от твердого тела, движение которого определяется поступательным перемещением вместе с центром массы и вращением вокруг мгновенной оси, проходящей через этот центр, движение жидкой

частицы характеризуется, кроме того, наличием деформационной составляющей этого движения, изменяющей форму частицы.

Деформационное движение жидкой частицы складывается из линейной деформации, характеризуемой коэффициентами линейной деформации:

$$\theta_x = \partial V_x/\partial x,\ \theta_y = \partial V_y/\partial y,\ \theta_z = \partial V_z/\partial z,$$

и угловой деформации, определяемой величинами:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z}\right),\ \varepsilon_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x}\right),\ \varepsilon_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) -$$

полускоростями скашивания углов.

Поступательное движение жидкой частицы характеризует скорость V_x, вращательное — величины $\omega_y dz$ и $\omega_z dy$, деформационное — значения $\theta_x dx$, $\varepsilon_y dz$ и $\varepsilon_z dy$.

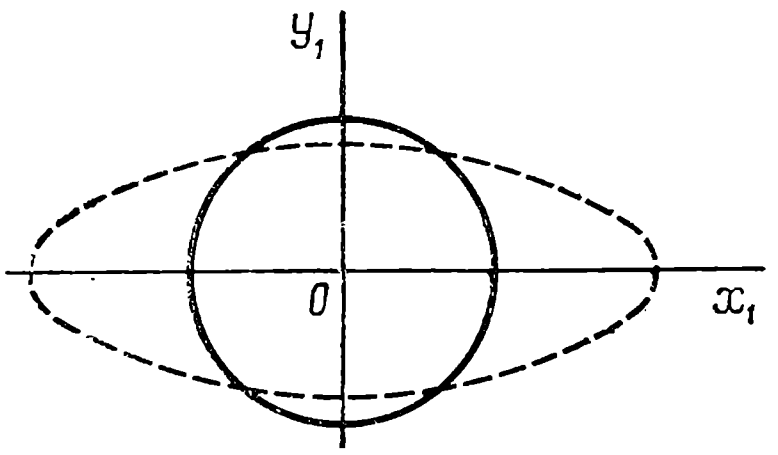


Рис. 3.II.4. Деформация жидкой частицы, имеющей форму круга

II.4. Относительная скорость кубического расширения частицы жидкости с элементарным объемом $\tau = dx \cdot dy \cdot dz$ определяется дивергенцией скорости

$$\operatorname{div}\bar{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \theta_x + \theta_y + \theta_z. \qquad (3.II.34)$$

Исследуемый поток плоский ($V_z = 0$) и установившийся, следовательно,

$$\operatorname{div}\bar{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{c}{\rho} \cdot \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{cx}{x^2+y^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\right) +$$

$$+ \frac{c}{\rho} \cdot \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{cy}{x^2+y^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{c}{x^2+y^2}\left[x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\right) + y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right].$$

Для несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) величина $\operatorname{div}\bar{V} = 0$.

II.5. Обозначим через x_2, y_2 координаты, которые будет иметь точка A частицы через бесконечно малый промежуток времени dt. Поскольку Ox_1 и Oy_1 являются главными осями, то вдоль них имеют место только линейные деформации и, следовательно,

$$x_2 = x_1 + (\partial V_x/\partial x)\, x_1\, dt;$$

$$y_2 = y_1 + (\partial V_y/\partial y)\, y_1\, dt;$$

отсюда

$$x_1 = \frac{x_2}{1 + (\partial V_x/\partial x)\, dt};$$

$$y_1 = \frac{y_2}{1 + (\partial V_y/\partial y)\, dt}.$$

Подставляя значения x_1, y_1 в уравнение заданной бесконечно малой частицы в форме круга, найдем

$$\frac{x_2^2}{r^2\,[1 + (\partial V_x/\partial x)\, dt]^2} + \frac{y_2^2}{r^2\,[1 + (\partial V_y/\partial y)\, dt]^2} = 1. \qquad (3.II.35)$$

Уравнение (3.II.35) является уравнением эллипса с полуосями

$$r\,[1 + (\partial V_x/\partial x)\, dt] \text{ и } r\,[1 + (\partial V_y/\partial y)\, dt].$$

Таким образом, бесконечно малая частица в форме круга, деформируясь, обращается в бесконечно малый эллипс, оси которого направлены по главным осям деформации (рис. 3.II.4).

Найдем изменение площади рассматриваемой бесконечно малой частицы. Для этого следует из площади эллипса вычесть площадь круга:

$$\Delta S = \pi r\,[1 + (\partial V_x/\partial x)\,dt]\,r\,[1 + (\partial V_y/\partial y)\,dt] - \pi r^2. \qquad (3.II.36)$$

Осуществляя элементарные преобразования и пренебрегая членом высшего порядка малости, получим

$$\Delta S = \pi r^2\,(\partial V_x/\partial x + \partial V_y/\partial y)\,dt. \qquad (3.II.37)$$

II.6. Угловая скорость вращения жидкой частицы характеризуется вектором rot $\bar{V}$ (или вихрем)

$$\operatorname{rot}\bar{V} = 2\bar{\omega}, \qquad (3.II.38)$$

где составляющие вектора угловой скорости $\bar{\omega} = \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k$ имеют следующие значения:

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= (1/2)\,(\partial V_z/\partial y - \partial V_y/\partial z);\\ \omega_y &= (1/2)\,(\partial V_x/\partial z - \partial V_z/\partial x);\\ \omega_z &= (1/2)\,(\partial V_y/\partial x - \partial V_x/\partial y). \end{aligned}\right\} \qquad (3.II.39)$$

Течения жидкости, для которых rot $\bar{V} \neq 0$ (это имеет место, если хотя бы одна из составляющих ω_x, ω_y, ω_z отлична от нуля), называются вихревыми. Потоки, для которых rot $\bar{V} = 0$ (т. е. $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$), называются безвихревыми, или потенциальными.

Таким образом, для установления характера течения жидкости в трубе следует определить составляющие вихря ω_x, ω_y, ω_z. В рассматриваемом течении $V_y = V_z = 0$, следовательно, это течение параллельно стенке трубы и в нем $\omega_x = \omega_y = 0$. Третья составляющая угловой скорости

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left[V_{\max}\left(\frac{y}{r_0}\right)^n\right] = -\frac{n}{2}\cdot\frac{V_{\max}}{r_0}\left(\frac{y}{r_0}\right)^{n-1}.$$

Величина этой скорости не равна нулю ($\omega_z \neq 0$) и, следовательно, течение жидкости является вихревым. Ротор скорости в этом случае rot $\bar{V} = 2\omega_z k = -n\,(V_{\max}/r_0)\,(y/r_0)^{n-1}k$.

II.7. Для выявления характера течения жидкости (потенциального или вихревого) необходимо найти величину вихря rot $\bar{V}$ (или его составляющих ω_x, ω_y, ω_z). Поскольку рассматриваемый поток плоский, то $\omega_x = \omega_y = 0$, и для анализа течения достаточно определить значение

$$\omega_z = (1/2)\,(\partial V_y/\partial x - \partial V_x/\partial y).$$

Для заданного течения составляющие скоростей V_x и V_y могут быть представлены в следующем виде:

$$V_x = V\cos(\bar{V}, x) = \frac{c}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos(\bar{V}, x) = -\frac{cy}{x^2+y^2}; \qquad (3.II.40)$$

$$V_y = V\cos(\bar{V}, y) = \frac{c}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos(\bar{V}, y) = \frac{cx}{x^2+y^2}. \qquad (3.II.41)$$

Следовательно,

$$\omega_z = \frac{c}{2}\left[\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right] = 0.$$

Таким образом, рассматриваемое течение будет потенциальным.

В общем случае для безвихревых (потенциальных) течений на основании того, что rot $\bar{V} = 0$ (или $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$), должны выполняться следующие соотношения:

$$\partial V_x/\partial y = \partial V_y/\partial x,\ \partial V_x/\partial z = \partial V_z/\partial x,\ \partial V_y/\partial z = \partial V_z/\partial y. \qquad (3.II.42)$$

Для заданных условий, как это следует из (3.II.40) и (3.II.41), соотношения (3.II.42) выполняются, т. е. $\partial V_x/\partial y = \partial V_y/dx$.

II.8. Равенства (3.II.42) являются необходимыми и достаточными условиями того, чтобы дифференциальный трехчлен $V_x dx + V_y dy + V_z dz$ был полным дифференциалом некоторой функции φ, т е.

$$d\varphi = V_x\,dx + V_y\,dy + V_z\,dz. \qquad (3.II.43)$$

С другой стороны,

$$\partial\varphi = (\partial\varphi/\partial x)\,dx + (\partial\varphi/\partial y)\,dy + (\partial\varphi/\partial z)\,dz. \qquad (3.II.44)$$

Сравнивая (3.II.43) и (3.II.44), найдем, что

$$V_x = \partial\varphi/\partial x,\ V_y = \partial\varphi/\partial y,\ V_z = \partial\varphi/\partial z.$$

Как видно, величина скорости в каком-либо направлении определяется быстротой изменения потенциала φ в том же направлении. Если рассматривается направление s, то быстрота изменения этого потенциала равна частной производной $\partial\varphi/\partial s$. Величину $\partial\varphi/\partial s$ можно рассматривать как проекцию на направление s некоторого вектора, называемого градиентом функции φ и совпадающего с направлением наиболее быстрого возрастания этой функции. Очевидно, что этот вектор равен вектору скорости, т. е. $\bar{V} = \operatorname{grad}\varphi$.

II.9. Составляющие угловой скорости частиц жидкости будут следующими:

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) = -\frac{a}{2}\,y;$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) = -\frac{a}{2}\,z;$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) = -\frac{a}{2}\,x.$$

II.10. Для вывода уравнения неразрывности следует рассмотреть некоторый подвижный объем жидкости, изменяющийся по времени, но состоящий из одних и тех же частиц. В соответствии с законом сохранения массы

$$\rho_{ср}\,\tau = \text{const},$$

где $\rho_{ср}$ — средняя плотность в пределах объема τ. Следовательно, $d(\rho_{ср}\tau)/dt = 0$ или, учитывая, что плотность и объем — величины переменные,

$$\frac{1}{\rho_{ср}} \cdot \frac{d\rho_{ср}}{dt} + \frac{1}{\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = 0.$$

Это уравнение относится к произвольному малому объему. Чтобы получить соотношение, характеризующее движение жидкости в каждой точке, необходимо перейти в последнем уравнении к пределу при $\tau \to 0$:

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div}\bar{V} = 0.$$

II.11. Уравнение неразрывности можно вывести, рассматривая в соответствии с методом Эйлера протекание различных частиц жидкости через некоторый фиксированный объем. Согласно предположению о неразрывности среды разность между расходом жидкости из выделенного объема и количеством жидкости, поступившей в этот объем за некоторый промежуток времени, равна изменению количества жидкости в объеме за то же время.

II.12. Выделим в потоке газа за цилиндрической ударной волной (см. рис. 3.II.5) элементарный объем $ABCD$ единичной ширины.

Количество газа, втекающего за время dt в выделенный объем через цилиндрическую поверхность единичной ширины AD, равно

$$\rho V_r r \cdot d\theta \cdot dt.$$

Количество газа, вытекающего за то же время из выделенного объема через цилиндрическую поверхность единичной ширины BC, будет

$$\rho V_r r \cdot d\theta \cdot dt + \frac{\partial}{\partial r}(\rho V_r r \cdot d\theta)\, dr \cdot dt.$$

Таким образом, в выделенном объеме за время dt произошло изменение массы газа:

$$\rho V_r r \cdot d\theta \cdot dt + \frac{\partial}{\partial r}(\rho V_r r \cdot d\theta)\, dr \cdot dt - \rho V_r r \cdot d\theta \cdot dt = \frac{\partial}{\partial r}(\rho V_r r \cdot d\theta)\, dr \cdot dt. \quad (3.II.45)$$

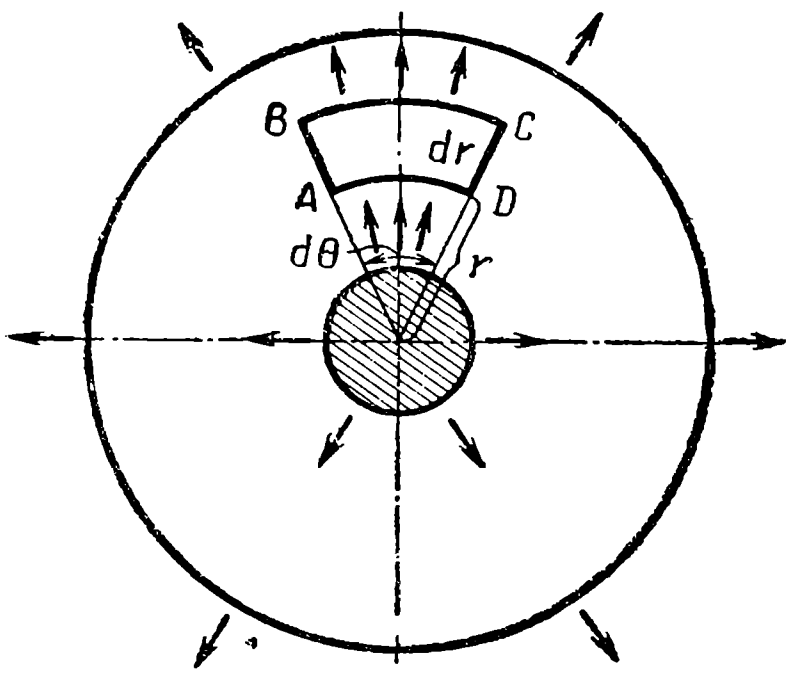


Рис. 3.II.5. Частица в потоке газа за цилиндрической ударной волной

Согласно закону сохранения массы изменение количества газа в объеме должно привести к изменению его плотности, которое характеризуется частной производной по времени $\partial\rho/\partial t$. В соответствии с этим изменение массы газа за время dt в выделенном объеме будет равно

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t}\, dt \cdot r \cdot d\theta \cdot dr. \quad (3.II.46)$$

Приравнивая (3.II.45) и (3.II.46), получим после преобразований уравнение неразрывности

$$r\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r V_r) = 0. \quad (3.II.47)$$

II.13. Цилиндрические координаты. Выделим в окрестности произвольной точки A (с координатами x, r, θ; рис. 3.II.6) бесконечно малый фиксированный объем, равный $r \cdot d\theta \cdot dr \cdot dx$. Согласно закону сохранения массы разность между количеством газа, вытекающего из

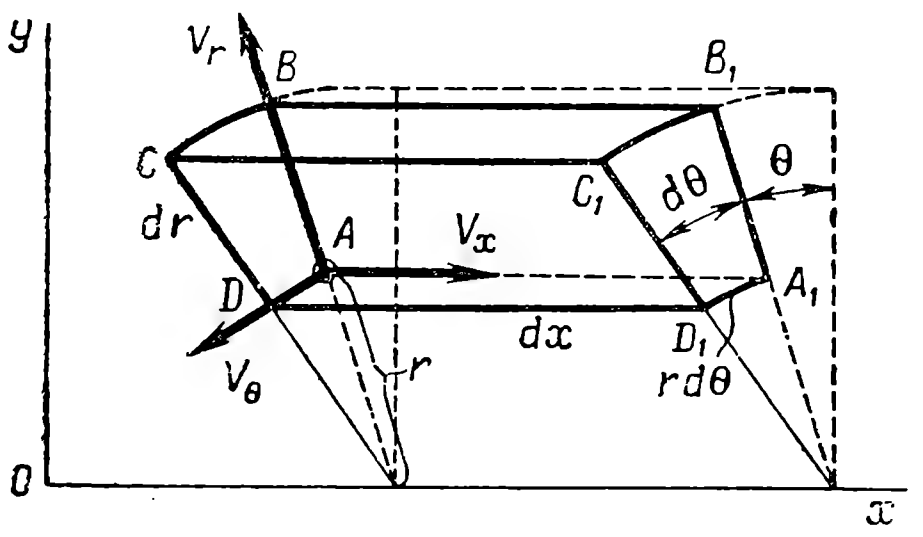


Рис. 3.II.6. К выводу уравнения неразрывности в цилиндрических координатах

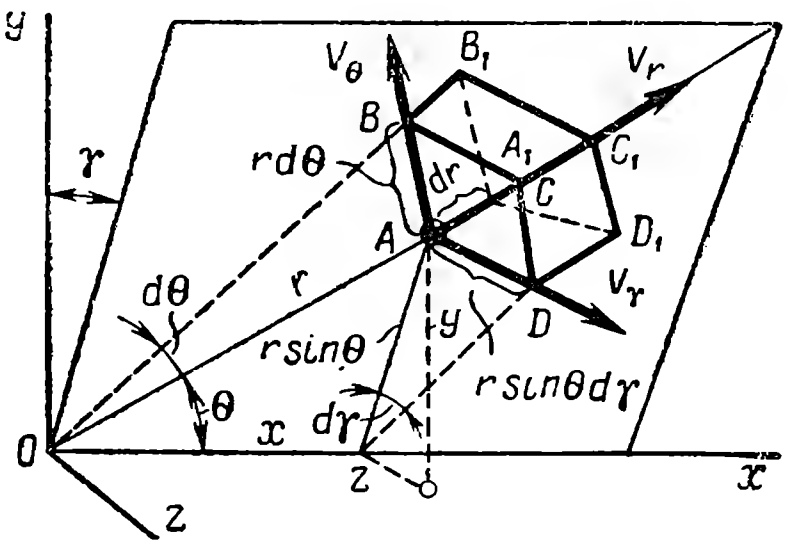


Рис. 3.II.7. К выводу уравнения неразрывности в сферических координатах

этого объема за некоторый промежуток времени, и количеством газа, втекающего в этот объем, равна изменению массы внутри выделенного объема.

Количество газа, втекающего в элементарный объем через грань $ABCD$ в единицу времени, равно

$$\rho V_x r \cdot d\theta \cdot dr,$$

а масса газа, вытекающего через противоположную грань $A_1B_1C_1D_1$, будет

$$\rho V_x r \cdot dr \cdot d\theta + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x r \cdot dr \cdot d\theta)\, dx = \left[\rho V_x r + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x r)\, dx\right] dr \cdot d\theta.$$

Разность между этими величинами составляет

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x r)\, dx \cdot dr \cdot d\theta. \qquad (3.II.48)$$

Количество газа, протекающего в направлении оси r через грани AA_1D_1D и BB_1C_1C, соответственно можно записать так:

$$\rho V_r \cdot dx \cdot r \cdot d\theta \text{ и } \left[\rho V_r r + \frac{\partial}{\partial r}(\rho V_r r)\, dr\right] dx \cdot d\theta,$$

а разность между ними равна

$$\frac{\partial}{\partial r}(\rho V_r r)\, dr \cdot dx \cdot d\theta. \qquad (3.II.49)$$

Аналогично для граней ABB_1A_1 и DCC_1D_1 массы протекающего газа равны

$$\rho V_\theta \cdot dx \cdot dr \text{ и } \left[\rho V_\theta + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho V_\theta)\, d\theta\right] dx \cdot dr,$$

а разность между ними —

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho V_\theta)\, d\theta \cdot dx \cdot dr. \qquad (3.II.50)$$

Изменение массы газа в выделенном объеме можно получить, складывая (3.II.48), (3.II.49) и (3.II.50):

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x r) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho V_r r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho V_\theta)\right] dx \cdot dr \cdot d\theta. \qquad (3.II.51)$$

С другой стороны, изменение массы газа, заключенной в этом объеме, в единицу времени равно

$$-(\partial\rho/\partial t)\, r \cdot dx \cdot dr \cdot d\theta. \qquad (3.II.52)$$

Приравнивая (3.II.51) и (3.II.52), получим уравнение неразрывности в цилиндрических координатах:

$$r\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x r) + \frac{\partial}{\partial r}(V_r \rho r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho V_\theta) = 0. \qquad (3.II.53)$$

Сферические координаты. Выделим в окрестности произвольной точки A (с координатами r, θ, γ; рис. 3.II.7) элементарный объем $r^2 \sin\theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\gamma$ и подсчитаем разность между количеством газа, протекающего через противоположные поверхности этого объема в единицу времени:

через грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ —

$$\frac{\partial}{\partial r}(\rho V_r r^2) \sin\theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\gamma; \qquad (3.II.54)$$

через грани AA_1D_1D и BB_1C_1C —

$$r\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho V_\theta \sin\theta)\, dr \cdot d\theta \cdot d\gamma; \qquad (3.II.55)$$

через грани ABB_1A_1 и DCC_1D_1 —

$$r\frac{\partial}{\partial \gamma}(\rho V_\gamma)\, dr \cdot d\theta \cdot d\gamma. \qquad (3.II.56)$$

Изменение массы газа внутри выделенного объема получим, суммируя (3.II.54), (3.II.55) и (3.II.56):

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}(\rho V_r r^2) \sin\theta + r\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho V_\theta \sin\theta) + r\frac{\partial}{\partial \gamma}(\rho V_\gamma)\right] dr \cdot d\theta \cdot d\gamma. \qquad (3.II.57)$$

С другой стороны, изменение массы газа в элементарном объеме в единицу времени равно

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} r^2 \sin\theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\gamma. \qquad (3.II.58)$$

Приравнивая (3.II.57) и (3.II.58), получим уравнение неразрывности в сферических координатах:

$$r^2 \sin\theta \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial r}(\rho V_r r^2) + r \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho V_\theta \sin\theta) + r \frac{\partial}{\partial \gamma}(\rho V_\gamma) = 0. \quad (3.II.59)$$

II.14. На рис. 3.II.8 показаны схемы движения газа с плоской, цилиндрической и сферической волнами. Рассмотрим протекание газа через некоторые фиксированные объемы, выбранные в каждом потоке.

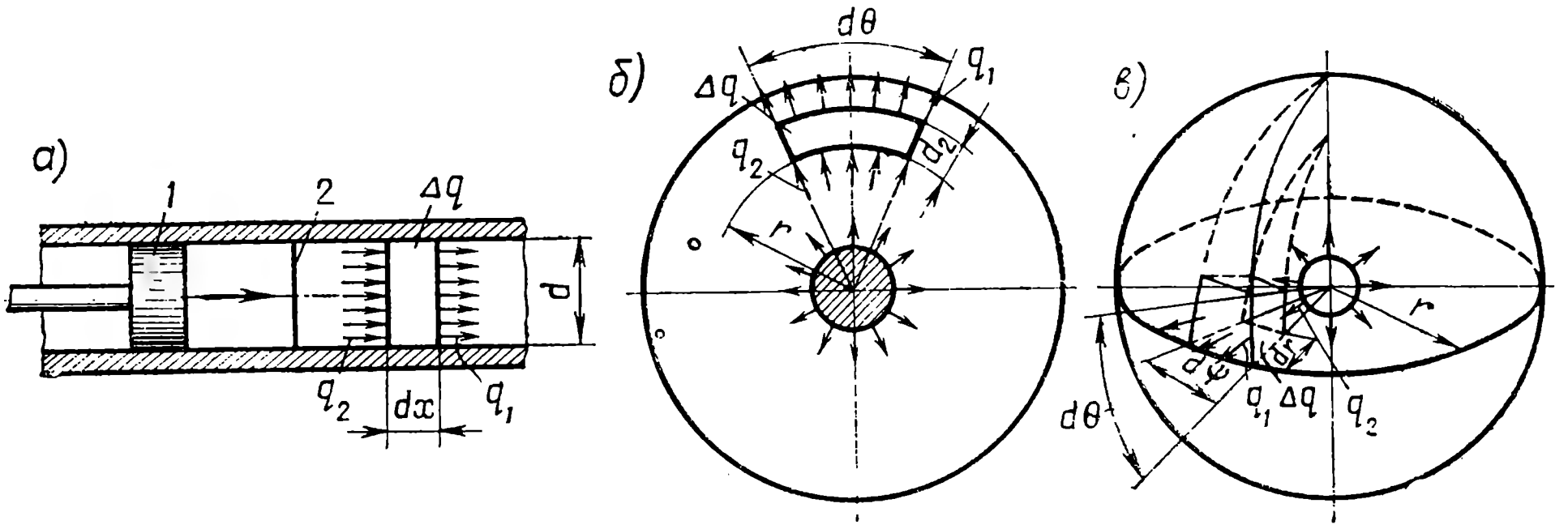


Рис. 3.II.8. Схемы движения газа с плоской (*а*), цилиндрической (*б*) и сферической (*в*) волнами:
1 — поршень; *2* — ударная волна

В соответствии с рис. 3.II.8, *а* количество газа, втекающего в такой объем за время dt,

$$q_2 = \rho V (\pi d^2/4)\, dt,$$

а расход этого газа

$$q_1 = q_2 + \frac{\partial q_2}{\partial x} dx = \left\{\rho V (\pi d^2/4) + \frac{\partial}{\partial x}[\rho V (\pi d^2/4)]\, dx\right\} dt.$$

Разность расхода и прихода $q_1 - q_2$ равна количеству газа в объеме:

$$\Delta q = \{\partial [\rho (\pi d^2/4)\, dx]/\partial t\}\, dt.$$

Таким образом, уравнение неразрывности для течения с плоской волной будет иметь вид

$$\partial \rho/\partial t + \partial (\rho V)/\partial x = 0.$$

Если рассмотреть течение с цилиндрической волной (рис. 3.II.8, *б*), то

$$q_1 = \rho V \cdot r \cdot d\theta \cdot dt,\ q_2 = \left[\rho V r \cdot d\theta + \frac{\partial(\rho V r \cdot d\theta)}{\partial r} dr\right] dt,$$

$$\Delta q = \frac{\partial (\rho r \cdot dr \cdot d\theta)}{\partial t} dt.$$

В соответствии с этим уравнение неразрывности будет

$$r \cdot \partial \rho/\partial t + \partial (\rho V r)/\partial r = 0 \quad \text{или} \quad \partial \rho/\partial t + \partial (\rho V)/\partial r + \rho V/r = 0.$$

Наконец, рассмотрим течение со сферической волной (рис. 3.II.8, *в*):

$$q_1 = \rho V r^2 \cdot d\psi \cdot d\theta \cdot dt,\ q_2 = q_1 + \frac{\partial q_1}{\partial r} dr,$$

$$\Delta q = \frac{\partial}{\partial t}(\rho r^2 \cdot d\theta \cdot d\psi \cdot dr)\, dt.$$

Таким образом, уравнение неразрывности будет следующим:

$$r^2 \cdot \partial\rho/\partial t + \partial(\rho V r^2)/\partial r = 0 \quad \text{или} \quad \partial\rho/\partial t + \partial(\rho V)/\partial r + 2\rho V/r = 0.$$

Полученные уравнения можно записать в одной форме:

$$\partial\rho/\partial t + \partial(\rho V)/\partial r + \varepsilon\rho V/r = 0.$$

II.15. 1. В случае, когда частицы жидкости при движении описывают окружности, перпендикулярные постоянной оси и с центром на ней, то составляющие скорости V_x, V_r в цилиндрической системе координат равны нулю, и уравнение неразрывности (3.II.53) примет следующий вид:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta}(\rho V_\theta) = 0.$$

Заменяя здесь V_θ на ωr ($\omega = d\theta/dt$ — угловая скорость вращения частицы), получим

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial\theta}(\rho\omega) = 0.$$

2. В случае, когда частицы движутся в пространстве симметрично по отношению к неподвижному центру, причем скорость каждой такой частицы направлена либо от центра, либо к центру, параметры потока являются функцией только расстояния r от центра (пространственные источник или сток). Таким образом, в уравнении неразрывности в сферических координатах (3.II.59) производные параметров по углам θ и γ обращаются в нуль, и уравнение принимает вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(\rho V_r r^2) = 0.$$

3. Если частицы жидкости движутся в плоскости, проходящей через ось x, то параметры потока не зависят от координаты θ. Следовательно, уравнение неразрывности в цилиндрических координатах (3.II.53) будет таким:

$$r\frac{d\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r V_r) + r\frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) = 0.$$

II.16. При движении частиц жидкости вдоль траекторий, расположенных на поверхностях коаксиальных цилиндров, в уравнении неразрывности в цилиндрических координатах (3.II.53) следует положить $\partial/\partial r = 0$; тогда оно примет вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta}(\rho V_\theta) = 0.$$

В случае, когда траектории расположены на поверхности конусов, коаксиальных с осью x и имеющих общую вершину, в уравнении неразрывности (3.II.59) в сферических координатах следует положить $\partial/\partial\theta = 0$; тогда оно примет вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(\rho V_r r^2) + \frac{1}{r \cdot \sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\gamma}(\rho V_\gamma) = 0.$$

II.17. В общем случае пространственного неустановившегося течения сжимаемой жидкости уравнение неразрывности в декартовых координатах имеет следующий вид:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z) = 0. \qquad (3.\text{II}.60)$$

Для установившихся течений параметры жидкости являются функциями только координат точек, следовательно, частные производные параметров по времени обращаются в нуль.

При исследовании плоских установившихся течений сжимаемой жидкости (в частности около профиля крыла) уравнение неразрывности записывается в форме

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_y) = 0,$$

а при исследовании пространственных установившихся течений (например обтекания крыла конечного размаха) — в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z) = 0.$$

II.18. Как известно,

$$\operatorname{div}(\rho\bar{V}) = \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z)$$

или после дифференцирования

$$\operatorname{div}(\rho\bar{V}) = V_x\frac{\partial\rho}{\partial x} + V_y\frac{\partial\rho}{\partial y} + V_z\frac{\partial\rho}{\partial z} + \rho\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right).$$

Трехчлен в правой части можно представить в виде скалярного произведения

$$V_x\frac{\partial\rho}{\partial x} + V_y\frac{\partial\rho}{\partial y} + V_z\frac{\partial\rho}{\partial z} = \bar{V}\operatorname{grad}\rho,$$

а выражение

$$\rho\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right) = \rho\operatorname{div}\bar{V}.$$

Следовательно, уравнение неразрывности (3.II.60) можно записать таким образом:

$$\partial\rho/\partial t + \bar{V}\operatorname{grad}\rho + \rho\operatorname{div}\bar{V} = 0.$$

II.19. В отличие от потенциала скоростей φ, существующего только для безвихревых течений, функция тока ψ, являющаяся решением уравнения неразрывности, существует и для вихревых плоских и пространственных осесимметричных течений.

Связь между функцией тока и составляющими скорости имеет следующий вид:

$$V_x = \frac{1}{\rho y^{\varepsilon}}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad V_y = -\frac{1}{\rho y^{\varepsilon}}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}, \qquad (3.II.61)$$

где для плоского потока $\varepsilon=0$, а для пространственного осесимметричного $\varepsilon=1$, $y=r$.

Известно также, что частная производная от потенциала φ по координате равна проекции скорости на соответствующую координатную ось, т. е.

$$V_x = \partial\varphi/\partial x,\ V_y = \partial\varphi/\partial y. \qquad (3.II.62)$$

Приравнивая соответствующие зависимости (3.II.61) и (3.II.62), можно найти связь между потенциалом скоростей и функцией тока:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{\rho y^{\varepsilon}}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{1}{\rho y^{\varepsilon}}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}. \qquad (3.II.63)$$

Для плоского потока несжимаемой жидкости соотношения (3.II.63) принимают вид:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \qquad (3.II.64)$$

II.20. Используя соотношения (3.II.64), можно по известному потенциалу скоростей φ определить функцию тока ψ:

$$\psi = \int \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dy + c(x). \qquad (3.II.65)$$

Константа в уравнении (3.II.65) является функцией координаты x, поскольку при интегрировании по y фиксируется только x.

По заданному потенциалу скоростей φ находим производную $\partial\varphi/\partial x = 2ax$ и подставляем ее в (3.II.65):

$$\psi = \int 2axdy + c(x) = 2axy + c(x). \qquad (3.II.66)$$

Здесь произвольная постоянная $c(x)$ определяется путем сопоставления двух значений $\partial\psi/\partial x$, одно из которых получают в результате дифференцирования (3.II.66) по x, а другое — используя формулу (3.II.64), в которой $\partial\varphi/\partial y = -2ay$. В соответствии с этим

$$2ay + dc/dx = 2ay,$$

откуда находим значение $c(x) = \text{const}$.

Таким образом,

$$\psi = 2axy + \text{const}.$$

Для определения кинематической картины течения жидкости найдем уравнение линий тока. С этой целью приравняем функцию тока постоянной величине, т. е.

$$\psi = 2axy = \text{const},$$

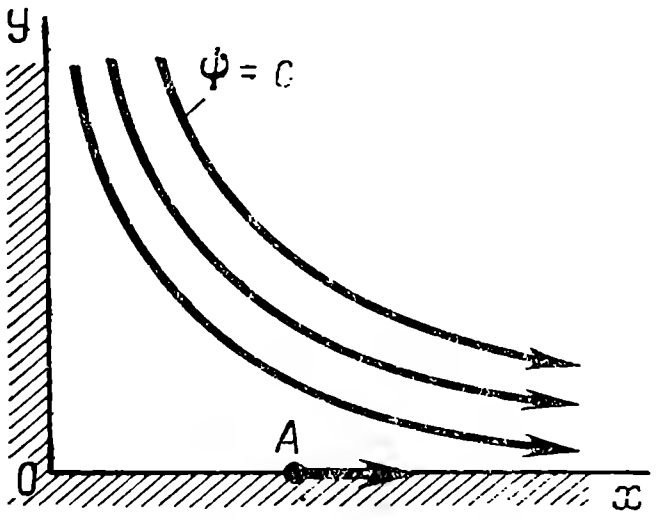


Рис. 3.II.9. Течение жидкости, потенциал которого $\varphi = a(x^2 - y^2)$, где $a > 0$ (течение внутри угла)

откуда находим

$$xy = \text{const}.$$

Согласно этому уравнению линии тока представляют собой семейство гипербол, асимптотами которых являются координатные оси. Если константа $c > 0$ (в этом случае $x > 0$, $y > 0$ или $x < 0$, $y < 0$), то ветви гипербол будут находиться во второй и четвертой четвертях; при $c = 0$ линии тока совпадают с осями координат.

Таким образом, исследуемое течение располагается внутри прямого угла (рис. 3.II.9). Для определения направления этого течения найдем скорость в точке A, лежащей на оси x с координатами $y = 0$, $x > 0$:

$$V_{xA} = 2ax > 0,\ V_{yA} = 0,$$

т. е. скорость в точке A направлена в положительную сторону оси x.

II.21. Если, в частности, для несжимаемого потока существует потенциальная функция φ, то можно указать на следующую связь между нею и функцией тока ψ:

$$\partial\varphi/\partial x = \partial\psi/\partial y,\ \partial\varphi/\partial y = -\partial\psi/\partial x.$$

В соответствии с этим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0. \qquad (3.II.67)$$

Последнее соотношение показывает, что каждая кривая семейства $\varphi = \text{const}$ пересекается под прямым углом с любой кривой семейства линий $\psi = \text{const}$; иначе говоря, линии тока ортогональны эквипотенциальным линиям.

II.22. Рассмотрим общий случай двухмерного (плоского или пространственного осесимметричного) течения сжимаемого газа. При этом

расход будем определять для плоского течения между двумя заданными линиями тока $\psi=c_1$, $\psi=c_2$, а для осесимметричного — между двумя поверхностями вращения $\psi=c_1$, $\psi=c_2$. Этот расход определяется как масса жидкости, протекающая в единицу времени через контур AB, и равен криволинейному интегралу

$$\int_A^B (2\pi r)^\varepsilon \rho V_n \, ds, \qquad (3.II.68)$$

где V_n — составляющая скорости $\overline{V}$, нормальная к элементу ds дуги контура AB, расположенного между заданными линиями тока; $\varepsilon=0$ и 1 — соответственно для плоского и осесимметричного потоков.

Величина V_n может быть выражена через проекции V_x и V_y на координатные линии:

$$V_n = V_x \cos(n, x) + V_y \cos(n, y).$$

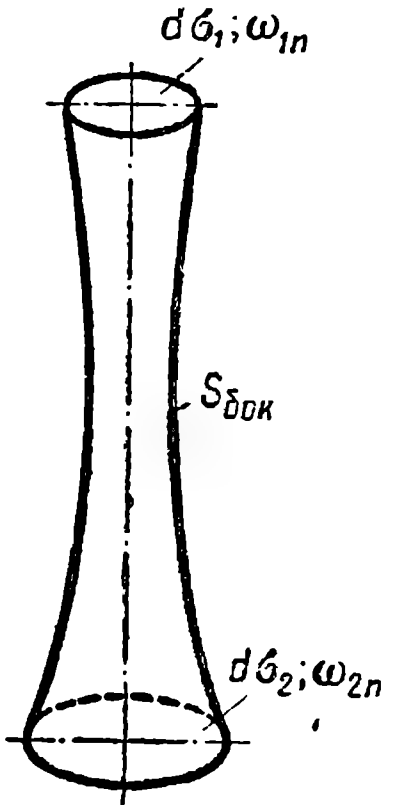


Рис. 3.II.10. К доказательству теоремы Гельмгольца о постоянстве вдоль вихревой трубки ее интенсивности

Используя известные выражения для косинусов углов, образуемых нормалью с осями координат,

$$\cos(n, x) = dy/ds, \quad \cos(n, y) = -dx/ds,$$

получим для расхода

$$Q = \int_A^B (2\pi r)^\varepsilon \rho \left(V_x \frac{dy}{ds} - V_y \frac{dx}{ds} \right) ds.$$

Произведем здесь замену V_x и V_y в соответствии с равенствами (3.II.61). В результате получим

$$Q = \int_A^B (2\pi r)^\varepsilon \rho \left(\frac{1}{\rho r^\varepsilon} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{1}{\rho r^\varepsilon} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \right),$$

откуда

$$Q = \int_A^B (2\pi)^\varepsilon \, d\psi = (2\pi)^\varepsilon (\psi_B - \psi_A).$$

Таким образом, расход газа через произвольную кривую AB определяется разностью значений функции тока в ее конечных точках и не зависит от формы кривой. В соответствии с этим расход жидкости, протекающей между двумя линиями тока на всем их протяжении, есть величина п о с т о я н н а я.

II.23. Используя связь между потенциалом скоростей φ и функцией тока ψ для несжимаемой жидкости (3.II.64), найдем значение функции тока для заданного течения:

$$\psi = \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy + c(x).$$

Подставляя сюда $\partial\varphi/\partial x = 3(x^2 - y^2)$, получим

$$\psi = 3 \int (x^2 - y^2) \, dy + c(x),$$

откуда

$$\psi = y(3x^2 - y^2) + c(x).$$

Произвольную функцию $c(x)$ определяем путем сопоставления двух значений $\partial\psi/\partial x$, одно из которых получаем путем дифференцирования последнего выражения по x, а другое — используя соотношение (3.II.64):

$$6xy + dc/dx = 6xy.$$

В соответствии с этим $c(x)=\text{const}$. Таким образом, для заданного течения

$$\psi = y(3x^2 - y^2) + \text{const}.$$

Расход жидкости через некоторую кривую AB определяется разностью значений функции тока в ее конечных точках, т. е.

$$Q = \psi_B - \psi_A = 2 \ м^3/сек.$$

II.24. В теории вихревого движения жидкости интенсивность вихревой трубки определяется как произведение вихря $\bar{\omega}$ на площадь поперечного сечения трубки σ, нормального к ее оси. Для доказательства теоремы Гельмгольца о постоянстве этой интенсивности вдоль трубки воспользуемся выражением для дивергенции вектора угловой скорости

$$\operatorname{div}\bar{\omega} = \partial\omega_x/\partial x + \partial\omega_y/\partial y + \partial\omega_z/\partial z. \qquad (3.II.69)$$

Подставив сюда вместо компонент вихря $\bar{\omega}$ их соответствующие выражения, получим

$$\operatorname{div}\bar{\omega} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right).$$

Произведя дифференцирование, можно убедиться, что

$$\operatorname{div}\bar{\omega} = 0. \qquad (3.II.70)$$

Это выражение действительно для любой точки пространства, занятого жидкостью. Рассмотрим некоторый объем ее V, ограниченный поверхностью σ. Согласно теореме Остроградского

$$\iiint\limits_{(V)} \operatorname{div}\bar{\omega}\, d\bar{V} = -\iint\limits_{(S)} \omega_n\, d\sigma, \qquad (3.II.71)$$

где ω_n — составляющая вектора угловой скорости вихря по нормали к поверхности σ. Так как $\operatorname{div}\bar{\omega}=0$, то, очевидно, интеграл

$$\iint\limits_{(S)} \omega_n\, d\sigma = 0. \qquad (3.II.72)$$

Это означает, что сумма потоков вектора $\bar{\omega}$ («расходов») сквозь элементарные площадки равна нулю для любой замкнутой поверхности.

Отнесем равенство (3.II.72) к замкнутой поверхности, которая получится, если в вихревой трубке провести два произвольных поперечных сечения (рис. 3.II.10):

$$0 = \iint\limits_{(S)} \omega_n\, dS = \iint\limits_{S_{бок}} \omega_{n\,бок}\, d\sigma_{бок} + \iint\limits_{(1)} \omega_{1n}\, d\sigma_1 + \iint\limits_{(2)} \omega_{2n}\, d\sigma_2. \qquad (3.II.73)$$

Интеграл, распространенный на боковую поверхность трубки, равен нулю, так как по определению вихревой трубки вихревые линии целиком лежат на ее поверхности, следовательно, здесь $\omega_n=0$. Интегралы, распространенные на сечения (1) и (2), вычислим из предположения о том, что ввиду малости этих поперечных сечений величины ω_{1n} и ω_{2n} в пределах каждого из них можно считать постоянными. В соответствии с этим

$$\iint\limits_{(1)} \omega_{1n}\, d\sigma_1 = -\omega_1\,\sigma_1, \quad \iint\limits_{(2)} \omega_{2n}\, d\sigma_2 = \omega_2\,\sigma_2,$$

где $\omega_1=-\omega_{1n}$, $\omega_2=\omega_{2n}$ — угловые скорости соответственно в первом и втором сечениях, а σ_1, σ_2 — площади этих сечений, перпендикулярные

к векторам $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$. Отрицательный знак в выражении для первого интеграла поставлен потому, что $\bar{\omega}_1$ направлено в сторону, противоположную внешней нормали к сечению (1). Уравнение (3.II.73) принимает вид

$$\omega_1 \sigma_1 = \omega_2 \sigma_2.$$

Так как сечения (1), (2) были взяты произвольно, то можно записать в общем виде для данного момента времени уравнение

$$\omega\sigma = \text{const},$$

которое применимо для всех сечений одной и той же трубки. Таким образом, теорема Гельмгольца доказана.

Из теоремы Гельмгольца вытекает свойство вихревой трубки, заключающееся в том, что она не может внезапно оборваться или закончиться острием. Последнее обусловлено тем, что при площади сечения трубки $\sigma \to 0$ угловая скорость вращения ω стремилась бы в соответствии с теоремой Гельмгольца к бесконечности, что физически нереально.

II.25. Для определения ротора скорости $\bar{\Omega} = \text{rot}\, \bar{V}$ необходимо вычислить составляющие угловой скорости ω_x, ω_y и ω_z:

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial V_z}{\partial y} = -\frac{k^2 y}{\sqrt{\varphi(z) - 2k^2(x^2+y^2)}};$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial V_z}{\partial x} = \frac{k^2 x}{\sqrt{\varphi(z) - 2k^2(x^2+y^2)}};$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) = k.$$

Ротор скорости

$$\bar{\Omega} = \text{rot}\, \bar{V} = 2(\omega_x i + \omega_y j + \omega_z k),$$

следовательно, его модуль

$$|\Omega| = \sqrt{(2\omega_x)^2 + (2\omega_y)^2 + (2\omega_z)^2} =$$

$$= \frac{2k}{\sqrt{\varphi(z) - 2k^2(x^2+y^2)}} \sqrt{k^2(x^2+y^2) + \varphi(z) - 2k^2(x^2+y^2)}.$$

Найдем модуль вектора скорости:

$$|V| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{k^2(x^2+y^2) + \varphi(z) - 2k^2(x^2+y^2)}.$$

В соответствии с этим

$$|\Omega| = \frac{2k}{\sqrt{\varphi(z) - 2k^2(x^2+y^2)}} |V|.$$

Для определения направления вектора $\bar{\Omega}$ найдем тангенсы углов наклона соответствующих составляющих векторов $\bar{V}$ и $\bar{\omega}$:

$$V_y/V_x = -x/y; \quad \omega_y/\omega_x = -x/y;$$

$$\frac{V_y}{V_z} = \frac{kx}{\sqrt{\varphi(z) - 2k^2(x^2+y^2)}}; \quad \frac{\omega_y}{\omega_z} = \frac{kx}{\sqrt{\varphi(z) - 2k^2(x^2+y^2)}};$$

$$\frac{V_z}{V_x} = -\frac{\sqrt{\varphi(z) - 2k^2(x^2+y^2)}}{ky}; \quad \frac{\omega_z}{\omega_x} = -\frac{\sqrt{\varphi(z) - 2k^2(x^2+y^2)}}{ky}.$$

На основании этих соотношений можно сделать вывод, что вектор $\bar{\Omega}$ имеет то же направление, что и вектор скорости $\bar{V}$.

II.26. Циркуляцией скорости по некоторому контуру K называют линейный интеграл

$$\Gamma = \int\limits_{(K)} \bar{V} \cdot d\bar{S}, \tag{3.II.74}$$

в котором $\bar{V} \cdot d\bar{S}$ — скалярное произведение двух векторов $\bar{V}$ и $d\bar{S}$, равное $\bar{V} \cdot d\bar{S} = V_x dx + V_y dy + V_z dz$. В безвихревом потоке циркуляцию можно выразить через потенциал скоростей, поскольку $V_x dx + V_y dy + V_z dz = d\varphi$, т. е.

$$\Gamma = \int\limits_{(K)} d\varphi = \varphi_{K1} - \varphi_{K2}, \tag{3.II.75}$$

где φ_{K1}, φ_{K2} — значения потенциальной функции на концах рассматриваемого контура.

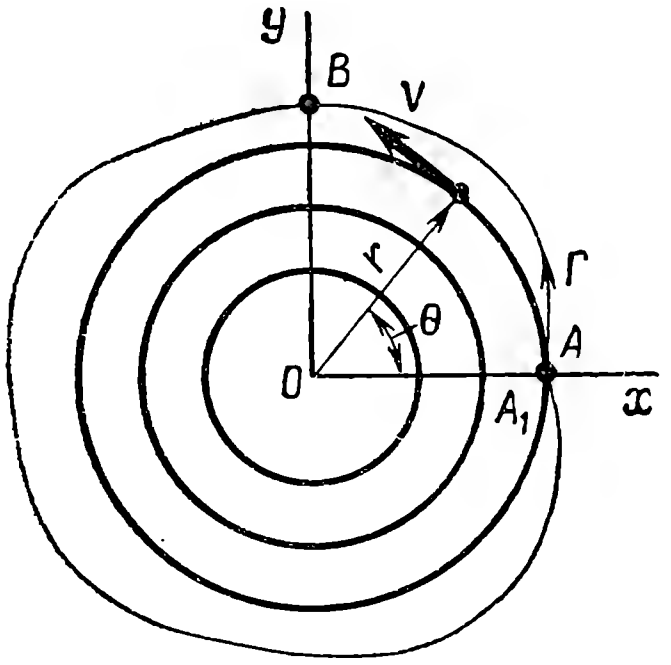


Рис. 3.II.11. К определению циркуляции Γ в потоке, потенциал которого $\varphi = a\theta$

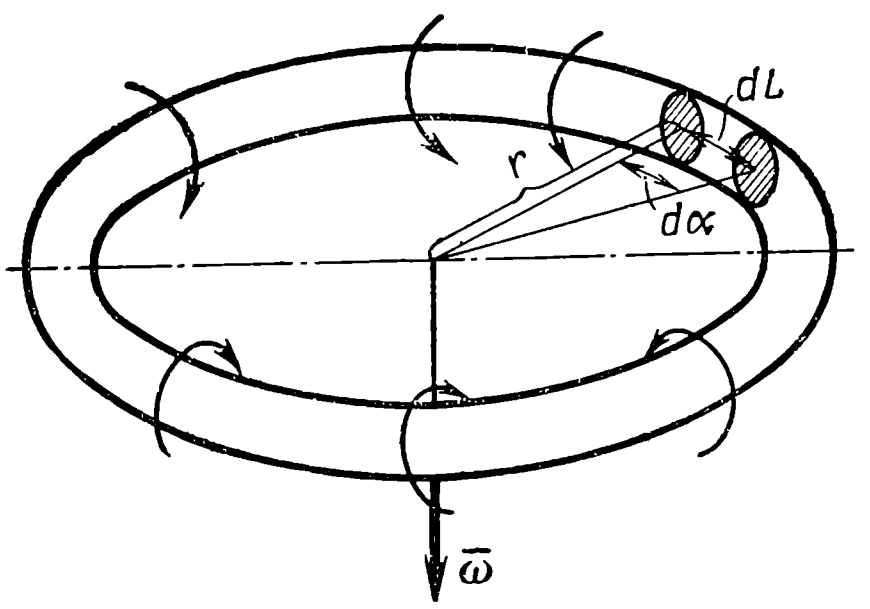


Рис. 3.II.12. Схема расчета скорости индуцированной вихревым кольцом

Течение жидкости, заданное условиями задачи, является плоским, установившимся и, так как $\partial V_y/\partial x = \partial V_x/\partial y$ (т. е. $\omega_z = 0$), также потенциальным. При этом потенциал φ можно определить, вычислив скорость потока

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = a/\sqrt{x^2 + y^2} = a/r,$$

где r — полярный радиус точки (рис. 3.II.11). Угол θ находится из соотношения

$$\cos\theta = \frac{V_y}{V} = \frac{ay}{r^2} \cdot \frac{r}{a} = \frac{y}{r}.$$

Отсюда следует, что вектор скорости $\bar{V}$ перпендикулярен полярному радиусу точки. Таким образом,

$$V_r = 0, \quad V_s = V = \frac{a}{r} = \frac{\partial\varphi}{\partial S} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}.$$

Интегрируя последнее уравнение, найдем

$$\varphi = a\theta.$$

Этому значению соответствует функция тока

$$\psi = -a \ln r.$$

Отсюда можно найти уравнение линий тока: $\psi = -a \ln r = c$. Согласно этому уравнению такие линии представляют собой окружности $r = c$ с центром в начале координат.

Найдем циркуляцию скорости:

$$\Gamma = \oint_A^B d\varphi = \varphi_B - \varphi_A = a\frac{\pi}{2} - 0 = \frac{a\pi}{2}.$$

Если подсчитать величину этой циркуляции по любому замкнутому контуру, охватывающему начало координат, то окажется, что

$$\Gamma = \int_K d\varphi = \varphi_{A1} - \varphi_A = 2\pi a.$$

Отсюда следует, что $a = \Gamma/2\pi$.

Физически этот случай, согласно теореме Стокса, соответствует наличию в особой точке ($r=0$) вихревой нити интенсивностью, равной

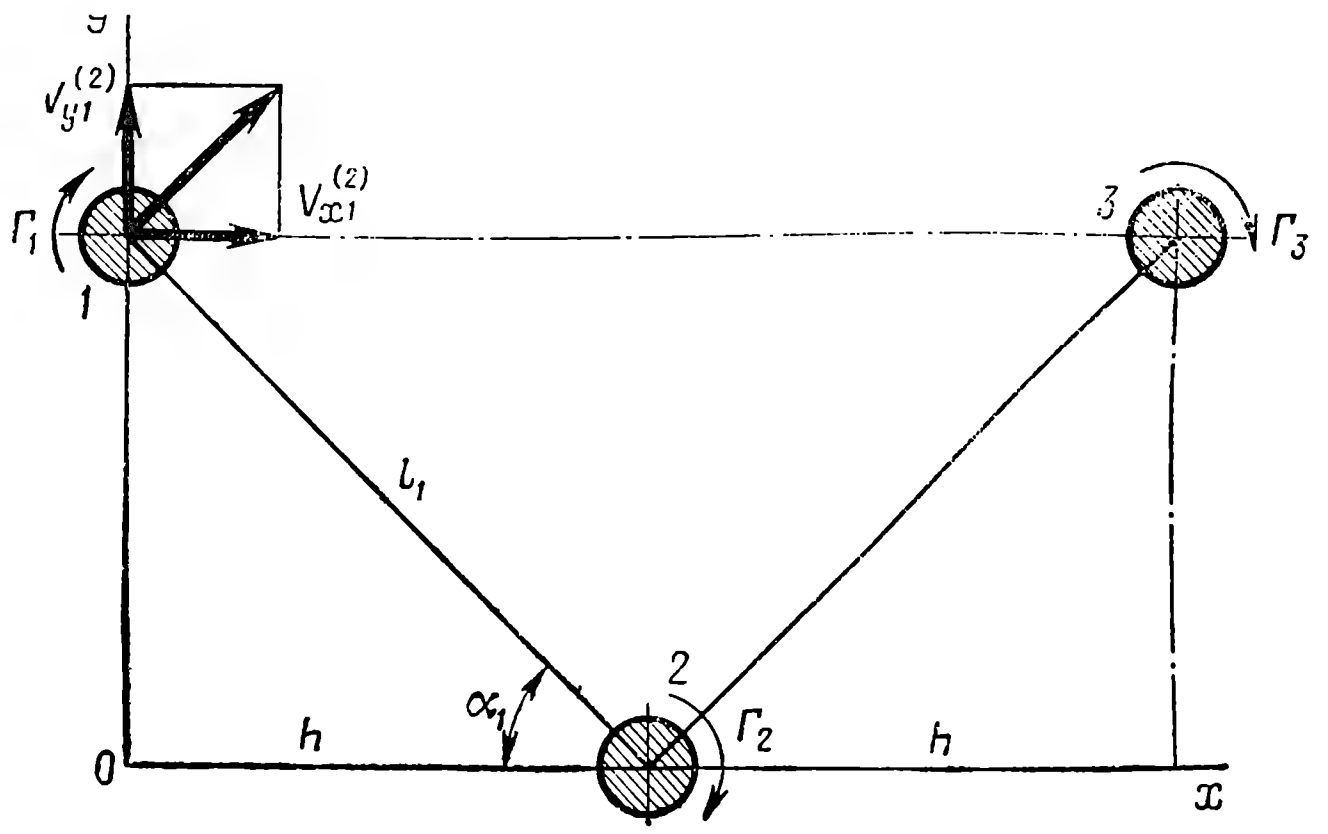


Рис. 3.II.13. Скорости, индуцируемые в первом вихре от второго ($\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$)

циркуляции Г. При этом вне вихревой нити течение будет безвихревое.

II.27. Вихри, расположенные в потоке, вызывают в окружающем пространстве дополнительную индуцированную скорость. В соответствии с формулой Био—Савара элементарная величина индуцированной скорости в центре кольца (рис. 3.II.12)

$$d\bar{\omega} = \frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{\bar{r} \times d\bar{L}}{r^3}.$$

В данном случае модуль векторного произведения

$$\bar{r} \times d\bar{L} = r \sin(r, L)\, dL = r \sin(\pi/2)\, dL = r^2\, d\alpha,$$

поэтому

$$d\omega = \frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{d\alpha}{r}.$$

Полная скорость

$$\omega = \frac{\Gamma}{4\pi r} \int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{\Gamma}{2r}.$$

Подставляя данные, найдем

$$\omega = 100/(2 \cdot 1) = 50 \text{ м/сек}.$$

II.28. Случай 1-й (рис. 3.II.13). Рассмотрим скорость, которая сообщается первому вихрю вторым:

$$V_{x1}^{(2)} = \frac{\Gamma}{2\pi l_1} \sin\alpha_1,\ V_{y1}^{(2)} = \frac{\Gamma}{2\pi l_1} \cos\alpha_1$$

или

$$V_{x1}^{(2)} = \frac{\Gamma}{2\pi l_1} \cdot \frac{h}{l_1} = \frac{\Gamma h}{2\pi l_1^2} = \frac{\Gamma h}{2\pi (h^2 + h^2)} = \frac{\Gamma}{4\pi h};$$

$$V_{y1}^{(2)} = \frac{\Gamma}{2\pi l_1} \cdot \frac{h}{l_1} = \frac{\Gamma h}{2\pi l_1^2} = \frac{\Gamma h}{2\pi 2h^2} = \frac{\Gamma}{4\pi h}.$$

Индуцированная скорость от третьего вихря

$$V_{x1}^{(3)} = 0, \quad V_{y1}^{(3)} = \Gamma/(2\pi 2h) = \Gamma/(4\pi h).$$

Суммарные значения скорости от воздействия обоих вихрей:

$$V_{x1} = \frac{\Gamma}{4\pi h}; \; V_{y1} = \frac{\Gamma}{4\pi h} + \frac{\Gamma}{4\pi h} = \frac{\Gamma}{2\pi h}.$$

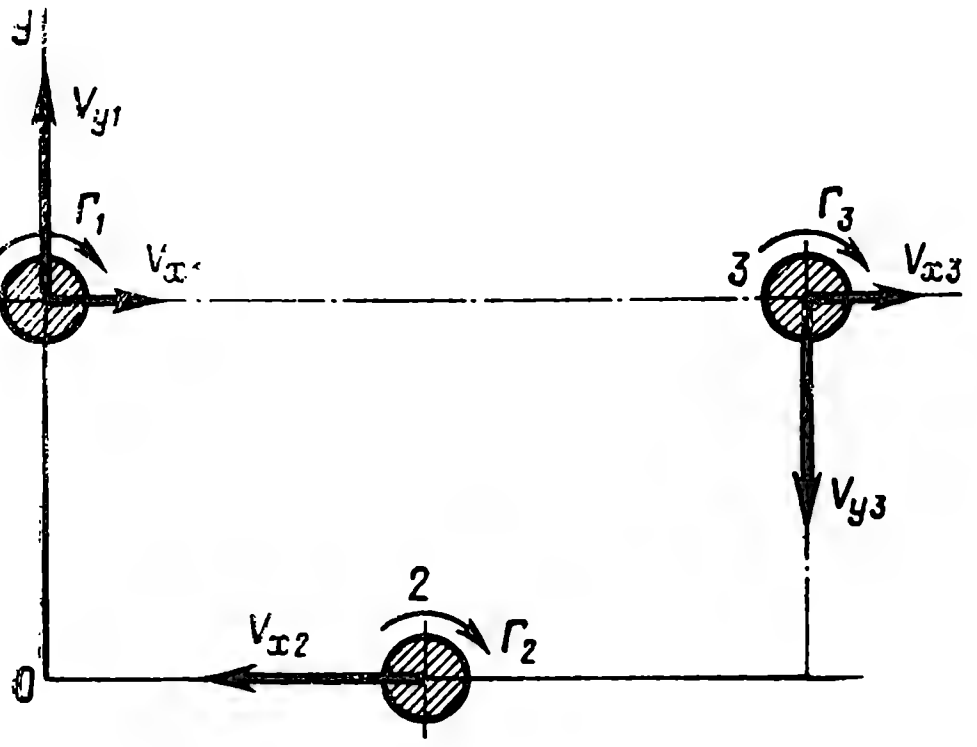


Рис. 3.II.14. Движение системы трех прямолинейных вихрей ($\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = \Gamma$)

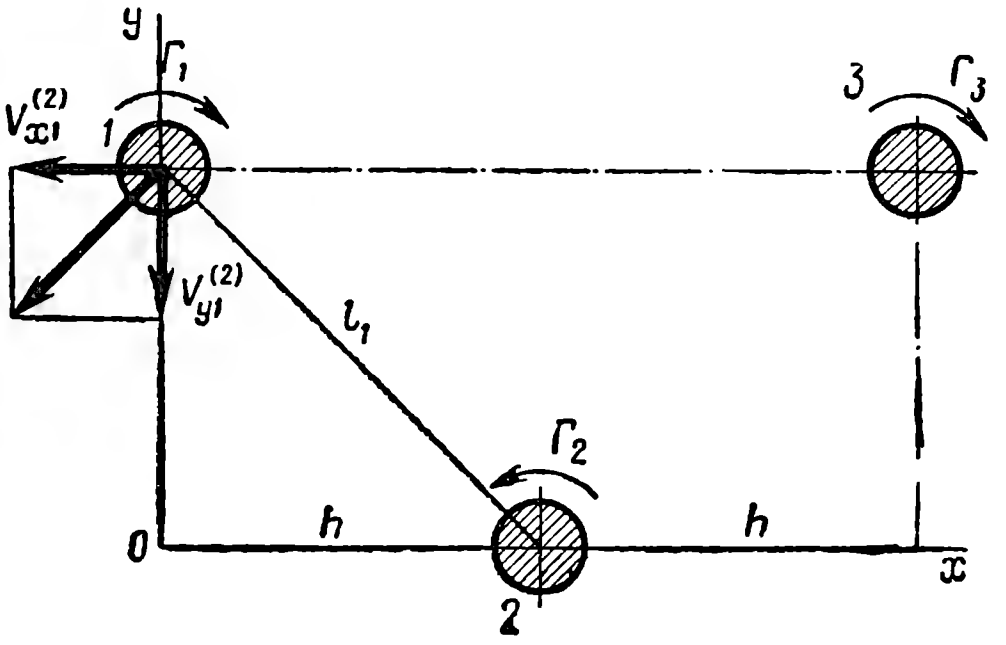


Рис. 3.II.15. Определение скорости, индуцируемой в первом вихре вторым ($\Gamma_2 = -\Gamma_1$)

Подставляя данные, найдем:

$$V_{x1} = \frac{100}{4\pi \cdot 0{,}5} = 15{,}9 \; м/сек; \; V_{y1} = \frac{100}{2\pi \cdot 0{,}5} = 31{,}8 \; м/сек.$$

Рассмотрим скорости, индуцируемые во втором вихре:
от первого —

$$V_{x2}^{(1)} = -\Gamma/(4\pi h), \; V_{y2}^{(1)} = -\Gamma/(4\pi h);$$

от третьего —

$$V_{x2}^{(3)} = -\Gamma/(4\pi h), \; V_{y2}^{(3)} = \Gamma/(4\pi h).$$

Таким образом, суммарные составляющие скорости:

$$V_{x2} = -\Gamma/(2\pi h), \; V_{y2} = 0.$$

Подставляя исходные данные, найдем

$$|V_{x2}| = 100/(2\pi \cdot 0{,}5) = 31{,}8 \; м/сек.$$

Для третьего вихря скорость V_{x3} будет такой, как V_{x1} для первого, а вертикальная составляющая будет противоположна по знаку, т. е.

$$V_{x3} = V_{x1} = \frac{\Gamma}{4\pi h} = \frac{100}{4\pi \cdot 0{,}5} = 15{,}9 \; м/сек;$$

$$V_{y3} = -V_{y1} = -\frac{\Gamma}{2\pi h} = \left| \frac{100}{2\pi \cdot 0{,}5} \right| = 31{,}8 \; м/сек.$$

На рис. 3.II.14 показан характер движения вихрей в соответствии с полученными значениями скорости.

Случай 2-й (рис. 3.II.15). Рассмотрим скорость, которая сообщается первому вихрю:

от второго —

$$V_{x1}^{(2)} = -\frac{\Gamma}{2\pi l_1}\cdot\frac{h}{l_1} = -\frac{\Gamma}{4\pi h};\quad V_{y1}^{(2)} = -\frac{\Gamma}{4\pi h};$$

от третьего —

$$V_{x1}^{(3)} = 0;\quad V_{y1}^{(3)} = \Gamma/(4\pi h).$$

Суммарные составляющие скорости:

$$V_{x1} = -\Gamma/(4\pi h);\ V_{y1} = 0.$$

С учетом заданных значений Γ и h

$$|V_{x1}| = 100/(4\pi\cdot 0{,}5) = 15{,}9\ м/сек.$$

Рассмотрим скорости, индуцируемые во втором вихре:
от первого —

$$V_{x2}^{(1)} = -\Gamma/(4\pi h),\ V_{y2}^{(1)} = -\Gamma/(4\pi h);$$

от третьего —

$$V_{x2}^{(3)} = -\Gamma/(4\pi h),\ V_{y2}^{(3)} = \Gamma/(4\pi h).$$

Таким образом, суммарные составляющие:

$$V_{x2} = -\Gamma/(2\pi h),\ V_{y2} = 0.$$

Подставляя исходные данные, найдем

$$|V_{x2}| = 100/(2\cdot 3{,}14\cdot 0{,}5) = 31{,}8\ м/сек.$$

Рассмотрим скорости, индуцируемые в третьем вихре:
от первого —

$$V_{x3}^{(1)} = 0,\ V_{y3}^{(1)} = -\Gamma/(4\pi h);$$

от второго —

$$V_{x3}^{(2)} = -\Gamma/(4\pi h),\ V_{y3}^{(2)} = \Gamma/(4\pi h).$$

Соответствующие суммарные составляющие:

$$V_{x3} = -\Gamma/(4\pi h),\ V_{y3} = 0.$$

Согласно условиям

$$|V_{x3}| = 100/(4\cdot 3{,}14\cdot 0{,}5) = 15{,}9\ м/сек.$$

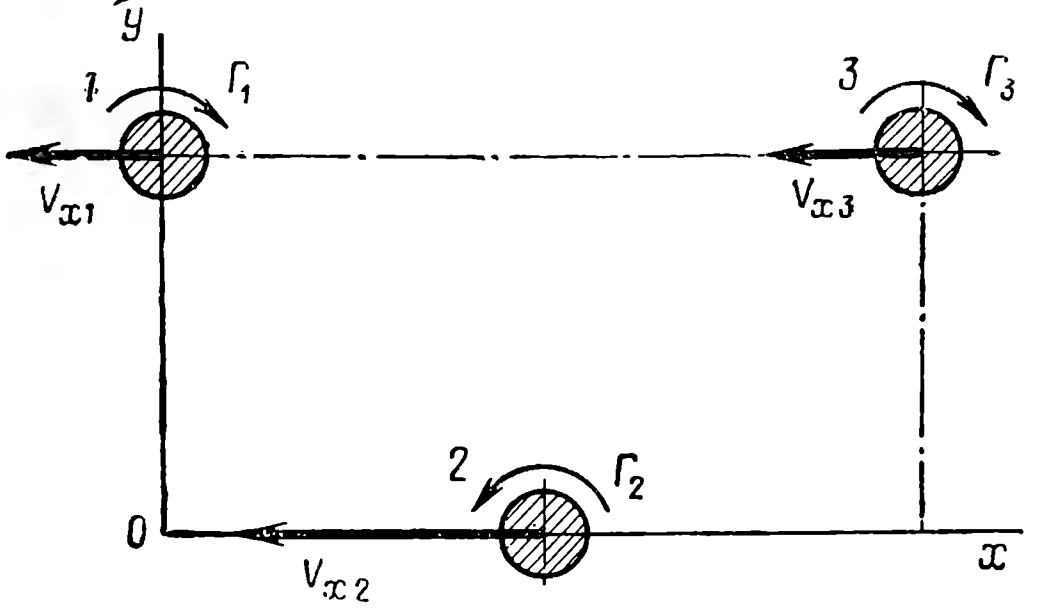


Рис. 3.II.16. Движение системы трех прямолинейных вихрей

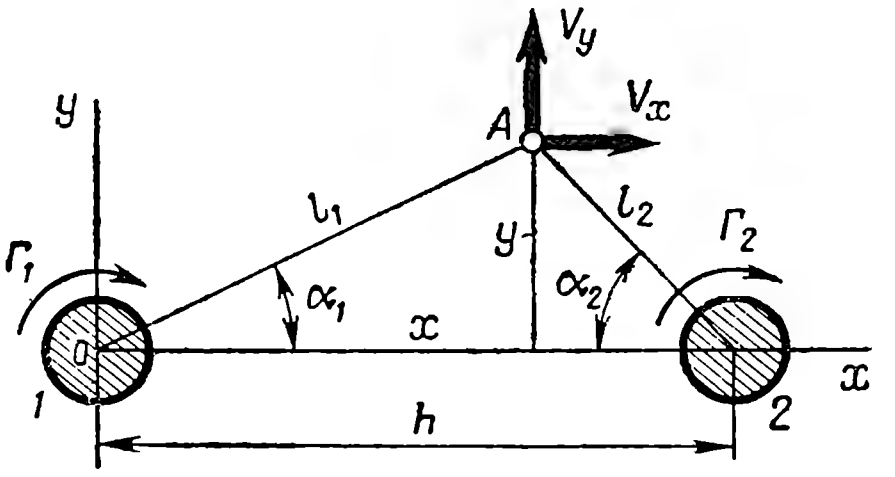


Рис. 3.II.17. К определению потенциала скоростей φ и функции тока ψ течения, индуцируемого парой прямолинейных вихрей ($\Gamma_1 = \Gamma_2$)

На рис. 3.II.16 показан характер движения вихрей в соответствии с полученными значениями скорости.

II.29. Случай 1-й (рис. 3.II.17). Выберем точку A с координатами x, y и вычислим в ней скорости, индуцируемые вихрями.

Первый вихрь сообщает этой точке скорости:

$$V_x^{(1)} = \frac{\Gamma \sin \alpha_1}{2\pi l_1} = \frac{\Gamma (y/l_1)}{2\pi l_1} = \frac{\Gamma y}{2\pi l_1^2} = \frac{\Gamma y}{2\pi (x^2 + y^2)};$$

$$V_y^{(1)} = -\frac{\Gamma \cos \alpha_1}{2\pi l_1} = -\frac{\Gamma (x/l_1)}{2\pi l_1} = -\frac{\Gamma x}{2\pi l_1^2} = -\frac{\Gamma x}{2\pi (x^2+y^2)}.$$

Соответствующие значения этих скоростей, индуцируемых вторым вихрем:

$$V_x^{(2)} = \frac{\Gamma \sin \alpha_2}{2\pi l_2} = \frac{\Gamma (y/l_2)}{2\pi l_2} = \frac{\Gamma y}{2\pi l_2^2} = \frac{\Gamma y}{2\pi [(h-x)^2 + y^2]};$$

$$V_y^{(2)} = \frac{\Gamma \cos \alpha_2}{2\pi l_2} = \frac{\Gamma [(h-x)/l_2]}{2\pi l_2} = \frac{\Gamma (h-x)}{2\pi [(h-x)^2 + y^2]}.$$

Полные составляющие:

$$V_x = V_x^{(1)} + V_x^{(2)} = \frac{\Gamma y}{2\pi (x^2 + y^2)} + \frac{\Gamma y}{2\pi [(h-x)^2 + y^2]};$$

$$V_y = V_y^{(1)} + V_y^{(2)} = -\frac{\Gamma x}{2\pi (x^2 + y^2)} + \frac{\Gamma (h-x)}{2\pi [(h-x)^2 + y^2]}.$$

Известно, что дифференциал потенциальной функции

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = V_x dx + V_y dy,$$

поэтому

$$d\varphi = \left\{\frac{\Gamma y}{2\pi (x^2 + y^2)} + \frac{\Gamma y}{2\pi [(h-x)^2 + y^2]}\right\} dx + \left\{-\frac{\Gamma x}{2\pi (x^2 + y^2)} + \frac{\Gamma (h-x)}{2\pi [(h-x)^2 + y^2]}\right\} dy.$$

Это выражение перепишем в виде

$$d\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\left[-\left(\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right) dx - \left(\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right) dy + \left(\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{arctg} \frac{y}{h-x}\right) dx + \left(\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{arctg} \frac{y}{h-x}\right) dy\right] = \frac{\Gamma}{2\pi}\left[-d\left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right) + d\left(\operatorname{arctg} \frac{y}{h-x}\right)\right].$$

Интегрируя, получим для потенциала скоростей

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\left(-\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \operatorname{arctg} \frac{y}{h-x}\right). \qquad (3.II.76)$$

Нетрудно заметить, что эта величина определяется в виде суммы потенциалов скоростей:

от первого вихря —

$$\varphi_1 = -\frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \qquad (3.II.77)$$

и от второго вихря —

$$\varphi_2 = \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{h-x}. \qquad (3.II.78)$$

Воспользуемся этим свойством наложения (суперпозиции) несжимаемых потоков, чтобы определить суммарную функцию тока

$$\psi = \psi_1 + \psi_2,$$

где ψ_1, ψ_2 — функции тока соответственно для первого и второго вихрей.

Функцию ψ_1 найдем следующим образом. Из (3.II.77) следует, что

$$\varphi_1 = -\frac{\Gamma}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = -\frac{\Gamma}{2\pi}\alpha_1,$$

откуда полная скорость

$$V_s = \frac{\partial\varphi_1}{\partial s} = \frac{1}{l_1}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha_1} = -\frac{\Gamma}{2\pi l_1}.$$

Очевидно, что эта величина равна составляющей скорости, нормальной к радиусу-вектору точки A. Радиальная компонента скорости в этой точке $V_r=0$. Таким образом, для функции тока напишем

$$\partial\psi_1/\partial l_1 = -V_s = \Gamma/(2\pi l_1),$$

откуда

$$\psi_1 = \Gamma\ln l_1/2\pi. \qquad (3.II.79)$$

Соответственно для второго вихря, расположенного относительно первого по другую сторону от точки A, найдем

$$\psi_2 = -\Gamma\ln l_2/2\pi. \qquad (3.II.80)$$

Таким образом, суммарная функция тока

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \frac{\Gamma}{2\pi}(\ln l_1 - \ln l_2) = \frac{\Gamma}{2\pi}\ln\frac{l_1}{l_2}$$

или

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi}\ln\sqrt{\frac{x^2+y^2}{(h-x)^2+y^2}}. \qquad (3.II.81)$$

Чтобы получить семейство линий тока, примем ψ равной некоторой константе c_1:

$$\psi = c_1 = \frac{\Gamma}{2\pi}\ln\sqrt{\frac{x^2+y^2}{(h-x)^2+y^2}}$$

или

$$\frac{x^2+y^2}{(h-x)^2+y^2} = c_2,$$

где $c_2 = e^{4\pi c_1/\Gamma}$.

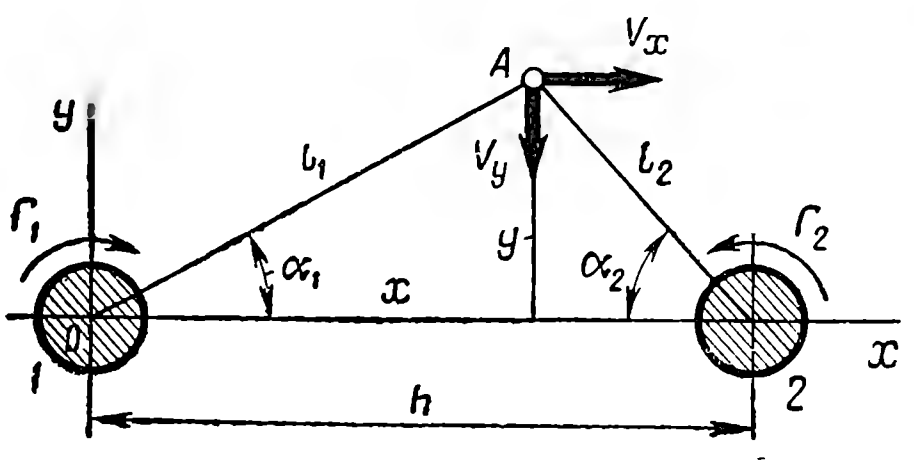


Рис. 3.II.18. К определению потенциала скоростей φ и функции тока ψ течения, индуцируемого парой прямолинейных вихрей ($\Gamma_1 = -\Gamma_2$)

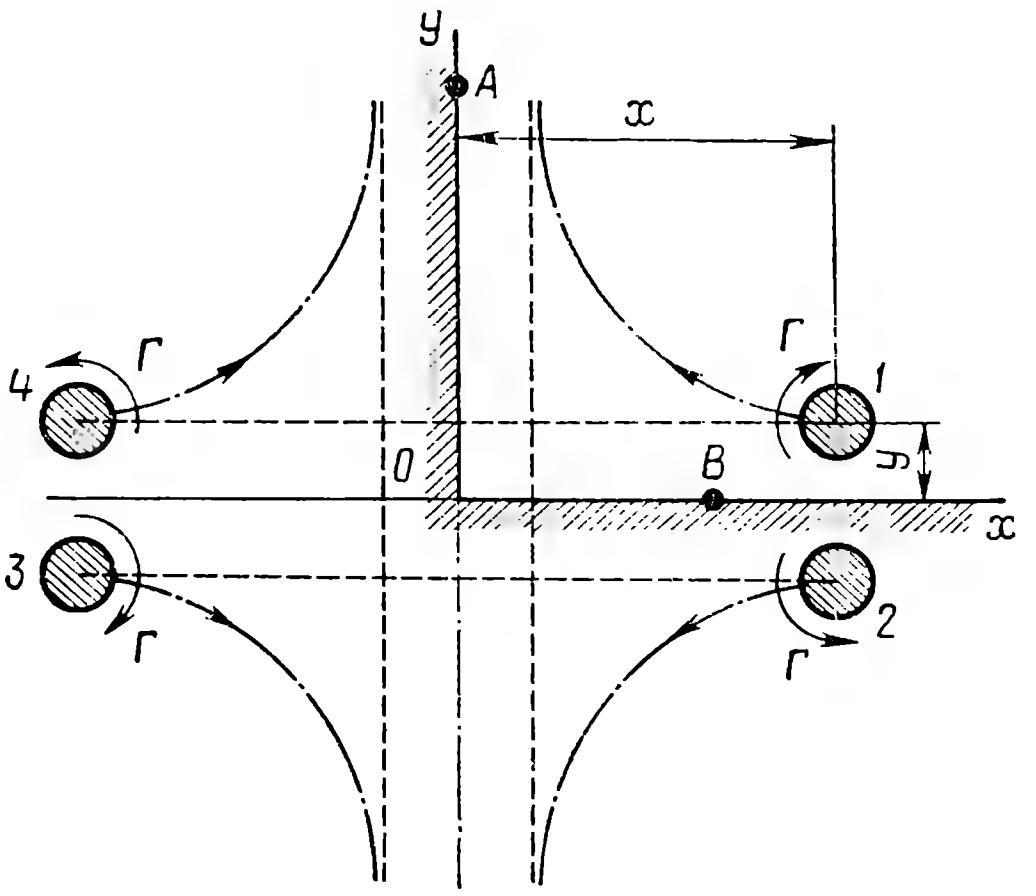


Рис. 3.II.19. Исследование движения прямолинейного вихря, находящегося внутри двугранного угла

Случай 2-й (рис. 3.II.18). Определение функции тока и потенциала скоростей ведем с учетом полученных ранее результатов, принимая во внимание, что вращение второго вихря происходит не по часовой стрелке, как в первом случае, а в противоположном направлении. В со-

ответствии с этим для потенциала скоростей суммарного потока можно написать

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = -\frac{\Gamma}{2\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \operatorname{arctg}\frac{y}{h-x}\right).$$

Аналогично для функции тока получим

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \frac{\Gamma}{2\pi}\ln l_1 + \frac{\Gamma}{2\pi}\ln l_2 = \frac{\Gamma}{2\pi}\left[\ln\sqrt{x^2+y^2} + \ln\sqrt{(h-x)^2+y^2}\right].$$

II.30. Покажем, что исследование движения одиночного прямолинейного вихря, находящегося внутри двугранного угла, образованного взаимно перпендикулярными стенками, эквивалентно в гидродинамическом смысле рассмотрению взаимодействия этого вихря с тремя прямолинейными вихрями, расположенными согласно схеме на рис. 3.II.19.

В заданной системе (вихрь — двугранный угол) координатные оси совпадают с линиями тока и, следовательно, нормальные к этим осям составляющие скорости равны нулю. Таким же свойством будут обладать взаимно перпендикулярные прямые, проведенные в потоке, образованном системой из четырех вихрей (см. рис. 3.II.19). Рассмотрим, например, точку A на оси Oy. Нормальная к этой оси составляющая скорости, индуцируемая расположенными симметрично относительно нее парами вихрей «1—4» и «2—3», интенсивности которых одинаковы, но противоположны по знаку, равна нулю. Аналогичный результат получается при определении составляющих скоростей, индуцируемых парами вихрей «1—2» и «3—4», в точке B оси Ox.

Рассмотрим скорости, индуцируемые в первом вихре:

от второго —

$$V_{x1}^{(2)} = -\frac{\Gamma}{2\pi}\cdot\frac{1}{2y} = -\frac{\Gamma}{4\pi y};\quad V_{y1}^{(2)} = 0;$$

от третьего —

$$V_{x1}^{(3)} = \frac{\Gamma}{2\pi}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\Gamma}{4\pi}\cdot\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$V_{y1}^{(3)} = -\frac{\Gamma}{2\pi}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{\Gamma}{4\pi}\cdot\frac{x}{x^2+y^2};$$

от четвертого —

$$V_{x1}^{(4)} = 0;\ V_{y1}^{(4)} = \frac{\Gamma}{2\pi}\cdot\frac{1}{2x} = \frac{\Gamma}{4\pi x}.$$

Таким образом, суммарные составляющие скорости:

$$V_{x1} = -\frac{\Gamma}{4\pi y} + \frac{\Gamma}{4\pi}\cdot\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\Gamma}{4\pi y}\cdot\frac{x^2}{r^2}; \qquad \text{(3.II.82)}$$

$$V_{y1} = -\frac{\Gamma}{4\pi}\cdot\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{\Gamma}{4\pi x} = \frac{\Gamma}{4\pi x}\cdot\frac{y^2}{r^2}, \qquad \text{(3.II.83)}$$

где $r^2 = x^2 + y^2$.

Используя уравнения (3.II.82), (3.II.83) и учитывая, что $V_{x1} = dx/dt$, $V_{y1} = dy/dt$, можем написать:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\Gamma}{4\pi y}\cdot\frac{x^2}{r^2}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\Gamma}{4\pi x}\cdot\frac{y^2}{r^2}.$$

Исключая из последних соотношений время t, найдем уравнение траектории вихря:

$$dx = -\frac{\Gamma}{4\pi y}\cdot\frac{x^2}{r^2}dt = -\frac{\Gamma}{4\pi y}\cdot\frac{x^2}{r^2}\cdot\frac{4\pi x}{\Gamma}\cdot\frac{r^2}{y^2}dy$$

или

$$dx/x^3 + dy/y^3 = 0.$$

Интегрируя, получаем

$$1/x^2 + 1/y^2 = c.$$

II.31. Для решения задачи рассмотрим сначала движение пары вихрей в жидкости, покоящейся на бесконечности.

Скорости, индуцируемые в первом вихре,

$$V_{x1} = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{2h} = \frac{\Gamma}{4\pi h}, \quad V_{y1} = 0.$$

Скорости, индуцируемые во втором вихре,

$$V_{x2} = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{2h} = \frac{\Gamma}{4\pi h}, \quad V_{y2} = 0.$$

Следовательно, $V_{x1} = V_{x2}$, и пара вихрей в рассматриваемом случае перемещается поступательно вдоль оси Ox со скоростью $V_x = \Gamma/(4\pi h)$.

В соответствии с условиями задачи (вихри должны оставаться неподвижными) скорость движения жидкости на бесконечности следует положить равной по величине, но противоположной по знаку скорости перемещения вихрей, т. е.

$$V_\infty = -\Gamma/(4\pi h).$$

Выберем на плоскости произвольную точку $A(x, y)$ и найдем значение функции тока в этой точке, пользуясь принципом суперпозиции. При этом функцию тока невозмущенного набегающего потока определим по известной скорости V_∞:

$$-V_\infty = \Gamma/(4\pi h) = \partial\psi_\infty/\partial y.$$

Интегрируя, найдем

$$\psi_\infty = \Gamma y/(4\pi h).$$

Затем вычислим другие составляющие функции тока. С этой целью вначале найдем скорости, индуцируемые в данной точке A парой вихрей (рис. 3.II.20).

Для первого вихря —

$$V^{(1)}_{xA} = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{l_1} \cdot \frac{h-y}{l_1} = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{h-y}{l_1^2} = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{h-y}{x^2 + (h-y)^2};$$

$$V^{(1)}_{yA} = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{l_1} \cdot \frac{x}{l_1} = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{x}{l_1^2} = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + (h-y)^2},$$

а для второго —

$$V^{(2)}_{xA} = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{l_2} \cdot \frac{h+y}{l_2} = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{h+y}{l_2^2} = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{h+y}{x^2 + (h+y)^2};$$

$$V^{(2)}_{yA} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{l_2} \cdot \frac{x}{l_2} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{x}{l_2^2} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + (h+y)^2}.$$

Суммарные составляющие скорости:

$$V_{xA} = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{h-y}{x^2 + (h-y)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{h+y}{x^2 + (h+y)^2};$$

$$V_{yA} = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + (h-y)^2} - \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + (h+y)^2}.$$

Поскольку $\psi(x, y)$, то можем записать

$$d\psi_в = (\partial\psi/\partial x)\,dx + (\partial\psi/\partial y)\,dy$$

или, учитывая связь между функцией тока и составляющими скорости,

$$d\psi_в = -V_y\,dx + V_x\,dy.$$

Заменим в этом выражении V_x и V_y их значениями в рассматриваемой точке A:

$$d\psi_в = -\frac{\Gamma}{2\pi}\left[\frac{x}{x^2+(h-y)^2} - \frac{x}{x^2+(h+y)^2}\right]dx + \\ + \frac{\Gamma}{2\pi}\left[\frac{h-y}{x^2+(h-y)^2} + \frac{h+y}{x^2+(h+y)^2}\right]dy$$

или иначе

$$d\psi_в = \frac{\Gamma}{4\pi}\{d\ln[x^2+(h+y)^2] - d\ln[x^2+(h-y)^2]\}.$$

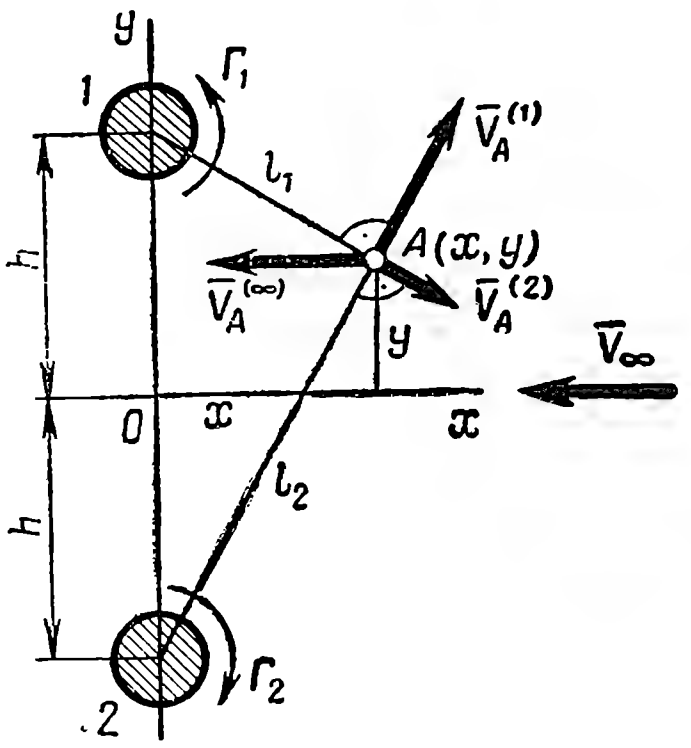


Рис. 3.II.20. К определению картины течения жидкости, получающегося в результате наложения на поступательный поток течения, индуцируемого парой прямолинейных вихрей ($\Gamma_1 = -\Gamma_2$).

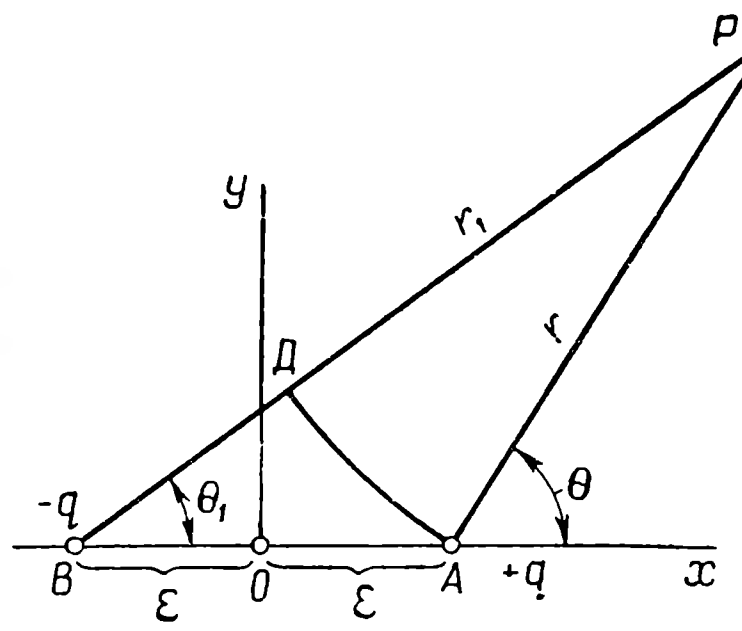


Рис. 3.II.21. Схема расчета комплексного потенциала течения, создаваемого плоским точечным диполем

В соответствии с этим функция тока течения, индуцируемого заданной парой вихрей, имеет вид

$$\psi_в = \frac{\Gamma}{4\pi}\ln\frac{x^2+(h+y)^2}{x^2+(h-y)^2}.$$

Функция тока суммарного течения, возникающего в результате наложения поступательного потока на течение, индуцируемое парой вихрей, определяется как сумма:

$$\psi = \psi_\infty + \psi_в = \frac{\Gamma}{4\pi}\cdot\frac{y}{h} + \frac{\Gamma}{4\pi}\ln\frac{x^2+(h+y)^2}{x^2+(h-y)^2}.$$

Чтобы получить семейство линий тока, примем $\psi = \text{const}$, т. е.

$$\frac{y}{h} + \ln\frac{x^2+(h+y)^2}{x^2+(h-y)^2} = \text{const}.$$

II.32. Кинематическое изучение плоского течения несжимаемой жидкости связано с отысканием комплексного потенциала, представляющего собой аналитическую функцию комплексного переменного $f(z) = W = \varphi + i\psi$ и дающего определенную систему линий тока $\psi = \text{const}$ и эквипотенциальных линий $\varphi = \text{const}$.

Покажем, что условия (3.II.64) являются необходимыми и достаточными для существования такого потенциала. Комплексный потенциал $W = f(z)$ является не просто функцией двух переменных x, y, а зависит

от комплексной переменной $z=x+iy$. В соответствии с теорией комплексного переменного функция W будет аналитической в некоторой области, если в данной точке этой области производная dW/dz одна и та же для всех направлений, т. е. если выполняется условие

$$dW/dz = dW/dx = dW/d(iy).$$

Так как здесь

$$\frac{dW}{dx} = \frac{\partial(\varphi + i\psi)}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

$$\frac{dW}{dy} = -i\frac{\partial(\varphi + i\psi)}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial y} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

то, следовательно,

$$\partial\varphi/\partial x = \partial\psi/\partial y, \quad \partial\varphi/\partial y = -\partial\psi/\partial x.$$

Это и есть известные условия Коши—Римана, которые выполняются для потенциальных течений несжимаемой жидкости и являются, как было показано, необходимыми и достаточными условиями существования комплексного потенциала.

II.33. Диполем называют совокупность источника и стока (одинаковых интенсивностей), размещенных на бесконечно малом расстоянии друг от друга.

Пусть в двух точках A и B расположены соответственно точечные источник и сток с одинаковой интенсивностью q (рис. 3.II.21). Суммарный потенциал от них в некоторой точке P

$$\varphi = \frac{1}{2\pi}(q\ln r - q\ln r_1) = \frac{q}{2\pi}\ln\left(1 - \frac{r_1 - r}{r_1}\right).$$

Так как $r_1 - r = 2\varepsilon\cos\theta$, а $\ln\left(1 - \frac{r_1 - r}{r_1}\right) \approx -\frac{r_1 - r}{r}$, то

$$\varphi = -\frac{q}{2\pi}\cdot\frac{2\varepsilon\cos\theta}{r}.$$

Имея в виду, что момент диполя $M=q2\varepsilon$, получим

$$\varphi = -M\cos\theta/(2\pi r). \tag{3.II.84}$$

Для функции тока имеем зависимость

$$\psi = \frac{1}{2\pi}(q\theta - q\theta_1) = \frac{q}{2\pi}(\theta - \theta_1).$$

Рассматривая криволинейные треугольники $АВД$, $РАД$ (см. рис. 3.II.21),), можем найти

$$\theta - \theta_1 = 2\varepsilon\sin\theta_1/r.$$

Следовательно,

$$\psi = \frac{q}{2\pi}\cdot\frac{2\varepsilon\cdot\sin\theta}{r} = \frac{M\sin\theta}{2\pi r}. \tag{3.II.85}$$

С учетом (3.II.84) и (3.II.85) комплексный потенциал диполя

$$W = \varphi + i\psi = -\frac{M}{2\pi}\cdot\frac{\cos\theta - i\sin\theta}{r} = -\frac{M}{2\pi z},$$

где $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$.

II.34. Воспользуемся известными значениями потенциала скоростей и функции тока поступательного потока:

$$\varphi_1 = Vx, \quad \psi_1 = Vy$$

и потока от диполя:

$$\varphi_2 = \frac{M}{2\pi}\cdot\frac{x}{x^2+y^2}, \quad \psi_2 = -\frac{M}{2\pi}\cdot\frac{y}{x^2+y^2}.$$

В результате наложения этих двух потоков получим течение, для которого:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = Vx + \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2}; \qquad (3.II.86)$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = Vy - \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}. \qquad (3.II.87)$$

В соответствии с этим комплексный потенциал .

$$W(z) = \varphi + i\psi = Vx\left(1 + \frac{M}{2\pi V} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2}\right) + iVy\left(1 - \frac{M}{2\pi V} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2}\right).$$

Введем полярные координаты θ, $r = \sqrt{x^2+y^2}$ и обозначим $M/(2\pi V) = r_0^2$. Тогда, принимая во внимание, что $x = r \cdot \cos\theta$, $y = r \cdot \sin\theta$, получим

$$W = V\left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) r \cdot \cos\theta + iV\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) r \cdot \sin\theta.$$

Так как $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ и $\cos\theta - i \cdot \sin\theta = e^{-i\theta} = r/z$, то окончательно

$$W = V\left(z + r_0^2/z\right).$$

II.35. Для определения геометрической картины течения (гидродинамического спектра) воспользуемся функцией тока (3.II.87). Приняв эту функцию постоянной c, получим уравнение семейства линий тока

$$Vy - \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} = c,$$

или, учитывая обозначение $M/(2\pi V) = r_0^2$,

$$Vy\left[(x^2 + y^2) - r_0^2\right] = c(x^2 + y^2).$$

Из этого уравнения видно, что линии тока представляют собой кривые третьего порядка. Рассмотрим одну из линий тока, которой соответствует значение $c = 0$. Уравнение этой линии тока

$$Vy(x^2 + y^2 - r_0^2) = 0.$$

В свою очередь это уравнение распадается на два:

$$y = 0 \text{ и } x^2 + y^2 = r_0^2.$$

Первое уравнение изображает ось x, а второе — окружность с центром в начале координат и радиусом r_0. Таким образом, в рассматриваемом сложном потоке имеется струйка, которая направляется из бесконечности вдоль оси x, а затем разветвляется, образуя окружность с указанным радиусом r_0.

Из сказанного следует, что если в качестве такой окружности взять контур кругового цилиндра радиуса r_0, то поток около него будет таким, как сложное течение, получаемое от сложения поступательного потока и диполя. Зная радиус цилиндра r_0 и скорость потока V, можно найти момент диполя $M = 2\pi V r_0^2$, который помещается на оси цилиндра для того, чтобы воспроизвести картину его обтекания.

II.36. Для определения расхода жидкости через заданную окружность и циркуляции Г по этой окружности необходимо найти распределение особых точек на плоскости (источников, стоков, диполей, вихревых точек) для течения, характеризуемого комплексным потенциалом $W(z)$, т. е. тех точек, в которых скорость обращается в бесконечность.

Преобразуем (2.II.1) к следующему виду:

$$W = (1 + i)[\ln(z + 1) + \ln(z - 1)] + (2 - 3i)[\ln(z + 2) + \ln(z - 2)] + 1/z,$$

или, иначе,

$$W = \ln(z+1) + \ln(z-1) + 2\ln(z+2) + 2\ln(z-2) + \\ + i\ln(z+1) + i\ln(z-1) - 3i\ln(z+2) - 3i\ln(z-2) + 1/z. \quad (3.II.88)$$

На основании (3.II.88) можно сделать вывод, что суммарное течение, характеризуемое заданным потенциалом $W(z)$, получается в результате наложения следующих простейших потоков:

1) источников [с комплексными потенциалами $\ln(z+1)$, $\ln(z-1)$, $\ln(z+2)$, $\ln(z-2)$] в точках с координатами $z=1$; 2; -1; -2 (т. е. расположенных на действительной оси в точках $x=1$; 2; -1; -2);

2) диполя (его комплексный потенциал $1/z$; момент $M=-2\pi$), размещенного в начале координат $z=0$;

3) вихревых точек [комплексные потенциалы $i\ln(z+1)$, $i\ln(z-1)$, $-3i\ln(z+2)$, $-3i\ln(z-2)$], расположенных в точках $z=1$; 2; -1; -2, т. е. там же, где и источники. Заданная окружность $x^2+y^2=9$ охватывает все эти особые точки, поскольку ее центр размещен в начале координат, а радиус $r=3$.

Диполь как комбинация источника и стока равных интенсивностей не дает расхода через окружность, и, следовательно, суммарный расход будет определяться интенсивностями четырех источников. Интенсивность каждого из них может быть установлена следующим образом. Как известно, комплексный потенциал течения от источника интенсивностью q имеет вид

$$W = q\cdot\ln z/(2\pi). \quad (3.II.89)$$

По условиям задачи, комплексный потенциал, например источника, расположенного в точке $z=+1$, дается соотношением

$$W_1 = \ln(z-1). \quad (3.II.90)$$

Сопоставляя (3.II.89) и (3.II.90), находим интенсивность этого источника $q_1=2\pi$. Найденные аналогичным путем интенсивности источников, расположенных в точках $z=-1$; 2; -2, равны соответственно 2π, 4π, 4π.

Таким образом, расход жидкости в единицу времени через заданную окружность

$$Q = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 12\pi.$$

Для определения циркуляции скорости по этой окружности воспользуемся теоремой Стокса, согласно которой величина этой циркуляции по какому-либо контуру равна сумме напряжений вихрей, пронизывающих поверхность, охватываемую этим контуром.

Следовательно, циркуляция по заданной окружности будет равна сумме напряжений четырех вихревых точек, расположенных на координатной оси Ox в точках $x=+1$; -1; $+2$; -2. Интенсивность (напряжение) каждой из них определяется следующим образом. Комплексный потенциал течения, создаваемого вихревой точкой, имеет вид

$$W = -i\Gamma\cdot\ln z/(2\pi). \quad (3.II.91)$$

По условиям рассматриваемой задачи, комплексный потенциал течения, создаваемого, например, вихревой точкой с координатой $z=+1$, представляется выражением

$$W' = i\ln(z-1). \quad (3.II.92)$$

Сопоставляя (3.II.91) и (3.II.92), найдем $\Gamma_1=-2\pi$. Аналогично можно определить интенсивности Γ вихревых точек с координатами $z=-1$; 2; -2. Эти интенсивности равны соответственно -2π, 6π и 6π. Таким образом, циркуляция Γ по окружности $x^2+y^2=9$ будет

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 = 8\pi.$$

II.37. Запишем комплексный потенциал (2.II.2) в виде

$$W(z) = Vz + \frac{Vr_0^2}{z} - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z.$$

Каждое слагаемое в этом уравнении представляет собой комплексный потенциал более простого течения: $W_1 = Vz$; $W_2 = Vr_0^2/z$, $W_3 = -\Gamma \ln z/(2\pi i)$.

Рассмотрим течение, характеризуемое комплексным потенциалом $W_1 = \varphi_1 + i\psi_1$. Учитывая, что $z = x + iy$, можем написать для этого потенциала

$$W_1 = \varphi_1 + i\psi_1 = V(x + iy).$$

Следовательно,

$$\varphi_1 = Vx, \quad \psi_1 = Vy. \tag{3.II.93}$$

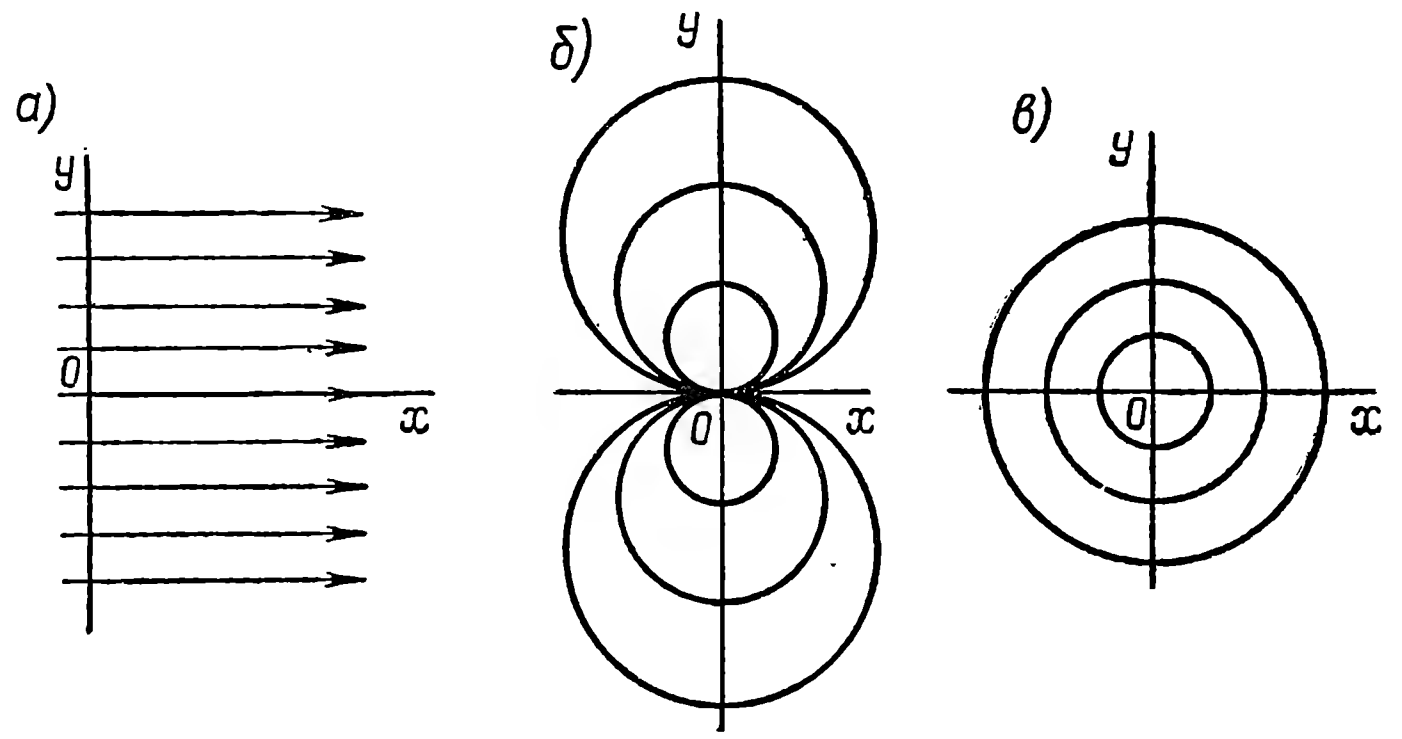


Рис. 3.II.22. Виды течений жидкости

Уравнение линий тока для этого течения $\psi_1 = Vy = \text{const}$, т. е. комплексный потенциал $W_1 = Vz$, характеризует поступательный поток, скорость которого V направлена вдоль оси Ox (рис. 3.II.22, *а*).

Комплексный потенциал $W_2 = Vr_0^2/z$ характеризует течение от диполя, расположенного в начале координат. Момент этого диполя $\mathbf{M} = -2\pi V r_0^2$ (рис. 3.II.22, *б*). Потенциал скоростей и функцию тока диполя определяем следующим образом:

$$W_2 = \varphi_2 + i\psi_2 = \left(Vr_0^2/r\right)(\cos\theta - i\sin\theta).$$

Следовательно,

$$\varphi_2 = \left(Vr_0^2/r\right)\cos\theta, \quad \psi_2 = -\left(Vr_0^2/r\right)\sin\theta. \tag{3.II.94}$$

Наконец, комплексный потенциал $W_3 = -\Gamma \ln z/(2\pi i)$ определяет циркуляционное течение, создаваемое вихревой точкой, расположенной в начале координат (рис. 3.II.22,*в*). Для нахождения соответствующего потенциала скоростей и функции тока заменим в выражении W_3 величину $\ln z = re^{i\theta}$:

$$W_3 = \varphi_3 + i\psi_3 = \frac{i\Gamma}{2\pi}(\ln r + i\theta).$$

Таким образом,

$$\varphi_3 = -\Gamma\theta/(2\pi), \quad \psi_3 = \Gamma \ln r/(2\pi). \tag{3.II.95}$$

Линии тока в данном случае [их уравнение $\psi_3 = \Gamma \ln r/(2\pi) = \text{const}$] представляют собой концентрические окружности с центром в начале координат.

II.38. Для определения потенциала скоростей и функции тока заданного результирующего течения воспользуемся зависимостями (3.II.93) ÷ (3.II.95). Складывая соответствующие выражения для потенциалов скоростей $\varphi_{1(2,3)}$ и функций тока $\psi_{1(2,3)}$, получим:

$$\varphi = Vr\cdot\cos\theta + \left(Vr_0^2/r\right)\cos\theta - \Gamma\theta/(2\pi);$$

$$\psi = Vr\cdot\sin\theta - \left(Vr_0^2/r\right)\sin\theta + \Gamma\ln r/(2\pi).$$

Соответствующее уравнение линий тока имеет вид

$$Vr\cdot\sin\theta - \left(Vr_0^2/r\right)\sin\theta + \Gamma\ln r/(2\pi) = \text{const}.$$

Рассмотрим одну из линий тока, которой соответствует значение const=0. Поскольку известно, что линии тока в циркуляционном потоке представляют собой окружности $r=\text{const}$, то член $\Gamma\ln r/(2\pi)$ можно исключить из рассмотрения. Исследуем уравнение

$$Vr\cdot\sin\theta - \left(Vr_0^2/r\right)\sin\theta = 0.$$

Заменяя здесь $r\cdot\sin\theta = y$ и учитывая, что $r^2 = x^2 + y^2$, найдем

$$Vy\left(1 - \frac{r_0^2}{x^2+y^2}\right) = 0.$$

Это уравнение распадается на два:

$$y = 0 \text{ и } x^2 + y^2 = r_0^2.$$

Первое из них представляет собой ось x, а второе — окружность с центром в начале координат и радиусом r_0. Таким образом, в рассматриваемом сложном течении жидкости есть струйка, которая направляется из бесконечности вдоль оси x, а затем разветвляется, образуя окружность радиуса r_0. В соответствии со сказанным исследуемое течение будет таким же, как и течение, возникающее при обтекании неподвижного цилиндра циркуляционно-поступательным потоком. Причем такое течение, как следует из проведенного анализа, может быть получено в результате сложения поступательного потока, диполя и циркуляционного потока (вихря).

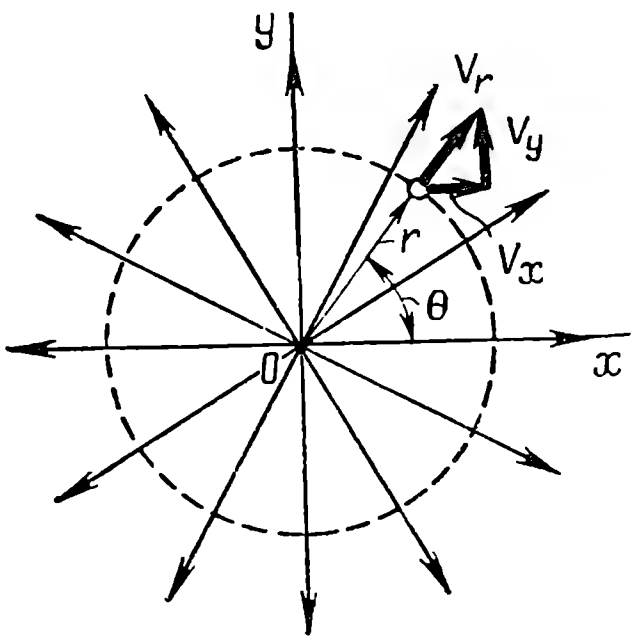


Рис. 3.II.23. Плоский точечный источник

Для определения скорости в произвольной точке потока и на обтекаемом контуре воспользуемся выражением для потенциала скоростей

$$\varphi = V\left(1 + r_0^2/r^2\right)r\cdot\cos\theta - \Gamma\theta/(2\pi).$$

Вычисляя производные по r и s, найдем соответствующие скорости в произвольной точке потока:

$$V_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = V\cos\theta - \frac{Vr_0^2}{r^2}\cos\theta;$$

$$V_s = \frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -V\cdot\sin\theta\left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi r}.$$

На обтекаемом контуре (окружность радиуса $r=r_0$)

$$\varphi = 2Vr_0\cdot\cos\theta - \Gamma\theta/(2\pi).$$

На этом контуре радиальная скорость равна нулю и тангенциальная составляющая определяет величину полной скорости:

$$V_s = V = \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{1}{r_0} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -2V \cdot \sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi r_0}.$$

II.39. Скорость от источника (стока) в некоторой точке потока изменяется обратно пропорционально ее расстоянию от этого источника (или стока). Действительно, расход жидкости через окружность радиуса r с центром в источнике (рис. 3.II.23) равен интенсивности этого источника q, т. е. $q=2\pi rV$. Отсюда $V=q/(2\pi r)$.

Обозначим через $p_н$ давление на бесконечности и, учитывая, что здесь жидкость покоится ($V_н=0$), получим при помощи уравнения Бернулли давление

$$p = p_н + \frac{\rho V_н^2}{2} - \frac{\rho V^2}{2} = p_н - \frac{\rho}{2}\left(\frac{q}{2\pi r}\right)^2.$$

Отсюда следует, что по мере удаления от источника давление возрастает. При $r \longrightarrow 0$ (в центре источника, так называемой особой точке) скорость $V \to \infty$, давление $p \to -\infty$. Бесконечные скорости и давления в жидкости возникать не могут, поэтому особые точки обычно из рассмотрения исключаются.

III.1. В модели невесомого газа пренебрегают массовой силой тяжести, полагая $X=Y=Z=0$, а одномерное движение характеризуется тем, что параметры газа изменяются в каком-либо одном направлении, например вдоль оси x. В соответствии с этим уравнение движения для одномерного неустановившегося течения ($\partial V_x\,\partial t\neq 0$) невесомого сжимаемого газа ($\operatorname{div}\bar{V}\neq 0$) имеет вид

$$\frac{dV_x}{dt}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{4}{3}\nu\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2},$$

где

$$dV_x/dt=\partial V_x/\partial t+(\partial V_x/\partial x)\,V_x.$$

Параметры плоского движения изменяются в двух направлениях (например, вдоль осей x и y), а свойство несжимаемости жидкости характеризуется значением $\operatorname{div}\bar{V}=0$. Таким образом, уравнения движения для плоского установившегося ($\partial V_x/\partial t=\partial V_y/\partial t=0$) течения невесомой жидкости будут следующими:

$$\frac{dV_x}{dt}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\Delta V_x,\quad \frac{dV_y}{dt}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\Delta V_y,$$

где

$$\Delta V_x=\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2},\quad \Delta V_y=\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2};$$

$$\frac{dV_x}{dt}=\frac{\partial V_x}{\partial x}V_x+\frac{\partial V_x}{\partial y}V_y,\quad \frac{dV_y}{dt}=\frac{\partial V_y}{\partial x}V_x+\frac{\partial V_y}{\partial y}V_y.$$

III.2. Преобразуем уравнение движения (2.III.1) к цилиндрическим координатам, используя формулы перехода $x=x$, $y=r\cos\gamma$, $z=r\sin\gamma$ (рис. 3.III.1).

Составляющие вектора скорости $\bar{V}$ в цилиндрической системе осей координат V_x, $V_r=dr/dt$, $V_\gamma=r(d\gamma/dt)$, а полная производная проекции V_x, например, в декартовых координатах

$$\frac{dV_x}{dt}=\frac{\partial V_x}{\partial t}+\frac{\partial V_x}{\partial x}V_x+\frac{\partial V_x}{\partial y}V_y+\frac{\partial V_x}{\partial z}V_z.$$

Заменим в этом выражении декартовы координаты цилиндрическими. Очевидно, первые два члена в правой части останутся прежними, а для скоростей V_y и V_z можно записать:

$$V_y=\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}(r\cos\gamma)=\frac{dr}{dt}\cos\gamma+r\frac{d}{dt}(\cos\gamma)=$$

$$=V_r\cos\gamma-r(\sin\gamma)\frac{d\gamma}{dt}=V_r\cos\gamma-V_\gamma\sin\gamma;$$

$$V_z=\frac{dz}{dt}=\frac{d}{dt}(r\sin\gamma)=\frac{dr}{dt}\sin\gamma+r\frac{d}{dt}(\sin\gamma)=$$

$$=V_r\sin\gamma+r(\cos\gamma)\frac{d\gamma}{dt}=V_r\sin\gamma+V_\gamma\cos\gamma.$$

Для соответствующей замены переменных в производных $\partial V_x/\partial y$ и $\partial V_x/\partial z$ воспользуемся формулами преобразования:

$$\frac{\partial\omega}{\partial y}=A\frac{\partial\omega}{\partial u}+B\frac{\partial\omega}{\partial v},$$

где

$$A=\frac{\partial\psi/\partial v}{(\partial\varphi/\partial u)(\partial\psi/\partial v)-(\partial\varphi/\partial v)(\partial\psi/\partial u)},\quad B=\frac{\partial\psi/\partial u}{(\partial\varphi/\partial v)(\partial\psi/\partial u)-(\partial\varphi/\partial u)(\partial\psi/\partial v)},$$

и

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = C\frac{\partial \omega}{\partial u} + D\frac{\partial \omega}{\partial v},$$

где

$$C = \frac{\partial \varphi/\partial v}{(\partial \psi/\partial u)(\partial \varphi/\partial v) - (\partial \psi/\partial v)(\partial \varphi/\partial u)}, \quad D = \frac{\partial \varphi/\partial u}{(\partial \psi/\partial v)(\partial \varphi/\partial u) - (\partial \psi/\partial u)(\partial \varphi/\partial v)}.$$

В нашем случае: $\omega = f(y, z) = V_x$, $y = \varphi(u, v) = r\cos\gamma$, $z = \psi(u, v) = r\sin\gamma$, $u = r$, $v = \gamma$.

Находим коэффициенты A, B, C, D:

$$A = \frac{\partial (r\sin\gamma)/\partial\gamma}{[\partial (r\cos\gamma)/\partial r][\partial (r\sin\gamma)/\partial\gamma] - [\partial (r\cos\gamma)/\partial\gamma][\partial (r\sin\gamma)/\partial r]} = \cos\gamma;$$

$$B = \frac{\partial (r\sin\gamma)/\partial r}{[\partial (r\cos\gamma)/\partial\gamma][\partial (r\sin\gamma)/\partial r] - [\partial (r\cos\gamma)/\partial r][\partial (r\sin\gamma)/\partial\gamma]} = -\frac{\sin\gamma}{r};$$

$$C = \frac{\partial (r\cos\gamma)/\partial\gamma}{[\partial (r\sin\gamma)/\partial r][\partial (r\cos\gamma)/\partial\gamma] - [\partial (r\sin\gamma)/\partial\gamma][\partial (r\cos\gamma)/\partial r]} = \sin\gamma;$$

$$D = \frac{\partial (r\cos\gamma)/\partial r}{[\partial (r\sin\gamma)/\partial\gamma][\partial (r\cos\gamma)/\partial r] - [\partial (r\sin\gamma)/\partial r][\partial (r\cos\gamma)/\partial\gamma]} = \frac{\cos\gamma}{r}.$$

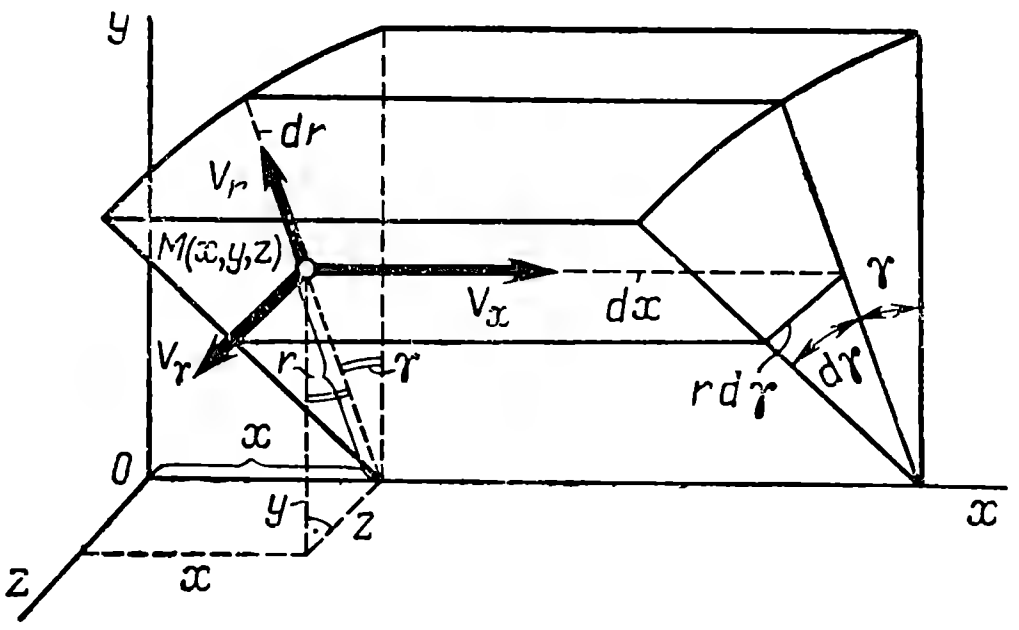


Рис. 3.III.1. Элементарная частица жидкости в цилиндрической системе координат

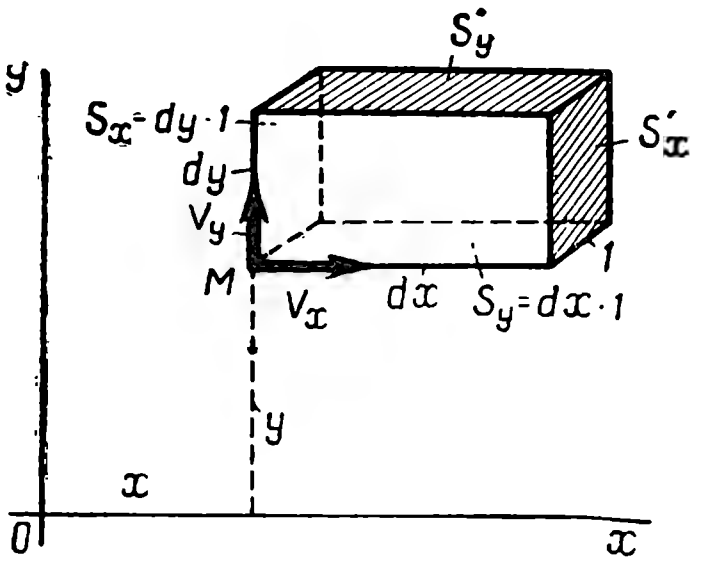


Рис. 3.III.2. К выводу уравнения диффузии

Теперь производные $\partial V_x/\partial y$ и $\partial V_x/\partial z$ можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} = (\cos\gamma)\frac{\partial V_x}{\partial r} - \left(\frac{\sin\gamma}{r}\right)\frac{\partial V_x}{\partial\gamma}, \quad \frac{\partial V_x}{\partial z} = (\sin\gamma)\frac{\partial V_x}{\partial r} + \left(\frac{\cos\gamma}{r}\right)\frac{\partial V_x}{\partial\gamma}.$$

С учетом полученных соотношений для V_y, V_z, $\partial V_x/\partial y$ и $\partial V_x/\partial z$ напишем

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial V_x}{\partial x}V_x + \left[(\cos\gamma)\frac{\partial V_x}{\partial r} - \left(\frac{\sin\gamma}{r}\right)\frac{\partial V_x}{\partial\gamma}\right](V_r\cos\gamma -$$

$$- V_\gamma\sin\gamma) + \left[(\sin\gamma)\frac{\partial V_x}{\partial r} + \left(\frac{\cos\gamma}{r}\right)\frac{\partial V_x}{\partial\gamma}\right](V_r\sin\gamma + V_\gamma\cos\gamma)$$

и после несложных преобразований получим

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial V_x}{\partial x}V_x + \frac{\partial V_x}{\partial r}V_r + \frac{\partial V_x}{\partial\gamma}\cdot\frac{V_\gamma}{r}.$$

Таким образом, уравнение движения в проекции на координатную ось x цилиндрической системы осей координат будет следующим:

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial V_x}{\partial x}V_x + \frac{\partial V_x}{\partial r}V_r + \frac{\partial V_x}{\partial\gamma}\cdot\frac{V_\gamma}{r} = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Аналогично, заменив переменные в уравнениях:

$$\frac{dV_y}{dt} = \frac{\partial V_y}{\partial t} + \frac{\partial V_y}{\partial x} V_x + \frac{\partial V_y}{\partial y} V_y + \frac{\partial V_y}{\partial z} V_z = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y};$$

$$\frac{dV_z}{dt} = \frac{\partial V_z}{\partial t} + \frac{\partial V_z}{\partial x} V_x + \frac{\partial V_z}{\partial y} V_y + \frac{\partial V_z}{\partial z} V_z = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z},$$

получим их в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + \frac{\partial V_r}{\partial x} V_x + \frac{\partial V_r}{\partial r} V_r + \frac{\partial V_r}{\partial \gamma} \cdot \frac{V_\gamma}{r} - \frac{V_\gamma^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial r};$$

$$\frac{\partial V_\gamma}{\partial t} + \frac{\partial V_\gamma}{\partial x} V_x + \frac{\partial V_\gamma}{\partial r} V_r + \frac{\partial V_\gamma}{\partial \gamma} \cdot \frac{V_\gamma}{r} + \frac{V_r V_\gamma}{r} = -\frac{1}{\rho r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \gamma}.$$

III.3. Рассмотрим установившееся плоское течение газа и выделим элементарную частицу в виде прямоугольного параллелепипеда со сторонами dx, dy, 1, построенного около точки $M(x, y)$, составляющие скорости в которой равны V_x и V_y (рис. 3.III.2).

Расход i-го компонента газа в направлении оси y через поверхность $S_y = dx \cdot 1$

$$m_y = \rho V_y c_i \, dx \cdot 1 + Q_{i\text{д}y} \, dx \cdot 1,$$

где c_i — концентрация; $Q_{i\text{д}y} = \rho D_i (\partial c_i / \partial y)$ — диффузионный поток через единицу площади; D_i — коэффициент диффузии.

Через поверхность S'_y (см. рис. 3.III.2) расход этого компонента

$$m_y + \left(\frac{\partial m_y}{\partial y}\right) dy = m_y + \frac{\partial (\rho V_y c_i)}{\partial y} dxdy + \frac{\partial Q_{i\text{д}y}}{\partial y} dxdy.$$

Приток компонента в рассматриваемый объем через грани S_y и S'_y, очевидно, равен

$$\frac{\partial (\rho V_y c_i)}{\partial y} dxdy + \frac{\partial Q_{i\text{д}y}}{\partial y} dydx.$$

Аналогично находим приток i-го компонента в направлении оси x через поверхности S_x и S'_x:

$$\frac{\partial (\rho V_x c_i)}{\partial x} dydx + \frac{\partial Q_{i\text{д}x}}{\partial x} dydx,$$

где $Q_{i\text{д}x} = \rho D_i (\partial c_i / \partial x)$. Общий приток этого компонента равен его массе $(w_{\text{хим}})_i dxdy \cdot 1$, образующейся за счет химических реакций в единицу времени, где $(w_{\text{хим}})_i$ — скорость образования компонента в единице объема, $кг/(м^3 \cdot сек)$.

Составляя баланс общего притока и расхода за счет химических реакций, получаем уравнение диффузии

$$\frac{\partial (\rho V_x c_i)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho V_y c_i)}{\partial y} + \frac{\partial Q_{i\text{д}x}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{i\text{д}y}}{\partial y} = (w_{\text{хим}})_i.$$

III.4. Диссипацией называется необратимый переход части механической энергии в тепло, обусловленный силами трения. В соответствии с этим в уравнении (2.III.2) диссипативными являются все члены, содержащие коэффициент динамической вязкости, т. е.

$$\mu \left\{ \left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)^2 \right] - \frac{2}{3} (\operatorname{div} \bar{V})^2 + 2 \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)^2 \right\}.$$

При малых скоростях движения газа работа сил трения невелика и в уравнении энергии (2.III.2) можно пренебречь диссипативными членами. Кроме того, при этом мала также работа сил давления ($dp/dt \approx 0$),

а параметры c_p, λ, ρ можно рассматривать постоянными. С учетом сказанного уравнение энергии может быть записано в виде

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} T).$$

III.5. Неизвестными величинами для рассматриваемого случая течения будут две составляющие скорости V_x, V_y, давление p, плотность ρ и температура T. Соответствующая система уравнений состоит из двух уравнений движения, а также уравнений неразрывности, состояния и энергии.

Для невесомого сжимаемого невязкого (и, следовательно, нетеплопроводного) газа, пренебрегая изменением удельных теплоемкостей от температуры и не учитывая диффузии и излучения, эта система уравнений запишется так:

$$\frac{dV_x}{dt} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{dV_y}{dt} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y};$$

$$d\rho/dt + \rho \operatorname{div} \bar{V} = 0, \quad p = \rho RT, \quad p = A\rho^k,$$

причем вследствие установившегося характера движения ($\partial V_x/\partial t = \partial V_y/\partial t = 0$) производные:

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{\partial V_x}{\partial x} V_x + \frac{\partial V_x}{\partial y} V_y, \quad \frac{dV_y}{dt} = \frac{\partial V_y}{\partial x} V_x + \frac{\partial V_y}{\partial y} V_y.$$

III.6. Для адиабатического течения газа имеет место зависимость $p = A\rho^k$, где A — некоторая постоянная. Вычисляя дифференциал dp, найдем $dp = Ak\rho^{k-1} d\rho$, откуда

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{Ak}{k-1} d(\rho^{k-1}).$$

В соответствии с этим можем записать для некоторой функции P с точностью до постоянного следующую зависимость:

$$P = \int \frac{dp}{\rho} = \frac{Ak}{k-1} \rho^{k-1},$$

или, заменяя $A = p/\rho^k$,

$$P = \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p}{\rho}.$$

III.7. Уравнение (2.III.3) называется интегралом Лагранжа. Этот интеграл устанавливает, что в потенциальном потоке полная энергия единицы массы в данный момент времени есть величина, одинаковая для всех точек потока.

Физический смысл величины $\partial\varphi/\partial t$ в интеграле Лагранжа заключается в следующем. При потенциальном течении проекция вектора скорости на некоторое направление s составляет $V_s = \partial\varphi/\partial s$, откуда потенциальная функция $\varphi = \int_{s_1}^{s_2} V_s ds$, где s_1 и s_2 — координаты двух рассматриваемых точек. Производная по времени от этой функции $\partial\varphi/\partial t = \int_{s_1}^{s_2} (\partial V_s/\partial t) ds$. Здесь $\partial V_s/\partial t$ — локальное ускорение, определяющее некоторую инерционную силу, а произведение $(\partial V_s/\partial t) ds$, очевидно, соответствует работе этой силы на участке ds. Таким образом, величина $\partial\varphi/\partial t$ определяет энергию единицы массы жидкости, обусловленную изменением скорости в данной точке с течением времени, т. е. неустановившимся характером движения.

III.8. Уравнение Лагранжа (2.III.4) отражает условие, в соответствии с которым при неустановившемся потенциальном течении невязкой

жидкости для двух любых точек потока разность величин, равных сумме кинетической энергии ($V^2/2$), а также потенциальных энергий давления $[\int (dp/\rho)]$ и положения (U) единицы массы жидкой частицы равна удельной работе инерционной силы, соответствующей локальному ускорению, на любом участке между этими точками.

Уравнение Лагранжа (2.III.5) записано для потенциального неустановившегося течения невесомого сжимаемого баротропного газа при адиабатическом характере этого течения. Действительно, для невесомой жидкости изменением потенциальной энергии положения U можно пренебречь, а при адиабатическом характере течения сжимаемого баротропного газа (см. задачу III.6) $\int (dp/\rho) = [k/(k-1)](p/\rho) = c_p T = i$. С учетом сказанного уравнение (2.III.5) получается из более общего вида уравнения Лагранжа (2.III.3).

III.9. Интеграл Эйлера для сжимаемой весомой жидкости имеет вид

$$V^2/2 + \int dp/\rho + U = \text{const} \qquad (3.III.1)$$

и устанавливает, что при потенциальном установившемся движении жидкости полная энергия единицы массы является величиной постоянной для всех точек потока. Из (3.III.1) находится интеграл Эйлера вида

$$V^2/2 + p/\rho = \text{const},$$

который является частным интегралом уравнения движения Эйлера для установившегося потенциального течения невязкой несжимаемой невесомой жидкости. Действительно, для несжимаемой и невесомой жидкости $\int (\partial p/\rho) = p/\rho$ и изменением потенциальной энергии положения U можно пренебречь.

Интеграл Эйлера является частным видом интеграла Лагранжа (2.III.3) и отличается от него лишь тем, что вследствие установившегося характера движения $\partial\varphi/\partial t = 0$ и функция $C(t) = \text{const}$, т. е. также не зависит от времени.

III.10. Перепишем уравнение движения (2.III.6) в ином виде. Полагая, что массовые силы имеют потенциал U, так что $\partial U/\partial x = -X$, $\partial U/\partial y = -Y$, $\partial U/\partial z = -Z$, найдем, что вектор ускорения от массовых сил $\bar{G} = -\text{grad}\, U$.

Для баротропной среды dp/ρ равно некоторой функции P и

$$(1/\rho)\,\text{grad}\, p = \text{grad}\, P = \text{grad}\left[\int (dp/\rho)\right].$$

В соответствии с этим можем написать уравнение (2.III.6) в таком виде:

$$\text{grad}\,(V^2/2) + (\text{rot}\,\bar{V}) \times \bar{V} = -\,\text{grad}\, U - \text{grad}\left[\int (dp/\rho)\right]$$

или

$$\text{grad}\,[V^2/2 + \int (dp/\rho) + U] = -\,(\text{rot}\,\bar{V}) \times \bar{V}.$$

Рассмотрим вектор

$$\bar{ds} = dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k},$$

представляющий собой дугу некоторой кривой в потоке газа, и определим скалярное произведение:

$$\bar{ds}\,\text{grad}\,(V^2/2 + \int dp/\rho + U) = -\,\bar{ds}\,[(\text{rot}\,\bar{V}) \times \bar{V}].$$

Левая часть уравнения будет равна полному дифференциалу трехчлена в круглых скобках:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2}{2}+\int\frac{dp}{\rho}+U\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V^2}{2}+\int\frac{dp}{\rho}+U\right)dy+$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{V^2}{2}+\int\frac{dp}{\rho}+U\right)dz=d\left(\frac{V^2}{2}+\int\frac{dp}{\rho}+U\right).$$

Правая часть представляет собой скалярное произведение:

$$d\bar{s}[(\mathrm{rot}\,\bar{V})\times\bar{V}]=[(\mathrm{rot}\,\bar{V})\times\bar{V}]_x\,dx+[(\mathrm{rot}\,\bar{V})\times\bar{V}]_y\,dy+[(\mathrm{rot}\,\bar{V})\times\bar{V}]_z\,dz,$$

причем составляющие вектора $[(\mathrm{rot}\ \bar{V})\times\bar{V}]$ вычисляются с помощью определителя третьего порядка:

$$(\mathrm{rot}\,\bar{V})\times\bar{V}=2\bar{\omega}\times\bar{V}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2\omega_x & 2\omega_y & 2\omega_z\\ V_x & V_y & V_z\end{vmatrix}=2[(\omega_y V_z-\omega_z V_y)\,i+$$
$$+(\omega_z V_x-\omega_x V_z)\,j+(\omega_x V_y-\omega_y V_x)\,k].$$

С учетом полученных выражений

$$-d\left(\frac{V^2}{2}+\int\frac{dp}{\rho}+U\right)=2[(\omega_y V_z-\omega_z V_y)\,dx+(\omega_z V_x-\omega_x V_z)dy+$$
$$+(\omega_x V_y-\omega_y V_x)\,dz],$$

причем соотношение в квадратных скобках можно записать в виде определителя третьего порядка:

$$-d\left(\frac{V^2}{2}+\int\frac{dp}{\rho}+U\right)=2\begin{vmatrix} dx & dy & dz\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ V_x & V_y & V_z\end{vmatrix}.$$

Выясним условия, при которых величина $V^2/2+\int(dp/\rho)+U$ будет постоянной, что соответствует сохранению полной энергии единицы массы газа при установившемся движении. Очевидно, для этого необходимо, чтобы записанный выше определитель равнялся нулю, а это, как известно, будет иметь место, если элементы какой-либо строки пропорциональны соответствующим элементам другой строки. Следовательно, можем написать следующие зависимости:

$$\frac{dx}{V_x}=\frac{dy}{V_y}=\frac{dz}{V_z},\quad\frac{dx}{\omega_x}=\frac{dy}{\omega_y}=\frac{dz}{\omega_z},\quad\frac{V_x}{\omega_x}=\frac{V_y}{\omega_y}=\frac{V_z}{\omega_z},$$

из которых первая является уравнением линий тока, вторая — уравнением вихревых линий. Третья зависимость определяет условие, при котором линии тока и вихревые линии совпадают, т. е. жидкая частица вращается вокруг оси, вдоль которой происходит движение.

Таким образом, получаем три частных интеграла установившегося вихревого движения:

$$\frac{V^2}{2}+\int\frac{dp}{\rho}+U=C_1,\quad\frac{V^2}{2}+\int\frac{dp}{\rho}+U=C_2,$$
$$\frac{V^2}{2}+\int\frac{dp}{\rho}+U=C_3,$$

соответствующие полученным трем условиям. Постоянные C_1, C_2, C_3 определяются для точек, находящихся соответственно на одной линии тока или вихревой линии, или для точек в той области, где вихревые линии совпадают с линиями тока.

III.11. С физической точки зрения уравнение Бернулли (2.III.7) представляет собой закон сохранения энергии применительно к изэнтропическому течению жидкости по трубке тока.

Рассмотрим вывод этого уравнения, что позволит выяснить физический смысл входящих в него членов. Выделим в установившемся потоке невязкой жидкости трубку тока, ограниченную двумя сечениями *1* и *2*, нормальными к оси трубки (рис. 3.III.3). Поскольку поверхность трубки тока непроницаема для жидкости, масса жидкости, заключенная между этими сечениями, будет одна и та же в любой момент времени. В соответствии с этим через рассматриваемые сечения за равные промежутки времени протекают одинаковые массы жидкости. Полагая, что течение в трубке тока адиабатическое, используем закон сохранения энергии, согласно которому полная энергия потока жидкости, протекающей через сечение *1* за некоторое время, равна полной энергии потока жидкости, вытекающей через сечение *2* за то же время.

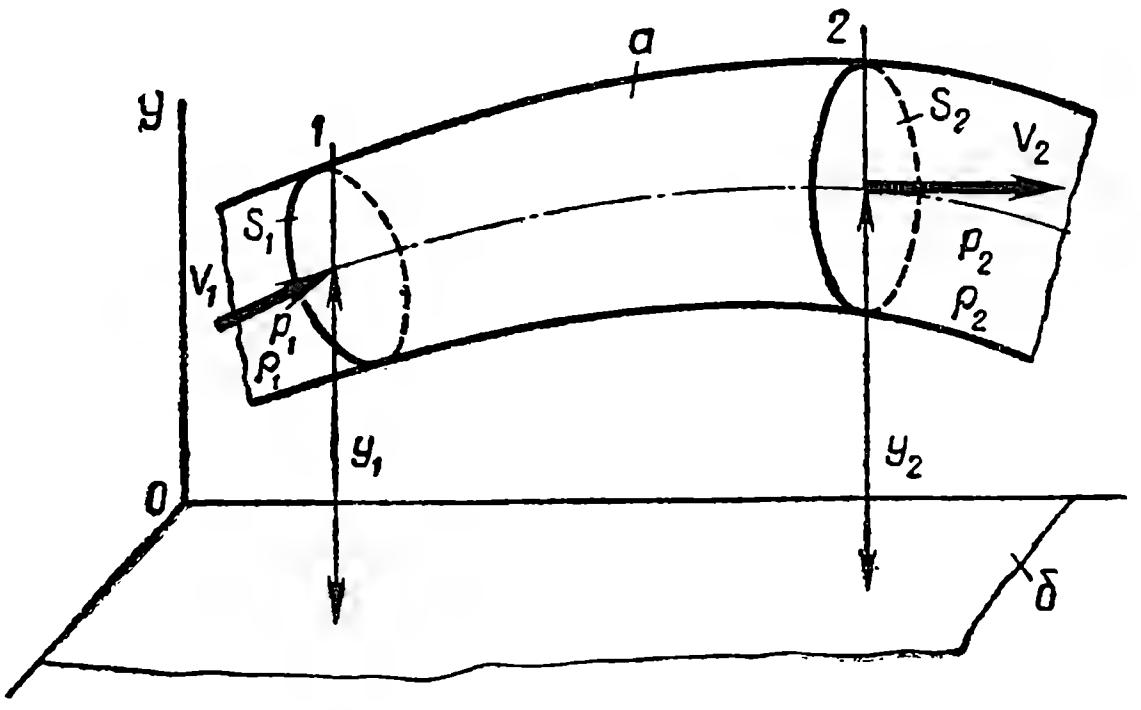


Рис. 3.III.3. К выводу уравнения Бернулли:
а — трубка тока; *б* — нивелирная плоскость

Пусть параметры жидкости в сечении характеризуются средними величинами скорости V, давления p, плотности ρ и т. д. За промежуток времени Δt через сечение *1* (площадью S_1) протекает масса жидкости $\rho_1 V_1 \Delta t S_1$, полная энергия которой равна сумме кинетической энергии $(\rho_1 V_1 \Delta t S_1)(V_1^2/2)$, потенциальной энергии давления $p_1 S_1 V_1 \Delta t = (p_1/\rho_1)(\rho_1 V_1 \Delta t S_1)$, потенциальной энергии веса $(\rho_1 V_1 \Delta t S_1) g y_1$ (здесь y_1 — нивелирная высота, причем ось y, показанная на рис. 3.III.3, направлена против действия силы тяжести; g — ускорение силы тяготения), а также внутренней энергии $U_1 \rho_1 V_1 \Delta t S_1$ (здесь U_1 — внутренняя энергия единицы массы газа). Таким образом, полная энергия, переносимая массой $\rho_1 V_1 \Delta t S_1$ через сечение *1* за время Δt, равна

$$(\rho_1 V_1 \Delta t S_1)\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1}(\rho_1 V_1 \Delta t S_1) + (\rho_1 V_1 \Delta t S_1) g y_1 + U_1 (\rho_1 V_1 \Delta t S_1).$$

Очевидно, за то же время Δt через сечение 2 пройдет масса жидкости $\rho_2 V_2 \Delta t S_2 = \rho_1 V_1 \Delta t S_1$, полная энергия которой

$$(\rho_2 V_2 \Delta t S_2)\frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2}(\rho_2 V_2 \Delta t S_2) + (\rho_2 V_2 \Delta t S_2) g y_2 + U_2 (\rho_2 V_2 \Delta t S_2).$$

Согласно закону сохранения энергии

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} + U_1 + g y_1 = \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} + U_2 + g y_2$$

или, поскольку сечения *1* и *2* были выбраны произвольно,

$$V^2/2 + p/\rho + U + gy = \text{const}.$$

Каждый член в этом уравнении представляет, как видно из приведенного вывода, соответствующий вид энергии единицы массы газа: $V^2/2$ — кинетическая энергия; p/ρ — потенциальная энергия давления; U — внутренняя энергия и gy — потенциальная энергия веса.

Из термодинамики известно, что энтальпия единицы массы газа $i = U + p/\rho$. Таким образом, уравнение Бернулли может быть записано и так:

$$V^2/2 + i + gy = \text{const}. \qquad (3.III.2)$$

Внутренняя энергия несжимаемой жидкости при условии, что течение происходит без подвода или отвода тепла, является постоянной величиной. Таким образом, в уравнении Бернулли (2.III.7) для несжимаемой весомой жидкости можно ввести внутреннюю энергию U единицы массы в константу и записать уравнение в таком виде:

$$V^2/2 + p/\rho + gy = \text{const}. \qquad (3.III.3)$$

Уравнение Бернулли (3.III.2) для сжимаемого невесомого газа запишется так:

$$V^2/2 + i = \text{const}, \qquad (3.III.4)$$

поскольку в этом случае можно пренебречь изменением потенциальной энергии gy.

III.12. Параметром подобия при гидроиспытаниях является число Фруда $\mathbf{Fr} = V^2/(Lg)$, равное отношению величины V^2/L, обусловленной влиянием инерционных сил, к ускорению силы тяжести g и характеризующее влияние веса жидкости на сопротивление тела.

В соответствии с правилом подобия по числу Фруда скорости модели и корабля относятся как корни квадратные из отношения их линейных размеров. Действительно, из равенства $V_н^2/(gL_н) = V_м^2/(gL_м)$ ($\mathbf{Fr}_н = \mathbf{Fr}_м$) следует, что $V_м/V_н = \sqrt{L_м/L_н}$. Подставляя в эту формулу исходные данные, определяем скорость модели:

$$V_м = 14\sqrt{3/160} = 1{,}92\ м/сек.$$

III.13. Определим коэффициент динамической вязкости при заданной в условии температуре $T = 298$ К, используя формулу

$$\mu = \mu_0 (T/T_0)^{0{,}76}, \qquad (3.III.5)$$

в которой $T_0 = 288$ К и $\mu_0 = 1{,}82 \cdot 10^{-6}\ кГ \cdot сек/м^2$.

Подставляя данные, получим

$$\mu = 1{,}82 \cdot 10^{-6} (298/288)^{0{,}76} = 1{,}87 \cdot 10^{-6}\ кГ \cdot сек/м^2.$$

По уравнению состояния, принимая $R = 287\ дж/(кг \cdot град)$ и $1\ атм = 1{,}033 \cdot 10^4\ кГ/м^2$, находим плотность воздуха:

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{20 \cdot 1{,}033 \cdot 10^4}{287 \cdot 298} = 2{,}42\ кГ \cdot сек^2/м^4,$$

а затем коэффициент кинематической вязкости модельного потока:

$$\nu_м = \mu/\rho = 1{,}87 \cdot 10^{-6}/2{,}42 = 0{,}0775 \cdot 10^{-5}\ м^2/сек.$$

Из условия равенства чисел Рейнольдса ($\mathbf{Re}_н = \mathbf{Re}_м$) находим

$$V_м = \frac{l_н}{l_м} \cdot \frac{\nu_м}{\nu_н} V_н$$

или, подставляя данные и принимая при нормальных условиях коэффициент кинематической вязкости $\nu_н = 1{,}46 \cdot 10^{-5}\ м^2/сек$,

$$V_м = 10\,\frac{0{,}077 \cdot 10^{-5}}{1{,}46 \cdot 10^{-5}} V_н = 0{,}527 V_н.$$

Для диапазона скоростей летательного аппарата $V_н = (83{,}5 \div 167)\ м/сек$ получаем

$$V_м = 0{,}527\,(83{,}5 \div 167) = (44 \div 88)\ м/сек.$$

III.14. Из равенства чисел Рейнольдса, соответствующих течениям около натуры и модели ($\mathbf{Re}_н = \mathbf{Re}_м$), находим

$$\nu_м = \frac{V_м}{V_н} \cdot \frac{b_м}{b_н} \nu_н.$$

Полагая $\nu_н = 1{,}46 \cdot 10^{-5}$ *м²/сек*, после подстановки данных найдем

$$\nu_м = \frac{25 \cdot 0{,}15}{83{,}5 \cdot 1{,}2} 1{,}46 \cdot 10^{-5} = 5{,}44 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{сек}.$$

Используя соотношения $\nu_м = \mu/\rho$ и (3.III.5), определим плотность модельного воздушного потока в аэродинамической трубе:

$$\rho = \mu_0 \frac{(T/T_0)^{0,76}}{\nu_м}.$$

Соответствующее давление

$$p = \rho RT = \frac{\mu_0 (T/T_0)^{0,76} RT}{\nu_м}.$$

Подставляя данные [$R = 287$ *дж/(кг·град)*], находим

$$p = \frac{1{,}82 \cdot 10^{-6} (303/288)^{0,76} 287 \cdot 303}{5{,}44 \cdot 10^{-7}} = 29{,}9 \cdot 10^4 \text{ кГ/м}^2.$$

III.15. Число Маха в рабочей части сверхзвуковой трубы

$$\mathbf{M} = V/a = V/\sqrt{kRT}. \qquad (3.III.6)$$

Полагая $k = c_p/c_v = 1{,}4$, $R = 287$ *дж/(кг·град)*, получим при $T = 223$ К

$$\mathbf{M} = 450/\sqrt{1{,}4 \cdot 287 \cdot 223} = 1{,}50.$$

Как следует из (3.III.6), повышение температуры увеличивает скорость звука и уменьшает число Маха. В частности, при $T = 288$ К

$$\mathbf{M} = 450/\sqrt{1{,}4 \cdot 287 \cdot 288} = 1{,}32.$$

III.16. При изотермическом увеличении давления в резервуаре максимальная скорость истечения не изменится, поскольку в соответствии с формулой $V_{max} = \sqrt{2kRT_0/(k-1)}$ она определяется температурой газа T_0 в этом резервуаре.

Скорость V_{max} представляет собой ту предельную скорость, которую получил бы движущийся газ при условии, что все его теплодержание перешло в кинетическую энергию. Действительно, из уравнения Бернулли (3.III.4) находим, что при $i = 0$ скорость $V = V_{max}$. Поскольку величине $i = 0$ соответствуют значения $p = \rho = 0$, при которых возникает абсолютный вакуум, очевидно, что эта скорость V_{max} не может быть достигнута реальным газом.

III.17. Максимальная скорость определяется по формуле $V_{max} = \sqrt{2kRT_0/(k-1)}$, в которой $k = c_p/c_v = 1{,}4$, $R = 287$ *дж/(кг·град)*, а $T_0 = 300$ К:

$$V_{max} = \sqrt{2 \cdot 1{,}4 \cdot 287 \cdot 300/(1{,}4 - 1)} = 780 \text{ м/сек}.$$

III.18. Запишем уравнение Бернулли в виде

$$V^2/2 + a^2/(k-1) = V_{max}^2/2.$$

Так как согласно условию $V = V_{max}/2$, то из этого уравнения скорость звука

$$a = V_{max} \sqrt{\frac{3}{8}(k-1)} = V_{max} \sqrt{\frac{3}{8}(1{,}4 - 1)} = 0{,}387\, V_{max}.$$

Соответствующее число Маха

$$\mathbf{M} = \frac{V}{a} = \frac{V_{max}/2}{0{,}387\, V_{max}} = 1{,}29,$$

а относительная скорость

$$\lambda = \frac{V}{a^*} = \frac{V_{\max}}{2a^*} = \frac{1}{2}\lambda_{\text{пред}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1{,}4+1}{1{,}4-1}} = 1{,}23.$$

Для $k = c_p/c_v = 1{,}4$ и $R = 287$ *дж/(кг·град)* при $T_0 = 288$ К:

$$V_{\max} = \sqrt{\frac{2k}{k-1}RT_0} = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}4}{1{,}4-1}287\cdot 288} = 762 \text{ м/сек};$$

$$a = 0{,}387\cdot 762 = 285 \text{ м/сек}.$$

III.19. Зависимость между **M** и λ найдем, воспользовавшись уравнением Бернулли

$$\frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{k+1}{2(k-1)}a^{*2}.$$

Умножая члены этого уравнения на $2/V^2$, получаем

$$1 + \frac{1}{(k-1)\,M^2/2} = \frac{1}{(k-1)\,\lambda^2/(k+1)}, \qquad (3.III.7)$$

откуда

$$\mathbf{M} = \sqrt{\frac{2\lambda^2/(k+1)}{1-(k-1)\,\lambda^2/(k+1)}}. \qquad (3.III.8)$$

После подстановки значений $k = 1{,}2$ и $\lambda = 2{,}2$ находим

$$\mathbf{M} = \sqrt{\frac{2\cdot 2{,}2^2/(1{,}4+1)}{1-(1{,}4-1)\,2{,}2^2/(1{,}4+1)}} = 2{,}80.$$

III.20. Воспользуемся формулой для определения плотности в изэнтропическом потоке

$$\frac{\rho_0}{\rho_\infty} = \left(1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\infty^2\right)^{1/(k-1)}.$$

Разлагая в ряд по степеням $\mathbf{M}_\infty^2$ правую часть записанного выражения и ограничиваясь двумя первыми членами разложения, получаем

$$\rho_0/\rho_\infty = 1 + \mathbf{M}_\infty^2/2,$$

откуда относительное изменение плотности

$$\Delta\rho/\rho_\infty = (\rho_0 - \rho_\infty)/\rho_\infty = \mathbf{M}_\infty^2/2.$$

Когда в расчетах принимают плотность величиной постоянной ($\Delta\rho = 0$), то, очевидно, допускают ошибку, равную $\mathbf{M}^2_\infty/2$. В частности, при $V_\infty = 100$ *м/сек* и $a_\infty = 341$ *м/сек* эта ошибка будет составлять $100^2/(341^2\cdot 2) = 0{,}043$ (4,3%).

III.21. Воспользуемся газодинамической функцией

$$\frac{p_0}{p_\infty} = \left(1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\infty^2\right)^{k/(k-1)}.$$

Принимая во внимание, что при $\mathbf{M}_\infty < 1$ величина $[(k-1)\mathbf{M}_\infty^2/2] < 1$, разложим функцию p_0/p_∞ в биноминальный ряд по степеням $\mathbf{M}_\infty^2$:

$$\frac{p_0}{p_\infty} = 1 + \frac{k}{2}\mathbf{M}_\infty^2 + \frac{k}{8}\mathbf{M}_\infty^4 + \frac{k(2-k)}{48}\mathbf{M}_\infty^6 + \cdots.$$

Отсюда, имея в виду, что скоростной напор $\rho_\infty V_\infty^2/2 = kp_\infty M_\infty^2/2$, получим выражение для коэффициента давления в точке полного торможения

$$\bar{p}_0 = \frac{p_0 - p_\infty}{\rho_\infty V_\infty^2/2} = 1 + \frac{\mathbf{M}_\infty^2}{4} + \frac{2-k}{24}\mathbf{M}_\infty^4 + \cdots.$$

При $\mathbf{M}_\infty = 0{,}8$ и $k = c_p/c_v = 1{,}4$ (для воздуха)

$$\bar{p}_0 = 1 + \frac{0{,}8^2}{4} + \frac{2-1{,}4}{24}\,0{,}8^4 = 1{,}17.$$

III.22. Критическая скорость звука определяется по формуле $a^* = \sqrt{2kRT_0/(k+1)}$, а температура торможения — по формуле $T_0 = T_\infty[1+(k-1)\mathbf{M}_\infty^2/2]$. Таким образом,

$$a^* = \sqrt{\frac{2k}{k+1}RT_\infty\left(1+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\infty^2\right)}.$$

Подставляя значения $k=1{,}4$, $R=287$ *дж/(кг·град)*, $T_\infty = 223$ К и $\mathbf{M}_\infty = 1{,}5$, находим

$$a^* = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}4}{1{,}4+1}\,287\cdot 223\left(1+\frac{1{,}4-1}{2}\,1{,}5^2\right)} = 328\ \textit{м/сек}.$$

III.23. Из соотношения

$$T_0 = T_a\left(1+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_a^2\right)$$

находим

$$\mathbf{M}_a = \sqrt{\frac{2}{k-1}\cdot\frac{T_0-T_a}{T_a}},$$

где T_0 и T_a — температуры соответственно в форкамере и в рабочей части аэродинамической трубы. Используя зависимость $a_a = \sqrt{kRT_a}$, определяем скорость потока в рабочей части трубы:

$$V_a = \mathbf{M}_a a_a = \sqrt{\frac{2k}{k-1}R(T_0-T_a)}\ .$$

Принимая температуру воздуха в форкамере при отсутствии подогрева равной 288 К, $k = c_p/c_v = 1{,}4$, $R = 287$ *дж/(кг·град)* и $T_a = 78$ К, находим

$$V_a = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}4}{1{,}4-1}\,287\,(288-78)} = 650\ \textit{м/сек}.$$

III.24. Разрешая относительно λ соотношение (3.III.7), получаем

$$\lambda = \sqrt{\frac{(k+1)\,\mathbf{M}^2/2}{1+(k-1)\mathbf{M}^2/2}}. \qquad (3.\text{III}.9)$$

Из сравнения (3.III.8) и (3.III.9) находим, что

$$1+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}^2 = \left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{-1}.$$

Таким образом, можно записать:

$$\frac{p}{p_0} = \left(1+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}^2\right)^{-k/(k-1)} = \left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{k/(k-1)}; \qquad (3.\text{III}.10)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}^2\right)^{-1/(k-1)} = \left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{1/(k-1)}; \qquad (3.\text{III}.11)$$

$$\frac{T}{T_0} = \left(1+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}^2\right)^{-1} = \left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right). \qquad (3.\text{III}.12)$$

III.25. Воспользовавшись формулами (3.III.10) ÷ (3.III.12), полученными в задаче III.24, имеем для одного потока:

$$\frac{p_1}{p_0} = \left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2\right)^{k/(k-1)};$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2\right)^{1/(k-1)};$$

$$\frac{T_1}{T_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2\right),$$

а для другого потока:

$$\frac{p_2}{p_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_2^2\right)^{k/(k-1)};$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_2^2\right)^{1/(k-1)};$$

$$\frac{T_2}{T_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_2^2\right).$$

Отсюда в соответствии с условием, что для обоих потоков параметры торможения одинаковы, найдем:

$$\frac{p_1}{p_2} = \left[\frac{1-(k-1)\,\lambda_1^2/(k+1)}{1-(k-1)\,\lambda_2^2/(k+1)}\right]^{k/(k-1)};$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \left[\frac{1-(k-1)\lambda_1^2/(k+1)}{1-(k-1)\lambda_2^2/(k+1)}\right]^{1/(k-1)};$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \left[\frac{1-(k-1)\lambda_1^2/(k+1)}{1-(k-1)\lambda_2^2/(k+1)}\right].$$

Полученные соотношения могут быть использованы также для исследования одного потока, в двух точках которого скорости соответственно равны λ_1 и λ_2.

III.26. Из соотношений $\lambda_1 = V_1/a^*$ и $\lambda_2 = V_2/a^*$, а также выражения (3.III.9) находим, учитывая, что $\lambda_1 = 1$ (при $\mathbf{M}_1 = 1$), отношение скоростей в сечениях:

$$\frac{V_2}{V_1} = \lambda_2 = \sqrt{\frac{(k+1)\,\mathbf{M}_2^2/2}{1+(k-1)\,\mathbf{M}_2^2/2}} = \sqrt{\frac{(1{,}4+1)\,2^2/2}{1+(1{,}4-1)\,2^2/2}} = 1{,}63.$$

Воспользовавшись этим результатом, найдем, что $V_1^2 = V_2^2/2{,}66$. Для плотностей ρ_1 и ρ_2 соответственно в сечениях *1* и *2* имеем зависимости:

$$\rho_1 = \rho_0\left(1 + \frac{k-1}{2}\,\mathbf{M}_1^2\right)^{-1/(k-1)};$$

$$\rho_2 = \rho_0\left(1 + \frac{k-1}{2}\,\mathbf{M}_2^2\right)^{-1/(k-1)},$$

из которых, учитывая, что $\mathbf{M}_1 = 1$, $\mathbf{M}_2 = 2$, $k = 1{,}4$, находим

$$\rho_1 = \rho_2\left[\frac{1+(1{,}4-1)\,2^2/2}{1+(1{,}4-1)/2}\right]^{1/(1{,}4-1)} = 2{,}75\,\rho_2.$$

Кинетическая энергия единицы объема воздуха $(\rho_1 V_1^2/2)$ в сечении *1* с учетом полученных соотношений равна

$$\frac{\rho_1 V_1^2}{2} = \frac{2{,}75\,\rho_2 V_2^2}{2\cdot 2{,}66} = 1{,}03\,\frac{\rho_2 V_2^2}{2}.$$

Таким образом, величина этой энергии при движении газа от сечения, где $\mathbf{M}_1 = 1$, к сечению, где $\mathbf{M}_2 = 2$, уменьшается на 3%.

III.27. Воспользовавшись уравнением состояния, определяем плотность, приняв $R = 287$ *дж/(кг·град)*:

$$\rho_0 = p_0/(RT_0) = 1\cdot 10^4/(287\cdot 1000) = 0{,}0348\ кГ\cdot сек^2/м^4.$$

Критические параметры p^*, ρ^*, T^* определяются из соотношений (3.III.10) ÷ (3.III.12) для $\mathbf{M}=\lambda=1$:

$$p^* = p_0\left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)},\quad \rho^* = \rho_0\left(\frac{2}{k+1}\right)^{1/(k-1)},\quad T^* = T_0\left(\frac{2}{k+1}\right).$$

При $k=1{,}4$ из этих формул следует, что $p^*=0{,}528\,p_0$, $\rho^*=0{,}634\,\rho_0$, $T^*=0{,}833\,T_0$.

Подставляя значения p_0, ρ_0 и T_0, находим:

$$p^* = 0{,}528\cdot 1 = 0{,}528\ кГ/см^2;$$
$$\rho^* = 0{,}634\cdot 0{,}0348 = 0{,}0221\ кГ\cdot сек^2/м^4;$$
$$T^* = 0{,}833\cdot 1000 = 833\ \text{K}.$$

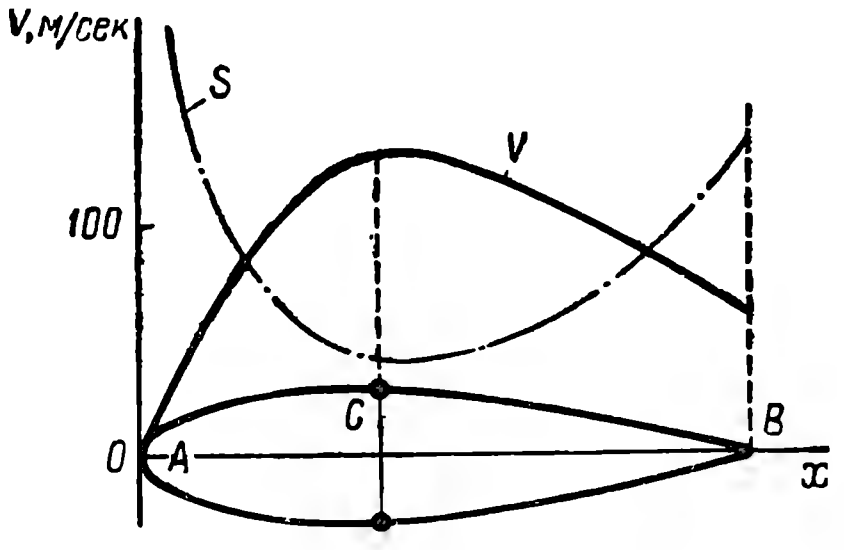


Рис. 3.III.4. Кривая распределения вдоль профиля крыла скорости V и поперечного сечения S воображаемой струйки несжимаемой жидкости, обтекающей этот профиль

III.28. Запишем уравнение Бернулли для несжимаемой жидкости для двух сечений струйки, обтекающей профиль: одно из этих сечений расположено на бесконечности, где давление p_∞ и скорость V_∞, а другое — в произвольном месте около профиля, где давление p и скорость V:

$$\rho_\infty V_\infty^2/2 + p_\infty = \rho_\infty V^2/2 + p.$$

Из этого уравнения находим скорость:

$$V = V_\infty\sqrt{1-\bar{p}},$$

где $\bar{p}=(p-p_\infty)/(\rho_\infty\ V_\infty^2/2)$ — коэффициент давления на профиле в рассматриваемой точке. Пользуясь этой формулой и кривой распределения $\bar{p}$ (см. рис. 2.III.1), можно построить зависимость $V=f(x)$ (рис. 3.III.4). В частности, для точек $A(\bar{p}_A=1{,}0)$, $C(\bar{p}_C=-0{,}5)$ и $B(\bar{p}_B=0{,}6)$ на кривой рис. 2.III.1 имеем соответственно (см. рис 3.III.4): $V_A=0$; $V_C=V_\infty\sqrt{1-(-0{,}5)}=1{,}22\cdot V_\infty=1{,}22\cdot 100=122$ *м/сек* и $V_B=V_\infty\sqrt{1-0{,}6}=0{,}632\cdot V_\infty=0{,}632\cdot 100=63{,}2$ *м/сек*.

Из уравнения расхода для струйки $VS=\text{const}$ находим, что площадь S поперечного сечения струйки обратно пропорциональна величине скорости в этом сечении (см. рис. 3.III.4).

III.29. Определяем число Маха в рабочей части трубы, полагая $k=c_p/c_v=1{,}4$ и $R=287$ *дж/(кг·град)*:

$$\mathbf{M}_\infty = \frac{V_\infty}{a_\infty} = \frac{V_\infty}{\sqrt{kRT_\infty}} = \frac{200}{\sqrt{1{,}4\cdot 287\cdot 288}} = 0{,}59.$$

Зная коэффициент давления $\bar{p}=2(p-p_\infty)/(kp_\infty\ \mathbf{M}_\infty^2)$, находим абсолютную величину давления:

$$p = p_\infty + \frac{k}{2}\bar{p}\,p_\infty\,\mathbf{M}_\infty^2 = p_\infty\left(1+\frac{k}{2}\bar{p}\,\mathbf{M}_\infty^2\right).$$

После подстановки значений $k=1{,}4$, $p_\infty=1\ кГ/см^2$, $\bar{p}=-0{,}3$ и $\mathbf{M}_\infty=0{,}59$ находим

$$p = 1\left(1-\frac{1{,}4}{2}0{,}3\cdot 0{,}59^2\right) = 0{,}926\ кГ/см^2.$$

Воспользовавшись соотношением $p/p_\infty = \pi(M)/\pi(M_\infty)$, находим функцию

$$\pi(M) = \frac{p}{p_\infty}\,\pi(M_\infty) = \frac{0{,}926}{1}\,0{,}790 = 0{,}732.$$

Здесь величина $\pi(M_\infty)=0{,}790$ найдена из табл. 9 [13] по $M_\infty=0{,}59$. По значению $\pi(M)=0{,}732$ из той же таблицы находим $M=0{,}68$. Далее определяем плотность и температуру:

$$\rho = \rho_\infty \frac{\varepsilon(M)}{\varepsilon(M_\infty)} = \frac{p_\infty}{RT_\infty}\cdot\frac{\varepsilon(M)}{\varepsilon(M_\infty)} = \frac{1\cdot10^4\cdot0{,}805}{287\cdot288\cdot0{,}845} = 0{,}113\ кГ\cdot сек^2/м^4;$$

$$T = T_\infty \frac{\tau(M)}{\tau(M_\infty)} = 288\,\frac{0{,}915}{0{,}935} = 282\,\text{K}.$$

В записанных выражениях ε и τ определяются по соответствующим значениям чисел Маха из табл. 9 [13].

Подсчитываем скорость звука, скорость потока и энтальпию:

$$a = \sqrt{kRT} = \sqrt{1{,}4\cdot287\cdot282} = 336\ м/сек;$$

$$V = Ma = 0{,}68\cdot336 = 228\ м/сек;$$

$$i = \frac{k}{k-1}RT = \frac{1{,}4}{1{,}4-1}\,287\cdot282 = 28{,}5\cdot10^4\ дж/кг.$$

III.30. Воспользуемся следующей формулой для определения весового секундного расхода через сопло:

$$\dot{G} = \frac{[2/(k+1)]^{1/(k-1)}\sqrt{2k/(k+1)}\,p_0 S^* g}{\sqrt{RT_0}},$$

откуда площадь критического сечения сопла

$$S^* = \frac{\dot{G}\sqrt{RT_0}}{p_0\,[2/(k+1)]^{1/(k-1)}\sqrt{2k/(k+1)}\,g}.$$

Подставляя сюда значения $\dot{G}=1\ кГ/сек$, $R=287\ дж/(кг\cdot град)$, $T_0=288$ K, $p_0=6\ кГ/см^2$, $k=1{,}4$ и $g=9{,}81\ м/сек^2$, находим

$$S^* = \frac{1\sqrt{287\cdot288}}{6\,[2/(1{,}4+1)]^{1/(1{,}4-1)}\sqrt{2\cdot1{,}4/(1{,}4+1)}\,9{,}81} = 7{,}1\ см^2.$$

III.31. При расчетном режиме истечения давление на срезе сопла (p_a) равно наружному давлению ($p_н$). Примем, что $p_н=p_a=1\ кГ/см^2$. Скорость истечения [для $k=1{,}4$, $R=287\ дж/(кг\cdot град)$ и $T_0=288$ K]

$$V_a = \sqrt{\frac{2k}{k-1}RT_0\left[1-\left(\frac{p_a}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\cdot1{,}4}{1{,}4-1}\,287\cdot288\left[1-\left(\frac{1}{30}\right)^{\frac{1{,}4-1}{1{,}4}}\right]} = 598\ м/сек.$$

Воспользовавшись соотношениями $T_a=T_0\,[1-(k-1)\lambda_a^2/(k+1)]$, $\lambda_a = V_a/a^*$ и $a^{*2}=2kRT_0/(k+1)$, устанавливаем, что

$$T_a = T_0\left(1-\frac{k-1}{2k}\cdot\frac{V_a^2}{RT_0}\right).$$

Аналогично, используя формулу $\rho_a = \rho_0 [1 - (k-1)\lambda_a^2/(k+1)]^{1/(k-1)}$, находим

$$\rho_a = \rho_0 \left(1 - \frac{k-1}{2k} \cdot \frac{V_a^2}{RT_0}\right)^{1/(k-1)}$$

или с учетом уравнения состояния

$$\rho_a = \frac{p_0}{RT_0} \left(1 - \frac{k-1}{2k} \cdot \frac{V_a^2}{RT_0}\right)^{1/(k-1)}.$$

Подставляя данные, определяем:

$$T_a = 288 \left(1 - \frac{1{,}4-1}{2 \cdot 1{,}4} \cdot \frac{598^2}{287 \cdot 288}\right) = 107\ \text{K};$$

$$\rho_a = \frac{30 \cdot 10^4}{287 \cdot 288} \left(1 - \frac{1{,}4-1}{2 \cdot 1{,}4} \cdot \frac{598^2}{287 \cdot 288}\right)^{1/(1,4-1)} = 0{,}337\ кГ \cdot сек^2/м^4.$$

III.32. Используя соотношения $p_0 = p_a [1 + (k-1)\mathbf{M}_a^2/2]^{k/(k-1)}$, $T_0 = T_a [1 + (k-1)\ \mathbf{M}_a^2/2]$ и $\mathbf{M}_a = V_a/a_a = V_a/\sqrt{kRT_a}$, находим:

$$p_0 = p_a \left(1 + \frac{k-1}{2} \cdot \frac{V_a^2}{kRT_a}\right)^{k/(k-1)};$$

$$T_0 = T_a \left(1 + \frac{k-1}{2} \cdot \frac{V_a^2}{kRT_a}\right).$$

Принимая $p_н = p_a = 1\ кГ/см^2$ (нормальные атмосферные условия), $k = 1{,}4$, $R = 287\ дж/(кг \cdot град)$ и подставляя данные, получим:

$$p_0 = 1 \left(1 + \frac{1{,}4-1}{2} \cdot \frac{800^2}{1{,}4 \cdot 287 \cdot 203}\right)^{1,4/(1,4-1)} = 26{,}6\ кГ/см^2;$$

$$T_0 = 203 \left(1 + \frac{1{,}4-1}{2} \cdot \frac{800^2}{1{,}4 \cdot 287 \cdot 203}\right) = 527\ \text{K}.$$

Из уравнения состояния находим плотность:

$$\rho_0 = \frac{p_0}{RT_0} \cdot \frac{26{,}6 \cdot 10^4}{287 \cdot 527} = 1{,}83\ кГ \cdot сек^2/м^4.$$

III.33. По значению газодинамической функции $q_a(\mathbf{M}_a) = S^*/S_a = 0{,}2$ из табл. 9 [13] для $k = 1{,}4$ находим: $\mathbf{M}_a = 3{,}16$; $\lambda_a = 2{,}00$; $\pi_a(\mathbf{M}_a) = 0{,}0214$; $\varepsilon_a(\mathbf{M}_a) = 0{,}0642$; $\tau_a(\mathbf{M}_a) = 0{,}333$. Теперь определяем:

$$T_a = T_0 \tau_a(\mathbf{M}_a) = 293 \cdot 0{,}333 = 97{,}5\ \text{K};$$

$$p_0 = \frac{p_a}{\pi_a(\mathbf{M}_a)} = \frac{1}{0{,}0214} = 4{,}68\ кГ/см^2;$$

$$\rho_0 = \frac{p_0}{RT_0} = \frac{4{,}68 \cdot 10^4}{287 \cdot 293} = 0{,}565\ кГ \cdot сек^2/м^4;$$

$$\rho_a = \rho_0 \varepsilon_a(\mathbf{M}_a) = 0{,}565 \cdot 0{,}0642 = 0{,}0364\ кГ \cdot сек^2/м^4;$$

$$V_a = M_a a_a = \mathbf{M}_a \sqrt{kRT_a} = 3{,}16 \sqrt{1{,}4 \cdot 287 \cdot 97{,}5} = 198\ м/сек.$$

Весовой расход газа через сопло

$$\dot{G} = \rho_a V_a S_a g = 0{,}0364 \cdot 198 \cdot 0{,}16 \cdot 9{,}81 = 11{,}3\ кГ/сек.$$

III.34. По заданным геометрическим размерам строим контур сопла, как это показано на рис. 3.III.5. При расчете изэнтропического течения

газа по такому соплу используем таблицы газодинамических функций [13]. Порядок расчета следующий:

1. Зная функцию $d=f(x)$ по условию, определяем для каждого сечения сопла газодинамическую функцию $\xi=d/d^*$, где d^* — диаметр критического сечения.

2. По найденным значениям ξ из таблиц при $k=1{,}2$ для дозвуковой и сверхзвуковой областей течения определяем соответствующие значения газодинамических функций $\pi(\mathbf{M})=p/p_0$, $\tau(\mathbf{M})=T/T_0$, $\varepsilon(\mathbf{M})=\rho/\rho_0$, а также параметров газа: давления $p=p_0\pi(\mathbf{M})$; температуры $T=T_0\tau(\mathbf{M})$; плотности $\rho=\rho_0\varepsilon(\mathbf{M})$ (или $\rho=p/RT$); числа Маха $\mathbf{M}(\xi)$; относительной скорости $\lambda(\xi)$; скорости потока $V=\lambda a^*=\lambda\sqrt{2kRT_0/(k+1)}$; скорости звука $a=V/\mathbf{M}$.

Результаты проведенного расчета представлены в табл. 3.III.1.

По данным табл. 3.III.1 на рис. 3.III.6 построены графики изменения параметров газа вдоль сопла по сечениям, указанным на рис. 3.III.5.

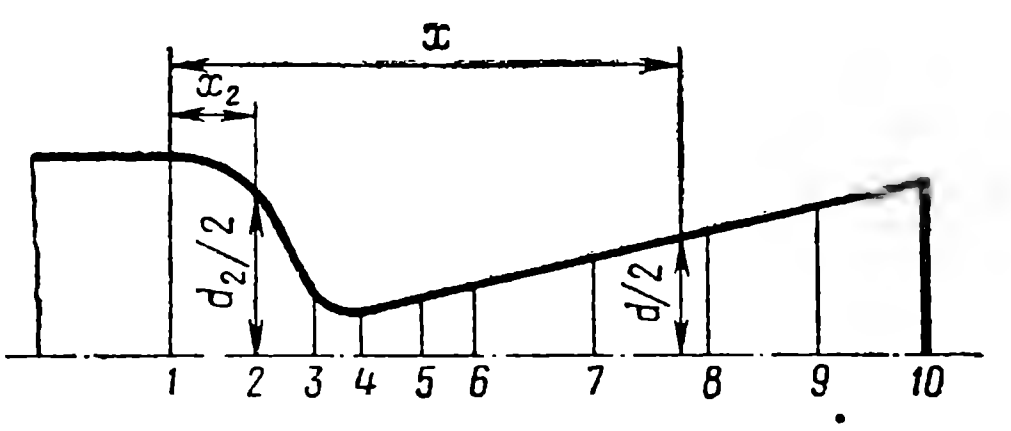


Рис. 3.III.5. Контур сверхзвукового сопла

Поскольку найденное давление на срезе сопла $p_a=0{,}250$ *кГ/см²* больше наружного давления $p_н=4{,}1\cdot10^{-2}$ *кГ/см²*, сопло работает в режиме недорасширения.

Весовой расход газа через сопло

$$\dot{G}=\rho^*a^*S^*g=\rho^*a^*\frac{\pi d^{*2}}{4}g=0{,}256\cdot1050\,\frac{\pi\cdot0{,}02^2}{4}\,9{,}81=0{,}829\,кГ/сек.$$

III.35. Определяем вначале скорость звука диссоциированного воздуха на выходе сопла:

$$a_a=V_a/M_a=8000/5=1600\,м/сек.$$

Из диаграммы a—p—S—i [17] по значениям $a_a=1600$ *м/сек* и $p_a=0{,}01$ *кГ/см²* находим на выходе сопла энтальпию $i_a=20{,}4\cdot10^6$ *м²/сек²* и энтропию $S_a=15{,}5\cdot10^3$ *м²/(сек²·град)*.

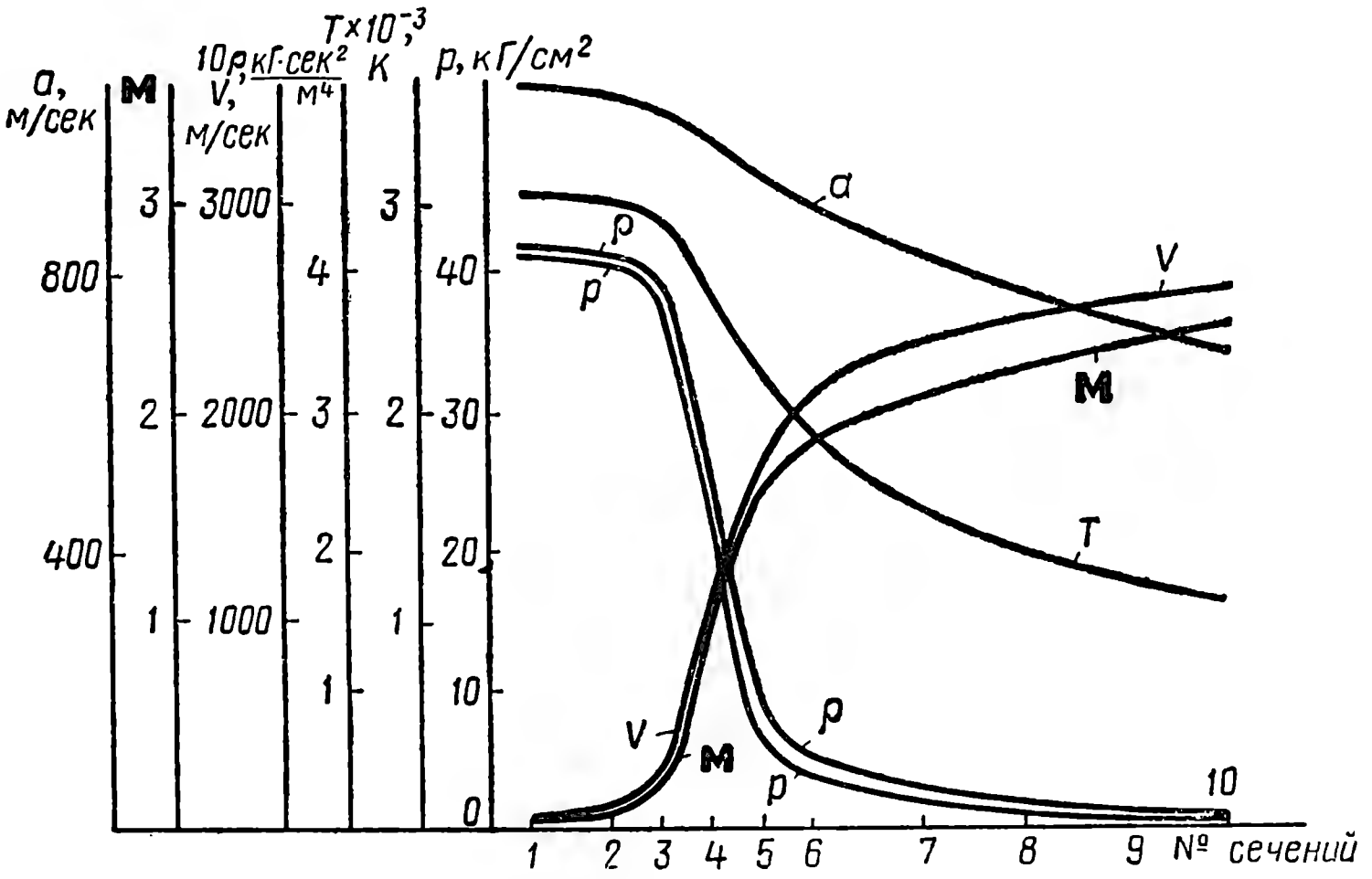


Рис. 3.III.6. Графики изменения параметров газа: давления p, плотности ρ, температуры T, скорости V, числа Маха $\mathbf{M}$ и скорости звука a вдоль сопла

Затем по уравнению $i_0 = i_a + V_a^2/2$ определяем энтальпию торможения:

$$i_0 = 20{,}4 \cdot 10^6 + \frac{8^2 \cdot 10^6}{2} = 52{,}4 \cdot 10^6 \; м^2/сек^2.$$

Полагая течение воздуха в сопле изэнтропическим [$S_0 = S_a = 15{,}5 \times \times 10^3 м^2/(сек^2 \cdot град)$], находим по p—S—i-диаграмме [17] для полученных значений i_0 и S_0 давление $p_0 = 300 \; кГ/см^2$, а по p—i—T-диаграмме [17] для значений p_0 и i_0 — температуру $T_0 = 13\,700$ К.

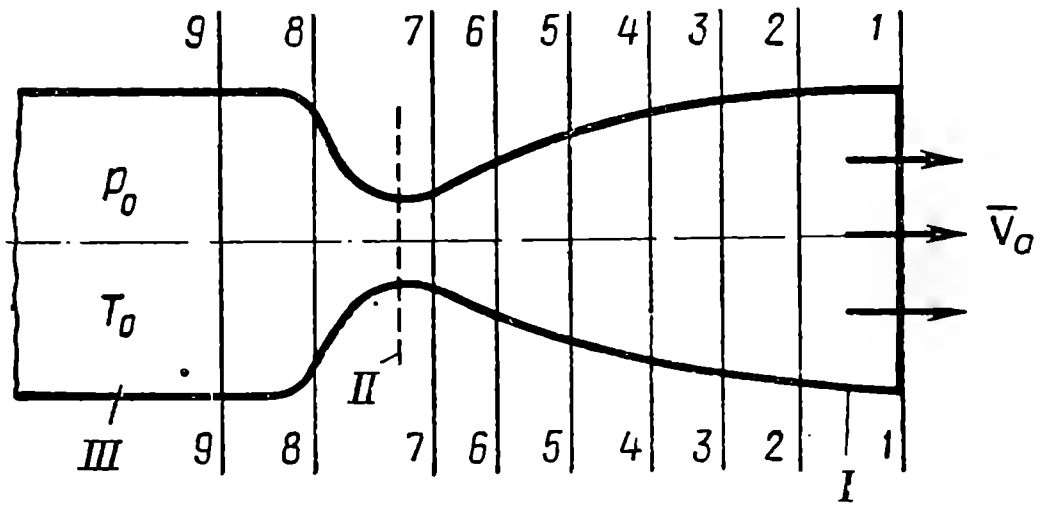


Рис. 3.III.7. Сверхзвуковое сопло:
I — контур сопла; *II* — критическое сечение, *III* — форкамера

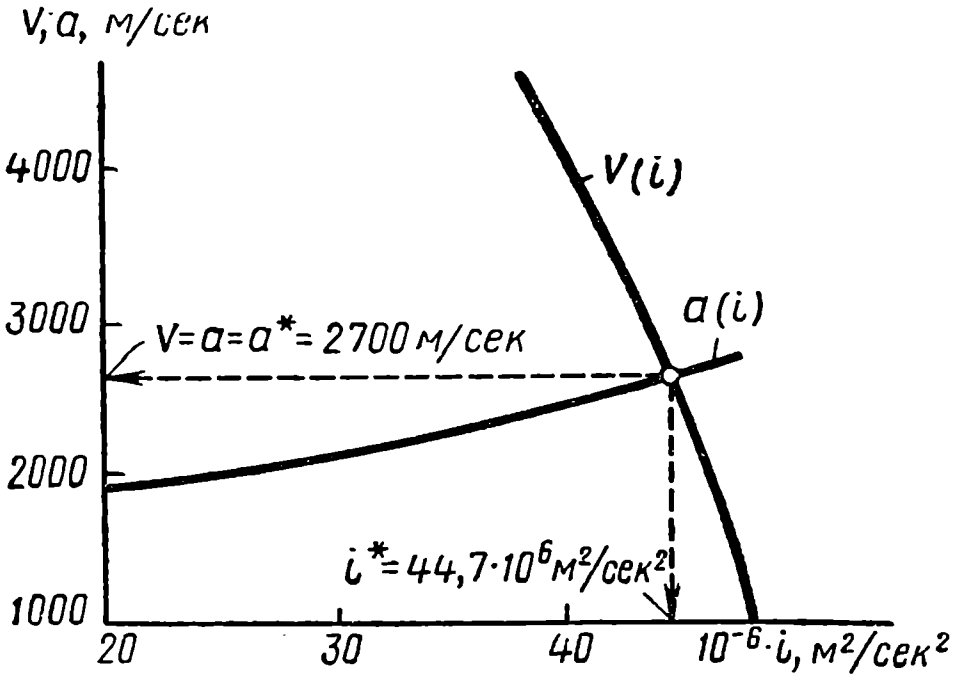


Рис. 3.III.8. Кривые зависимостей скорости V и скорости звука a от энтальпии i

III.36. По известным значениям $p_0 = 100 \; кГ/см^2$ и $T_0 = 12\,000$ К находим при помощи i—S-диаграммы [17] для условий торможения энтальпию $i_0 = 48{,}3 \cdot 10^6 \; м^2/сек^2$ и энтропию $S_0 = 14{,}5 \cdot 10^3 \; м^2/(сек^2 \cdot град)$. Далее определяем энтальпию в выходном сечении сопла:

$$i_a = i_0 - V_a^2/2 = 48{,}3 \cdot 10^6 - 8^2 \cdot 10^6/2 = 16{,}3 \cdot 10^6 \; м^2/сек^2.$$

Задавшись рядом значений энтальпий i_k ($16{,}3 \cdot 10^6 < i_k < 48{,}3 \cdot 10^6$) в соответствующих отдельных сечениях сопла (рис. 3.III.7), вычисляем по ним скорости $V_k = \sqrt{2(i_0 - i_k)}$. Например, для значения $i_k = 18 \times \times 10^6 \; м^2/сек^2$

$$V_k = \sqrt{2(48{,}3 \cdot 10^6 - 18 \cdot 10^6)} = 7785 \; м/сек.$$

Принимая течение в сопле изэнтропическим, находим при помощи i—S-диаграммы [17] для заданных значений i_k и найденной величины $S_0 = 14{,}5 \cdot 10^3 м^2/(сек^2 \cdot град)$ плотность ρ_k, температуру T_k, давление p_k. По величинам ρ_k и V_k вычисляем удельный массовый расход $\rho_k V_k$.

Используя диаграмму a—i [17], определяем скорости звука a_k, соответствующие значениям i_k и S_0, а затем подсчитываем числа Маха $M_k = V_k/a_k$.

Критическая скорость звука a^*, а также соответствующая энтальпия i^* определяются следующим образом. Для ряда найденных значений a_k, V_k и i_k строим кривые $V_k = f(i_k)$ и $a_k = f(i_k)$, точка пересечения которых определяет значения a^* и i^* (рис. 3.III.8).

Плотность в критическом сечении ρ^* находится из диаграммы i—S [17] по значениям i^* и S_0. Из уравнения расхода ($\rho_a V_a S_a = \rho^* a^* S^*$) определяется площадь этого сечения:

$$S^* = \rho_a V_a S_a/(\rho^* a^*).$$

Аналогично определяются площади других сечений:

$$S_k = \rho_a V_a S_a/(\rho_k V_k).$$

Таблица 3.III.1

Параметр	Размерность	Значение параметра торможения	№ сечения									
			1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
$\xi(x) = d/d^*$	—		5,00	3,95	1,78	1,00	1,30	1,60	2,20	2,77	3,44	4,00
$\pi(M) = \pi(\xi)$	—		0,999	0,999	0,978	0,559	0,155	0,0800	0,0360	0,0164	$0{,}915 \cdot 10^{-2}$	$0{,}615 \cdot 10^{-2}$
$p(x) = p_0\, \pi(M)$	$кГ/см^2$	41,0	41,0	41,0	40,0	22,8	6,33	3,27	1,47	0,670	0,370	0,250
$\tau(M) = \tau(\xi)$	—		0,999	0,999	0,996	0,897	0,705	0,624	0,536	0,464	0,416	0,386
$T(x) = T_0\, \tau(M)$	K	3000	3000	3000	2990	2690	2110	1870	1610	1390	1250	1160
$\varepsilon(M) = \varepsilon(\xi)$	—		0,999	0,999	0,982	0,623	0,217	0,128	0,0670	0,0354	0,0220	0,0159
$\rho(x) = \rho_0\, \varepsilon(M)$	$\frac{кГ \cdot сек^2}{м^4}$	0,412	0,412	0,412	0,404	0,256	0,0894	0,0527	0,0276	0,0145	0,00906	0,00655
$\lambda(x) = \lambda(\xi)$	—		0,026	0,040	0,20	1,00	1,69	1,91	2,12	2,28	2,38	2,44
$V(x) = a^*\, \lambda(x)$	$м/сек$	0	25,2	42,0	210	1050	1770	2050	2230	2400	2500	2560
$M(x) = M(\xi)$	—	0	0,023	0,038	0,19	1,00	1,90	2,29	2,74	3,17	3,50	3,72
$a(x) = V(x)/M(x)$	$м/сек$	1110	1109	1108	1106	1050	934	894	814	757	716	688

Таблица 3.III.2

№ сечения	i_k, $\frac{м^2}{сек^2}$	V_k, $\frac{м}{сек}$	ρ_k, $\frac{кГ \cdot сек^2}{м^4}$	T_k, К	p_k, $\frac{кГ}{см^2}$	$\rho_k V_k$, $кГ \cdot сек/м^3$	a_k, $\frac{м}{сек}$	M_k	S_k, $м^2$
	Задаемся	$V_k = \sqrt{2(i_0 - i_k)}$	Снимаем с диаграммы i—S				Снимаем с диаграммы a—i	$M_k = V_k/a_k$	$S_k = \frac{\rho_a V_a S_a}{\rho_k V_k}$
1	$i_a = 16{,}3 \cdot 10^6$	$V_a = 8000$	$\rho_a = 8{,}5 \cdot 10^{-5}$	$T_a = 5200$	$p_a = 0{,}019$	$\rho_a V_a = 0{,}680$	$a_a = 1520$	$M_a = 5{,}26$	$S_a = 0{,}160$
2	$18 \cdot 10^6$	7785	$1{,}7 \cdot 10^{-4}$	5500	0,039	1,32	1580	4,93	0,082
3	$20 \cdot 10^6$	7523	$3{,}6 \cdot 10^{-4}$	5850	0,090	2,71	1660	4,53	0,040
4	$25 \cdot 10^6$	6826	$1{,}7 \cdot 10^{-3}$	6700	0,52	11,6	1860	3,67	0,0094
5	$30 \cdot 10^6$	6050	$6{,}1 \cdot 10^{-3}$	7600	2,4	36,9	2050	2,96	0,0030
6	$35 \cdot 10^6$	5158	$1{,}9 \cdot 10^{-2}$	8600	8,0	98,1	2260	2,29	0,0011
7	$40 \cdot 10^6$	4074	$4{,}5 \cdot 10^{-2}$	9750	23	183	2500	1,63	0,00059
8	$45 \cdot 10^6$	2569	$9{,}4 \cdot 10^{-2}$	11 050	58	241	2730	0,94	0,00045
9	$i_0 = 48{,}3 \cdot 10^6$	0	$\rho_0 = 1{,}4 \cdot 10^{-1}$	$T_0 = 12\,000$	$p_0 = 100$	0	$a_0 = 2880$	0	—

Результаты проведенного расчета приведены в табл. 3.III.2.

Характер изменения параметров газа вдоль сопла, соответствующий данным табл. 3.III.2, показан на рис. 3.III.9, где также изображен контур сопла, построенный по вычисленным значениям площадей S_k его поперечных сечений ($d_k = \sqrt{4S_k/\pi}$).

Из графика на рис. 3.III.8 найдены значения $a^* = 2700$ *м/сек* и $i^* = 44{,}7 \cdot 10^6$ $м^2/сек^2$, а из диаграммы i—S [17] по $i^* = 44{,}7 \cdot 10^6$ $м^2/сек^2$ и $S_0 = 14{,}5 \cdot 10^3$ $м^2/(сек^2 \cdot град)$ определена плотность $\rho^* = 9{,}2 \cdot 10^{-2}$ $кГ \times \times сек^2/м^4$. Таким образом, площадь критического сечения сопла

$$S^* = \frac{8{,}5 \cdot 10^{-5} \cdot 8000 \cdot 0{,}16}{9{,}2 \cdot 10^{-2} \cdot 2700} = 0{,}00044\ м^2.$$

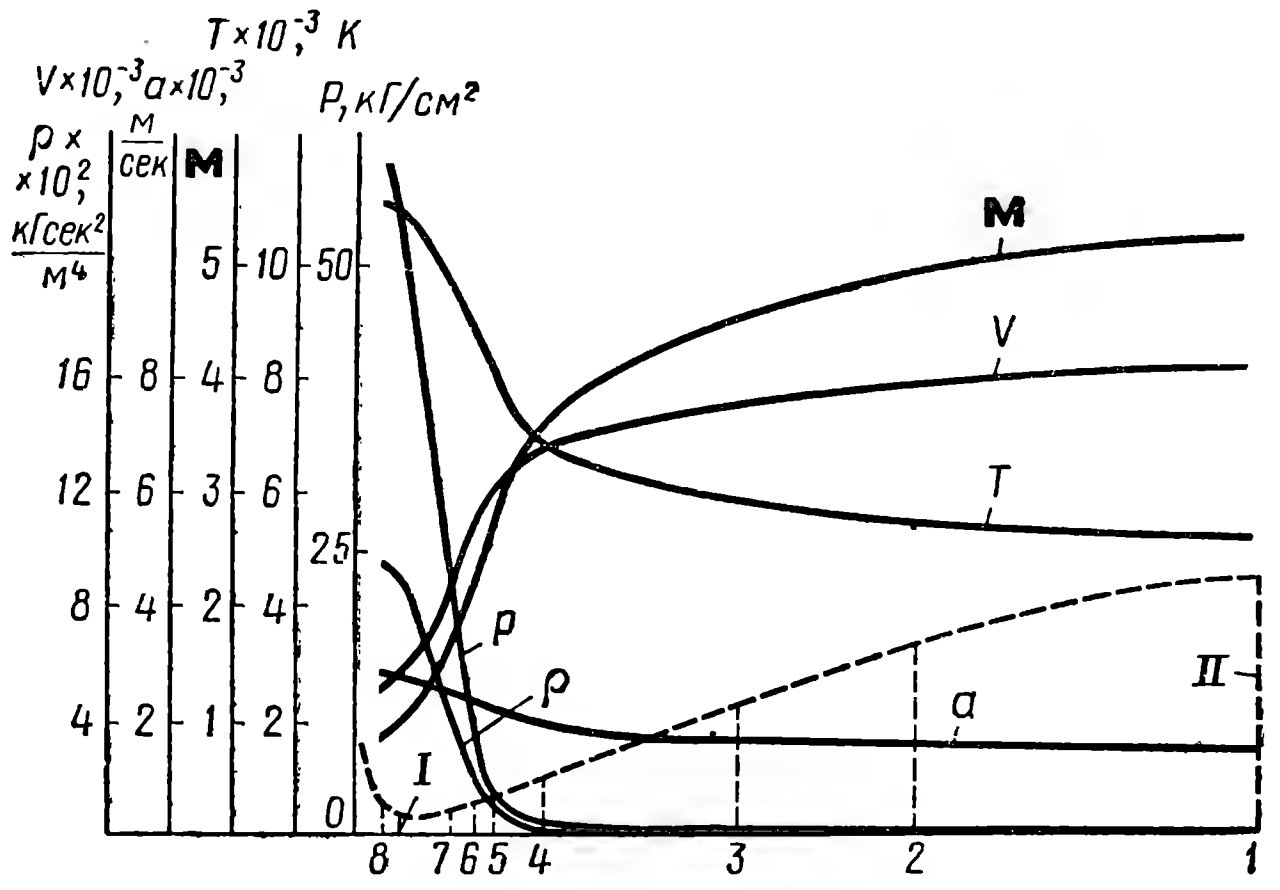


Рис. 3.III.9. Характер изменения давления p, плотности ρ, температуры T, скорости звука a, числа Маха **M** и скорости потока V газа в сопле:

I, ***II*** — соответственно критическое и выходное сечения; пунктиром изображен контур сопла, сечения которого отмечены цифрами по оси абсцисс (1 ÷ 8)

Давление и температура в этом сечении равны соответственно $p^* = 56$ $кГ/см^2$ и $T^* = 11\,000$ К, а удельный массовый расход $\rho^* a^* = 248$ $кГ \cdot сек/м^3$.

IV.1. Картина на рис. 2.IV.1, *а* соответствует дозвуковой скорости движения газа ($V<a$), поскольку фронт малых возмущений, двигаясь со скоростью звука, распространяется навстречу потоку. В случае, показанном на рис. 2.IV.1, *б*, скорость потока равна скорости звука ($V=a$) и возмущения перемещаются только по потоку. На рис. 2.IV.1, *в* изображена картина распространения звуковых возмущений в сверхзвуковом потоке ($V>a$), поэтому все слабые возмущения находятся в пространстве (конусе Маха), ограниченном образующими — прямыми AB и AC.

IV.2. На рис. 2.IV.2 показано распространение круговых волн малых возмущений в сверхзвуковом потоке. Радиус каждого из них $r=at$, где t — время перемещения центра круга со скоростью потока $V>a$ вдоль полупрямой OL. Очевидно, с изменением t расстояние Vt и радиус круга, равный at, изменяются в одинаковое число раз, т. е. в этом случае, как говорят, все круги имеют общий центр подобия O. Поэтому область плоскости, занимаемая кругами возмущения, представляет собой угол SOT с вершиной в точке O, образованный общими касательными всех кругов в виде прямых, являющихся одновременно и огибающими.

IV.3. Местное число Маха **M** связано с углом наклона линии возмущения (линии Маха) выражением $\mu=\arcsin(1/\mathbf{M})$. На рис. 2.IV.3 угол μ_B в точке B меньше угла μ_A в точке A ($\mu_B<\mu_A$), поэтому местное число **M** в направлении от точки A к точке B увеличивается ($\mathbf{M}_B>\mathbf{M}_A$).

IV.4. Угол наклона линии Маха $\mu=\arcsin(1/\mathbf{M})$ при увеличении давления не изменится, так как при заданных условиях скорость звука, зависящая только от температуры ($a^2=kRT$), остается той же самой. Поэтому сохраняется то же число $\mathbf{M}=V/a$, а следовательно, и угол μ.

IV.5. При уменьшении температуры T и неизменной скорости потока V произойдет увеличение числа $\mathbf{M}=V/a$, так как уменьшится скорость звука $a=\sqrt{kRT}$, что вызовет уменьшение угла наклона линии Маха $\mu=\arcsin(1/\mathbf{M})$.

IV.6. Известно, что при диссоциации число частиц газа в единице объема возрастает. Это приводит к увеличению скорости распространения слабых возмущений, т. е. возрастанию скорости звука a по сравнению со случаем постоянных теплоемкостей. Поэтому при учете влияния диссоциации из-за уменьшения числа $\mathbf{M}=V/a$ произойдет увеличение угла наклона линии Маха.

IV.7. Угол наклона линии Маха в диссоциирующем газе будет увеличиваться, если уменьшится давление. Это объясняется тем, что при таком уменьшении давления увеличится степень диссоциации, т. е. возрастет количество частиц в единице объема. От этого будет больше скорость звука a и произойдет уменьшение угла наклона линии Маха.

IV.8. Скачки уплотнения возникают при торможении сверхзвуковых потоков в газе какими-либо преградами. Возмущения сжатия, вызываемые отдельными точками преграды, распространяясь со скоростью звука, в сверхзвуковом потоке не могут выходить за пределы соответствующих конических поверхностей, образованных волнами Маха (см. рис. 2.IV.2). Поэтому в ограниченном пространстве перед преградой происходит многократное наложение возмущений сжатия, которое и приводит к возникновению скачков уплотнения.

IV.9. Существенным отличием процесса перехода газа через скачок уплотнения, сопровождаемого скачкообразным увеличением давления, плотности и температуры, от течения с плавным, постепенным возрастанием указанных параметров является значительная величина работы сил внутреннего трения в газе. В скачке уплотнения на расстоянии, не превышающем нескольких длин свободного пробега молекул, ввиду

больших градиентов скорости силы внутреннего трения настолько велики, что необратимо переводят в тепло значительную часть механических видов энергии газа. Это вызывает заметное возрастание энтропии. В случае же течения газа с постепенным возрастанием параметров работа сил внутреннего трения оказывается пренебрежимо малой и процесс считается изэнтропическим.

IV.10. С ростом температуры газа за скачком уплотнения увеличиваются внутренняя и потенциальная энергии газа (или энтальпия $i=c_pT$). В соответствии с законом сохранения энергии ($V^2/2+i=\text{const}$) ее величина за скачком не изменяется, что возможно лишь при уменьшении кинетической энергии ($V^2/2$). Поэтому скорость газа V за скачком всегда уменьшается.

IV.11. Для определения неизвестных величин — отношений параметров газа за прямым скачком уплотнения и перед ним — в случае, если поток за таким скачком диссоциирован, кроме числа $\mathbf{M}_1$ и показателя адиабаты $k_1=c_p/c_v$ должны быть известны давление p_1 и температура T_1 набегающего потока.

IV.12. Условием того, что соответствующие параметры газа за косым и прямым скачками уплотнения будут одинаковыми, является выполнение соотношения $\mathbf{M}_{1\text{кос}}\sin\theta_c=\mathbf{M}_{1\text{пр}}$, т. е. когда «нормальная» составляющая числа $\mathbf{M}_{1\text{кос}}$ перед косым скачком уплотнения $[(\mathbf{M}_{1\text{кос}})_n=\mathbf{M}_{1\text{кос}}\sin\theta_c]$ будет равна соответствующему значению $\mathbf{M}_{1\text{пр}}$ перед прямым скачком.

IV.13. Для решения задачи воспользуемся следующим соотношением, связывающим между собой углы наклона скачка уплотнения θ_c и отклонения потока за ним β_c:

$$\operatorname{tg}\theta_c=\operatorname{ctg}\beta_c\left[\frac{1}{2}(\rho_2/\rho_1-1)\pm\sqrt{\frac{1}{4}(\rho_2/\rho_1-1)^2-(\rho_2/\rho_1)\operatorname{tg}^2\beta_c}\right]. \quad (3.IV.1)$$

После подстановки значений $\rho_2/\rho_1=10$ и $\beta_c=30°$ получим

$$\operatorname{tg}\theta_c=\operatorname{ctg}30°\left[\frac{1}{2}(10-1)\pm\sqrt{\frac{1}{4}(10-1)^2-10\operatorname{tg}^2 30°}\right]=$$
$$=1{,}732\,(4{,}5\pm 4{,}11).$$

Таким образом, получаем два значения угла:

$$\theta_{c2}=\operatorname{arctg}1{,}732\,(4{,}5+4{,}11)=\operatorname{arctg}14{,}9=86°10';$$

$$\theta_{c1}=\operatorname{arctg}1{,}732\,(4{,}5-4{,}11)=\operatorname{arctg}0{,}670=33°50'.$$

По условию, возникающий скачок является присоединенным, поэтому следует выбрать меньший угол из двух полученных значений, т. е. принять, что в заданном потоке реализуется скачок с углом наклона $\theta_{c1}=33°50'$.

Второй, бóльший по величине угол $\theta_{c2}=86°10'$ имеет место в случае отсоединенного скачка и соответствует той точке на скачке, где наклон вектора скорости непосредственно за ним $\beta_c=30°$ (рис. 3.IV.1).

IV.14. Для определения отношения скоростей V_2/V_1 воспользуемся формулой косого скачка уплотнения

$$V_2^2/V_1^2=1-\sin^2\theta_c\left[1-(\rho_1/\rho_2)^2\right]. \quad (3.IV.2)$$

Как видим, для нахождения этого отношения при заданном значении $\rho_2/\rho_1=10$ необходимо дополнительно знать угол наклона скачка θ_c. В ре-

шении задачи IV.13 этот угол $\theta_{c1}=33°50'$ для присоединенного скачка. Внося его значение в (3.IV.2), найдем

$$V_2^2/V_1^2 = 1 - \sin^2 33°50' (1 - 1/10^2) = 0{,}693,$$

откуда $V_2/V_1=0{,}830$.

Если рассмотреть отсоединенный скачок, для которого в решении задачи IV.13 угол $\theta_{c2}=86°10'$, то

$$V_2^2/V_1^2 = 1 - \sin^2 86°10' (1 - 1/10^2) = 0{,}014,$$

откуда $V_2/V_1=0{,}118$.

IV.15. Воспользуемся следующим соотношением для разности энтальпий газа:

$$i_2 - i_1 = (p_2 - p_1)(1 - \rho_1/\rho_2)/(2\rho_1);$$

подставляя в него данные, найдем

$$i_2 - i_1 = 30 \cdot 10^4 (1 - 1/10)/(2 \cdot 0{,}125) = 1{,}32 \cdot 10^6 \ м^2/сек^2.$$

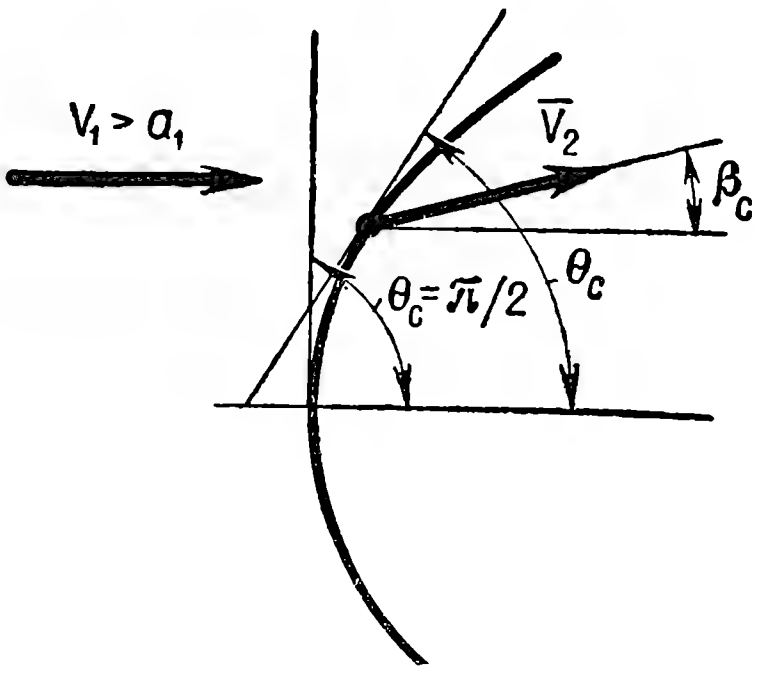


Рис. 3.IV.1. Криволинейный скачок уплотнения

IV.16. Казалось бы, что вследствие равенства скоростей в рассматриваемых точках (см. рис. 2.IV.4) будут одинаковы и другие соответствующие параметры, в частности давления или плотности. Однако это не имеет места для течений, в которых возникают ударные волны.

Давления в точках A и B определяются соответственно по зависимостям

$$p_A = p'_{0A}\left(1 - \frac{V_A^2}{V_{max}^2}\right)^{\frac{k}{k-1}} \text{ и } p_B = p'_{0B}\left(1 - \frac{V_B^2}{V_{max}^2}\right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Так как скорости в этих точках одинаковы ($V_A=V_B$), то $p_A/p_B = p'_{0A}/p'_{0B}$. Здесь отношение $p'_{0A}/p'_{0B}<1$ вследствие того, что точка A расположена на линии тока, проходящей через более интенсивную часть скачка уплотнения. В соответствии с этим давление $p_A<p_B$. Температуры в рассматриваемых точках:

$$T_A = T'_{0A}(1 - V_A^2/V_{max}^2) \text{ и } T_B = T'_{0B}(1 - V_B^2/V_{max}^2).$$

Ввиду равенства $T'_{0A}=T'_{0B}$ значения T_A и T_B в этих точках будут одинаковы.

Плотности определяются из соотношений

$$\rho_A = \rho'_{0A}\left(1 - \frac{V_A^2}{V_{max}^2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \text{ и } \rho_B = \rho'_{0B}\left(1 - \frac{V_B^2}{V_{max}^2}\right)^{\frac{1}{k-1}},$$

откуда $\rho_A/\rho_B = \rho'_{0A}/\rho'_{0B}$.

Отношение ρ'_{0A}/ρ'_{0B} можно найти, воспользовавшись уравнением состояния, записанным для параметров торможения в точках A и B: $p'_{0A} = \rho'_{0A} RT'_{0A}$ и $p'_{0B} = \rho'_{0B} RT'_{0B}$. Из этого следует, что

$$p'_{0A}/p'_{0B} = \rho'_{0A} T'_{0A}/(\rho'_{0B} T'_{0B}).$$

Поскольку $p'_{0A}/p'_{0B}<1$, а $T'_{0A}/T'_{0B}=1$, то $\rho'_{0A}/\rho'_{0B}<1$ и поэтому $\rho_A<\rho_B$.

IV.17. Уравнение расхода для одномерного установившегося потока имеет вид $\rho_1 V_1 S_1 = \rho_2 V_2 S_2$. Соответствующие значения газодинамиче-

ской функции $q(\mathbf{M})$ будут равны: $q(\mathbf{M}_1)=\rho_1 V_1/(\rho_1^* a_1^*)$; $q(\mathbf{M}_2)=\rho_2 V_2/(\rho_2^* a_2^*)$. С учетом этого уравнения расхода найдем

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{q(\mathbf{M}_1)\rho_1^* a_1^*}{q(\mathbf{M}_2)\rho_2^* a_2^*}. \qquad (3.IV.3)$$

Поскольку за системой скачков уплотнения (см. рис. 2.IV.5) $T_0'=T_0=$ $=$const и $a_2^*=a_1^*=$const, то с учетом уравнения состояния $p_0'/p_0=$ $=\rho_0' T_0'/(\rho_0 T_0)$ и зависимости $\rho^*=\rho_0[2/(k+1)]^{1/(k-1)}$, связывающей критическую плотность с плотностью в заторможенном потоке, из (3.IV.3) получим искомую формулу:

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{q(\mathbf{M}_1)\rho_0}{q(\mathbf{M}_2)\rho_0'}=\frac{q(\mathbf{M}_1)p_0}{q(\mathbf{M}_2)p_0'}=\frac{1}{\nu}\cdot\frac{q(\mathbf{M}_1)}{q(\mathbf{M}_2)}. \qquad (3.IV.4)$$

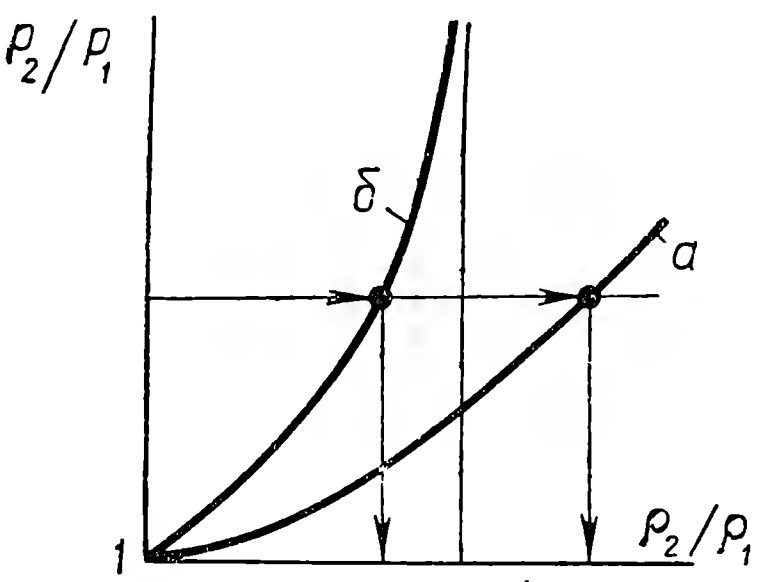


Рис. 3.IV.2. Графики изэнтропы (*а*) и ударной адиабаты (*б*)

IV. 18. Выясним прежде всего, как изменяется плотность газа в потоке за скачком уплотнения по сравнению с изэнтропическим течением при одинаковом изменении давления. Для этого воспользуемся зависимостью между отношениями давлений и плотностей, полученной в теории скачков уплотнения для случая постоянных теплоемкостей,

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{\frac{k+1}{k-1}\cdot\frac{\rho_2}{\rho_1}-1}{(k+1)/(k-1)-\rho_2/\rho_1} \qquad (3.IV.5)$$

и формулой для изэнтропических процессов

$$p_2/p_1=(\rho_2/\rho_1)^k. \qquad (3.IV.6)$$

Графики уравнений (3.IV.5) и (3.IV.6), приведенные на рис. 3.IV.2, показывают, что при одинаковом изменении давления (p_2/p_1) плотность газа за скачком будет изменяться меньше, чем в изэнтропическом течении $[(\rho_2/\rho_1)_c<(\rho_2/\rho_1)_{из}]$. Теперь с помощью уравнения состояния $p_2/p_1=\rho_2 T_2/(\rho_1 T_1)$ легко установить, что при одинаковом изменении давления $[(p_2/p_1)_c=(p_2/p_1)_{из}]$ температура за скачком уплотнения изменится больше, чем в случае изэнтропического потока, т. е. $(T_2/T_1)_c>$ $>(T_2/T_1)_{из}$. Это не противоречит физическим представлениям, так как в скачке уплотнения выделяется дополнительное тепло, обусловленное работой сил вязкости.

Чтобы ответить на вторую часть вопроса об изменении скорости в потоках со скачком и без него, рассмотрим известную формулу для изэнтропического изменения давления

$$p=p_0\left(1-V^2/V_{\max}^2\right)^{k/(k-1)}. \qquad (3.IV.7)$$

Она пригодна для любых видов изэнтропических течений, в том числе для течения за скачком уплотнения. Однако в последнем случае следует учитывать уменьшение давления торможения за скачком $(p_0'<p_0)$.

С помощью (3.IV.7) можем написать для условий течения газа после и до скачка уплотнения $(p_0'<p_0)$

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_c=\frac{p_0'}{p_0}\left(\frac{1-V_2^2/V_{\max}^2}{1-V_1^2/V_{\max}^2}\right)_c^{\frac{k}{k-1}}, \qquad (3.IV.8)$$

а также для соответствующих течений без скачка уплотнения ($p_0' = p_0$

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{\text{из}} = \left(\frac{1 - V_2^2/V_{\max}^2}{1 - V_1^2/V_{\max}^2}\right)^{\frac{k}{k-1}}. \qquad \text{(3.IV.9)}$$

Поскольку по условию задачи $(p_2/p_1)_{\text{с}} = (p_2/p_1)_{\text{из}}$, то, сравнивая правые части (3.IV.8) и (3.IV.9), получим

$$\frac{p_0'}{p_0}\left(\frac{1 - V_2^2/V_{\max}^2}{1 - V_1^2/V_{\max}^2}\right)_{\text{с}}^{\frac{k}{k-1}} = \left(\frac{1 - V_2^2/V_{\max}^2}{1 - V_1^2/V_{\max}^2}\right)_{\text{из}}^{\frac{k}{k-1}}.$$

Отсюда следует, что так как величина $V_{\max}$ за скачком не изменяется, а $p_0'/p_0 < 1$, то

$$(1 - V_{2\text{с}}^2/V_{\max}^2) > (1 - V_{2\text{из}}^2/V_{\max}^2).$$

Это неравенство справедливо только при $V_{2\text{с}} < V_{2\text{из}}$. Следовательно, при одинаковом изменении давления скорость за скачком будет меньше, чем в изэнтропическом течении. Такой вывод подтверждается физическими соображениями. Как было показано ранее, температура за скачком (а следовательно, и энтальпия $i = c_p T$) изменяется больше, поэтому согласно закону сохранения энергии величина $V^2/2$ (и, значит, скорость V) должна изменяться меньше.

IV.19. Зададимся в качестве первого приближения некоторым произвольным значением угла $\theta_{\text{с}} > \beta_{\text{с}}$, равным 40°, и вычислим соответствующее отношение плотностей:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_1^2 \sin^2\theta_{\text{с}}\,(k+1)}{2 + (k-1)\,M_1^2 \sin^2\theta_{\text{с}}} = \frac{5^2 \sin^2 40^\circ\,(1{,}2+1)}{2 + (1{,}2-1)\,5^2 \sin^2 40^\circ} = 5{,}6. \qquad \text{(3.IV.10)}$$

По формуле (3.IV.1) находим угол наклона скачка во втором приближении:

$$\operatorname{tg}\theta_{\text{с}} = \operatorname{ctg} 30^\circ\left[\frac{1}{2}(5{,}6-1) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(5{,}6-1)^2 - 5{,}6\cdot\operatorname{tg}^2 30^\circ}\right] =$$

$$= 1{,}73\,(2{,}30 \pm 1{,}85).$$

Так как скачок, по условию задачи, присоединенный, то выбираем знак минус:

$$\operatorname{tg}\theta_{\text{с}} = 1{,}73\,(2{,}30 - 1{,}85) = 0{,}78.$$

Отсюда $\theta_{\text{с}} = 38^\circ$. По этому углу находим во втором приближении отношение плотностей:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(5\sin 38^\circ)^2\,(1{,}2+1)}{2 + (1{,}2-1)\,(5\sin 38^\circ)^2} = 5{,}36.$$

Производим последнее приближение для угла $\theta_{\text{с}}$:

$$\operatorname{tg}\theta_{\text{с}} = \operatorname{ctg} 30^\circ\left[\frac{1}{2}(5{,}36-1) - \sqrt{\frac{1}{4}(5{,}36-1)^2 - 5{,}36\cdot\operatorname{tg}^2 30^\circ}\right] = 0{,}797,$$

откуда $\theta_{\text{с}} = 38^\circ 33'$.

Окончательно находим отношения:

плотностей

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{5^2 \sin^2 38^\circ 33'\,(1{,}2+1)}{2 + (1{,}2-1)5^2 \sin^2 38^\circ 33'} = 5{,}42;$$

давлений (3.IV.5)

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\dfrac{1{,}2+1}{1{,}2-1}\,5{,}42 - 1}{(1{,}2+1)/(1{,}2-1) - 5{,}42} = 10{,}5;$$

температур

$$T_2/T_1 = p_2\rho_1/(p_1\rho_2) = 10{,}5/5{,}42 = 1{,}94;$$

скоростей звука

$$a_2/a_1 = \sqrt{T_2/T_1} = \sqrt{1{,}94} = 1{,}39;$$

скоростей потока

$$V_2/V_1 = \left[1 - \sin^2\theta_c\left(1 - \rho_1^2/\rho_2^2\right)\right]^{1/2} =$$

$$= [1 - \sin 38°33'\,(1 - 1/5{,}42^2)]^{1/2} = 0{,}791$$

и число Маха за скачком

$$\mathbf{M}_2 = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)\left(\frac{a_1}{a_2}\right)\mathbf{M}_1 = 0{,}791\,\frac{1}{1{,}39}\,5 = 2{,}84.$$

IV.20. Определим вначале θ_c — угол наклона скачка A_0A (см. рис. 2.IV.6) и отношение плотностей ρ_2/ρ_1, используя уравнения (3.IV.1) и (3.IV.10). Подставляя в них значения $\mathbf{M}_1=5$; $\beta_{кл}=15°$, $k=1{,}4$, получим:

$$\operatorname{tg}\theta_c = \operatorname{ctg}15°\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right)^2 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\operatorname{tg}^2 15°}\right];$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{5^2\sin^2\theta_c\,(1{,}4+1)}{2 + (1{,}4-1)\,5^2\sin^2\theta_c}.$$

Решая эти уравнения, найдем $\theta_c=24°16'$, $\rho_2/\rho_1=2{,}75$. Соответствующее число Маха за скачком определим из формулы

$$\mathbf{M}_2^2\sin^2(\theta_c - \beta_{кл}) = \frac{2}{k+1}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - \frac{k-1}{k+1}\right]^{-1}.$$

После подстановки значений получим

$$\mathbf{M}_2^2\sin^2(24°16' - 15°) = \frac{2}{1{,}4+1}\left(2{,}75 - \frac{1{,}4-1}{1{,}4+1}\right]^{-1},$$

откуда $\mathbf{M}_2=3{,}50$.

Теперь рассмотрим скачок AB. Так как число Маха перед этим скачком $\mathbf{M}_2=3{,}50$, а угол отклонения потока за ним $\beta_{кл}=15°$, то

$$\operatorname{tg}\theta_{co} = \operatorname{ctg}15°\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\rho_3}{\rho_2} - 1\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{\rho_3}{\rho_2} - 1\right)^2 - \left(\frac{\rho_3}{\rho_2}\right)\operatorname{tg}^2 15°}\right];$$

$$\frac{\rho_3}{\rho_2} = \frac{3{,}50^2\sin^2\theta_{co}\,(1{,}4+1)}{2 + (1{,}4-1)\,3{,}50^2\sin^2\theta_{co}}.$$

Решая эти уравнения, найдем угол наклона отраженного скачка $\theta_{co}=29°19'$, а также отношение плотностей $\rho_3/\rho_2=2{,}22$. Соответствующий угол отражения скачка

$$\angle EAB = \theta' = \theta_{co} - \beta_{кл} = 29°19' - 15° = 14°19'.$$

IV.21. Известно, что коэффициент давления за косым скачком уплотнения

$$\bar{p}_2 = \frac{p_2 - p_1}{q_1} = \frac{2}{k\mathbf{M}_1^2}\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right) = \frac{4}{\mathbf{M}_1^2\,(k+1)}\left(\mathbf{M}_1^2\sin^2\theta_c - 1\right). \qquad (3.IV.11)$$

Вычислим предел этой величины при $\mathbf{M}_1 \to \infty$:

$$\lim_{\mathbf{M}_1\to\infty}\bar{p}_2 = \bar{p}_{2\infty} = \frac{4}{k+1}\sin^2\theta_c. \qquad (3.IV.12)$$

Внесем это выражение в (3.IV.11):

$$\bar{p}_2 = \bar{p}_{2\infty} - \frac{4}{\mathbf{M}_1^2 (k+1)}. \qquad (3.IV.13)$$

Из этой формулы следует, что при всех конечных значениях числа $\mathbf{M}_1$ коэффициент давления $\bar{p}_2$ меньше его предельной величины $\bar{p}_{2\infty}$.

Используя (3.IV.12), подсчитаем предельные величины коэффициента давления для $k=1{,}2$ и $k=1{,}4$ при $\theta_c=30°$:

$$\bar{p}_{2\infty}^{(1)} = \frac{4}{1{,}2+1} \sin^2 30° = 0{,}454 \quad (k=1{,}2);$$

$$\bar{p}_{2\infty}^{(2)} = \frac{4}{1{,}4+1} \sin^2 30° = 0{,}417 \quad (k=1{,}4).$$

Для заданного $\mathbf{M}_1=5$ соответствующие коэффициенты давления по (3.IV.13):

$$\bar{p}_2^{(1)} = 0{,}454 - \frac{4}{5^2 (1{,}2+1)} = 0{,}381;$$

$$\bar{p}_2^{(2)} = 0{,}417 - \frac{4}{5^2 (1{,}4+1)} = 0{,}350.$$

IV.22. Давление в точке A на линии тока, проходящей через скачок уплотнения (см. рис. 2.IV.7), определяется по формуле

$$p_A = p_0' \left(1 - V_2^2/V_{\max}^2\right)^{k/(k-1)}, \qquad (3.IV.14)$$

где p_0' — давление торможения за скачком уплотнения.

Давление в точке B на линии тока в случае изэнтропического течения

$$p_B = p_0 \left(1 - V_2^2/V_{\max}^2\right)^{k/(k-1)}, \qquad (3.IV.15)$$

где p_0 — давление торможения при изэнтропическом сжатии.

Отношение давлений торможения p_0' и p_0 определяется по выражению

$$p_0'/p_0 = \left(p_1/p_2\right)^{1/(k-1)} \left(\rho_2/\rho_1\right)^{k/(k-1)}. \qquad (3.IV.16)$$

Отношения давлений p_2/p_1 и плотностей ρ_2/ρ_1 находятся из формул косого скачка уплотнения по заданным значениям $\beta_c=30°$, $\mathbf{M}_1=5$ и $k=1{,}2$. В таком виде была сформулирована задача IV.19. В результате ее решения были найдены значения $p_2/p_1=10{,}5$ и $\rho_2/\rho_1=5{,}42$. В соответствии с этим из (3.IV.16) для $k=1{,}2$ получим

$$p_0'/p_0 = (1/10{,}5)^{1/(1{,}2-1)} (5{,}42)^{1{,}2/(1{,}2-1)} = 0{,}204.$$

Найдем давление изэнтропического торможения:

$$p_0 = p_1 \left(1 + \frac{k-1}{2} \mathbf{M}_1^2\right)^{\frac{k}{k-1}} = 1 \left(1 + \frac{1{,}2-1}{2} 5^2\right)^{\frac{1{,}2}{1{,}2-1}} = 1840 \; кГ/см^2.$$

В соответствии с этим

$$p_0' = \left(p_0'/p_0\right) p_0 = 0{,}204 \cdot 1840 = 368 \; кГ/см^2.$$

Вычислим отношение $V_2/V_{\max}$, которое входит в выражения для p_A и p_B. С этой целью используем формулу

$$\frac{V_2^2}{V_{\max}^2} = \frac{V_2^2}{V_1^2} \left(1 + \frac{2}{k-1} \cdot \frac{1}{\mathbf{M}_1^2}\right)^{-1}.$$

Подставляя данные, получим

$$\frac{V_2^2}{V_{max}^2} = (1{,}1)^2 \left(1 + \frac{2}{1{,}2-1} \cdot \frac{1}{5^2}\right)^{-1} = 0{,}864.$$

Теперь подсчитываем давление в точках A и B по формулам (3.IV.14) и (3.IV.15):

$$p_A = 368\,(1 - 0{,}864)^{1{,}2/(1{,}2-1)} = 2{,}30 \cdot 10^{-3}\ кГ/см^2;$$

$$p_B = 1840\,(1 - 0{,}864)^{1{,}2/(1{,}2-1)} = 1{,}16 \cdot 10^{-2}\ кГ/см^2.$$

Как видим, статическое давление в потоке газа за скачком уплотнения при той же скорости, что и в изэнтропическом течении, значительно ниже.

IV.23. Для отыскания давления в форкамере трубы p_0 (см. рис. 2.IV.8) необходимо вначале определить угол наклона θ_c скачка уплотнения AB $(A'B')$. Его величина находится по уравнению

$$\frac{\operatorname{tg}\theta_c}{\operatorname{tg}(\theta_c - \beta_c)} = \frac{\mathbf{M}_\infty^2 \sin^2\theta_c\,(k+1)}{2 + (k-1)\,\mathbf{M}_\infty^2 \sin^2\theta_c}.$$

Внося в него значения $k = 1{,}4$, $\mathbf{M}_\infty = 4$, $\beta_c = 20°$, получим

$$\frac{\operatorname{tg}\theta_c}{\operatorname{tg}(\theta_c - 20°)} = \frac{4^2 \sin^2\theta_c\,(1{,}4+1)}{2 + (1{,}4-1)\,4^2 \sin^2\theta_c}.$$

Решая это уравнение, найдем $\theta_c = 32{,}6°$. По значению угла θ_c и заданному $\mathbf{M}_\infty = 4$ определим отношение давления торможения за скачком $p_{0Д}'$ к давлению торможения перед ним (давлению в форкамере p_0):

$$\frac{p_{0Д}'}{p_0} = \frac{k-1}{k+1} \frac{\left(\frac{2k}{k-1}\mathbf{M}_\infty^2 \sin^2\theta_c - 1\right)^{-\frac{1}{(k-1)}} (\mathbf{M}_\infty \sin\theta_c)^{\frac{k}{k-1}} \left[\frac{2\,(k-1)}{(k+1)^2}\right]^{\frac{-k}{(k-1)}}}{\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\infty^2 \sin^2\theta_c\right)^{\frac{k}{(k-1)}}} =$$

$$= \frac{1{,}4-1}{1{,}4+1} \frac{\left(\frac{2\cdot 1{,}4}{1{,}4-1} 4^2 \cdot \sin^2 32{,}6° - 1\right)^{-\frac{1}{1{,}4-1}} (4 \cdot \sin 32{,}6°)^{\frac{1{,}4}{1{,}4-1}} \left[\frac{2\,(1{,}4-1)}{(1{,}4+1)^2}\right]^{\frac{-1{,}4}{1{,}4-1}}}{\left(1 + \frac{1{,}4-1}{2} 4^2 \sin^2 32{,}6°\right)^{\frac{1{,}4}{1{,}4-1}}} =$$

$$= 0{,}65.$$

Если обозначить через $p_{0п}'$ давление торможения для условий за прямым скачком CB $(C'B')$, то, очевидно,

$$\frac{p_{0п}'}{p_{0Д}'} = \frac{k-1}{k+1} \times$$

$$\times \frac{\mathbf{M}_Д^{k/(k-1)}}{\left[\frac{2\,(k-1)}{(k+1)^2}\right]^{k/(k-1)} \left(\frac{2k}{k-1}\mathbf{M}_Д^2 - 1\right)^{1/(k-1)} \left(1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}_Д^2\right)^{k/(k-1)}}$$

где $\mathbf{M}_Д$ — число Маха за скачком AB $(A'B')$. Его величина

$$\mathbf{M}_Д = \left[\frac{2 + (k-1)\,\mathbf{M}_\infty^2}{2k\mathbf{M}_\infty^2 \sin^2\theta_c - (k-1)} + \frac{2\mathbf{M}_\infty^2 \cos^2\theta_c}{2 + (k-1)\,\mathbf{M}_\infty^2 \sin^2\theta_c}\right]^{1/2} =$$

$$= \left[\frac{2 + (1{,}4-1)\,4^2}{2 \cdot 1{,}4 \cdot 4^2 \cdot \sin^2 32{,}6° - (1{,}4-1)} + \frac{2 \cdot 4^2 \cdot \cos^2 32{,}6°}{2 + (1{,}4-1)\,4^2 \cdot \sin^2 32{,}6°}\right]^{1/2} =$$

$$= 2{,}56. \qquad (3.IV.17)$$

Таким образом,

$$\frac{p'_{0п}}{p'_{0Д}} = \frac{1,4-1}{1,4+1} \times$$

$$\times \frac{2,56^{1,4/(1,4-1)}}{\left[\frac{2\,(1,4-1)}{(1,4+1)^2}\right]^{1,4/(1,4-1)} \left(\frac{2\cdot 1,4}{1,4-1}\,2,56^2-1\right)^{1/(1,4-1)} \left(1+\frac{1,4-1}{2}\,2,56^2\right)^{1,4/(1,4-1)}} =$$

$$= 0,475.$$

Давление на выходе диффузора

$$p_B = p'_{0п}\left(1+\frac{k-1}{2}\,M_B^2\right)^{-k/(k-1)},$$

следовательно,

$$p'_{0п} = p_B\left(1+\frac{k-1}{2}\,M_B^2\right)^{\frac{k}{k-1}} = 1\left(1+\frac{1,4-1}{2}\,0,3^2\right)^{\frac{1,4}{1,4-1}} = 1,06\ кГ/см^2.$$

Теперь можно вычислить давление в форкамере:

$$p_0 = \frac{p'_{0Д}}{p'_{0Д}/p_0} = \frac{p'_{0п}}{(p'_{0Д}/p_0)(p'_{0п}/p'_{0Д})} = \frac{1,06}{0,65\cdot 0,475} = 3,43\ кГ/см^2.$$

IV.24. Картины течения сверхзвукового потока после выхода из сопла, изображенные на рис. 2.IV.9, возникают в зависимости от величины отношения давлений в газе на срезе сопла p_a к противодавлению, равному давлению $p_н$ в окружающей среде. Такое отношение обычно называют степенью нерасчетности ($n=p_a/p_н$). При $n>1$ ($p_a>p_н$) струя газа является недорасширенной. Для уменьшения давления на выходе из сопла струе газа необходимо пройти через волну разрежения (рис. 2.IV.9, *а*). Линии тока при этом расходятся от оси потока (рис. 3.IV.3, *а*). Так, например, пристеночная линия тока ABC повернется на угол β.

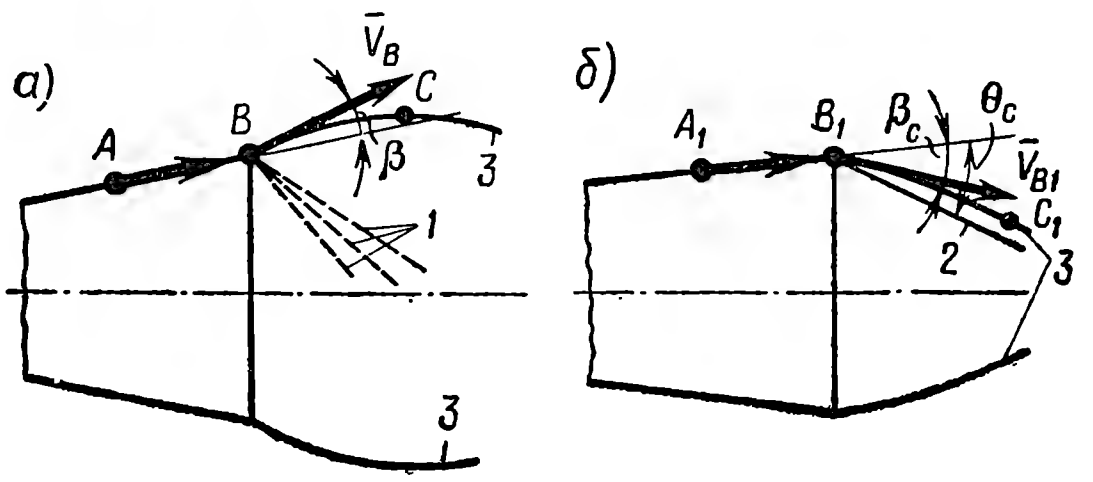


Рис. 3.IV.3. Схемы поворота линий тока в струе:

а — недорасширенной; *б* — перерасширенной; *1* — волна разрежения; *2* — скачок уплотнения; *3* — границы струи

Если $n<1$ ($p_a<p_н$), то струя окажется перерасширенной. Повышенное противодавление будет способствовать торможению этой струи. В результате возникнет система скачков уплотнения (рис. 2.IV.9, *б*) и давление в струе возрастет. Линии тока в этом случае будут сходиться к оси потока. На рис. 3.IV.3, *б* это показано на примере пристеночной линии тока $A_1B_1C_1$.

IV.25. Сначала найдем угол скачка θ_c, при котором число M_2 будет равно единице. Для этого удобно воспользоваться равенством (3.IV.17),

приняв в нем $M_Д = M_2 = 1$ и $M_\infty = M_1$. Разрешив его относительно $\sin^2\theta_c$, найдем

$$\sin^2\theta_c = \frac{1}{4kM_1^2}\left[(k+1)M_1^2 + k_1 - 3 + \right.$$

$$\left. + \sqrt{(k+1)\left[k+9+2M_1^2(k-3)+(k+1)M_1^4\right]}\right].$$

Внося сюда значения $M_1 = 4$ и $k = 1{,}4$, получим

$$\sin^2\theta_c = \frac{1}{4\cdot 1{,}4\cdot 4^2}\left[(1{,}4+1)4^2 + 1{,}4 - 3 + \right.$$

$$\left. + \sqrt{(1{,}4+1)[1{,}4+9+2\cdot 4^2(1{,}4-3)+(1{,}4+1)4^4}\right] = 0{,}82.$$

Определим соответствующий угол клина $\beta_{кл}$, используя зависимость

$$\operatorname{tg}\beta_{кл} = \sqrt{\frac{1-\sin^2\theta_c}{\sin^2\theta_c}}\left(M_1^2\sin^2\theta_c - 1\right)\left[1+\left(\frac{k+1}{2}-\sin^2\theta_c\right)M_1^2\right]^{-1}. \qquad (3.IV.18)$$

Подставляя сюда значения $\sin^2\theta_c = 0{,}82$, $M_1 = 4$ и $k = 1{,}4$, получим

$$\operatorname{tg}\beta_{кл} = \sqrt{\frac{1-0{,}82}{0{,}82}}\left(4^2\cdot 0{,}82 - 1\right)\left[1+\left(\frac{1{,}4+1}{2}-0{,}82\right)4^2\right]^{-1} = 0{,}805,$$

откуда $\beta_{кл} = 38°50'$.

IV.26. Воспользуемся зависимостью, связывающей между собой угол скачка θ_c и угол поворота потока β_c (угол клина $\beta_{кл}$),

$$\operatorname{ctg}\beta_c = \operatorname{tg}\theta_c\left[\frac{(k+1)M_1^2/2}{M_1^2\sin^2\theta_c - 1} - 1\right]$$

и исследуем эту зависимость на экстремум. С этой целью произведем дифференцирование:

$$-\frac{1}{\sin^2\beta_c}\cdot\frac{d\beta_c}{d\theta_c} = \frac{1}{1-\sin^2\theta_c}\left[\frac{(k+1)M_1^2/2}{M_1^2\sin^2\theta_c - 1} - 1\right] + \frac{(k+1)M_1^4\sin^2\theta_c}{\left(M_1^2\sin^2\theta_c - 1\right)^2}. \qquad (3.IV.19)$$

Условием равенства $d\beta_c/d\theta_c = 0$, при котором возможен экстремум исследуемой функции, является равенство нулю правой части (3.IV.19), так как $1/\sin^2\beta_c = \infty$ только при $\beta_c = 0$, когда поворота потока нет вообще. Поэтому, приведя правую часть (3.IV.19) к общему знаменателю $(M_1^2\sin^2\theta_c - 1)^2(1-\sin^2\theta_c)$, который не может быть бесконечно большим, и приравнивая нулю числитель получившейся дроби, получим следующее квадратное уравнение относительно $M_1^2\sin^2\theta_{cm}$

$$M_1^4\sin^4\theta_{cm} + \frac{2}{k}\left(1-\frac{k+1}{4}M_1^2\right)M_1^2\sin^2\theta_{cm} - \frac{1}{k}\left(1+\frac{k-1}{2}M_1^2\right) = 0.$$

Корнями этого уравнения являются величины

$$M_1^2\sin^2\theta_{cm} = -\frac{1}{k}\left(1-\frac{k+1}{4}M_1^2\right) \pm$$

$$\pm\sqrt{\frac{1}{k^2}\left(1-\frac{k+1}{4}M_1^2\right)^2 + \frac{1}{k}\left(1+\frac{k+1}{2}M_1^2\right)}. \qquad (3.IV.20)$$

Подстановка значения $M_1^2\sin^2\theta_{cm}$, взятого со знаком плюс, в (3.IV.18) дает значение максимально возможного угла поворота потока за скачком β_{cm}. В справедливости сказанного можно убедиться на частном примере, когда $M_1 = M_\infty \to \infty$. Действительно, преобразуя (3.IV.20), получим

$$\sin^2\theta_{cm} = -\frac{1}{k}\left(\frac{1}{M_1^2}-\frac{k+1}{4}\right) \pm$$

$$\pm\sqrt{\frac{1}{M_1^4 k^2}\left(1-\frac{k+1}{4}M_1^2\right)^2+\frac{1}{kM_1^4}\left(1+\frac{k+1}{2}M_1^2\right)},$$

откуда при $M_1\to\infty$

$$\sin^2\theta_{cm}=\frac{k+1}{4k}\pm\frac{k+1}{4k}.$$

Очевидно, знак минус здесь не имеет физического смысла, поскольку в этом случае θ_{cm} было бы равно нулю. Поэтому

$$\sin^2\theta_{cm}=(k+1)/2k.$$

Подстановка этого выражения в (3.IV.18) приводит к следующему результату (при этом $\beta_{кл}=\beta_c=\beta_{cm}$):

$$\operatorname{tg}\beta_{cm}=\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\left(\frac{k+1}{2k}M_1^2-1\right)\left(1+\frac{k^2-1}{2k}M_1^2\right)^{-1}. \qquad (3.IV.20')$$

Величина β_{cm} называется также критическим углом поворота потока: $\beta_{cm}=\beta_{кр}$.

IV.27. При обтекании заостренного клина с присоединенным скачком уплотнения коэффициент давления за ним зависит от числа M_1 набегающего потока и угла клина $\beta_{кл}$, равного углу поворота потока за скачком β_c, т. е. $\bar{p}=f(M_1, \beta_c)$. При этом с ростом угла β_c коэффициент давления увеличивается. Эту функцию можно представить в виде степенного ряда по параметру β_c. Чем больше значения угла β_c, тем большее число членов ряда надо учитывать при вычислении коэффициента давления с заданной точностью. Если углы клина сравнительно небольшие, то оказывается достаточным применять формулу разложения в ряд Тейлора с двумя членами:

$$\bar{p}=\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial\beta_c}\right)_{\beta_c=0}\beta_c+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\bar{p}}{\partial\beta_c^2}\right)_{\beta_c=0}\beta_c^2, \qquad (3.IV.21)$$

в которой производные $(\partial\bar{p}/\partial\beta_c)_{\beta_c=0}$ и $(\partial^2\bar{p}/\partial\beta_c^2)_{\beta_c=0}$ находятся при $\beta_c=0$, т. е. для бесконечно слабого скачка уплотнения.

Для вычисления этих производных применим правило дифференцирования сложных функций, поскольку, как это следует из выражений (2.IV.1) и (3.IV.18), коэффициент давления является сложной функцией угла β_c. В соответствии с этим правилом получим

$$\frac{\partial\bar{p}}{\partial\beta_c}=\frac{\partial\bar{p}}{\partial(\sin^2\theta_c)}\cdot\frac{d(\sin^2\theta_c)}{d\beta_c}=\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}\right)\Big/\left(\frac{\partial\beta_c}{\partial x}\right), \qquad (3.IV.22)$$

где для краткости письма обозначено $x=\sin^2\theta_c$. Производная $\partial\bar{p}/\partial x$ вычисляется с помощью (2.IV.1):

$$\partial\bar{p}/\partial x=4/(k+1),$$

а производная $\partial\beta_c/\partial x$ — с применением (3.IV.18):

$$\frac{\partial\beta_c}{\partial x}=\frac{1}{1+\left[\dfrac{\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\left(M_1^2x-1\right)}{1+\left(\dfrac{k-x}{2}-x\right)M_1^2}\right]^2}\times$$

$$\times\frac{\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{1-x}\right)^{1/2}\dfrac{1}{x^2}\left(M_1^2x-1\right)+\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}M_1^2\right]\times}{\left[1+\left(\dfrac{k+1}{2}-x\right)M_1^2\right]^2}\to$$

$$\rightarrow \frac{\times\left[1+\left(\frac{k+1}{2}-x\right)\mathbf{M}_1^2\right]+\sqrt{\frac{1-x}{x}}\left(\mathbf{M}_1^2 x-1\right)\widetilde{\mathbf{M}}_1^2}{\left[1+\left(\frac{k+1}{2}-x\right)\mathbf{M}_1^2\right]^2}. \qquad (3.IV.23)$$

При $\beta_c \to 0$ величина $x=\sin^2\theta_c \to \sin^2\mu_1 = 1/\mathbf{M}_1^2$, поэтому

$$(\partial\beta_c/\partial x)_{\beta_c=0} = 2\sqrt{\mathbf{M}_1^2-1}/(k+1),$$

а в соответствии с (3.IV.22)

$$(\partial\bar{p}/\partial\beta_c)_{\beta_c=0} = 2/\sqrt{\mathbf{M}_1^2-1}.$$

Производная

$$\frac{\partial^2\bar{p}}{\partial\beta_c^2} = \frac{\partial}{\partial\beta_c}\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial\beta_c}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial\beta_c}\right)\frac{\partial x}{\partial\beta_c}. \qquad (3.IV.24)$$

Значение $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial\beta_c}\right)$ получаем с помощью дифференцирования (3.IV.23).

Вводя для краткости записи следующие обозначения:

$$a = 1+\left(\frac{k+1}{2}-x\right)\mathbf{M}_1^2; \quad b = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{1/2}; \quad c = \frac{1}{x};$$

$$n = \mathbf{M}_1^2 x - 1; \quad m = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{1/2},$$

получим с помощью (3.IV.22) и (3.IV.23)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial\beta_c}\right) = \frac{\partial}{\partial_x}\left[\frac{\frac{4}{k+1}a^2\left(1+\frac{m^2n^2}{a^2}\right)}{\left(-\frac{1}{2}bcn+m\mathbf{M}_1^2\right)a+mn\mathbf{M}_1^2}\right] =$$

$$= \frac{4}{k+1}\left\{\frac{\left(2aa'+2mm'n^2+2m^2nn'\right)\left[\left(-\frac{1}{2}bcn+m\mathbf{M}_1^2\right)a+mn\mathbf{M}_1^2\right]}{\left[\left(-\frac{1}{2}bcn+m\mathbf{M}_1^2\right)a+mn\mathbf{M}_1^2\right]^2} - \right.$$

$$\left(a^2+m^2n^2\right)\left(-\frac{1}{2}b'cna-\frac{1}{2}bc'na-\frac{1}{2}bcn'a+m'\mathbf{M}_1^2a-\right.$$

$$- \frac{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}{\left[\left(-\frac{1}{2}bcn+m\mathbf{M}_1^2\right)a+mn\mathbf{M}_1^2\right]^2} \cdots\rightarrow$$

$$\left.\left.\cdots\rightarrow \frac{-\frac{1}{2}bcna'+ma'\mathbf{M}_1^2+m'n\mathbf{M}_1^2+mn'\mathbf{M}_1^2\right)}{\left[\left(-\frac{1}{2}bcn+m\mathbf{M}_1^2\right)a+mn\mathbf{M}_1^2\right]^2}\right\}.$$

При $\beta_c=0$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial\beta_c}\right)_{\beta_c=0} = \frac{4}{k+1}\left[-\frac{2}{\sqrt{\mathbf{M}_1^2-1}}+\frac{(k+1)\,\mathbf{M}_1^4/2}{\sqrt{\left(\mathbf{M}_1^2-1\right)^3}}\right]. \qquad (3.IV.25)$$

Учитывая, что

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\beta_c}\right)_{\beta_c=0} = \frac{k+1}{2\sqrt{\mathbf{M}_1^2+1}},$$

из (3.IV.24) и (3.IV.25) найдем

$$\left(\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \beta_c^2}\right)_{\beta_c=0} = \frac{(k+1)\,\mathbf{M}_1^4/2 - 2\left(\mathbf{M}_1^2-1\right)}{\left(\mathbf{M}_1^2-1\right)^2},$$

а сам коэффициент давления

$$\bar{p} = \frac{2}{\sqrt{\mathbf{M}_1^2-1}}\,\beta_c + \frac{(k+1)\,\mathbf{M}_1^4 - 4\left(\mathbf{M}_1^2-1\right)}{2\left(\mathbf{M}_1^2-1\right)^2}\,\beta_c^2.$$

IV.28. Критическим углом называется максимальный угол поворота потока за скачком уплотнения. При увеличении давления критический

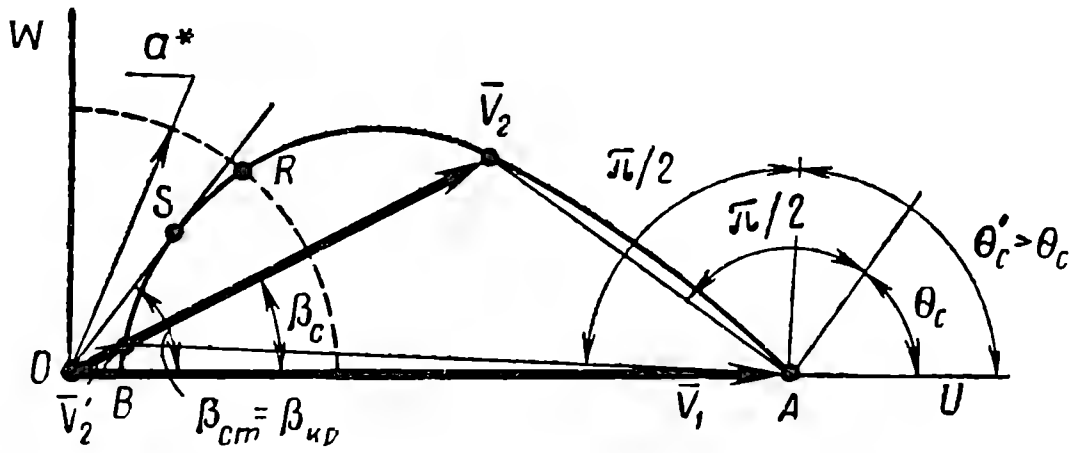


Рис. 3.IV.4. График ударной поляры

угол поворота потока останется неизменным, так как он зависит лишь от числа $\mathbf{M}_1$ и показателя адиабаты $k = c_p/c_v$.

IV.29. С увеличением числа $\mathbf{M}_1$ сверхзвукового набегающего потока критический угол поворота потока за скачком будет увеличиваться. В этом нетрудно убедиться, рассмотрев выражение (3.IV.20′) для такого угла β_{cm}. С физической точки зрения с ростом числа $\mathbf{M}_1$ интенсивность скачка уплотнения увеличивается, возрастает плотность газа за скачком, фронт скачка приближается к обтекаемой поверхности и поток получает возможность при необходимости разворачиваться на больший угол.

IV.30. Угол наклона вектора скорости по мере удаления от точки A (см. рис. 2.IV.10) будет увеличиваться от нуля до некоторого максимального значения β_{cm}, а затем уменьшаться. В точке B, расположенной на участке волны, достаточно удаленной от обтекаемой преграды и совпадающей с волной Маха, этот угол равен нулю.

IV.31. Большему значению угла θ_c соответствует дозвуковое течение за скачком уплотнения, а меньшему — сверхзвуковое, что видно из графика ударной поляры (рис. 3.IV.4).

IV.32. Угол наклона присоединенного скачка уплотнения θ_c при увеличении угла клина β_c возрастает. Это следует непосредственно из графика ударной поляры, приведенного на рис. 3.IV.5. Согласно этому графику при $\theta_{c2} > \theta_{c1}$ имеет место $\beta_{c2} > \beta_{c1}$.

IV.33. Если увеличить число $\mathbf{M}_1$ набегающего сверхзвукового потока, то угол присоединенного скачка уплотнения перед клином уменьшится. Это видно, например, из графиков двух ударных поляр, соответствующих числам $\mathbf{M}_1'$ и $\mathbf{M}_1'' > \mathbf{M}_1'$ (рис. 3.IV.6).

IV.34. Проанализируем различные случаи, которые могут привести к образованию скачков уплотнения, изображенных на рис. 2.IV.11. Отошедший криволинейный скачок уплотнения может быть в случае, когда $\beta_{кл} > \beta_{кр}$. Если $k_1 = k_2$, то, поскольку критическое значение угла поворота потока $\beta_{кр}$ увеличивается с ростом числа Маха набегающего потока, указанная картина скачков уплотнения может быть лишь при соблюдении неравенства $\mathbf{M}_{\infty 1} > \mathbf{M}_{\infty 2}$, когда один и тот же угол $\beta_{кл}$ ока-

жется больше критического для потока с меньшей скоростью. Если число $\mathbf{M}_{\infty 1}=\mathbf{M}_{\infty 2}$, то, поскольку $\beta_{кр}$ возрастает с уменьшением k, необходимым условием реализации картины скачков уплотнения будет неравенство $k_1<k_2$. Если же $\mathbf{M}_{\infty 1}\neq\mathbf{M}_{\infty 2}$ и $k_1\neq k_2$, то при $\mathbf{M}_{\infty 1}>\mathbf{M}_{\infty 2}$ и $k_1<k_2$ картина скачков (см. рис. 2.IV.11) возможна, а при $\mathbf{M}_{\infty 1}<\mathbf{M}_{\infty 2}$ и $k_1>k_2$ невозможна. Что же касается случаев, когда либо $\mathbf{M}_{\infty 1}>\mathbf{M}_{\infty 2}(k_1>k_2)$, либо $\mathbf{M}_{\infty 1}<\mathbf{M}_{\infty 2}(k_1<k_2)$, то существование рассматриваемых скачков возможно лишь при вполне определенных значениях $\mathbf{M}_{\infty 1}$, $\mathbf{M}_{\infty 2}$, k_1 и k_2, входящих в эти неравенства.

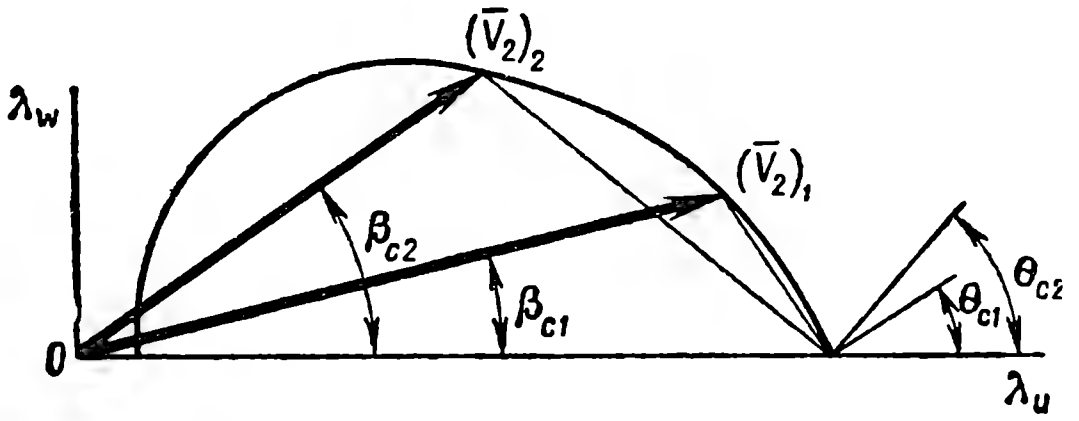


Рис. 3.IV.5. Зависимость угла скачка от угла клина на графике ударной поляры

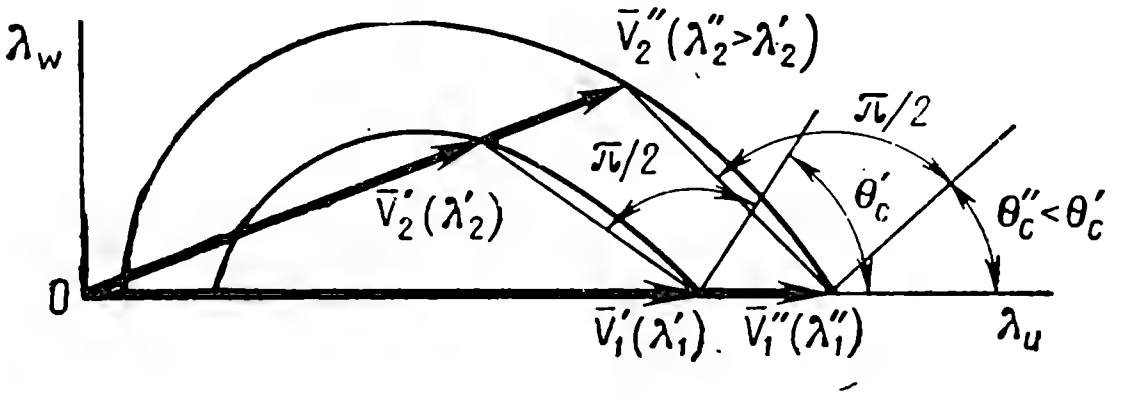


Рис. 3.IV.6. Графики ударных поляр для различных чисел $\mathbf{M}_\infty$ набегающего потока

IV.35. Для расчета сверхзвукового обтекания заостренного клина пригоден лишь участок ударной поляры от точки A до точки R (см. рис. 3.IV.4).

На участке RS скорость за скачком будет дозвуковой, и он начнет искривляться. Участок SB практически не может применяться для расчета отошедших криволинейных скачков уплотнения, возникающих перед клиньями со сверхкритическими углами, так как для него не имеется однозначного соответствия между скоростью за скачком и положением точки на поверхности клина. Другими словами, участок SB описывает совокупность отдельных косых и прямого (точка B) скачков уплотнения, на которые может быть разбит криволинейный скачок. С его помощью можно найти зависимость между скоростью и углом поворота потока за скачком для отдельных струек газа, пересекающих криволинейный скачок, но невозможно указать, где эти струйки расположены, т. е. какой будет форма этого скачка.

IV.36. На рис. 2.IV.12 точке K (участок прямого скачка) соответствует на ударной поляре (см. рис. 3.IV.4) точка B. Точке L, в которой угол поворота потока максимальный ($\beta_c=\beta_{cm}$), соответствует точка S, а точке N на звуковой волне (волне Маха) — точка A.

IV.37. В уравнение годографа скорости

$$\frac{\lambda_w^2}{(\lambda_1-\lambda_u)^2}=\frac{\lambda_u\lambda_1-1}{\frac{2}{k+1}\lambda_1^2+1-\lambda_1\lambda_u}$$

необходимо подставить максимальное значение относительной скорости $\lambda_1=\lambda_m=\sqrt{(k+1)/(k-1)}$. Тогда

$$\lambda_w^2=\left(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}-\lambda_u\right)\left(\lambda_u\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}-1\right)\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}.$$

График этого уравнения представляет собой окружность, симметричную относительно оси λ_u и пересекающую ее в точках с абсциссами $\lambda_u=\sqrt{(k-1)/(k+1)}$ и $\lambda_u=\sqrt{(k+1)/(k-1)}=\lambda_m$.

IV.38. Определим вначале

$$\lambda_1=\sqrt{\rho_2/\rho_1}=\sqrt{5}=2{,}24.$$

Этому значению соответствует число Маха перед скачком:

$$\mathbf{M}_1=\left[\frac{2\lambda_1^2/(k+1)}{1-\lambda_1^2(k-1)/(k+1)}\right]^{1/2}=\left[\frac{2\cdot5/(1{,}2+1)}{1-5(1{,}2-1)/(1{,}2+1)}\right]^{1/2}=2{,}89,$$

по которому подсчитываем отношение давлений:

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{2k}{k+1}\mathbf{M}_1^2-\frac{k-1}{k+1}=\frac{2\cdot1{,}2}{1{,}2+1}2{,}89^2-\frac{1{,}2-1}{1{,}2+1}=9{,}00.$$

Пользуясь уравнением состояния, вычисляем отношение температур:

$$T_2/T_1=(p_2/p_1)(\rho_1/\rho_2)=9/5=1{,}80.$$

В соответствии с этим отношение скоростей звука

$$a_2/a_1=\sqrt{T_2/T_1}=\sqrt{1{,}80}=1{,}34.$$

Так как отношение скоростей потока

$$V_2/V_1=1/\lambda_1^2=0{,}2,$$

то

$$\mathbf{M}_2/\mathbf{M}_1=(V_2/V_1)(a_1/a_2)=0{,}2/1{,}34=0{,}149.$$

Следовательно, число Маха за скачком

$$\mathbf{M}_2=(\mathbf{M}_2/\mathbf{M}_1)\,\mathbf{M}_1=0{,}149\cdot2{,}89=0{,}431.$$

IV.39. Скорость за прямым скачком всегда дозвуковая, а за косым такая скорость может быть как сверхзвуковой, так и дозвуковой (см. ударную поляру на рис. 3. IV.4).

IV.40. Применим следующую формулу для коэффициента давления в точке полного торможения за прямым скачком уплотнения:

$$\bar{p}_0=\frac{p_0'-p_1}{q_1}=\frac{2}{k\mathbf{M}_1^2}\left[\left(\frac{2k}{k+1}\mathbf{M}_1^2-\frac{k-1}{k+1}\right)^{\frac{-1}{k-1}}\mathbf{M}_1^{\frac{2k}{k-1}}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{-k}{k-1}}-1\right]. \qquad (3.\text{IV}.26)$$

Вычислим предельное значение этого коэффициента при $\mathbf{M}_1\to\infty$:

$$\lim_{\mathbf{M}_1\to\infty}\bar{p}_0=\bar{p}_{0\infty}=2k^{-k/(k-1)}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{-(k+1)/(k-1)}, \qquad (3.\text{IV}.27)$$

а затем получим зависимость, связывающую величины $\bar{p}_0$ и $\bar{p}_{0\infty}$. С этой целью представим формулу (3.IV.26) следующим образом:

$$\bar{p}_0=2k^{-\frac{k}{k-1}}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{-\frac{k+1}{k-1}}\left(1-\frac{k-1}{2k}\cdot\frac{1}{\mathbf{M}_1^2}\right)-\frac{2}{k\mathbf{M}_1^2}.$$

Эту формулу можно переписать с учетом (3.IV.27) в следующем виде:

$$\bar{p}_0=\bar{p}_{0\infty}\left(1-\frac{k-1}{2k}\cdot\frac{1}{\mathbf{M}_1^2}\right)-\frac{2}{k\mathbf{M}_1^2}. \qquad (3.\text{IV}.28)$$

Здесь значения $\bar{p}_{0\infty}$ для $k=1{,}2$ и $k=1{,}4$ соответственно будут:

$$\bar{p}_{0\infty}^{(1)} = 2\cdot 1{,}2^{-\frac{1{,}2}{1{,}2-1}}\left(\frac{2}{1{,}2+1}\right)^{-\frac{1{,}2+1}{1{,}2-1}} = 1{,}93;$$

$$\bar{p}_{0\infty}^{(2)} = 2\cdot 1{,}4^{-\frac{1{,}4}{1{,}4-1}}\left(\frac{2}{1{,}4+1}\right)^{-\frac{1{,}4+1}{1{,}4-1}} = 1{,}83.$$

По этим значениям определяем коэффициенты давления для $\mathbf{M}_1=10$:

$$\bar{p}_0^{(1)} = 1{,}93\left(1-\frac{1{,}2-1}{2\cdot 1{,}2}\cdot\frac{1}{10^2}\right)-\frac{2}{1{,}2\cdot 10^2} = 1{,}91;$$

$$\bar{p}_0^{(2)} = 1{,}83\left(1-\frac{1{,}4-1}{2\cdot 1{,}4}\cdot\frac{1}{10^2}\right)-\frac{2}{1{,}4\cdot 10^2} = 1{,}82.$$

IV.41. Из основного соотношения для прямого скачка уплотнения $\lambda_1\lambda_2=1$ находим $\lambda_2=1/\lambda_1=1/1{,}90=0{,}526$, а по формуле $\rho_2/\rho_1=\lambda_1^2$ определяем отношение плотностей $\rho_2/\rho_1=1{,}90^2=3{,}61$.

Для определения отношения температур T_2/T_1 используем газодинамическую функцию $\tau(\lambda)=T/T_0=1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2$, в соответствии с которой

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_0'}{T_0}\cdot\frac{\tau(\lambda_2)}{\tau(\lambda_1)}.$$

Так как температура торможения за скачком уплотнения не изменяется ($T_0'=T_0$), то

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\tau(\lambda_2)}{\tau(\lambda_1)} = \frac{0{,}954}{0{,}398} = 2{,}40.$$

По уравнению состояния отношение давлений

$$p_2/p_1 = (\rho_2/\rho_1)(T_2/T_1) = 3{,}61\cdot 2{,}40 = 8{,}66.$$

Для вычисления $\nu=p_0'/p_0$ воспользуемся зависимостью

$$\nu = q(\lambda_1)/q(\lambda_2), \qquad (3.IV.29)$$

в которой функции

$$q(\lambda_{1,2}) = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{1/(k-1)}\lambda_{1,2}\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_{1,2}^2\right)^{1/(k-1)}.$$

Определяя из табл. 9 [13] по $\lambda_1=1{,}90$ и $\lambda_2=0{,}526$ значения $q(\lambda_1)=0{,}300$ и $q(\lambda_2)=0{,}736$, найдем

$$\nu = 0{,}300/0{,}736 = 0{,}406.$$

IV.42. Для определения максимально допустимого «загромождения» потока в рабочей части сверхзвуковой аэродинамической трубы применим зависимость (3.IV.4), полагая в ней S_1 и S_2 равными соответственно площадям сечений потока в рабочей части и в наиболее «загроможденном» месте трубы, а $\mathbf{M}_1=\mathbf{M}_\infty$. Тогда число Маха $\mathbf{M}_2$ в (3.IV.4) будет определено для этого места трубы. Из (3.IV.4) находим

$$\frac{S_1-S_2}{S_1} = 1-\frac{1}{\nu}\cdot\frac{q(\mathbf{M}_\infty)}{q(\mathbf{M}_2)}. \qquad (3.IV.30)$$

Будем считать, что «пусковой» скачок является прямым. Поэтому для него справедлива зависимость (3.IV.29), в которой следует принять $\mathbf{M}_1=\mathbf{M}_\infty(\lambda_1=\lambda_\infty)$, а $\mathbf{M}_2=\mathbf{M}_{\text{пр}}(\lambda_2=\lambda_{\text{пр}})$, где $\mathbf{M}_{\text{пр}}$ — число Маха за прямым скачком. В соответствии с этим

$$\nu = q(\mathbf{M}_\infty)/q(\mathbf{M}_{\text{пр}}),$$

следовательно,

$$(S_1 - S_2)/S_1 = 1 - q(\mathbf{M}_{\text{пр}})/q(\mathbf{M}_2). \qquad (3.IV.31)$$

Допустимое значение $(S_1 - S_2)/S_1$ должно быть несколько меньше величины, найденной из (3.IV.31) при $\mathbf{M}_2 = 1$, т. е.

$$[(S_1 - S_2)/S_1]_{\max} = 1 - q(\mathbf{M}_{\text{пр}}). \qquad (3.IV.32)$$

Действительно, если равенство (3.IV.32) соблюдается, то в наиболее «загроможденном» (т. е. в самом узком) сечении трубы при приближении к нему «пускового» скачка установится скорость, равная скорости звука ($\mathbf{M}_2 = 1$). В этом случае говорят, что аэродинамическая труба будет «заперта», а рассматриваемое сечение станет критическим. Пусковой скачок не пройдет через всю рабочую часть, а останется в этом сечении, как бы перегораживая трубу. Поток перед моделью не будет сверхзвуковым с заданными параметрами. Число Маха за таким прямым скачком

$$\mathbf{M}_{\text{пр}} = \sqrt{\frac{\mathbf{M}_\infty^2 + 2/(k-1)}{2k\mathbf{M}_\infty^2/(k-1) - 1}} = \sqrt{\frac{2{,}68^2 + 2/(1{,}4-1)}{2 \cdot 1{,}4 \cdot 2{,}68^2/(1{,}4-1) - 1}} = 0{,}497.$$

В табл. 9 [13] этому числу $\mathbf{M}_{\text{пр}}$ соответствует значение $q(\mathbf{M}_{\text{пр}}) = 0{,}740$. Поэтому

$$[(S_1 - S_2)/S_1]_{\max} = 1 - 0{,}740 = 0{,}260.$$

IV.43. Расчет отношения плотностей ведется по формуле $\rho_2/\rho_1 = (k+1)/(k-1)$. Для $k = 1{,}2$ отношение $\rho_2/\rho_1 = (1{,}2+1)/(1{,}2-1) = 11$, а для $k = 1{,}4$ отношение $\rho_2/\rho_1 = (1{,}4+1)/(1{,}4-1) = 6$.

Предельные значения коэффициентов давления:

$$\bar{p}_2 = \frac{p_2 - p_1}{q_1} = \frac{4}{k+1}\sin^2\theta_c;$$

$$\bar{p}_0 = \frac{p_0' - p_1}{q_1} = 2\left(\frac{2}{k+1}\right)^{-\frac{1}{k-1}}\left(\frac{2k}{k+1}\right)^{-\frac{k}{k-1}}\sin^{\frac{2}{1-k}}\theta_c$$

и число Маха

$$\mathbf{M}_2 = \left\{\frac{(k+1)^2}{2k(k-1)}\left[\operatorname{ctg}^2\theta_c + \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2\right]\right\}^{1/2}$$

зависят, как видно, от угла скачка θ_c. Для определения θ_c воспользуемся формулой

$$\operatorname{tg}\theta_c = \frac{\operatorname{ctg}\beta_c}{2\dfrac{k-1}{k+1}}\left[\frac{2}{k+1} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{k+1}\right)^2 - 4\frac{k-1}{k+1}\operatorname{tg}^2\beta_c}\right].$$

Подставляя в нее значения $k = 1{,}2$ и $\beta_c = 30°$, получим

$$\operatorname{tg}\theta_c = \frac{\operatorname{ctg}30°}{2(1{,}2-1)/(1{,}2+1)}\left[\frac{2}{1{,}2+1} \pm \right.$$

$$\left. \pm \sqrt{\left(\frac{2}{1{,}2+1}\right)^2 - 4\frac{1{,}2-1}{1{,}2+1}\operatorname{tg}^2 30°}\right] = 8{,}66 \pm 8{,}00.$$

Меньшее значение угла θ_c соответствует скачку уплотнения слабой интенсивности (верхняя часть отсоединенного скачка уплотнения):

$$\operatorname{tg}\theta_{c1} = 0{,}66, \quad \theta_{c1} = 33°\,26'.$$

Большое значение относится к скачку повышенной интенсивности (нижний участок отсоединенного скачка):

$$\operatorname{tg}\theta_{c2} = 16{,}66, \quad \theta_{c2} = 86°\,34'.$$

Вычислим коэффициенты давления для угла $\theta_{c1}=33°26'$:

$$\bar{p}_2^{(1)} = \frac{4}{1{,}2+1}\sin^2 33°\,26' = 0{,}552;$$

$$\bar{p}_2^{(2)} = \frac{4}{1{,}4+1}\sin^2 33°\,26' = 0{,}506.$$

Для угла $\theta_{c2}=86°34'$ найдем:

$$\bar{p}_2^{(1)} = \frac{4}{1{,}2+1}\sin^2 86°\,34' = 1{,}81;$$

$$\bar{p}_2^{(2)} = \frac{4}{1{,}4+1}\sin^2 86°\,34' = 1{,}66.$$

Соответствующие значения коэффициента давления торможения при $\theta_{c1}=33°26'$ будут такими:

$$\bar{p}_0^{(1)} = 2\left(\frac{2}{1{,}2+1)}\right)^{-\frac{1}{1{,}2-1}}\left(\frac{2\cdot 1{,}2}{1{,}2+1}\right)^{-\frac{1{,}2}{1{,}2-1}}\sin^2 33°\,26' = 823;$$

$$\bar{p}_0^{(2)} = 2\left(\frac{2}{1{,}4+1}\right)^{-\frac{1}{1{,}4-1}}\left(\frac{2\cdot 1{,}4}{1{,}4+1}\right)^{-\frac{1{,}4}{1{,}4-1}}\sin^2 33°\,26' = 36{,}2$$

а при $\theta_{c2}=86°34'$:

$$\bar{p}_0^{(1)} = 2\left(\frac{2}{1{,}2+1}\right)^{-\frac{1}{1{,}2-1}}\left(\frac{2\cdot 1{,}2}{1{,}2+1}\right)^{-\frac{1{,}2}{1{,}2-1}}\sin^2 86°\,34' = 2{,}16;$$

$$\bar{p}_0^{(2)} = 2\left(\frac{2}{1{,}4+1}\right)^{-\frac{1}{1{,}4-1}}\left(\frac{2\cdot 1{,}4}{1{,}4+1}\right)^{-\frac{1{,}4}{1{,}4-1}}\sin^2 86°\,34' = 1{,}83.$$

Аналогично рассчитываем числа $\mathbf{M}_2$. Для угла $\theta_{c1}=36°26'$:

$$\mathbf{M}_2^{(1)} = \left\{\frac{(1{,}2+1)^2}{2\cdot 1{,}2\,(1{,}2-1)}\left[\operatorname{ctg}^2 33°\,26' + \left(\frac{1{,}2-1}{1{,}2+1}\right)^2\right]\right\}^{1/2} = 4{,}81;$$

$$\mathbf{M}_2^{(2)} = \left\{\frac{(1{,}4+1)^2}{2\cdot 1{,}4\,(1{,}4-1)}\left[\operatorname{ctg}^2 33°\,26' + \left(\frac{1{,}4-1}{1{,}4+1}\right)^2\right]\right\}^{1/2} = 3{,}45,$$

а для угла $\theta_{c2}=86°34'$:

$$\mathbf{M}_2^{(1)} = \left\{\frac{(1{,}2+1)^2}{2\cdot 1{,}2\,(1{,}2-1)}\left[\operatorname{ctg}^2 86°\,34' + \left(\frac{1{,}2-1}{1{,}2+1}\right)^2\right]\right\}^{1/2} = 0{,}346;$$

$$\mathbf{M}_2^{(2)} = \left\{\frac{(1{,}4+1)^2}{2\cdot 1{,}4\,(1{,}4-1)}\left[\operatorname{ctg}^2 86°\,34' + \left(\frac{1{,}4-1}{1{,}4+1}\right)^2\right]\right\}^{1/2} = 0{,}402.$$

IV.44. По заданным величинам $\mathbf{M}_1=15$, $\beta_c=5{,}73°/57{,}3=0{,}1$ *рад* и $k=1{,}4$ вычисляем параметр подобия $\mathbf{K}=\mathbf{M}\beta_c=15\cdot 0{,}1=1{,}5$. По этому значению найдем параметр подобия в виде

$$\mathbf{K}_c = \frac{\mathbf{K}}{4/(k+1)}\left[1+\sqrt{1+\frac{4}{\mathbf{K}^2}\cdot\frac{4}{(k+1)^2}}\right] =$$

$$= \frac{1{,}5}{4/(1{,}4+1)}\left[1+\sqrt{1+\frac{4}{1{,}5^2}\cdot\frac{4}{(1{,}4+1)^2}}\right] = 2{,}25.$$

Соответствующий угол наклона скачка

$$\theta_c = \mathbf{K}_c/\mathbf{M}_1 = 2{,}25/15 = 0{,}15\ \textit{рад},$$

а коэффициент давления

$$\bar{p}_2 = 2\mathbf{K}_c\,\beta_c^2 = 2\cdot 2{,}25\cdot 0{,}1^2 = 0{,}045.$$

Отношение плотностей

$$\rho_2/\rho_1 = \frac{\mathbf{K}_c^2}{2/(k+1)+\mathbf{K}_c^2(k-1)/(k+1)} = \frac{2{,}25^2}{2/(1{,}4+1)+2{,}25^2(1{,}4-1)/(1{,}4+1)} =$$

$$= 3{,}02.$$

Рассмотрим определение числа Маха:

$$\theta_c^2\mathbf{M}_2^2 = \frac{\mathbf{K}_c^4}{\left[\left(\frac{2k}{k+1}\right)\mathbf{K}_c^2-\frac{k-1}{k+1}\right]\left[\left(\frac{2}{k+1}\right)+\frac{k-1}{k+1}\mathbf{K}_c^2\right]} =$$

$$= \frac{2{,}25^4}{\left[\left(\frac{2\cdot 1{,}4}{1{,}4+1}\right)2{,}25^2-\frac{1{,}4-1}{1{,}4+1}\right]\left[\left(\frac{2}{1{,}4+1}\right)+\frac{1{,}4-1}{1{,}4+1}2{,}25^2\right]} = 2{,}67;$$

$$\mathbf{M}_2 = \left[\left(\theta_c^2\mathbf{M}_2^2\right)/\theta_c^2\right]^{1/2} = (2{,}67/0{,}15^2)^{1/2} = 11.$$

Теперь вычислим параметры для аэродинамически подобных потоков с числами $\mathbf{M}_1=10$, $\mathbf{M}_1=20$ и $k=1{,}4$. По условию подобия для этих потоков, значения параметров $\mathbf{K}=\mathbf{M}_1\beta_c$ и $\mathbf{K}_c=\mathbf{M}_1\theta_c$ будут такими же, что и для заданного, т. е. $\mathbf{K}=1{,}5$ и $\mathbf{K}_c=2{,}25$. Им при $\mathbf{M}_1=10$ и 20 соответствуют следующие углы β_c и θ_c:

$$\beta_c = \mathbf{K}/\mathbf{M}_1 = 1{,}5/10 = 0{,}15, \quad \theta_c = \mathbf{K}_c/\mathbf{M}_1 = 2{,}25/10 = 0{,}225 \quad (\mathbf{M}_1 = 10);$$

$$\beta_c = 1{,}5/20 = 0{,}075, \qquad \theta_c = 2{,}25/20 = 0{,}112 \quad (\mathbf{M}_1 = 20).$$

Коэффициенты давления будут следующими:

при $\mathbf{M}_1=10$ величина $\bar{p}_2=2\,\beta_c\theta_c=2\cdot 0{,}15\cdot 0{,}225=0{,}068$;

при $\mathbf{M}_2=20$ величина $\bar{p}_2=2\cdot 0{,}075\cdot 0{,}112=0{,}017$.

Отношения плотностей для чисел Маха $\mathbf{M}_1=10$ и 20 останутся такими же, как и при $\mathbf{M}_1=15$.

Числа Маха за скачком:

при $\mathbf{M}_1=10$

$$\mathbf{M}_2 = \left[\left(\theta_c^2\mathbf{M}_2^2\right)/\theta_c^2\right]^{1/2} = (2{,}66/0{,}225^2)^{1/2} = 7{,}26;$$

при $\mathbf{M}_1=20$

$$\mathbf{M}_2 = (2{,}66/0{,}112^2)^{1/2} = 14{,}6.$$

IV.45. Температура за скачком уплотнения в диссоциированном газе будет меньше по сравнению с ее значением в случае постоянных теплоемкостей. Это объясняется затратами энергии газа на тепловую диссоциацию его молекул. Диссоциация газа в скачке уплотнения сопровождается поглощением энергии, обусловливает некоторое снижение температуры и, как следствие, увеличение плотности. Эта бóльшая «податливость» газа к сжатию уменьшает пространство между скачком и обтекаемой поверхностью, уменьшая тем самым угол наклона скачка.

IV.46. При обтекании сверхзвуковым потоком поверхности заостренного клина с некоторым углом β_c угол наклона скачка θ_c при диссоциации будет меньше по сравнению со случаем постоянных теплоемкостей.

IV.47. Как показывают исследования, учет влияния диссоциации приводит к некоторому повышению давления за скачком уплотнения по сравнению со случаем постоянных теплоемкостей. Объясняется это увеличением числа частиц в газе за счет диссоциации, возрастанием потерь кинетической энергии при их соударениях. Однако уменьшение температуры в диссоциированном газе вызывает противоположный, но меньший эффект. В результате давление возрастает, хотя и не намного.

IV.48. Поскольку температура газа за скачком уплотнения при дис-

социации оказывается существенно меньшей, чем при постоянных теплоемкостях, а давление изменяется мало, то газ делается более податливым (менее «жестким») и сжимается за скачком до большей плотности. Это следует и из уравнения состояния газа за скачком $p_2 = \rho_2[R_0/(\mu_{ср})_2]T_2$, в соответствии с которым уменьшение температуры можно компенсировать только увеличением плотности.

IV.49. Если заменить поток с постоянными теплоемкостями течением диссоциирующего газа, то критический угол поворота потока за скачком уплотнения (критический угол клина) увеличится. Причиной этого является увеличение плотности диссоциирующего газа и уменьшение угла наклона скачка. Уплотненный газ имеет возможность разворачиваться на больший угол.

IV.50. Определим прежде всего число Маха перед скачком уплотнения:

$$\mathbf{M}_1 = V_1/a_1 = 8100/310 = 26{,}1.$$

При таком большом числе Маха набегающего потока воздух за скачком будет диссоциирован и задачу о скачке необходимо решать с учетом влияния диссоциации. Воспользуемся для этого методом последовательных приближений. Задаваясь в первом приближении значением $\Delta\bar{V}=1$, соответствующим предположению о полном торможении потока за ударной волной ($V_2=0$), находим в первом приближении давление за ним

$$p_2 = p_1\left(1 + k_1 \mathbf{M}_1^2 \Delta\bar{V}\right) = 0{,}01\,(1 + 1{,}4\cdot 26{,}1^2) = 9{,}55\ \textit{кГ/см}^2.$$

Энтальпия i_2, равная энтальпии торможения, определяется зависимостью

$$i_2 = i_0' = c_p T_1 + V_1^2/2.$$

Принимая теплоемкость воздуха перед скачком $c_{p1}=1000\ \textit{м}^2/(\textit{сек}^2\times\times\textit{град})$ и подставляя исходные данные, получим

$$i_2 = i_0' = 1000\cdot 236 + 8100^2/2 = 3{,}39\cdot 10^7\ \textit{м}^2/\textit{сек}^2\ (7890\ \textit{ккал/кГ}).$$

По значениям p_2 и i_2 из $i-S$-диаграммы на фиг. 43 [33] найдем температуру $T_2=8500$ К, а по рис. III-1-5 [21] определим средний молекулярный вес $(\mu_{ср})_2=17{,}0$.

По уравнению состояния, зная величины p_2, T_2 и $(\mu_{ср})_2$, вычислим

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(p_2/p_1)[(\mu_{ср})_2/(\mu_{ср})_1]}{T_2/T_1} = \frac{9{,}55}{0{,}01}\cdot\frac{17{,}0}{29{,}0}\cdot\frac{236}{8500} = 15{,}5.$$

Теперь уточним величину $\Delta\bar{V}$:

$$\Delta\bar{V} = 1 - \rho_1/\rho_2 = 1 - 1/15{,}5 = 0{,}935.$$

Во втором приближении по этому значению $\Delta\bar{V}$ получим давление

$$p_2 = 0{,}01\,(1 + 1{,}4\cdot 26{,}1^2\cdot 0{,}935) = 8{,}91\ \textit{кГ/см}^2$$

и энтальпию

$$i_2 = i_1\left[1 + \frac{V_1^2}{2}\cdot\frac{\Delta\bar{V}}{i_1}(2-\Delta\bar{V})\right] = 2{,}36\cdot 10^5\left[1 + \frac{8100^2}{2}\cdot\frac{0{,}935}{2{,}36\cdot 10^5}\times\right.$$
$$\left.\times\,(2-0{,}935)\right] = 3{,}28\cdot 10^7\ \textit{м}^2/\textit{сек}^2\ (7860\ \textit{ккал/кГ}),$$

где $i_1=c_{p1}T_1=1000\cdot 236=2{,}36\cdot 10^5\ \textit{м}^2/\textit{сек}^2$.

Затем по $i-S$-диаграмме на фиг. 43 [33] найдем $T_2=8450$ К, а по рис. III-I-5 [21] — новое значение $(\mu_{ср})_2=16{,}1$.

По уточненным значениям p_2, T_2 и $(\mu_{ср})_2$ определяем отношение

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{8,91}{0,01} \cdot \frac{16,1}{29,0} \cdot \frac{236}{8450} = 13,8.$$

Производим расчеты в третьем приближении:

$$\Delta\bar{V} = 1 - 1/13,8 = 0,928;$$

$$p_2 = 0,01\,(1 + 1,4 \cdot 26,1^2 \cdot 0,928) = 8,86\ кГ/см^2\ (p_2/p_1 = 886);$$

$$i_2 = 2,36 \cdot 10^5 \left[1 + \frac{8100^2}{2} \cdot \frac{0,928}{2,36 \cdot 10^5}(2 - 0,928)\right] = 3,27 \cdot 10^7\ м^2/сек^2 \left(7800\ \frac{ккал}{кГ}\right);$$

$$(\mu_{ср})_2 = 16,0; \quad T_2 = 8430\,\text{K}\ (T_2/T_1 = 35,7);$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{8,86 \cdot 16,0 \cdot 236}{0,01 \cdot 29,0 \cdot 8430} = 13,7.$$

Результаты расчета показывают, что между третьим и вторым приближениями имеется небольшая разница, в частности, отношение плотностей отличается на величину менее 1%. Следовательно, для практических целей расчеты можно закончить третьим приближением.

Вычислим значение плотности за скачком, используя уравнение состояния и значение универсальной газовой постоянной $R_0 = 848$ $кГ \cdot м/(кГ \cdot моль \cdot град)$:

$$\rho_2 = \frac{p_2}{T_2} \cdot \frac{(\mu_{ср})_2}{R_0} = \frac{8,86 \cdot 10^4 \cdot 16,0}{8430 \cdot 848} = 0,198\ кГ \cdot сек^2/м^4.$$

Из графика на рис. III-1-6 [21] по известным p_2 и T_2 найдем скорость звука за скачком $a_2 = 2200$ $м/сек$. Далее определим по $i - S$-диаграмме на фиг. 43 [33] для $p_2 = 8,86$ $кГ/см^2$ и $i_2 = 7800$ $ккал/кГ$ энтропию $S_2 = 3,39$ $ккал/(кГ \cdot град)$.

Рассматривая нулевую линию тока и считая, что течение вдоль нее изэнтропическое, принимаем энтропию в критической точке S_0' равной ее значению S_2 за ударной волной $(S_0' = S_2)$. Энтальпия в этой точке была найдена ранее и равнялась $i_0' = 7890$ $ккал/кГ$. По значениям S_0' и i_0' при помощи $i - S$-диаграммы определяем $p_0' = 10$ $кГ/см^2$ и $T_0' = 8520°$ К. График на рис. III-1-5 [21] для данных значений p_0' и T_0' дает величину $(\mu_{ср}')_0 = 17,0$. Это позволяет вычислить относительные параметры для точки полного торможения:

$$p_0'/p_1 = 10/0,01 = 1000;$$

$$T_0'/T_1 = 8520/236 = 36,2;$$

$$(\mu_{ср})_0/(\mu_{ср})_1 = 17/29 = 0,586;$$

$$\frac{\rho_0'}{\rho_1} = \frac{p_0'}{p_1} \cdot \frac{(\mu_{ср})_0}{(\mu_{ср})_1} \cdot \frac{T_1}{T_0'} = 1000 \cdot 0,586\,\frac{1}{36,2} = 16,2.$$

IV.51. Для решения этой задачи необходимо знать параметры атмосферы на заданной высоте $H = 5$ $км$. По таблицам стандартной атмосферы [50] находим:

$$p_1 = (p_H/p_з)\,p_з = 5,334 \cdot 10^{-1} \cdot 1,033 = 0,551\ кГ/см^2;$$

$$\rho_1 = (\rho_H/\rho_з)\,\rho_з = 6,012 \cdot 10^{-1} \cdot 0,1249 = 0,0751\ кГ \cdot сек^2/м^4;$$

$$T_1 = 255,6\text{K}, \quad a_1 = 320,5\ м/сек, \quad (\mu_{ср})_1 = 28,97.$$

Определяем скорость полета:

$$V_1 = \mathbf{M}_1 a_1 = 11 \cdot 320,5 = 3526\ м/сек.$$

Из таблиц термодинамических функций воздуха [34] находим $k_1 = 1{,}405$, $c_{p1} = 1002$ *м*^{2}/(*сек*$^2 \cdot$ *град*), а затем вычисляем энтальпию:

$$i_1 = c_{p1} T_1 = 1002 \cdot 255{,}6 = 0{,}2561 \cdot 10^6 \text{ м}^2/\text{сек}^2.$$

По графику на рис. 37 [22] для $\beta_c = 45°$ и $M_1 = 11$ определяем угол скачка $\theta_c = 60°$ при отсутствии диссоциации.

Имея в виду, что при наличии диссоциации угол скачка будет меньше, задаемся значением $\theta_c = 55°$, для которого подсчитываем в первом приближении:

$$\Delta\bar{V}_n = 1 - \operatorname{tg}(\theta_c - \beta_c)/\operatorname{tg}\theta_c = 1 - \operatorname{tg}(55° - 45°)/\operatorname{tg}55° = 0{,}877;$$

$$p_2/p_1 = 1 + k_1 M_1^2 \Delta\bar{V}_n \sin^2\theta_c = 1 + 1{,}405 \cdot 11^2 \cdot 0{,}877 \cdot \sin^2 55° = 101;$$

$$p_2 = (p_2/p_1)\, p_1 = 101 \cdot 0{,}551 = 55{,}7 \text{ кГ/см}^2;$$

$$i_2 = i_1 + 0{,}5 V_1^2 \sin^2\theta_c \Delta\bar{V}_n (2 - \Delta\bar{V}_n) = 0{,}2561 \cdot 10^6 + 0{,}5 \cdot 3526^2 \cdot \sin^2 55° \times$$
$$\times 0{,}877\,(2 - 0{,}877) = 4{,}36 \cdot 10^6 \text{ м}^2/\text{сек}^2.$$

По графикам на фиг. 42 [33] и рис. III-1-5 [21] определяем, зная i_2 и p_2, значения $T_2 = 3357$ К и $(\mu_{ср})_2 = 28{,}70$, а затем находим:

$$A = \frac{k_1 M_1^2 \sin^2\theta_c - 1}{2k_1 M_1^2 \sin^2\theta_c} = \frac{1{,}405 \cdot 11^2 \sin^2 55° - 1}{2 \cdot 1{,}405 \cdot 11^2 \sin^2 55°} = 0{,}495;$$

$$B = \frac{1}{k_1 M_1^2 \sin^2\theta_c}\left(\frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{(\mu_{ср})_1}{(\mu_{ср})_2} - 1\right) = \frac{1}{1{,}405 \cdot 11^2 \sin^2 55°}\left(\frac{3357}{255{,}6} \cdot \frac{28{,}97}{28{,}70} - 1\right) =$$
$$= 0{,}108.$$

Теперь уточняем значение относительной скорости:

$$\Delta\bar{V}_n = A + \sqrt{A^2 - B} = 0{,}495 + \sqrt{0{,}495^2 - 0{,}108} = 0{,}866.$$

Это в свою очередь позволяет более точно определить угол скачка:

$$\operatorname{tg}\theta_c = \frac{\Delta\bar{V}_n - \sqrt{\Delta\bar{V}_n^2 - 4\,(1 - \Delta\bar{V}_n)}}{2\,(1 - \Delta\bar{V}_n)} = \frac{0{,}866 - \sqrt{0{,}866^2 - 4\,(1 - 0{,}866)}}{2\,(1 - 0{,}866)} =$$
$$= 1{,}506;$$
$$\theta_c = 56° 25'.$$

По этим данным производим соответствующие расчеты во втором приближении:

$$p_2/p_1 = 1 + 1{,}405 \cdot 11^2 \cdot 0{,}866 \sin^2 56° 25' = 103{,}2;$$
$$p_2 = 103{,}2 \cdot 0{,}551 = 56{,}86 \text{ кГ/см}^2;$$
$$i_2 = 0{,}2561 \cdot 10^6 + 0{,}5 \cdot 3526^2 \sin^2 56° 25' \cdot 0{,}866\,(2 - 0{,}866) =$$
$$= 4{,}49 \cdot 10^6 \text{ м}^2/\text{сек}^2.$$

По графикам на фиг. 42 [33] и рис. III-1-5 [21] определяем по уточненным значениям $p_2 = 56{,}86$ *кГ/см*^{2} и $i_2 = 4{,}49 \cdot 10^6$ *м*^{2}/*сек*^{2} величины $T_2 = 3424$ К и $(\mu_{ср})_2 = 28{,}64$.

Теперь имеем возможность вновь уточнить значение угла θ_c, для чего осуществляем следующие вычисления:

$$A = \frac{1{,}405 \cdot 11^2 \cdot \sin^2 56° 25' - 1}{2 \cdot 1{,}405 \cdot 11^2 \sin^2 56° 25'} = 0{,}495;$$

$$B = \frac{1}{1{,}405 \cdot 11^2 \sin^2 56° 25'}\left(\frac{3424}{255{,}6} \cdot \frac{28{,}97}{28{,}64} - 1\right) = 0{,}1085;$$

$$\Delta\bar{V}_n = 0{,}495 + \sqrt{0{,}495^2 - 0{,}1085} = 0{,}865;$$

$$\operatorname{tg}\theta_c = \frac{0{,}865 - \sqrt{0{,}865^2 - 4\,(1 - 0{,}865)}}{2\,(1 - 0{,}865)} = 1{,}493 \quad (\theta_c = 56^\circ 00').$$

Вновь полученное значение угла θ_c достаточно близко к найденному во втором приближении (56°25′), поэтому дальнейшее уточнение можно не производить. Итак, принимаем: $\theta_c = 56°$; $p_2 = 56{,}86$ *кГ/см²* ($p_2/p_1 = 103{,}2$); $i_2 = 4{,}49 \cdot 10^6$ *м²/сек²* ($i_2/i_1 = 17{,}54$); $T_2 = 3424$ К ($T_2/T_1 = 13{,}4$); $(\mu_{ср})_2 = 28{,}64$ [$(\mu_{ср})_2/(\mu_{ср})_1 = 0{,}99$].

С помощью графика на фиг. 42 [33] находим по значениям $T_1 = 255{,}6$ К и $i_1 = 0{,}2561 \cdot 10^6$ *м²/сек²* энтропию воздуха до скачка $S_1 = 1{,}77$ *ккал/(кГ·град)* [$7{,}40 \cdot 10^3$ *м²/(сек²·град)*], а по значениям $T_2 = 3424$ К и $i_2 = 4{,}49 \cdot 10^6$ *м²/сек²* — энтропию за скачком $S_2 = 2{,}18$ *ккал/(кГ·град)* [$9{,}15 \cdot 10^3$ *м²/(сек²·град)*]. Увеличение энтропии за скачком составит

$$\Delta S = S_2 - S_1 = 2{,}18 - 1{,}77 = 0{,}41 \text{ } ккал/(кГ \cdot град);$$

$$[1{,}75 \cdot 10^3 \text{ } м^2/(сек^2 \cdot град)].$$

Скорость звука за скачком определим при помощи графика на рис. III-1-6 [21] по величинам $T_2 = 3424$ К и $p_2 = 56{,}86$ *кГ/см²*: $a_2 = 1094$ *м/сек*.

Для вычисления скорости потока за скачком найдем

$$V_{2n} = V_1 (1 - \Delta\bar{V}_n) \sin\theta_c = 3526\,(1 - 0{,}865) \sin 56^\circ = 391 \text{ } м/сек;$$

тогда

$$V_2 = V_{2n}/\sin(\theta_c - \beta_c) = 391/\sin(56^\circ - 45^\circ) = 2007 \text{ } м/сек,$$

а число Маха $M_2 = V_2/a_2 = 2007/1094 = 1{,}835$.

Плотность за скачком

$$\rho_2 = \rho_1/(1 - \Delta\bar{V}_n) = 0{,}0751/(1 - 0{,}865) = 0{,}557 \text{ } (кГ \cdot сек^2)/м^4 \quad (\rho_2/\rho_1 = 7{,}45).$$

Расчет завершим, определив параметры воздуха в точке полного торможения за скачком. Энтальпия торможения за скачком не изменяется, поэтому

$$i_0' = i_0 = i_1 + V_1^2/2 = 0{,}2561 \cdot 10^6 + 3526^2/2 = 6{,}47 \cdot 10^6 \text{ } м^2/сек^2.$$

Энтропия газа в точке полного торможения будет такой же, как непосредственно за скачком, т. е. $S_0' = S_2 = 9{,}15 \cdot 10^3$ *м²/(сек²·град)*. Зная энтальпию и энтропию торможения, по $i - S$-диаграмме на фиг. 42 [33] определим

$$p_0' = 330 \text{ } кГ/см^2; \quad T_0' = 4490 \text{ К}.$$

Этим данным соответствуют плотность $\rho_0' = 2{,}46$ *кГ·сек²/м⁴*, а также относительные величины:

$$p_0'/p_1 = 599, \quad T_0'/T_1 = 17{,}7, \quad \rho_0'/\rho_1 = 32{,}7.$$

IV.52. При решении задачи IV.50 были получены следующие относительные значения параметров воздуха для условий непосредственно за прямым скачком уплотнения: $p_2/p_1 = 886$; $T_2/T_1 = 35{,}7$; $\rho_2/\rho_1 = 13{,}7$;

$$\Delta\bar{V} = \frac{V_1 - V_2}{V_1} = 0{,}928.$$

Примем давление, температуру и плотность равными соответственно: $p_1 = 0{,}01$ *кГ/см²*; $T_1 = 236$ К; $\rho_1 = 1{,}47 \cdot 10^{-3}$ *кГ·сек²/м⁴*. Эти парамет-

ры атмосферы будут такими, как на высоте $H \approx 31$ *км*. Получим параметры газа за скачком:

$$p_2 = 886 p_1 = 886 \cdot 0{,}01 = 8{,}86 \ \text{кГ/см}^2;$$

$$T_2 = 35{,}7 \cdot T_1 = 35{,}7 \cdot 236 = 8430 \ \text{К};$$

$$\rho_2 = 13{,}7 \cdot \rho_1 = 13{,}7 \cdot 1{,}47 \cdot 10^{-3} = 2{,}02 \cdot 10^{-2} \ \text{кГ} \cdot \text{сек}^2/\text{м}^4.$$

Соответствующая скорость

$$V_2 = V_1 (1 - 0{,}928) = 8100 (1 - 0{,}928) = 583 \ \text{м/сек}.$$

По данным решения задачи IV.50 скорость звука за скачком $a_2 = 2200$ *м/сек*, следовательно, число Маха $\mathbf{M}_2 = V_2/a_2 = 583/2200 = 0{,}265$. При таком числе Маха поток с известным приближением рассматривается несжимаемым, и для расчета давления p_0' в точке полного торможения за скачком можно использовать уравнение Бернулли

$$p_0'/\rho_2 = p_2/\rho_2 + V_2^2/2,$$

в соответствии с которым

$$p_0' = p_2 + \rho_2 V_2^2/2 = 8{,}86 + 2{,}02 \cdot 10^{-2} \cdot 583^2/2 = 9{,}20 \ \text{кГ/см}^2.$$

Расчет с учетом диссоциации сжимаемого газа дает значение $p_0' = 10$ *кГ/см*^{2} (см. задачу IV.50), которое несколько больше полученной величины ($p_0' = 9{,}20$ *кГ/см*^{2}). Рассматривая поток несжимаемым, можно определить $T_0' = T_2 = 8430$ К. При точном расчете плотности и температуры их величины в диссоциирующем сжимаемом газе соответственно равны: $\rho_0' = 2{,}48 \cdot 10^{-2}$ *кГ* $\cdot$ *сек*^{2}*/м*^{4}; $T_0' = 8520$ К.

IV.53. Чтобы определить параметры газа непосредственно за скачком уплотнения, необходимо знать соответствующие значения этих параметров перед скачком. Поэтому по таблицам стандартной атмосферы [50] для высоты полета $H = 10$ *км* находим: $p_1 = 0{,}269$ *кГ/см*^{2}; $\rho_1 = 0{,}0423$ *кГ* $\cdot$ *сек*^{2}*/м*^{4}; $T_1 = 223$ К; $a_1 = 299{,}5$ *м/сек*; $(\mu_{ср})_1 = 28{,}97$. Принимаем для последующих расчетов $k = 1{,}4$, $c_p = 1000$ *м*^{2}*/*(*сек*$^2 \cdot$ *град*) и определяем энтальпию:

$$i_1 = c_p T_1 = 1000 \cdot 223 = 0{,}223 \cdot 10^6 \ \text{м}^2/\text{сек}^2.$$

Далее подсчитываем:

$$\Delta\bar{V}_n = 1 - (\operatorname{tg}\theta_c - \beta_c)/\operatorname{tg}\theta_c = 1 - \operatorname{tg}(55° - 45°)/\operatorname{tg} 55° = 0{,}877.$$

Для расчета в первом приближении примем число $\mathbf{M}_1 = 11{,}5$. Тогда

$$V_1 = \mathbf{M}_1 a_1 = 11{,}5 \cdot 299{,}5 = 3440 \ \text{м/сек}.$$

Теперь определим давление и энтальпию за скачком:

$$p_2/p_1 = 1 + k_1 \mathbf{M}_1^2 \Delta\bar{V}_n \sin^2\theta_c = 1 + 1{,}4 \cdot 11{,}5^2 \cdot 0{,}877 \cdot \sin^2 55° = 110;$$

$$p_2 = (p_2/p_1) p_1 = 110 \cdot 0{,}269 = 29{,}7 \ \text{кГ/см}^2;$$

$$i_2 = i_1 + 0{,}5 \cdot V_1^2 \sin^2\theta_c \cdot \Delta\bar{V}_n (2 - \Delta\bar{V}_n) = 0{,}223 \cdot 10^6 +$$

$$+ 0{,}5 \cdot 3440^2 \sin^2 55° \cdot 0{,}877 (2 - 0{,}877) = 3{,}77 \cdot 10^6 \ \text{м}^2/\text{сек}^2 \ (904 \ \text{ккал/кГ}).$$

По графикам на фиг. 42 [33] и рис. III-1-5 [21] находим, зная i_2 и p_2, значения $T_2 = 3020$ К и $(\mu_{ср})_2 = 28{,}8$. Затем определяем:

$$\mathbf{M}_1 = \sqrt{\frac{(T_2/T_1)[(\mu_{ср})_1/(\mu_{ср})_2]/(1 - \Delta\bar{V}_n) - 1}{k_1 \cdot \sin^2\theta_c \cdot \Delta\bar{V}_n}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(3020/223)(29{,}0/28{,}8)/(1 - 0{,}877) - 1}{1{,}4 \cdot \sin^2 55° \cdot 0{,}877}} = 11{,}1.$$

Осуществляем окончательные расчеты во втором приближении (для числа $\mathbf{M}_1=11{,}1$):

$$p_2/p_1=102;\quad p_2=27{,}5\ кГ/см^2;\ i_2=3{,}90\cdot10^6\ м^2/сек^2;$$

$$T_2=3050\,\text{K};\quad (\mu_{ср})_2=28{,}8;\quad \mathbf{M}_1=11{,}2;\quad V_1=3340\ м/сек.$$

На этом приближения заканчиваем и определяем по графику на фиг. 42 [33] энтропию $S_2=9{,}20\cdot10^3\ м^2/(сек^2\cdot град)$, а по графику на рис. III-1-6 [21] — скорость звука $a_2=1040\ м/сек$.

Используя эти данные, подсчитываем параметры непосредственно за скачком уплотнения:

$$V_{2n}=V_1(1-\Delta\bar{V}_n)\sin\theta_c=3340\,(1-0{,}877)\sin55^\circ=364\ м/сек;$$

$$\rho_2=\rho_1/(1-\Delta\bar{V}_n)=0{,}0423/(1-0{,}877)=0{,}318\ кГ\cdot сек^2/м^4;$$

$$V_2=V_{2n}/\sin(\theta_c-\beta_c)=364/\sin(55^\circ-45^\circ)=2100\ м/сек;$$

$$\mathbf{M}_2=V_2/a_2=2100/1040=2{,}06.$$

Энтальпия торможения

$$i_0'=i_0=i_1+V_1^2/2=0{,}223\cdot10^6+3340^2/2=5{,}77\cdot10^6\ м^2/сек^2.$$

Энтропия

$$S_0'=S_2=9{,}20\cdot10^3\ м^2/(сек^2\cdot град).$$

IV.54. Для решения задачи следует вначале определить параметры воздуха на заданной высоте $H=5\ км$. Воспользовавшись таблицами стандартной атмосферы [50], находим: $p_1=0{,}551\ кГ/см^2$; $\rho_1=0{,}07511\ кГ\cdot сек^2/м^4$; $T_1=255{,}6$ K; $(\mu_{ср})_1=28{,}97$; $a_1=320{,}5\ м/сек$.

С помощью $i-S$-диаграммы на рис. 1-1 (лист 7) [17] по измеренным значениям $p_0'=330\ кГ/см^2$ и $T_0'=4500$ K определяем для условий торможения энтальпию $i_0'=i_0=6{,}5\cdot10^6\ м^2/сек^2$ и энтропию $S_0'=S_2=9{,}18\cdot10^3\ м^2/(сек^2\cdot град)$.

Затем подсчитываем скорость полета:

$$V_1=\sqrt{2(i_0-c_pT_1)}=\sqrt{2(6{,}5\cdot10^6-1000\cdot256)}=3530\ м/сек$$

и соответствующее число:

$$\mathbf{M}_1=V_1/a_1=3530/320{,}5=11.$$

Поскольку не известны ни угол скачка θ_c, ни угол поворота β_c той части потока за скачком уплотнения, которая претерпела полное торможение, то нахождение этих углов, как и параметров газа за скачком, приходится вести методом последовательных приближений. Для этого воспользуемся $i-S$-диаграммой [17], на которой нанесены значения плотности. Такая $i-S$-диаграмма облегчает решение задачи. В первом приближении по графику на рис. 1-1 (лист 4) [17], зная $S_2=9{,}18\times\times10^3\ м^2/(сек^2\cdot град)$ и задавшись значением энтальпии, за скачком $i_2=4{,}6\cdot10^6\ м^2/сек^2$, определяем $p_2=58\cdot10^4\ кГ/м^2$ и $\rho_2=0{,}58\ кГ\cdot сек^2/м^4$.

Далее вычисляем:

относительное изменение нормальной составляющей скорости

$$\Delta\bar{V}_n=1-\rho_1/\rho_2=1-0{,}07511/0{,}580=0{,}870;$$

«нормальную» составляющую числа Маха до скачка

$$\mathbf{M}_{n1}=\sqrt{[(p_2/p_1)-1]/(k\Delta\bar{V}_n)}=\sqrt{(58/0{,}5511-1)/(1{,}4\cdot0{,}870)}=9{,}25$$

и соответствующую нормальную составляющую скорости

$$V_{n1}=\mathbf{M}_{n1}a_1=9{,}25\cdot320{,}5=2960\ м/сек.$$

Уточним значение энтальпии i_2 за скачком:

$$i_2 = i_1 + V_{n1}^2 \Delta \bar{V}_n (2 - \Delta \bar{V}_n)/2 = 0{,}23 \cdot 10^6 +$$
$$+ 2960^2 \cdot 0{,}870(2 - 0{,}870)/2 = 4{,}53 \cdot 10^6 \ м^2/сек^2.$$

Во втором приближении с помощью i—S-диаграммы на рис. 1-1 (лист 4) [17] по уточненному значению энтальпии $i_2 = 4{,}53 \cdot 10^6 \ м^2/сек^2$ и $S_2 = 9{,}18 \cdot 10^3 \ м^2/(сек^2 \cdot град)$ определим $p_2 = 56 \cdot 10^4 \ кГ/м^2$, $\rho_2 = 0{,}55 \ кГ \cdot сек^2/м^4$ и подсчитаем $\Delta \bar{V}_n = 0{,}864$, $\mathbf{M}_{n1} = 9{,}14$, $V_{n1} = 2930 \ м/сек$.

Теперь уточним энтальпию за скачком:

$$i_2 = 4{,}46 \cdot 10^6 \ м^2/сек^2.$$

Ввиду того что полученное значение i_2 близко к найденному ранее ($i_2 = 4{,}53 \cdot 10^6 \ м^2/сек^2$), дальнейшие приближения можно не производить.

Теперь определим углы θ_c и β_c. Для этого воспользуемся зависимостью

$$\sin \theta_c = \mathbf{M}_{n1}/\mathbf{M}_1.$$

Подставляя в нее значения $\mathbf{M}_{n1}$ и $\mathbf{M}_1$, получим

$$\sin \theta_c = 0{,}83 \ (\theta_c = 56{,}1°).$$

Наконец, определяем угол поворота потока за скачком:

$$\frac{\operatorname{tg} 56{,}1°}{\operatorname{tg} (56{,}1° - \beta_c)} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = 6{,}75. \qquad (3.IV.33)$$

Решая (3.IV.33), находим $\beta_c = 43{,}3°$.

IV.55. По измеренному отношению плотностей можно найти относительное изменение нормальных составляющих скоростей до и после скачка, т. е. величину $\Delta \bar{V}_n = (V_{n1} - V_{n2})/V_{n1}$. С этой целью воспользуемся формулой $\Delta \bar{V}_n = 1 - \rho_1/\rho_2$. Подставляя в нее значения ρ_2/ρ_1, получим соответственно для первого и второго режимов работы аэродинамической трубы:

$$(\Delta \bar{V}_n)_1 = 1 - 1/3{,}41 = 0{,}707;$$
$$(\Delta \bar{V}_n)_2 = 1 - 1/10 = 0{,}9.$$

Теперь определим соответствующие наклоны косых скачков уплотнения, используя зависимость

$$\operatorname{tg} \theta_c = \operatorname{ctg} \beta_c \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta \bar{V}_n}{1 - \Delta \bar{V}_n} - \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta \bar{V}_n^2}{(1 - \Delta \bar{V}_n)^2} - \frac{\operatorname{tg}^2 \beta_c}{1 - \Delta \bar{V}_n}} \right].$$

После соответствующих подстановок получим:

$$(\operatorname{tg} \theta_c)_1 = \operatorname{ctg} 30° \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}707}{1 - 0{,}707} - \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{0{,}707^2}{(1 - 0{,}707)^2} - \frac{\operatorname{tg}^2 30°}{1 - 0{,}707}} \right] = 1{,}12;$$

$$(\operatorname{tg} \theta_c)_2 = \operatorname{ctg} 30° \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}9}{1 - 0{,}9} - \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{0{,}9^2}{(1 - 0{,}9)^2} - \frac{\operatorname{tg}^2 30°}{1 - 0{,}9}} \right] = 0{,}664.$$

Согласно этим данным

$$(\sin^2 \theta_c)_1 = \frac{1{,}12^2}{1 - 1{,}12^2} = 0{,}554; \ (\sin^2 \theta_c)_2 = \frac{0{,}664^2}{1 - 0{,}664^2} = 0{,}306;$$

$$(\sin \theta_c)_1 = 0{,}754; \ (\sin \theta_c)_2 = 0{,}553.$$

Используя эти данные, подсчитываем отношения скоростей:

$$(V_2/V_1)_1 = \sqrt{1 - \sin^2\theta_c\,\Delta\bar{V}_n(2 - \Delta\bar{V}_n)} =$$

$$= \sqrt{1 - 0{,}554\cdot 0{,}707\,(2 - 0{,}707)} = 0{,}702;$$

$$(V_2/V_1)_2 = \sqrt{1 - 0{,}306\cdot 0{,}900\,(2 - 0{,}9)} = 0{,}835.$$

Рассматривая случай постоянных теплоемкостей, найдем числа $\mathbf{M}_1$ перед скачками:

$$(\mathbf{M}_1)_1 = \frac{1}{\sin\theta_c}\sqrt{\frac{2/(k+1)}{2/(k+1) - \Delta\bar{V}_n}} = \frac{1}{0{,}745}\sqrt{\frac{2/(1{,}4+1)}{2/(1{,}4+1) - 0{,}707}} = 3{,}45;$$

$$(\mathbf{M}_1)_2 = \frac{1}{0{,}553}\sqrt{\frac{2/(k+1)}{2/(k+1) - 0{,}9}} = \frac{1}{0{,}533}\sqrt{\frac{0{,}834}{0{,}834 - 0{,}9}}.$$

Как видим, число $(\mathbf{M}_1)_2$ оказывается мнимым, что свидетельствует о неприменимости формулы для случая постоянных темплоемкостей, когда число $\mathbf{M}_1$ не превышает 5÷6.

Параметры газа за скачком при $(\mathbf{M}_1)_1 = 3{,}45$ определяются в соответствии с условием постоянства теплоемкостей:

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)_1 = \left[\frac{2k}{k+1}(\mathbf{M}_1)_1^2\sin^2\theta_c - \frac{k-1}{k+1}\right]\left[\frac{2}{k+1} + \right.$$

$$\left. + \frac{k-1}{k+1}(\mathbf{M}_1)_1^2\sin^2\theta_c\right] / \left[(\mathbf{M}_1)_1^2\sin^2\theta_c\right] = \left(\frac{2\cdot 1{,}4}{1{,}4+1}3{,}45^2\cdot 0{,}554 - \right.$$

$$\left. - \frac{1{,}4-1}{1{,}4+1}\right)\left(\frac{2}{1{,}4+1} + \frac{1{,}4-1}{1{,}4+1}3{,}45^2\cdot 0{,}554\right) / (3{,}45^2\cdot 0{,}554) = 2{,}21;$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1}(\mathbf{M}_1)_1^2\sin^2\theta_c - \frac{k-1}{k+1} = \frac{2\cdot 1{,}4}{1{,}4+1}3{,}45^2\cdot 0{,}554 - \frac{1{,}4-1}{1{,}4+1} = 13{,}76.$$

Расчет числа $(\mathbf{M}_1)_2$ будем вести для случая диссоциации. Для этого необходимо знать дополнительно температуру $(T_1)_2$ и давление $(p_1)_2$ перед скачком. Зададимся этими величинами:

$$(T_1)_2 = 459\,\text{K};\ (p_1)_2 = 0{,}01\ \textit{кГ/см}^2.$$

Задачу решаем методом последовательных приближений. Принимаем $\mathbf{M}_1 = 15{,}2$ ($V_1 = 6460$ *м/сек*); тогда отношение давлений после и до скачка $p_2/p_1 = 1 + k\mathbf{M}_1^2\sin^2\theta_c\cdot\Delta V_n = 1 + 1{,}4\cdot 15{,}2^2\cdot 0{,}306\cdot 0{,}9 = 90$, а давление за скачком $(p_2)_2 = 0{,}90$ *кГ/см*^{2}. Энтальпия за скачком уплотнения

$$i_2 = i_1 + (V_1^2/2)\sin^2\theta_c\,[1 - (\rho_1/\rho_2)^2] = 0{,}459\cdot 10^6 +$$

$$+ 6460^2\cdot 0{,}306\,[1 - (0{,}1)^2]/2 = 6{,}76\cdot 10^6\ \textit{м}^2/\textit{сек}^2,$$

где $i_1 = c_p T_1 = 1000\cdot 459 = 0{,}459\cdot 10^6$ *м*^{2}/*сек*^{2}.

Далее по диаграмме рис. 1-1 [17] находим $(T_2)_2 = 3710$ K, а по графику на рис. III-1-5 [21] для $(T_2)_2 = 3710$ K и $(p_2)_2 = 0{,}90$ *кГ/см*^{2} определяем молекулярный вес $(\mu_2)_{\text{ср}} = 26{,}3$. Используя уравнение состояния, уточняем значение p_2/p_1: $p_2/p_1 = 10\cdot 3710\cdot 29/(450\times 26{,}3) = 90{,}7$, следовательно, можно уточнить значения числа Маха и скорости:

$$(\mathbf{M}_1)_2 = \sqrt{\frac{(p_2/p_1) - 1}{k\sin^2\theta_c\cdot\Delta V_n}} = \sqrt{\frac{90{,}7 - 1}{1{,}4\cdot 0{,}306\cdot 0{,}9}} = 15{,}22\ \ (V_1 = 6470\ \textit{м/сек}).$$

Далее, еще раз повторяя расчет, в последнем приближении находим: $(p_2)_2 = 0{,}907$ *кГ/см*^{2}; $i_2 = 0{,}459\cdot 10^6 + 6470^2\cdot 0{,}306\ [1 - (0{,}1)^2]/2 = 6{,}77\times 10^6$ *м*^{2}/*сек*^{2}; $T_2 = 3710$ K; $(\mu_2)_{\text{ср}} = 26{,}3$.

IV.56. Определить параметры за скачком уплотнения для рассматриваемой модели воздуха можно, используя метод последовательных приближений. Зададимся вначале ожидаемым отношением плотностей $\rho_2/\rho_1=15$, которому соответствует относительное изменение нормальных составляющих скоростей до и после скачка:

$$\Delta\bar{V}_n = 1 - \rho_1/\rho_2 = 1 - 1/15 = 0{,}933.$$

По этому значению определяем $\bar{i}_2 = i_2/u_d$ (u_d — характеристическая энергия диссоциации):

$$\bar{i}_2 = \frac{\bar{V}_{n1}^2}{2}\Delta\bar{V}_n(2-\Delta\bar{V}_n) = \frac{1{,}5^2}{2}0{,}933\,(2-0{,}933) = 1{,}12. \qquad (3.IV.34)$$

Далее находим отношение:

$$\frac{\rho_2}{\rho_d} = \bar{\rho}_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1}\cdot\frac{\rho_1}{\rho_d} = 15\cdot 1{,}5\cdot 10^{-7} = 22{,}5\cdot 10^{-7}$$

и значение:

$$\lg(\rho_d/\rho_2) = \lg(1/\bar{\rho}_2) = 5{,}65.$$

Теперь из графика на рис. III-1-8 [21] можно найти по значениям $\lg(\rho_d/\rho_2)=5{,}65$ и $\bar{i}_2=1{,}12$ степень диссоциаций $\alpha_2=0{,}73$. По этой величине уточняем $\Delta\bar{V}_n$, используя формулу

$$\Delta\bar{V}_n = \frac{3}{7+\alpha_2}\left(1+\sqrt{1+D/\bar{V}_{n1}^2}\right), \qquad (3.IV.35)$$

в которой

$$D = (2/9)(7+\alpha_2)(1+\alpha_2)\alpha_2. \qquad (3.IV.36)$$

После подстановки данных получим

$$D = \frac{2}{9}(7+0{,}73)(1+0{,}73)\,0{,}73 = 2{,}17;$$

$$\Delta\bar{V}_n = \frac{3}{7+0{,}73}\left(1+\sqrt{1+2{,}17/1{,}5^2}\right) = 0{,}932.$$

Затем уточняем относительные значения энтальпии по (3.IV.34):

$$\bar{i}_2 = \frac{1{,}5^2}{2}0{,}932\,(2-0{,}932) = 1{,}12$$

и температуры $\bar{T}_2=T_2/T_d$ (T_d — характеристическая температура диссоциации):

$$\bar{T}_2 = \frac{\bar{i}_2 - \alpha_2}{4+\alpha_2} = \frac{1{,}12-0{,}73}{4+0{,}73} = 0{,}0824.$$

Эту же величину относительной температуры можно найти, используя формулу

$$\bar{T}_2 = \frac{\bar{V}_{n1}^2\,\Delta\bar{V}_n(1-\Delta\bar{V}_n)}{1+\alpha_2} = \frac{1{,}5^2\cdot 0{,}932(1-0{,}932)}{1+0{,}73} = 0{,}0819.$$

Из этих двух значений выбираем среднее:

$$\bar{T}_2 = \frac{1}{2}(0{,}0824+0{,}0819) = 0{,}0822.$$

По величине $\Delta\bar{V}_n=0{,}932$ уточняем относительную плотность:

$$\rho_2/\rho_1 = 1/(1-\Delta\bar{V}_n) = 1/(1-0{,}932) = 14{,}8$$

и значение:

$$\rho_2/\rho_d = \bar{\rho}_2 = (\rho_2/\rho_1)\cdot(\rho_1/\rho_d) = 14{,}8\cdot 1{,}5\cdot 10^{-7} = 22{,}2\cdot 10^{-7}.$$

Теперь можно вычислить во втором приближении степень диссоциации:

$$\alpha_2 = \frac{1}{2\bar{\rho}_2} e^{-1/\bar{T}_2}\left(\sqrt{1+4\bar{\rho}_2 e^{-1/\bar{T}_2}} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 22{,}2\cdot 10^{-7}} e^{-1/0{,}0822}\left(\sqrt{1+4\cdot 22{,}2\cdot 10^{-7} e^{-1/0{,}0822}} - 1\right) = 0{,}755.$$

Учитывая приближенный характер расчета, эту величину можно принять окончательной. Зная $\alpha_2 = 0{,}755$, вычисляем в новом приближении:

$$D = \frac{2}{9}(7 + 0{,}755)(1 + 0{,}755)\,0{,}755 = 2{,}30;$$

$$\Delta\bar{V}_n = \frac{3}{7+0{,}755}\left(1 + \sqrt{1+2{,}30/1{,}5^2}\right) = 0{,}936,$$

а также

$$\bar{i}_2 = \frac{1{,}5^2}{2}\,0{,}936\,(2 - 0{,}936) = 1{,}12;$$

$$\bar{T}_2 = \frac{\bar{i}_2 - \alpha_2}{4+\alpha_2} = \frac{1{,}12 - 0{,}755}{4+0{,}755} = 0{,}0768;$$

$$\rho_2/\rho_1 = 1/(1 - 0{,}936) = 15{,}6;$$

$$\bar{\rho}_2 = 15{,}6\cdot 1{,}5\cdot 10^{-7} = 2{,}34\cdot 10^{-7}.$$

Из таблицы на рис. III-1-1 [21] можно найти характеристические величины ρ_d, p_d, u_d, T_d для азота и кислорода или их воздушной смеси и определить соответствующие абсолютные значения параметров за скачком уплотнения.

IV.57. Для того чтобы определить степень диссоциации воздуха по известным значениям отношения давлений, плотностей и температур для условий после и до скачка уплотнения, необходимо использовать соответствующую зависимость для степени диссоциации от указанных отношений

$$\alpha_2 = (p_2/p_1)\,(\rho_1/\rho_2)\,(T_1/T_2) - 1.$$

Из решения задачи IV.51 имеем:

$$p_2/p_1 = 103{,}2;\ \rho_1/\rho_2 = 0{,}134;\ T_1/T_2 = 0{,}075.$$

В соответствии с этими данными

$$\alpha_2 = 103{,}2\cdot 0{,}134\cdot 0{,}075 - 1 = 0{,}038.$$

IV.58. Степень диссоциации за скачком уплотнения

$$\alpha_2 = (\mu_{ср})_1/(\mu_{ср})_2 - 1.$$

Полагая для воздуха $(\mu_{ср})_1 = 29{,}0$ и учитывая, что, по условию, $(\mu_{ср})_2 = 23{,}2$, получим

$$\alpha_2 = 29{,}0/23{,}2 - 1 = 0{,}25.$$

IV.59. Степень диссоциации за скачком уплотнения на участке длины пути релаксации будет постепенно увеличиваться от величины, равной нулю непосредственно за скачком, до равновесного значения. Причина этого явления заключается в характере процесса диссоциации. Непосредственно за скачком уплотнения диссоциация еще не начинается ($\alpha = 0$), так как для этого требуется значительное число соударений молекул. Равновесное состояние диссоциации устанавливается постепенно

за время релаксации диссоциации, т. е. на длине пути релаксации.

IV.60. Рассмотрим предельный случай неравновесности, при котором скачкообразное изменение параметров газа происходит при постоянных удельных теплоемкостях (степень диссоциации за скачком $\alpha=0$). В этом случае отношение давлений за скачком и перед ним

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{2k}{k+1}\mathbf{M}_1^2-\frac{k-1}{k+1}=\frac{2\cdot 1{,}4}{1{,}4+1}25^2-\frac{1{,}4-1}{1{,}4+1}=730,$$

а соответствующая абсолютная величина давления

$$p_2=(p_2/p_1)\,p_1=730\cdot 0{,}01=7{,}30\ \ кГ/см^2.$$

Отношение плотностей

$$\rho_2/\rho_1=\frac{(k+1)\,\mathbf{M}_1^2}{2+(k-1)\,\mathbf{M}_1^2}=\frac{(1{,}4+1)\,25^2}{2+(1{,}4-1)\,25^2}=5{,}95,$$

где плотность до скачка

$$\rho_1=p_1/(RT_1)=0{,}01\cdot 10^4/(287\cdot 250)=1{,}39\cdot 10^{-3}\ \ кГ\cdot сек^2/м^4.$$

С учетом этого абсолютная величина плотности за скачком

$$\rho_2=(\rho_2/\rho_1)\,\rho_1=5{,}95\cdot 1{,}39\cdot 10^{-3}=8{,}29\cdot 10^{-3}\ \ кГ\cdot сек^2/м^4.$$

Отношения температур

$$T_2/T_1=(p_2/p_1)(\rho_1/\rho_2)=730/5{,}95=123.$$

Определим теперь степень равновесной диссоциации α_e и соответствующие параметры, характеризующие равновесное состояние газа. Применим для этой цели зависимости, полученные для модели воздуха в виде смеси двухатомных газов.

Зададимся в первом приближении отношением плотностей $\rho_2/\rho_1=10$, для которого

$$\Delta\bar{V}=(V_1-V_2)/V_1=1-\rho_1/\rho_2=1-1/10=0{,}9.$$

Входящая сюда скорость V_1 равна $V_1=\mathbf{M}_1a_1$, где $\mathbf{M}_1=25$, $a_1=\sqrt{T_1/T_1'}\,a_{288}$. В свою очередь температуру T_1' принимаем равной 288 К. Этой температуре соответствует скорость звука $a_{288}=340$ *м/сек*. Таким образом, $V_1=25\cdot 340\sqrt{250/288}=7920$ *м/сек*.

Из табл. III-1-1 [21] найдем для воздуха характеристическую скорость диссоциации $V_d=5400$ *м/сек*. В соответствии с этим значением $\bar{V}_1=V_1/V_d=7920/5400=1{,}47$, а относительная энтальпия

$$\bar{i}_2=(\bar{V}_1^2/2)\,\Delta\bar{V}(2-\Delta\bar{V})=(1{,}47^2/2)\,0{,}9\,(2-0{,}9)=1{,}069.$$

Вычислим относительную плотность $\bar{\rho}_1=\rho_1/\rho_d$, используя уравнение

$$\bar{\rho}_1=(p_1/p_d)/(T_1/T_d).$$

Входящие в это уравнение величины определим следующим образом. Из табл. III-1-1 [21] находим $p_d=3{,}7\cdot 10^7\ \ кГ/см^2$, а характеристическую температуру диссоциации определяем по формуле

$$T_d=T_{d\mathrm{N}_2}r_{\mathrm{N}_2}+T_{d\mathrm{O}_2}r_{\mathrm{O}_2},$$

в которой $T_{d\mathrm{N}_2}=113\,000$ К и $T_{d\mathrm{O}_2}=59\,000$ К — характеристические температуры диссоциации соответственно азота и кислорода. Так как их объемные доли в воздухе $r_{\mathrm{N}_2}=0{,}765$, $r_{\mathrm{O}_2}=0{,}235$, то

$$T_d=113\,000\cdot 0{,}765+59\,000\cdot 0{,}235=100\,300\ \mathrm{K}.$$

В соответствии с этими данными

$$\bar{\rho}_1 = (p_1/p_d)/(T_1/T_d) = \frac{0{,}01/(3{,}7\cdot 10^7)}{250/100300} = 1{,}08\cdot 10^{-7}.$$

По этой величине, а также значению $\rho_2/\rho_1 = 10$ находим

$$\bar{\rho}_2 = \rho_2/\rho_d = (\rho_2/\rho_1)(\rho_1/\rho_d) = 10\cdot 1{,}08\cdot 10^{-7} = 1{,}08\cdot 10^{-6}.$$

Соответствующий логарифм

$$\lg(\rho_d/\rho_2) = \lg[1/(1{,}08\cdot 10^{-6})] = 5{,}97.$$

По значениям $\bar{i}_2 = 1{,}07$ и $\lg(1/\bar{\rho}_2) = 5{,}97$ из графика на рис. III-1-8 [21] находим $\alpha_2 = 0{,}74$ и по этой величине уточняем $\Delta\bar{V}_n$. Для этого вычислим [см. (3.IV.36)]

$$D = (2/9)(7 + 0{,}74)(1 + 0{,}74)\,0{,}74 = 2{,}22,$$

а затем найдем

$$\Delta\bar{V}_n = \frac{3}{7+0{,}74}\left(1 + \sqrt{1 + 2{,}22/1{,}47^2}\right) = 0{,}939.$$

Соответствующая безразмерная величина энтальпии

$$\bar{i}_2 = \frac{1{,}47^2}{2}\,0{,}939\,(2 - 0{,}939) = 1{,}076,$$

а отношение плотностей

$$\rho_2/\rho_1 = 1/(1 - 0{,}939) = 16{,}4.$$

Тогда

$$\bar{\rho}_2 = 16{,}4\cdot 1{,}08\cdot 10^{-7} = 1{,}77\cdot 10^{-6}.$$

Так как логарифм величины $1/\bar{\rho}_2$ равен 5,76, то из графика рис. III-1-8 [21] определяем во втором приближении $\alpha_2 = 0{,}72$. На этом приближения заканчиваем и окончательно находим:

$$D = (2/9)\,(7 + 0{,}72)(1 + 0{,}72)\,0{,}72 = 2{,}12;$$

$$\Delta\bar{V}_n = \frac{3}{7+0{,}72}\left(1 + \sqrt{1 + 2{,}12/1{,}47^2}\right) = 0{,}936;$$

$$\rho_2/\rho_1 = 1/(1 - 0{,}936) = 15{,}6;$$

$$\bar{\rho}_2 = 15{,}6\cdot 1{,}08\cdot 10^{-7} = 1{,}68\cdot 10^{-6}.$$

Оценим время релаксации, используя формулу [20]:

$$t_D = \left[c\bar{\rho}_2\rho_d\left(\alpha + \frac{\alpha_e}{1-\alpha_e}\right)\right]^{-1},$$

где $c = \frac{k_R}{m_A^2}\,(1+\alpha)\rho_d$, а $\alpha_e = \alpha_2$ — равновесная степень диссоциации. Характеристическая плотность ρ_d в соответствии с табл. III-1-1 [21] равна для воздушной смеси 135 $г/см^3$, а $\bar{\rho}_2 = 1{,}68\cdot 10^{-6}$.

Для приближенной оценки влияния неравновесности на течение воздуха можно рассматривать двухатомную модель воздуха, состоящую из аддитивной смеси кислорода и азота. В этом случае коэффициент c определяют для кислорода, а все остальные параметры, в частности степень равновесной диссоциации α_e, характеристические плотность и давление, находят для двухатомной модели воздуха.

В соответствии с этим константа скорости рекомбинации $k_R =$

$=8{,}4\cdot10^{14}$ *см*^{6}/(*моль*$^2\cdot$*сек*), а масса атома $m_A=16$ *г/моль*. Имея в виду, что непосредственно за скачком $\alpha=0$, получим

$$c=\frac{8{,}4\cdot10^{14}}{16^2}\,135=4{,}43\cdot10^{14}\ см^3/(сек\cdot г).$$

Для этих данных время релаксации

$$t_D=\left[4{,}43\cdot10^{14}\cdot1{,}68\cdot10^{-6}\cdot135\left(\frac{0{,}72}{1-0{,}72}\right)\right]^{-1}=2{,}30\cdot10^{-6}\ сек.$$

Соответствующая длина пути релаксации

$$x=\frac{1}{2}\left(V_{\alpha=0}+V_e\right)t_D,$$

где $V_{\alpha=0}$ и V_e — скорости соответственно неравновесного и равновесного течений газа. Используя уравнение импульса для сильной ударной волны $p_2+\rho_2V_2^2=\rho_1V_1^2$, найдем

$$V_2=V_{\alpha=0}=\sqrt{\frac{\rho_1V_1^2-p_2}{\rho_2}}=\sqrt{\frac{1{,}39\cdot10^{-3}\cdot7920^2-7{,}30\cdot10^4}{8{,}29\cdot10^{-3}}}=1300\ м/сек.$$

С учетом найденных выше величин $\Delta\overline{V}=(V_1-V_2)/V_1=0{,}936$ и $V_1=7920$ *м/сек*, значение

$$V_2=V_e=V_1(1-\Delta\overline{V})=7920\,(1-0{,}936)=507\ м/сек.$$

Таким образом, длина пути релаксации

$$x=\frac{1}{2}\,(1300+507)\,2{,}30\cdot10^{-6}=2{,}04\cdot10^{-3}\ м.$$

V.1. С помощью уравнения (2.V.1) можно исследовать установившиеся газовые потоки, причем если в этом уравнении положить $\varepsilon=0$, то оно будет справедливо для двухмерного плоского потока, а при $\varepsilon=1$ — для двухмерного пространственного (осесимметричного) потока.

Вместе с тем написанное уравнение пригодно для изучения как вихревых (неизэнтропических), так и безвихревых (изэнтропических) движений газа. В первом случае оно может быть преобразовано к уравнению для функции тока ψ:

$$\left(V_x^2-a^2\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+2V_xV_y\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}+\left(V_y^2-a^2\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\varepsilon}{y^{1-\varepsilon}}a^2V_x\left(1-\frac{V^2}{V_{\max}^2}\right)^{\frac{1}{1-k}}=$$

$$=\frac{k-1}{2k}\cdot\frac{V_{\max}^2}{RV}\left(1-\frac{V^2}{V_{\max}^2}\right)^{\frac{1}{k-1}}y^{\varepsilon}\left(a^2-V^2\right)\frac{dS}{dn}, \qquad (3.V.1)$$

где $V_x=\frac{1}{\rho y^{\varepsilon}}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}$; $V_y=-\frac{1}{\rho y^{\varepsilon}}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}$,

а во втором — к уравнению для потенциала скоростей φ:

$$\left(V_x^2-a^2\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2V_xV_y\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+\left(V_y^2-a^2\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\varepsilon\frac{a^2V_y}{y}=0, \qquad (3.V.2)$$

где $V_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}$; $V_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}$; $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=\frac{\partial V_x}{\partial y}=\frac{\partial V_y}{\partial x}$.

V.2. Рассмотрим какую-нибудь линию тока. Уравнение движения в проекции на нормаль n к этой линии имеет вид

$$V^2/r=-(1/\rho)\cdot(dp/dn), \qquad (3.V.3)$$

где V^2/r — ускорение частицы газа; r — радиус кривизны линии тока. Вдоль каждой линии тока действительно уравнение энергии

$$V^2/2+i=i_0. \qquad (3.V.4)$$

Дифференцируя по n (3.V.4), найдем

$$V\frac{dV}{dn}+\frac{di}{dn}=\frac{di_0}{dn}. \qquad (3.V.5)$$

Заметим при этом, что вдоль одной и той же линии тока $i_0=\text{const}$ и, следовательно, $di_0=0$. Согласно второму закону термодинамики изменение энтропии

$$dS=c_v\frac{dT}{T}+\frac{p}{T}d\left(\frac{1}{\rho}\right). \qquad (3.V.6)$$

Пользуясь уравнением состояния $p=\rho RT$, получим

$$d(p/\rho)=dp/\rho+pd(1/\rho)=RdT, \qquad (3.V.7)$$

откуда

$$pd(1/\rho)=RdT-dp/\rho. \qquad (3.V.8)$$

Из уравнений (3.V.6) и (3.V.8) находим

$$dS=c_v\frac{dT}{T}+\frac{1}{T}\left(RdT-\frac{dp}{\rho}\right).$$

Отсюда, учитывая, что энтальпия $i=c_pT$ и газовая постоянная $R=c_p-c_v$, получим

$$T\cdot dS=di-dp/\rho. \qquad (3.V.9)$$

Это же уравнение можно написать в виде

$$T\frac{dS}{dn}=\frac{di}{dn}-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{dp}{dn}. \qquad (3.V.10)$$

В таком виде уравнение (3.V.10) характеризует изменение энтропии при переходе от одной линии тока к другой. Исключая из него значение di/dn, получим

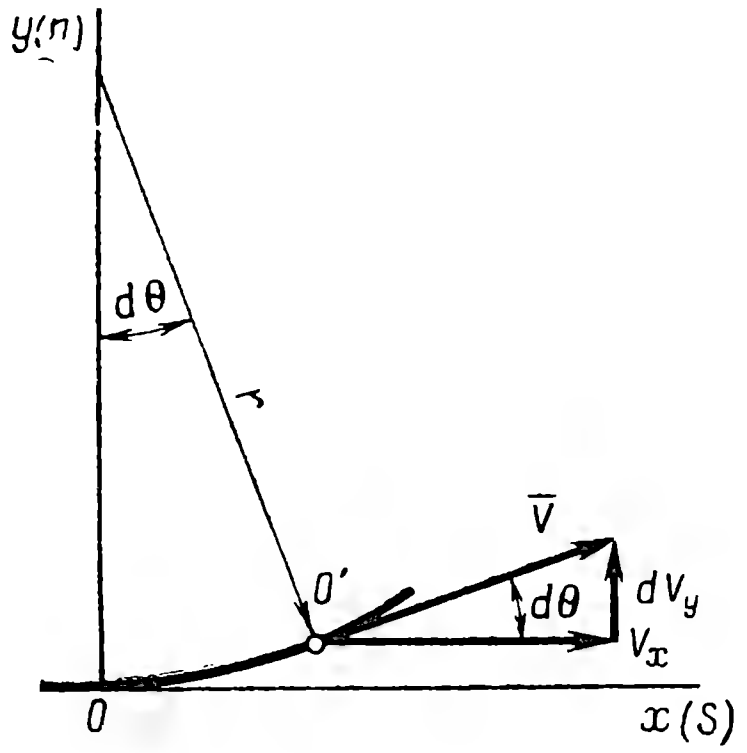


Рис. 3.V.1. Схема линии тока

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{dp}{dn}=\frac{di_0}{dn}-V\frac{dV}{dn}-T\frac{dS}{dn}. \qquad (3.V.11)$$

Используя это выражение и уравнение движения (3.V.3), получим

$$V\,(dV/dn-V/r)=di_0/dn-T\,(dS/dn). \qquad (3.V.12)$$

Покажем, что выражение $(dV/dn—V/r)$ равно удвоенному значению вихря в данной точке. Рассмотрим какую-нибудь линию тока (рис. 3.V.1) и проведем касательную к ней в произвольной точке O. По касательной направим ось x, а по нормали к ней — ось y. Для точки O производная

$$\partial V_x/\partial y=dV/dn, \qquad (3.V.13)$$

так как вектор скорости в этой точке направлен по оси x. Если обозначить через ds элемент дуги линии тока, то можем написать

$$\partial V_y/\partial x=\partial V_y/\partial s$$

или

$$\partial V_y/\partial x=V\,(d\theta/ds)=V/r. \qquad (3.V.14)$$

Из (3.V.13) и (3.V.14) находим удвоенный вихрь:

$$2\omega_z=\partial V_y/\partial x-\partial V_x/\partial y=V/r-dV/dn. \qquad (3.V.15)$$

Подставляя (3.V.15) в (3.V.12), получим

$$2V\omega_z=di_0/dn-T\,(dS/dn). \qquad (3.V.16)$$

Из этого выражения следует, что вихрь ω_z равен нулю при условии

$$di_0/dn=0,\quad dS/dn=0. \qquad (3.V.17)$$

В ином случае (при наличии потерь энергии или изменении энтропии при переходе от одной линии тока к другой) поток будет вихревым. Именно такой поток возникает за криволинейной волной, так как он характеризуется значением $dS/dn\neq0$. При этом если такая волна возникает в «невязком» сверхзвуковом потоке, то $di_0/dn=0$, если же она образуется в потоке, где проявляется действие сил вязкости (например в пограничном слое), то $di_0/dn\neq0$.

V.3. Условие постоянства энтропии соответствует равенству нулю полной производной энтропии по времени, т. е.

$$dS/dt=0. \qquad (3.V.18)$$

Так как рассматривается д а н н а я частица, то вычисление этой произ-

водной осуществляется для траектории (а не для линии тока), и такое вычисление представляет собой полное дифференцирование:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial S}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial S}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} =$$

$$= \frac{\partial S}{\partial t} + V_x \frac{\partial S}{\partial x} + V_y \frac{\partial S}{\partial y} + V_z \frac{\partial S}{\partial z},$$

или

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \overline{V} \operatorname{grad} S = 0.$$

V.4. В соответствии с первым законом термодинамики изменение энтропии

$$dS = di/T - dp/(\rho T). \qquad (3.V.19)$$

По условию постоянства энтальпии торможения i_0 вдоль линии тока,

$$di + V \cdot dV = 0,$$

откуда $di = -VdV$. С другой стороны, для движения вдоль линии тока можно написать $VdV = -dp/\rho$ или $di = dp/\rho$. Внося это в (3.V.19), получим равенство $dS = 0$, в соответствии с которым вдоль линии тока $S = \text{const}$.

V.5. Решение уравнения (2.V.2) для потенциала φ в окрестности точки $N(x, y)$ на начальной кривой можно записать в виде ряда:

$$\varphi(x_0, y_0) = \varphi(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[(\Delta x)^n \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} + \frac{n}{1} (\Delta x)^{n-1} \Delta y \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^{n-1} \partial y} + \right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)}{2} (\Delta x)^{n-2} (\Delta y)^2 \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^{n-2} \partial y^2} + \cdots + (\Delta y)^n \frac{\partial^n \varphi}{\partial y^n} \right], \qquad (3.V.20)$$

где x_0, y_0 — координаты точки M, расположенной в непосредственной близости от точки $N(x, y)$. Расстояние между этими точками определяется величинами $\Delta x = x_0 - x$, $\Delta y = y_0 - y$.

С помощью ряда (3.V.20) можно получить решение, если на рассматриваемой кривой известны значения функции φ и ее производные любого порядка $\partial^n \varphi / \partial x^n$, $\partial^n \varphi / (\partial x^{n-1} \partial y)$ и т. д. Так как обычно на этой кривой заданы значения первых производных $\partial \varphi / \partial x$ и $\partial \varphi / \partial y$, то необходимо дополнительно найти производные более высокого порядка. При решении газодинамических задач обычно достаточно знать производные второго порядка, т. е. $\partial^2 \varphi / \partial x^2$, $\partial^2 \varphi / (\partial x \partial y)$ и $\partial^2 \varphi / \partial y^2$. Следовательно, решение задачи Коши в рассматриваемом классе задач связано с определением дополнительных условий, позволяющих определить указанные производные потенциальной функции φ более высокого порядка, входящие в уравнения (2.V.2) или (3.V.20).

V.6. Для решения системы уравнений (2.V.3) используется метод определителей. В соответствии с этим методом вторые производные отыскиваются в следующем виде:

$$u = \varphi_{xx} = \Delta_u / \Delta, \quad s = \varphi_{xy} = \Delta_s / \Delta, \quad t = \varphi_{yy} = \Delta_t / \Delta,$$

где Δ_u, Δ_s, Δ_t — частные определители; Δ — главный определитель системы уравнений (2.V.3). Эти решения будут однозначными, если главный определитель на начальной кривой не равен нулю.

V.7. Для решения заданной системы уравнений (2.V.4) составим следующие определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0; \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

В соответствии с этими значениями решение системы формально запишется в следующем виде:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{0}{0}; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{0}; \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{0}.$$

Этой неопределенности в решении можно избежать. Непосредственно из системы уравнений следует, что она имеет бесконечное множество решений:

$$x;\ y = 1 - x;\quad z = 6x - 2,$$

которые будут конечными при конечном значении x, несмотря на то что все определители системы равны нулю. Например, при $x=3$ значения $y=-2$, $z=16$, а при $x=4$ значения $y=-3$, $z=22$ и т. д.

V.8. Для существования конечных, хотя и неоднозначных решений искомой функции φ [см. (2.V.2)], определяемой разложением (3.V.20), необходимо, чтобы главный и все частные определители системы уравнений (2.V.3) равнялись нулю (т. е. $\Delta=0$ и $\Delta_u=\Delta_s=\Delta_t=0$).

V.9. Решение (2.V.6) представляет собой в дифференциальной форме систему уравнений — характеристик двух семейств, а значения $(dy/dx)_{1,2}$ определяют углы наклона касательных к этим характеристикам в рассматриваемой точке.

V.10. Уравнения (2.V.5) и

$$A(y'q' - p') - 2Bq' - H = 0 \quad (p' = dp/dx,\ q' = dq/dx), \qquad (3.V.21)$$

которые соответствуют равенству нулю главного, а также частных определителей системы (2.V.3) и определяют существование конечных, хотя и неоднозначных, решений для u, s, t, называются условиями совместности.

Геометрически эти условия означают, что решения уравнений для характеристик в физической плоскости x, y являются отображением на плоскость p, q, т. е. точкам кривых, описываемых уравнением (2.V.5), соответствуют точки кривых, определяемых уравнением (3.V.21). Иначе говоря, перемещению вдоль характеристики в плоскости x, y соответствует перемещение вдоль характеристики того же семейства в плоскости p, q.

V.11. Отличительная особенность характеристик от других кривых, проведенных в потоке, заключается в том, что если вдоль кривой, не являющейся характеристикой, начальные условия можно задавать произвольно, то вдоль характеристики этого делать нельзя. Это объясняется тем, что характеристики должны удовлетворять дифференциальному уравнению (2.V.5) или (3.V.21).

V.12. По заданному числу $\mathbf{M}=2$ определим угол наклона характеристик (линий Маха) к вектору скорости в рассматриваемой точке:

$$\mu = \pm \arcsin(1/\mathbf{M}) = \pm \arcsin(1/2) = \pm 30^\circ. \qquad (3.V.22)$$

Так как, по условию, вектор скорости составляет с осью Ox угол $\beta=40^\circ$, то наклон этих характеристик к той же оси будет определяться углами $\beta\pm\mu$ (рис. 3.V.2): $\beta+\mu=70^\circ$ (первое семейство) и $\beta-\mu=10^\circ$ (второе семейство).

V.13. Двухмерные (плоское или пространственное осесимметричное) течения газа описываются общим уравнением (2.V.1). Конкретный вид уравнения для каждого из этих двух течений определяется наличием свободного члена a^2V_y/y.

Решения этих уравнений, как известно, хотя и неоднозначные, будут при условии, что главный (Δ) и частные (Δ_u, Δ_s, Δ_t) определители системы (2.V.3) равны нулю. При этом равенство нулю главного определителя соответствует условию существования характеристик в физической плоскости газового потока. Таким образом, уравнение этих характеристик будет (2.V.5). Вид этого уравнения зависит только от коэффициентов A, B, C и, следовательно, будет одним и тем же как для плоского, так и для пространственного осесимметричного течений.

V.14. По условию, характеристики первого и второго семейств наклонены к оси Ox под углами $\beta+\mu=18°$ и $\beta-\mu=-12°$. Следовательно, угол между этими характеристиками в рассматриваемой точке равен $2\mu=18°+12°=30°$. С учетом этого угол $\mu=15°$, а соответствующее число Маха

$$M = 1/\sin\mu = 1/\sin 15° = 3{,}86.$$

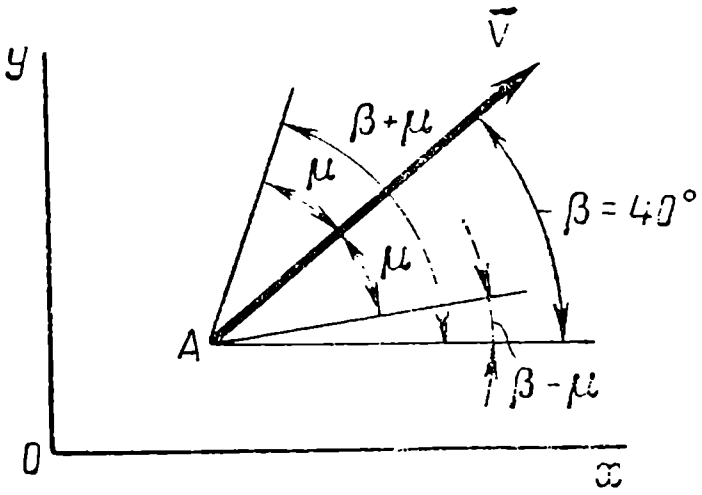


Рис. 3.V.2. Направление характеристик в физической плоскости

Направление вектора скорости совпадает с биссектрисой угла между характеристиками, и, следовательно, угол наклона этого вектора

$$\beta = (\beta+\mu)-\mu = 18°-15° = 3°. \qquad (3.V.23)$$

V.15. Для ответа на вопрос воспользуемся уравнением «эллипса скоростей»

$$\frac{\lambda_x^2}{(k+1)/(k-1)} + \lambda_y^2 = 1.$$

Малая полуось этого эллипса равна единице, а большая $\sqrt{(k+1)/(k-1)}$. Он обладает тем свойством, что когда конец вектора скорости $\overline{V}$ (или $\overline{\lambda}$) лежит на эллипсе, а центр эллипса совпадает с началом вектора, то его большая ось совпадает с направлением характеристики одного из семейств в плоскости потока.

Вычертим на листе бумаги в каком-либо масштабе два таких эллипса, у одного из которых большая полуось $b_1=\sqrt{(k_1+1)/(k_1-1)}$, а у другого $b_2=\sqrt{(k_2+1)/(k_2-1)}$ (рис. 3.V.3). Затем проведем на рисунке из центра O элемент дуги окружности радиусом, равным заданной скорости λ, и зафиксируем точки B и A пересечения этой дуги с ветвями эллипсов.

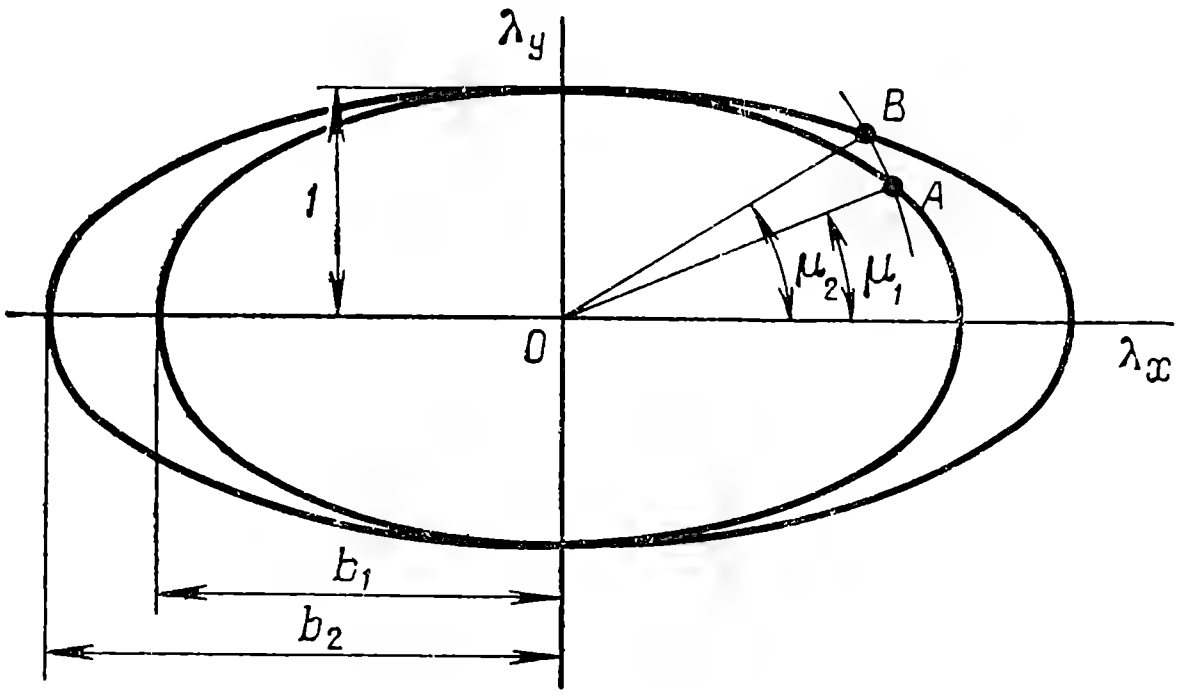


Рис. 3.V.3. Определение угла наклона характеристики μ с помощью изэнтропного эллипса скоростей

Углы μ_2 и μ_1 наклона прямых OB и OA к большой полуоси представляют собой углы наклона характеристик соответственно в «горячем» и «холодном» потоках. Как видим, характеристика в «горячем» потоке наклонена под бóльшим углом.

V.16. Характеристики обоих семейств в физической плоскости описываются уравнением

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \operatorname{tg}(\beta \pm \mu) = \frac{1}{V_x^2 - a^2}\left(V_x V_y \pm a\sqrt{V^2 - a^2}\right). \quad (3.V.24)$$

Для рассматриваемой точки потока после соответствующей подстановки скоростей потока и скорости звука получим

$$\operatorname{tg}(\beta \pm \mu) = \frac{1}{320^2 - 280^2}\left(320 \cdot 150 \pm 280\sqrt{(320^2 + 150^2) - 280^2}\right).$$

Таким образом, для характеристики первого семейства $\operatorname{tg}(\beta+\mu)=4{,}52$, а для характеристики второго семейства $\operatorname{tg}(\beta-\mu)=-0{,}517$. В соответствии с этими результатами $\beta+\mu=77°32'$, $\beta-\mu=-27°20'$ и, следовательно, $\beta=25°06'$, $\mu=52°26'$.

V.17. Наклон характеристик в плоскости годографа можно определить, используя свойство перпендикулярности этих и сопряженных характеристик в физической плоскости. В соответствии с этим наклон таких характеристик будут определяться углами $\beta^2=45°+90°=135°$ (второе семейство) и $\beta^1=13°+90°=103°$ (первое семейство).

V.18. Для анализа воспользуемся уравнением

$$(1/R)\cdot dS/dn = -d\ln p_0'/dn. \quad (3.V.25)$$

Из этого уравнения следует, что при $dS/dn>0$ производная $d\ln p_0'/dn<0$ и таким образом, давление торможения p_0' при переходе от одной линии тока к другой с увеличением энтропии будет уменьшаться.

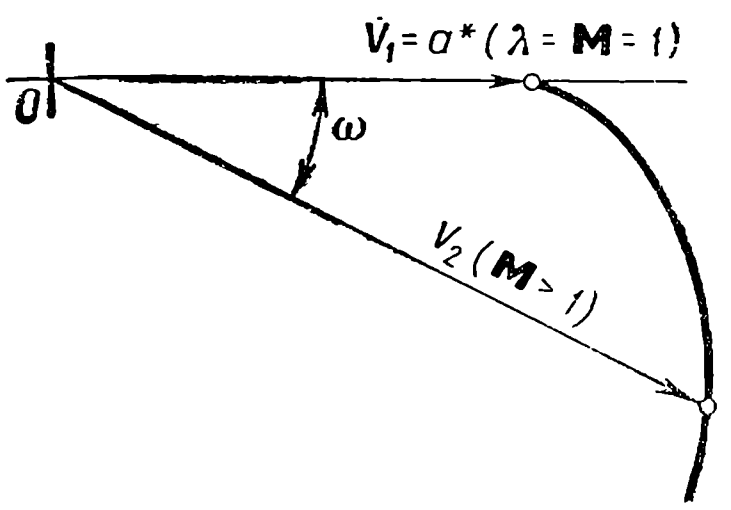


Рис. 3.V.4. К определению угла ω

V.19. При сверхзвуковом обтекании заостренного профиля с участком клиновидной поверхности перед ним возникает скачок уплотнения, прямолинейный участок которого ограничен точкой B, расположенной на пересечении с характеристикой, проведенной из конца клина. За этой точкой скачок искривляется в результате взаимодействия с падающими волнами разрежения, образующимися при обтекании криволинейного участка профиля (см. рис. 2.V.2), и, как следствие, происходит изменение его интенсивности. Это в свою очередь вызывает изменение энтропии при переходе от одной линии тока к другой, что является причиной вихревого характера движения газа за скачком.

Зона влияния такого характера движения на обтекание ограничивается областью, расположенной внутри криволинейного скачка и характеристики второго семейства BC, выходящей из точки B. Это объясняется тем, что в сверхзвуковом потоке возмущения распространяются только за характеристиками (линиями Маха) в физической плоскости потока.

V.20. Угол ω определяемый из выражений (2.V.8) или (2.V.9), равен углу отклонения газового потока при его изэнтропическом расширении от точки, где $\mathbf{M}=1$, до состояния, характеризуемого некоторым произвольным числом $\mathbf{M}>1$, которое равно верхнему пределу при вычислении интеграла (2.V.8) (рис. 3. V.4).

V.21. Для точки A уравнение характеристик в плоскости годографа будет

$$\beta^1 = -\omega_1 + \beta_1, \tag{3.V.26}$$

а для точки B

$$\beta^2 = -\omega_2 + \beta_1. \tag{3.V.27}$$

Вычитая из второго первое, получим

$$\beta^2 - \beta^1 = \Delta\beta = \omega_1 - \omega_2. \tag{3.V.28}$$

Из табл. 10 [13] находим для $\mathbf{M}_1=5$ и $\mathbf{M}_2=10$ соответственно $\omega_1=76{,}92°$ и $\omega_2=102{,}32°$. С учетом этих данных

$$\Delta\beta = 76{,}92° - 102{,}32° = -25{,}40°.$$

V.22. Из уравнения (3.V.28) находим

$$\omega_2 = \omega_1 - \Delta\beta,$$

где угол ω_1 в соответствии со значеним $\mathbf{M}_1=3$ равен 49,76° (см. табл. 10 [13]). Таким образом,

$$\omega_2 = 49{,}76° - 10° = 39{,}76°.$$

По этой величине из той же таблицы находим соответствующее число $\mathbf{M}_2=2{,}53$. Как видим, число Маха уменьшилось, значит течение происходит со сжатием.

V.23. Предельный угол отклонения потока (ω_{max}) определяется из условия

$$\omega_{max} = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} - 1\right). \tag{3.V.29}$$

Величина этого угла для $k=1{,}4$

$$\omega_{max} = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\frac{1{,}4+1}{1{,}4-1}} - 1\right) = 130{,}455°.$$

Угол ω_2, соответствующий заданному числу $\mathbf{M}_2=10$ (см. табл. 10 [13]), равен 102,316°. Таким образом, разность $\omega_{max}-\omega_2=130{,}455°-102{,}316°=28{,}139°$.

V.24. Из уравнения для характеристик в плоскости годографа $\beta^1=\omega+\beta_1$ следует, что

$$\beta_{max} = \omega_{max} + \beta_1.$$

Таким образом, предельный угол отклонения

$$\beta_{max} - \beta = \Delta\beta_{max} = \omega_{max} - \omega.$$

Из табл. 10 [13] по $\mathbf{M}=5$ находим $\omega=76{,}92°$. В соответствии с этим

$$\Delta\beta_{max} = 130{,}455° - 76{,}92° = 53{,}535°.$$

V.25. Для решения задачи воспользуемся табл. 10 [13].

Из этой таблицы для $\mathbf{M}_1=3{,}2$ находим угол $\omega_1=53{,}47°$, а также газодинамические функции $\lambda_1=2{,}008$, $\pi(\lambda_1)=0{,}0202$, $\varepsilon(\lambda_1)=0{,}0616$, $\tau(\lambda_1)=0{,}328$. Затем по уравнению (3.V.28) находим

$$\omega_2 = \omega_1 - \Delta\beta = 53{,}47° + 13° = 66{,}47°.$$

Из той же табл. 10 по найденной величине ω_2 определяем число $\mathbf{M}_2=4{,}05$ и соответствующие функции $\lambda_2=2{,}144$, $\pi(\lambda_2)=0{,}00616$, $\varepsilon(\lambda_2)=0{,}0264$, $\tau(\lambda_2)=0{,}234$.

Рассмотрим, как вычисляются по найденным газодинамическим функциям абсолютные величины параметров, характеризующих тече-

ние в струе. Давление, температура и плотность торможения рассчитываются по формулам:

$$p_0 = \frac{p_1}{\pi(\lambda_1)}, \quad T_0 = \frac{T_1}{\tau(\lambda_1)}, \quad \rho_0 = \frac{\rho_1}{\varepsilon(\lambda_1)}.$$

Для изэнтропического течения эти параметры остаются постоянными и, следовательно, их можно использовать для расчета соответствующих значений давления, температуры и плотности, а также скорости в заданном сечении струи:

$$p_2 = p_1 \frac{\pi(\lambda_2)}{\pi(\lambda_1)} = 0{,}12 \frac{0{,}616 \cdot 10^{-2}}{0{,}202 \cdot 10^{-1}} = 0{,}0366\ кГ/см^2;$$

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{\varepsilon(\lambda_2)}{\varepsilon(\lambda_1)} = 0{,}02 \frac{0{,}264 \cdot 10^{-1}}{0{,}616 \cdot 10^{-1}} = 0{,}00856\ кГ \cdot сек^2/м^4;$$

$$T_2 = T_1 \frac{\tau(\lambda_2)}{\tau(\lambda_1)} = 209 \frac{0{,}234}{0{,}328} = 148\ \text{K}.$$

Скорость звука

$$a_2 = 20{,}1 \sqrt{T_2} = 20{,}1 \sqrt{148} = 244\ м/сек,$$

а соответствующая скорость газового потока

$$V_2 = a_2 \mathbf{M}_2 = 244 \cdot 4{,}05 = 988\ м/сек.$$

V.26. При истечении газовой струи одновременно происходит ее поворот, сопровождающийся расширением, в результате которого статическое давление в ней становится равным противодавлению (давлению в окружающей среде). Такое расширение газа представляет собой изэнтропический процесс, характеризующийся постоянным давлением торможения p_0, определяемым из соотношения $p_0 = p_a/[\pi(\lambda_a)]$. По известной величине противодавления $p_н$ можно вычислить газодинамическую функцию:

$$\pi(\lambda_н) = p_н/p_0 = \pi(\lambda_a)(p_н/p_a). \qquad (3.V.30)$$

Для заданных условий по числу $\mathbf{M}_a = 2{,}3$ из табл. 10 [13] найдем соответствующие функции $\lambda_a = 1{,}756$, $\pi(\lambda_a) = 0{,}0800$, а также угол $\omega_a = 34{,}28°$. Согласно этим данным $\pi(\lambda_н) = 0{,}0800\,(0{,}11/0{,}56) = 0{,}0157$. Из той же таблицы по величине $\pi(\lambda_н) = 0{,}0157$ определим функцию $\lambda_н = 2{,}041$, число $\mathbf{M}_н = 3{,}37$ и угол $\omega_н = 56{,}41°$. По значению этого угла $\omega_н$ находим угол поворота струи:

$$\Delta\beta = \omega_н - \omega_a = 56{,}41° - 34{,}28° = 22{,}13°.$$

V.27. Рассмотрим плоское сверхзвуковое течение около выпуклой поверхности (рис. 3.V.5). Невозмущенная и возмущенная области этого течения разделяются характеристикой (назовем ее характеристикой первого семейства), проведенной из точки O — границы прямолинейного и криволинейного участков обтекаемого контура. Эта характеристика ON является прямой линией, что следует из ее уравнения

$$dy/dx = \lambda_1 = \operatorname{tg}(\beta + \mu) = \operatorname{tg}\mu_\infty,$$

в котором $\mu_\infty = \arcsin(1/\mathbf{M}_\infty) = \text{const}$.

Теперь рассмотрим характеристику этого семейства, выходящую из точки O_1. Ее уравнение в дифференциальной форме напишем в виде (3.V.24)

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_1 = \frac{V_x V_y + a\sqrt{V^2 - a^2}}{V_x^2 - a^2}.$$

Чтобы определить вид этой характеристики, рассмотрим характеристики в плоскости годографа (см. рис. 3.V.5). Проведем в этой плоскости вектор $\overline{V}_\infty$ до пересечения в точке A' с эпициклоидой, являющейся характеристикой второго семейства в плоскости годографа. Перемещаясь вдоль характеристики ON в физической плоскости, будем располагаться в плоскости годографа в одной и той же точке A'. Таким образом, для всей возмущенной области течения характеристикой второго семейства в плоскости годографа будет являться одна и та же эпициклоида, проходящая через точку A'.

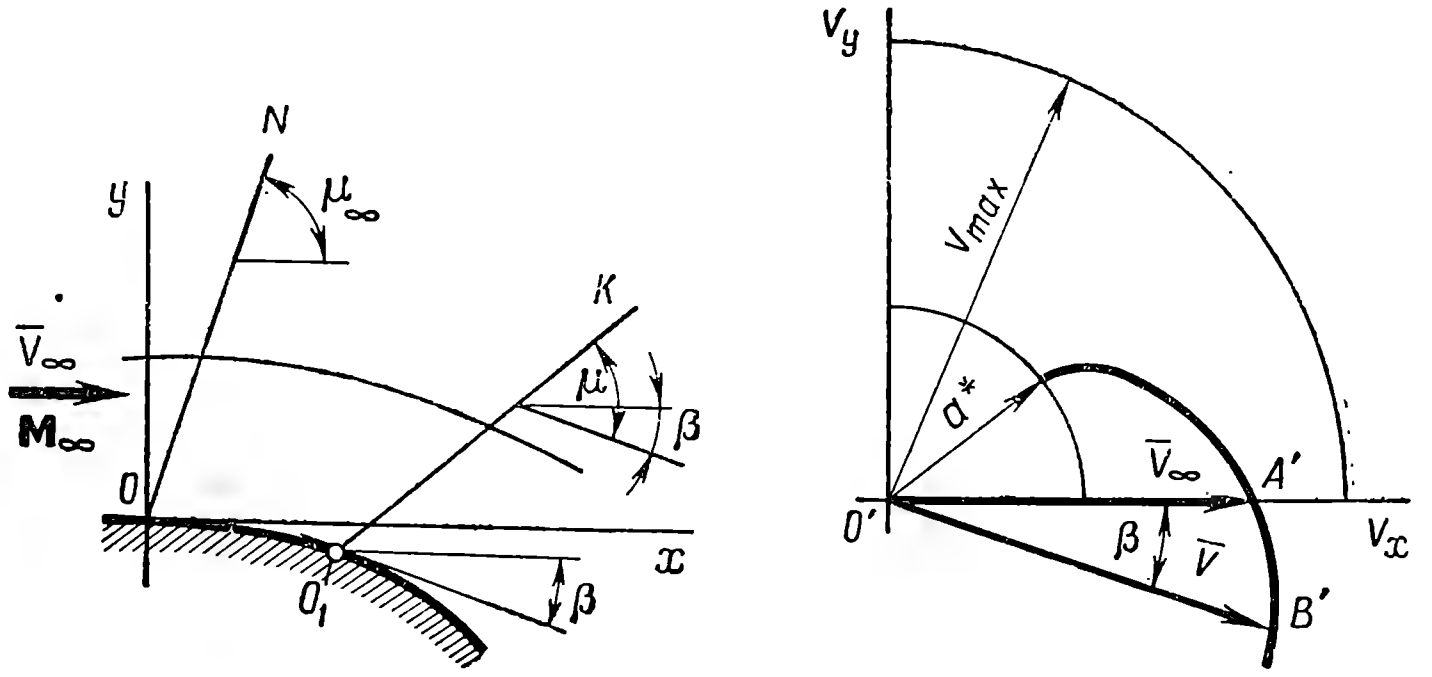


Рис. 3.V.5. Определение скорости газа при изэнтропическом расширении

На эпициклоиде можно найти точку B', соответствующую точке O_1 на контуре, где скорость $\overline{V}$. Этой точке B' соответствует характеристика O_1K первого семейства, вдоль которой, очевидно, скорость $\overline{V}$ будет постоянной по величине и направлению. Отсюда следует, что в соответствии с (3.V.24) эта характеристика, как и все другие характеристики этого семейства, будет прямой линией.

V.28. Рассмотрим уравнения для сопряженных характеристик в физической плоскости x, y и в плоскости годографа λ_x, λ_y. Уравнения в плоскости x, y напишем в виде (3.V.24)

$$\lambda_{1,2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \frac{1}{V_x^2 - a^2}\left(V_x V_y \pm a\sqrt{V^2 - a^2}\right).$$

Если в точке A потока известно местное число $\mathbf{M}$, то наклон характеристики определится углом $\mu = \arcsin(1/\mathbf{M})$. Таким образом, вид характеристики в физической плоскости не зависит от того, будет ли поток плоским или пространственным осесимметричным, вихревым или потенциальным, а определяется распределением скоростей (чисел Маха, см. рис. 2.V.5, *а*).

По физическому смыслу все эти характеристики являются линиями Маха (линиями слабых возмущений). Однако вид характеристик в плоскости годографа будет неодинаков для рассмотренных случаев течения газа. На рис. 2.V.5, *б* показаны характеристики в плоскости годографа для плоского потенциального течения, представляющие собой эпициклоиды, уравнения которых в дифференциальной форме

$$d\lambda_x + \lambda_{1,2}\, d\lambda_y = 0. \qquad (3.V.31)$$

Рассмотрим характеристики на рис. 2.V.5, *в*. Как видно, они смещены на величину сдвига δ_1, δ_2 относительно характеристик плоского по-

тенциального потока. Это обусловлено иным видом уравнений таких характеристик [20]:

$$\frac{d\lambda}{\lambda} \mp \operatorname{tg}\mu d\beta - \varepsilon \frac{dx}{y} f_1(\mu, \beta) \pm \frac{dx}{kR} \cdot \frac{dS}{dn} f_2(\mu, \beta) = 0, \qquad (3.V.32)$$

где $f_1(\mu, \beta)$, $f_2(\mu, \beta)$ — некоторые функции Маха и наклона вектора скорости; S — энтропия.

В соответствии с уравнением (3.V.32) сдвиг характеристик относительно эпициклоид может быть в следующих случаях: 1) сверхзвуковое течение плоское ($\varepsilon=0$) и вихревое (непотенциальное, $dS/dn\neq0$); 2) поток пространственный осесимметричный ($\varepsilon=1$), являющийся либо потенциальным ($dS/dn=0$), либо вихревым (непотенциальным, $dS/dn\neq0$).

V.29. Из аэродинамики сверхзвуковых потенциальных течений газа известно, что при плоском б е з в и х р е в о м обтекании поверхности все характеристики одного семейства будут прямыми линиями, если хотя бы одна из них окажется прямой (OB на рис. 2.V.6, *а*). При этом следует иметь в виду, что в с я к о е течение за криволинейным скачком уплотнения будет, строго говоря, непотенциальным (вихревым) и принятая схема потока с прямолинейными характеристиками является расчетной моделью, которая не учитывает вихревого характера движения.

При больших скоростях обтекания становится необходимым учитывать такой характер движения за криволинейным скачком и пользоваться при этом уравнениями характеристик, которые отличаются от соответствующих уравнений для потенциальных течений. По этой причине и вид таких характеристик в плоскости вихревого потока будет иным, чем в плоскости потенциального течения, хотя в вихревом потоке может существовать одна характеристика в виде прямой (CD на рис. 2.V.6, *б*), являющаяся границей между течением около клиновидного носка и потоком на криволинейной стенке.

V.30. Решение этой задачи связано прежде всего с определением максимальной скорости потока:

$$V^2_{\max} = \left(\frac{2}{k-1} \cdot \frac{a^2_\infty}{V^2_\infty} + 1\right) V^2_\infty. \qquad (3.V.33)$$

При температуре $T_\infty=288$ К и значении $k=1{,}4$ скорость звука $a_\infty=340$ *м/сек*, следовательно,

$$V^2_{\max} = \left(\frac{2}{1{,}4-1} \cdot \frac{340^2}{750^2} + 1\right) V^2_\infty = 2{,}03 V^2_\infty.$$

По этому значению $V^2_{\max}$, а также заданным V_∞, V_A и V_B можно вычислить местные числа Маха в точках A и B:

$$\mathbf{M}_A = \left[\frac{k-1}{2}\left(\frac{V^2_{\max}}{V^2_\infty} \cdot \frac{V^2_\infty}{V^2_A} - 1\right)\right]^{-1/2} =$$

$$= \left[\frac{1{,}4-1}{2}\left(2{,}03\,\frac{750^2}{800^2} - 1\right)\right]^{-1/2} = 2{,}53; \qquad (3.V.34)$$

$$\mathbf{M}_B = \left[\frac{1{,}4-1}{2}\left(2{,}03\,\frac{750^2}{820^2} - 1\right)\right]^{-1/2} = 2{,}68.$$

Соответствующие углы наклона линий Маха:

$$\mu_A = \arcsin\left(1/\mathbf{M}_A\right) = \arcsin\left(1/2{,}53\right) = 23^\circ\,18';$$

$$\mu_B = \arcsin\left(1/2{,}68\right) = 21^\circ\,55'.$$

Таким образом, угол наклона характеристики первого семейства, выходящей из точки B,

$$\beta_B + \mu_B = 32° + 21°55' = 53°55',$$

а соответствующее значение угла для характеристики второго семейства, проведенной из точки A,

$$\beta_A - \mu_A = 30° - 23°18' = 6°42'.$$

Под этими углами проведем отрезки прямых — элементы характеристик — соответственно через точки A и B до пересечения в точке C (см. рис. 2.V.7). Для определения координат этой точки x_C, y_C необходимо решить систему уравнений для характеристик первого и второго семейств, проходящих соответственно через точки B и A:

$$y_C - y_B = (x_C - x_B)\,\mathrm{tg}\,(\beta_B + \mu_B);$$

$$y_C - y_A = (x_C - x_A)\,\mathrm{tg}\,(\beta_A - \mu_A).$$

Подставляя данные, получаем:

$$y_C - 8 = (x_C - 12)\,\mathrm{tg}\,53°55';$$

$$y_C - 10 = (x_C - 10)\,\mathrm{tg}\,6°42'.$$

Решая эту систему относительно x_C и y_C, находим:

$$x_C = 13{,}78, \quad y_C = 10{,}44.$$

Случай плоского движения. Для нахождения скорости в точке C используем уравнения для характеристик в плоскости годографа:

$$\Delta\omega_B - \Delta\beta_B = 0 \text{ (первое семейство);} \qquad (3.V.35)$$

$$\Delta\omega_A + \Delta\beta_A = 0 \text{ (второе семейство).} \qquad (3.V.36)$$

Призведя в (3.V.36) замену:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\omega_A &= \omega_C - \omega_A = \Delta\omega_B + \omega_B - \omega_A; \\ \Delta\beta_A &= \beta_C - \beta_A = \Delta\beta_B + \beta_B - \beta_A, \end{aligned}\right\} \qquad (3.V.37)$$

найдем

$$\Delta\omega_B + \omega_B - \omega_A + \Delta\beta_B + \beta_B - \beta_A = 0.$$

Решая это уравнение совместно с (3.V.35) относительно $\Delta\omega_B$ и $\Delta\beta_B$, получим:

$$\Delta\omega_B = \omega_C \dot{-} \omega_B = (1/2)\,[(\beta_A - \beta_B) + (\omega_A - \omega_B)];$$

$$\Delta\beta_B = \Delta\omega_B = \beta_C - \beta_B = (1/2)\,[(\beta_A - \beta_B) + (\omega_A - \omega_B)].$$

Из табл. 10 [13] по $\mathbf{M}_A = 2{,}53$ и $\mathbf{M}_B = 2{,}68$ находим соответственно $\omega_A = 39{,}82°$, $\omega_B = 43{,}19°$. С учетом этих данных

$$\Delta\omega_B = (1/2)\,[(30° - 32°) + (39{,}82° - 43{,}19°)] = -2{,}68°,$$

откуда

$$\omega_C = \omega_B + \Delta\omega_B = 43{,}19° - 2{,}68° = 40{,}51°.$$

Из табл. 10 [13] по этому значению находим число $\mathbf{M}_C = 2{,}56$. Угол поворота потока $\Delta\beta_B$ определим по значению $\Delta\omega_B$:

$$\Delta\beta_B = \beta_C - \beta_B = \Delta\omega_B = -2{,}68°.$$

В соответствии с этим значением угол наклона потока в точке C

$$\beta_C = \beta_B + \Delta\beta_B = 32° - 2{,}68° = 29{,}32°.$$

Пространственный осесимметричный поток. В этом случае для характеристик в плоскости годографа используем систему:

$$\Delta\omega_B - \Delta\beta_B - (\Delta x_B/y_B)\, l_B = 0 \text{ (первое семейство);} \qquad (3.V.38)$$

$$\Delta\omega_A + \Delta\beta_A - (\Delta x_A/y_A)\, m_A = 0 \text{ (второе семейство),} \qquad (3.V.39)$$

где

$$l_B = \sin\beta_B \cdot \sin\mu_B/\cos(\beta_B + \mu_B); \qquad (3.V.40)$$

$$m_A = \sin\beta_A \cdot \sin\mu_A/\cos(\beta_A - \mu_A). \qquad (3.V.41)$$

Произведя в (3.V.39) замену согласно (3.V.37), получим

$$\Delta\omega_B + \Delta\beta_B + \omega_B - \omega_A + \beta_B - \beta_A - (\Delta x_A/y_A)\, m_A = 0. \qquad (3.V.42)$$

Решая это уравнение совместно с (3.V.38), найдем

$$\Delta\beta_B = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\Delta x_A}{y_A} m_A - \frac{\Delta x_B}{y_B} l_B\right) - (\omega_B - \omega_A) - (\beta_B - \beta_A)\right]. \qquad (3.V.43)$$

По этому значению $\Delta\beta_B$ определим $\Delta\omega_B$:

$$\Delta\omega_B = \Delta\beta_B + (\Delta x_B/y_B)\, l_B. \qquad (3.V.44)$$

Вычислим отдельные параметры, входящие в полученные соотношения:

$$\Delta x_A = x_C - x_A = 13{,}78 - 10 = 3{,}78;$$

$$\Delta x_B = x_C - x_B = 13{,}78 - 12 = 1{,}78;$$

$$m_A = \frac{\sin 30^\circ \cdot \sin 23^\circ 18'}{\cos(30^\circ - 23^\circ 18')} = 0{,}200;$$

$$l_B = \frac{\sin 32^\circ \cdot \sin 21^\circ 55'}{\cos(32^\circ + 21^\circ 55')} = 0{,}336;$$

$$\Delta\beta_B = \beta_C - \beta_B = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{3{,}78}{10} 0{,}200 - \frac{1{,}78}{8} 0{,}336\right) 57{,}3^\circ - \right.$$

$$\left. - (43{,}19^\circ - 39{,}82^\circ) - (32^\circ - 30^\circ)\right] = -2{,}66^\circ.$$

В соответствии с этим значением $\Delta\beta_B$

$$\beta_C = \beta_B + \Delta\beta_B = 32^\circ - 2{,}66^\circ = 29{,}34^\circ.$$

Далее вычисляем:

$$\Delta\omega_B = -2{,}66^\circ + (1{,}78/8)\, 0{,}336 \cdot 57{,}3^\circ = 1{,}61^\circ;$$

$$\omega_C = \omega_B + \Delta\omega_B = 43{,}19^\circ + 1{,}61^\circ = 44{,}80^\circ.$$

Из табл. 10 [13] по этому значению угла ω_C находим в точке C число Маха $M_C = 2{,}76$.

V.31. Случай плоского движения. Для определения скорости в точке C следует воспользоваться системой уравнений для характеристик:

$$\Delta\omega_B - \Delta\beta_B - \frac{\Delta x_B}{k p'_{0B}} \cdot \frac{\Delta p'_0}{\Delta n} c_B = 0 \text{ (первое семейство);} \qquad (3.V.45)$$

$$\Delta\omega_A + \Delta\beta_A + \frac{\Delta x_A}{k p'_{0B}} \cdot \frac{\Delta p'_0}{\Delta n} t_A = 0 \text{ (второе семейство),} \qquad (3.V.46)$$

где

$$\Delta p'_0 = p'_{0A} - p'_{0B}; \qquad (3.V.47)$$

$$c_B = \sin^2\mu_B \cdot \cos\mu_B/\cos(\beta_B + \mu_B); \qquad (3.V.48)$$

$$t_A = \sin^2\mu_A \cdot \cos\mu_A / \cos(\beta_A - \mu_A); \qquad (3.V.49)$$

$$\Delta n = (AC)\sin\mu_A + (BC)\sin\mu_B. \qquad (3.V.50)$$

Произведя в (3.V.46) замену $\Delta\omega_A$ и $\Delta\beta_A$ согласно (3.V.37), получим уравнение

$$\Delta\omega_B + \Delta\beta_B + \omega_B - \omega_A + \beta_B - \beta_A + \frac{\Delta x_A}{kp'_{0B}} \cdot \frac{\Delta p'_0}{\Delta n} t_A = 0. \qquad (3.V.51)$$

Решая это уравнение совместно с (3.V.45), найдем

$$\Delta\beta_B = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{kp'_{0B}} \cdot \frac{\Delta p'_0}{\Delta n}(\Delta x_A t_A + \Delta x_B c_B) - \right.$$

$$\left. - (\omega_B - \omega_A) - (\beta_B - \beta_A)\right]. \qquad (3.V.52)$$

Этому решению соответствует величина

$$\Delta\omega_B = \Delta\beta_B + \frac{\Delta x_B}{kp'_{0B}} \cdot \frac{\Delta p_0}{\Delta n} c_B. \qquad (3.V.53)$$

Произведем необходимые вычисления, используя данные, полученные при решении задачи V.30:

$$t_A = \frac{\sin^2 23°\,18' \cdot \cos 23°\,18'}{\cos(30° - 23°\,18')} = 0{,}145;$$

$$c_B = \frac{\sin^2 21°\,55' \cdot \cos 21°\,55'}{\cos(32° + 21°\,55')} = 0{,}22;$$

$$\frac{\Delta p'_0}{p'_{0B}} = \frac{p'_{0A} - p'_{0B}}{p'_{0B}} = \frac{0{,}8p_0 - 0{,}77p_0}{0{,}77p_0} = 0{,}039;$$

$$AC = \frac{x_C - x_A}{\cos(\beta_A - \mu_A)} = \frac{13{,}78 - 10}{\cos(30° - 23°\,18')} = 3{,}82;$$

$$BC = \frac{x_C - x_B}{\cos(\beta_B + \mu_B)} = \frac{13{,}78 - 12}{\cos(32° + 21°\,55')} = 3{,}02;$$

$$\Delta n = 3{,}82 \cdot \sin 23°\,18' + 3{,}02 \cdot \sin 21°\,55' = 2{,}62;$$

$$\Delta\beta_B = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{1{,}4} \cdot \frac{0{,}039}{2{,}62}(3{,}78 \cdot 0{,}145 + 1{,}78 \cdot 0{,}22)\,57{,}3° - \right.$$

$$\left. - (43{,}19° - 39{,}82°) - (32° - 30°)\right] = -2{,}97°.$$

По этому значению $\Delta\beta_B$ находим угол:

$$\beta_C = \beta_B + \Delta\beta_B = 32° - 2{,}97° = 29{,}03°.$$

Далее вычисляем:

$$\Delta\omega_B = -2{,}97° + \frac{1{,}78}{1{,}4} \cdot \frac{0{,}039}{2{,}62} 0{,}22 \cdot 57{,}3° = -2{,}73°.$$

С учетом этого значения определяем в точке C угол

$$\omega_C = \omega_B + \Delta\omega_B = 43{,}19° - 2{,}73° = 40{,}46°.$$

В табл. 10 [13] этому углу соответствует число Маха $\mathbf{M}_C = 2{,}56$.

Пространственный осесимметричный поток. Используем следующие уравнения для характеристик:

$$\Delta\omega_B - \Delta\beta_B - \frac{\Delta x_B}{y_B} l_B - \frac{\Delta x_B}{kp'_{0B}} \cdot \frac{\Delta p'_0}{\Delta n} c_B = 0; \qquad (3.V.54)$$

$$\Delta\omega_A + \Delta\beta_A - \frac{\Delta x_A}{y_A} m_A + \frac{\Delta x_A}{kp'_{0B}} \cdot \frac{\Delta p'_0}{\Delta n} t_A = 0. \qquad (3.V.55)$$

Произведя во втором уравнении замену $\Delta\omega_A$ и $\Delta\beta_A$ согласно (3.V.37), получим

$$\Delta\omega_B + \Delta\beta_B + \omega_B - \omega_A + \beta_B - \beta_A - \frac{\Delta x_A}{y_A} m_A + \frac{\Delta x_A}{kp'_{0B}} \cdot \frac{\Delta p'_0}{\Delta n} t_A = 0, \qquad (3.V.56)$$

причем в (3.V.54) и (3.V.55) значения l_B и m_A находят по (3.V.40) и (3.V.41).

Решая совместно уравнения (3.V.54) и (3.V.56), найдем

$$\Delta\beta_B = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{kp'_{0B}} \cdot \frac{\Delta p'_0}{\Delta n}(\Delta x_A t_A + \Delta x_B c_B) + \left(\frac{\Delta x_A}{y_A} m_A - \frac{\Delta x_B}{y_B} l_B\right) - \right.$$
$$\left. - (\omega_B - \omega_A) - (\beta_B - \beta_A)\right]. \qquad (3.V.57)$$

По этой величине $\Delta\beta_B$ определяем $\Delta\omega_B$:

$$\Delta\omega_B = \Delta\beta_B + \frac{\Delta x_B}{y_B} l_B + \frac{\Delta x_B}{kp'_{0B}} \cdot \frac{\Delta p'_0}{\Delta n} c_B. \qquad (3.V.58)$$

Вычислим приращение угла $\Delta\beta_B$, используя решения задачи V.30:

$$\Delta\beta_B = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{1,4} \cdot \frac{0,039}{2,62}(3,78 \cdot 0,145 + 1,78 \cdot 0,22)\,57,3^\circ + \right.$$
$$+ \left(\frac{3,78}{10}\,0,200 - \frac{1,78}{8}\,0,336\right)57,3^\circ - (43,19^\circ - 39,82^\circ) -$$
$$\left. - (32^\circ - 30^\circ)\right] = -2,95^\circ.$$

С учетом этого угол наклона вектора скорости в точке C

$$\beta_C = \beta_B + \Delta\beta_B = 32^\circ - 2,95^\circ = 29,05^\circ.$$

Далее находим

$$\Delta\omega_B = -2,95^\circ + \frac{1,78}{8}\,0,336 \cdot 57,3^\circ + \frac{1,78}{1,4} \cdot \frac{0,039}{2,62}\,0,22 \cdot 57,3^\circ = 1,56^\circ$$

и определяем угол:

$$\omega_C = \omega_B + \Delta\omega_B = 43,19^\circ + 1,56^\circ = 44,75^\circ.$$

Из таблицы 10 [13] по этому значению ω_C находим для точки C число $\mathbf{M}_C = 2,75$.

Сравнивая найденные значения β_C и $\mathbf{M}_C$ с соответствующими величинами, полученными в результате решения предыдущей задачи, можно сделать вывод, что вихревой характер движения газа сказался на уменьшении угла наклона вектора скорости и местного числа Маха.

V.32. Вначале определим число Маха в точке D. Для этого воспользуемся формулой (3.V.34). В результате решения задачи V.30 получено значение $V^2_{max}/V^2_\infty = 2,03$, используя которое, найдем

$$\mathbf{M}_D = \left[\frac{1,4-1}{2}\left(2,03\,\frac{750^2}{800^2} - 1\right)\right]^{-1/2} = 2,53.$$

Соответствующий угол Маха

$$\mu_D = \arcsin\left(1/M_D\right) = \arcsin\left(1/2{,}53\right) = 23^\circ 18'.$$

Угол наклона элемента характеристики второго семейства, проведенной из точки D,

$$\beta_D - \mu_D = 5^\circ - 23^\circ 18' = -18^\circ 18'.$$

Эта характеристика (см. рис. 2.V.8) пересекается со стенкой в точке B, координаты которой x_B, y_B определяются в результате решения уравнений элемента характеристики:

$$y_B - y_D = (x_B - x_D)\,\mathrm{tg}\,(\beta_D - \mu_D)$$

и образующей заданного тела вращения:

$$y_B = y_m \frac{x_B}{x_m}\left(2 - \frac{x_B}{x_m}\right).$$

Подставляя в эти уравнения данные, найдем:

$$y_B - 0{,}8 = (x_B - 5)\,\mathrm{tg}\,(5^\circ - 23^\circ 18');$$

$$y_B = 1\,\frac{x_B}{10}\left(2 - \frac{x_B}{10}\right) = \frac{x_B}{5}\left(1 - \frac{x_B}{20}\right).$$

В результате решения этой системы находим: $x_B = 5{,}12$; $y_B = 0{,}761$.

Определим теперь соответствующий угол наклона вектора скорости, равный углу наклона касательной к образующей в точке B. Для этой цели вначале вычислим производную:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y_m}{x_m}\left(1 - \frac{x}{x_m}\right).$$

Внося сюда значение $x = x_B$, получим тангенс отыскиваемого угла:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_B = \mathrm{tg}\,\beta_B = \frac{2\cdot 1}{10}\left(1 - \frac{5{,}12}{10}\right) = 0{,}0976.$$

В соответствии с этим угол $\beta_B = 5^\circ 35'$.

Для определения скорости в точке B воспользуемся уравнением для характеристики второго семейства в плоскости годографа

$$\Delta\omega_D = -\Delta\beta_D + \frac{\Delta x_D}{y_D} m_D - \frac{\Delta x_D}{k p_{0D}'} \cdot \frac{\Delta p_0'}{\Delta n} t_D, \qquad (3.V.59)$$

где

$$\Delta\omega_D = \omega_B - \omega_D, \quad \Delta\beta_D = \beta_B - \beta_D, \quad \Delta x_D = x_B - x_D;$$

$$m_D = \frac{\sin\beta_D \cdot \sin\mu_D}{\cos\left(\beta_D - \mu_D\right)}, \quad t_D = \frac{\sin^2\mu_D \cos\mu_D}{\cos\left(\beta_D - \mu_D\right)};$$

$$\frac{1}{p_{0D}'} \cdot \frac{\Delta p_0'}{\Delta n} = \frac{\left(p_{0A}' - p_{0B}'\right)\cos\left(\beta_D - \mu_D\right)}{p_{0D}'\left(x_D - x_B\right)\sin\mu_D}.$$

Произведем необходимые вычисления:

$$\Delta x_D = 5{,}12 - 5 = 0{,}12, \quad \Delta\beta_D = 5^\circ 35' - 5^\circ = 35' = 0{,}58^\circ.$$

$$m_D = \frac{\sin 5^\circ \cdot \sin 23^\circ 18'}{\cos\left(5^\circ - 23^\circ 18'\right)} = 0{,}0363;$$

$$t_D = \frac{\sin^2 23^\circ 18' \cdot \cos 23^\circ 18'}{\cos\left(5^\circ - 23^\circ 18'\right)} = 0{,}151;$$

$$\frac{1}{p_{0D}'}\cdot\frac{\Delta p_0'}{\Delta n}=\frac{(0{,}8p_0-0{,}77p_0)\cos(5^\circ-23^\circ18')}{0{,}8p_0\,(5-5{,}12)\sin 23^\circ18}=-0{,}75;$$

$$\Delta\omega_D=-0{,}58^\circ+\frac{0{,}12}{0{,}8}0{,}0363\cdot 57{,}3^\circ-\frac{0{,}12}{1{,}4}0{,}75\cdot 0{,}151\cdot 57{,}3^\circ=-0{,}83^\circ.$$

Из табл. 10 [13], зная $\mathbf{M}_D=2{,}53$, найдем $\omega_D=39{,}82^\circ$. По найденному значению $\Delta\omega_D$ находим в точке B угол

$$\omega_B=\omega_D+\Delta\omega_D=39{,}82^\circ-0{,}83^\circ=38{,}99^\circ.$$

При помощи табл. 10 [13], зная ω_B, определим число Маха $\mathbf{M}_B=2{,}50$.

Рассчитаем теперь число Маха без учета вихревого характера движения газа. В этом случае

$$\Delta\omega_D=-\Delta\beta_D+\frac{\Delta x_D}{y_D}m_D=-0{,}58^\circ+\frac{0{,}12}{0{,}8}0{,}0363\cdot 57{,}3^\circ=-0{,}27^\circ,$$

а соответствующий угол

$$\omega_B=\omega_D+\Delta\omega_D=39{,}82^\circ-0{,}27^\circ=39{,}55^\circ.$$

Из табл. 10 [13] по этой величине ω_B находим $\mathbf{M}_B=2{,}52$. Как видим, это число Маха, полученное без учета вихревого характера движения газа, оказалось больше, чем в неизэнтропическом потоке.

V.33. Необходимые расчеты можно начать с определения угла β_c наклона вектора скорости за косым скачком уплотнения в точке S:

$$\operatorname{tg}\beta_{cS}=\operatorname{ctg}\theta_{cS}\left(\mathbf{M}_\infty^2\sin^2\theta_{cS}-1\right)\left[1+\left(\frac{k+1}{2}-\sin^2\theta_{cS}\right)\mathbf{M}_\infty^2\right]^{-1}. \quad (3.V.60)$$

Имея в виду, что $\theta_{cS}=30^\circ$, а $\mathbf{M}_\infty=1020/340=3$, найдем

$$\operatorname{tg}\beta_{cS}=\operatorname{ctg}30^\circ\left(3^2\cdot\sin^2 30^\circ-1\right)\left[1+\left(\frac{1{,}4+1}{2}-\sin^2 30^\circ\right)3^2\right]^{-1}=0{,}226$$

и соответствующий угол $\beta_{cS}=12^\circ45'$. Теперь определим относительные параметры газа за скачком:

$$\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)_S=\frac{(k+1)\,\mathbf{M}_\infty^2\sin^2\theta_{cS}}{2+(k-1)\,\mathbf{M}_\infty^2\sin^2\theta_{cS}}; \quad (3.V.61)$$

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_S=\frac{2k}{k+1}\mathbf{M}_\infty^2\sin^2\theta_{cS}-\frac{k-1}{k+1}; \quad (3.V.62)$$

$$\left(\frac{p_0'}{p_0}\right)_S=\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_S^{1/(k-1)}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)_S^{k/(k-1)}, \quad (3.V.63)$$

а также число Маха:

$$\mathbf{M}_{2S}=\left\{\frac{2}{k+1}\sin^{-2}(\theta_{cS}-\beta_{cS})\left[\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)_S-\frac{k-1}{k+1}\right]^{-1}\right\}^{1/2}. \quad (3.V.64)$$

Произведем вычисления:

$$\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)_S=\frac{(1{,}4+1)\,3^2\sin^2 30^\circ}{2+(1{,}4-1)\,3^2\sin^2 30^\circ}=1{,}86;$$

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_S=\frac{2\cdot 1{,}4}{1{,}4+1}3^2\sin^2 30^\circ-\frac{1{,}4-1}{1{,}4+1}=2{,}46;$$

$$\left(\frac{V_2^2}{V_\infty^2}\right)_S=\cos^2 30^\circ+\frac{1}{1{,}862^2}\sin^2 30^\circ=0{,}822.$$

Из отношения квадратов скоростей можно найти скорость непосредственно за скачком:

$$V_{2S}=\sqrt{0{,}822V_\infty^2}=\sqrt{0{,}822\cdot 1020^2}=925\ м/сек.$$

Число Маха за этим скачком

$$M_{2S}=\left[\frac{2}{1{,}4+1}\sin^{-2}(30^\circ-12^\circ45')\left(1{,}862-\frac{1{,}4-1}{1{,}4+1}\right)^{-1}\right]^{1/2}=2{,}36,$$

а отношение давлений торможения для условий после и до скачка уплотнения

$$\left(\frac{p_0'}{p_0}\right)_S=\left(\frac{1}{2{,}46}\right)^{1/(1{,}4-1)}(1{,}86)^{1{,}4/(1{,}4-1)}=0{,}930.$$

Для дальнейших расчетов нам потребуются производные в точке S:

$$\left(\frac{d\theta_c}{d\beta_c}\right)_S=\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)_S\left\{2\cos^2(\theta_{cS}-\beta_{cS})\left[1-\frac{k-1}{k+1}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)_S\right]-\frac{\cos^2(\theta_{cS}-\beta_{cS})}{\cos^2\theta_{cS}}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)_S\right\}^{-1}=1{,}86\left[2\cos^2(30^\circ-12^\circ45')\left(1-\frac{1{,}4-1}{1{,}4+1}1{,}86\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\cos^2(30^\circ-12^\circ45')}{\cos^230^\circ}+1{,}86\right]^{-1}=0{,}978;$$

$$\left[\frac{d}{d\beta_c}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\right]_S=\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)_S\frac{1}{\operatorname{tg}\theta_{cS}\cos^2(\theta_{cS}-\beta_{cS})}\left\{\left(\frac{d\theta_c}{d\beta_c}\right)_S\left[\frac{\cos^2(\theta_{cS}-\beta_{cS})}{\cos^2\theta_{cS}}-\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)_S\right]+\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)_S\right\}=\frac{1{,}86}{\operatorname{tg}30^\circ\cos^2(30^\circ-12^\circ45')}\times$$

$$\times\left\{0{,}978\left[\frac{\cos^2(30^\circ-12^\circ45')}{\cos^230^\circ}-1{,}86\right]+1{,}86\right\}=4{,}35;$$

$$\left(\frac{dM_2}{d\beta_c}\right)_S=-M_{2S}\left\{\operatorname{ctg}(\theta_{cS}-\beta_{cS})\left[\left(\frac{d\theta_c}{d\beta}\right)_S-1\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{M_{2S}^2(k+1)}{4}\sin^2(\theta_{cS}-\beta_{cS})\left[\frac{d}{d\beta_c}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\right]_S\right\}=-2{,}36\left[\operatorname{ctg}(30^\circ-\right.$$

$$\left.-12^\circ45')(0{,}978-1)+\frac{(1{,}4+1)\,2{,}36^2}{4}\sin^2(30^\circ-12^\circ45')\,4{,}35\right]=-2{,}88.$$

Кроме того, вычислим производные:

$$\left(\frac{d\omega_2}{dM_2}\right)_S=\sqrt{M_{2S}^2-1}\left[M_{2S}\left(1+\frac{k-1}{2}\right)M_{2S}^2\right]^{-1}=$$

$$=\sqrt{2{,}36^2-1}\left[2{,}36\left(1+\frac{1{,}4-1}{2}2{,}36^2\right)\right]^{-1}=0{,}426;$$

$$\left(\frac{d\omega_2}{d\beta_c}\right)_S=\left(\frac{dM_2}{d\beta_c}\right)_S\left(\frac{d\omega_2}{dM_2}\right)_S=-2{,}88\cdot 0{,}426=-1{,}23.$$

Теперь определим число Маха в точке F, применяя (3.V.34). Отношение V_{max}^2/V_∞^2 в соответствии с выражением (3.V.33)

$$\frac{V_{max}^2}{V_\infty^2}=\frac{2}{1{,}4-1}\cdot\frac{340^2}{1020^2}+1=1{,}56.$$

С учетом этого

$$M_F=\left[\frac{1{,}4-1}{2}\left(1{,}56\frac{1020^2}{950^2}-1\right)\right]^{-1/2}=2{,}56.$$

По этому значению M_F из табл. 10 [13] определяем $\omega_F=40{,}51^\circ$.

Затем можно найти угол наклона потока в точке H. С этой целью используем формулу для изменения угла ω при переходе вдоль характеристики от точки F к точке H:

$$\Delta\omega_F = \omega_{2H} - \omega_F = \omega_{2S} + \left(d\omega/d\beta_c\right)_S \Delta\beta_F - \omega_F, \tag{3.V.65}$$

где

$$\Delta\beta_F = \beta_H - \beta_F. \tag{3.V.66}$$

Одновременно воспользуемся уравнением для характеристики первого семейства в плоскости годографа

$$\Delta\omega_F - \Delta\beta_F - \frac{\Delta x_F}{y_F} l_F - \frac{\Delta x_F}{k p_{0F}'} \cdot \frac{\Delta p_0'}{\Delta n} c_F = 0, \tag{3.V.67}$$

где

$$\Delta x_F = x_H - x_F;$$

$$l_F = \frac{\sin\beta_F \sin\mu_F}{\cos(\beta_F + \mu_F)}, \quad c_F = \frac{\sin^2\mu_F \cos\mu_F}{\cos(\beta_F + \mu_F)}; \tag{3.V.68}$$

$$\frac{1}{p_{0F}'} \cdot \frac{\Delta p_0'}{\Delta n} = \frac{\left(p_{0H}' - p_{0F}'\right)\cos(\beta_F + \mu_F)}{p_{0F}'\left(x_H - x_F\right)\sin\mu_F}. \tag{3.V.69}$$

Решая уравнения (3.V.65) и (3.V.67) относительно $\Delta\beta_F$, находим

$$\Delta\beta_F = \left[\left(\frac{d\omega}{d\beta_c}\right)_S - 1\right]^{-1}\left(\omega_F - \omega_{2S} + \frac{\Delta x_F}{y_F} l_F + \frac{\Delta x_F}{k p_{0F}'} \cdot \frac{\Delta p_0'}{\Delta n} c_F\right). \tag{3.V.70}$$

В первом приближении, пренебрегая изменением энтропии (или, что то же самое, давления торможения за скачком), из (3.V.70) определим величину $\Delta\beta_F$, вычислив предварительно

$$l_F = \frac{\sin 11^\circ \sin 23^\circ}{\cos(11^\circ + 23^\circ)} = 0{,}0895;$$

$$\Delta\beta_F = (-1{,}23 - 1)^{-1}\left(40{,}51^\circ - 35{,}87^\circ + \frac{0{,}5}{10}\, 0{,}0895 \cdot 57{,}3^\circ\right) = -2{,}20^\circ.$$

Примем теперь изменение угла β_c вдоль участка скачка SH равным изменению соответствующей ему величины вдоль характеристики первого семейства FH (т. е. $\Delta\beta_{SH} = \Delta\beta_{FH} = \beta_H - \beta_F$). Тогда можно определить число Маха в точке H в первом приближении:

$$\mathbf{M}_{2H} = \mathbf{M}_{2S} + \left(d\mathbf{M}_2/d\beta_c\right)_S \Delta\beta_{SH}, \tag{3.V.71}$$

где

$$\mathbf{M}_{2S} = \mathbf{M}_2 = 2{,}36, \quad \left(d\mathbf{M}_2/d\beta_c\right)_S = -2{,}88;$$

$$\Delta\beta_{SH} = \Delta\beta_{FH} = -2{,}20/57{,}3 = -0{,}0384\ рад.$$

Подставляя эти данные, получим

$$\mathbf{M}_{2H} = 2{,}36 - 2{,}88\,(-0{,}0384) = 2{,}47.$$

Давление торможения p_{0F}' в (3.V.69) принимаем равным соответствующему значению этого давления в точке S, т. е. $p_{0F}' = 0{,}930\, p_0$, а величину p_{0H}' в точке H определим по числам $\mathbf{M}_{2H} = 2{,}47$ и $\mathbf{M}_\infty = 3$. Для этого воспользуемся уравнениями:

$$\frac{\mathbf{M}_{2H}^2}{\mathbf{M}_\infty^2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)_H \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)_H \left[\cos^2\theta_{cH} + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)_H^2 \sin^2\theta_{cH}\right]; \tag{3.V.72}$$

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_H = \frac{2k}{k+1}\mathbf{M}_\infty^2 \sin^2\theta_{cH} - \frac{k-1}{k+1}; \qquad (3.V.62')$$

$$\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)_H = \frac{(k+1)\,\mathbf{M}_\infty^2 \sin^2\theta_{cH}}{2+(k-1)\,\mathbf{M}_\infty^2 \sin^2\theta_{cH}}. \qquad (3.V.61')$$

В результате решения этих трех уравнений находим для точки H уточненный угол скачка $\theta_{cH}=27{,}9°$. Затем определяем отношение давлений и плотностей:

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_H = \frac{2\cdot 1{,}4}{1{,}4+1}\,3^2 \sin^2 27{,}9° - \frac{1{,}4-1}{1{,}4+1} = 2{,}15;$$

$$\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)_H = \frac{(1{,}4+1)\,3^2 \sin^2 27{,}9°}{2+(1{,}4-1)\,3^2 \sin^2 27{,}9°} = 1{,}71,$$

а также отношение давлений торможения по (3.V.63):

$$\left(\frac{p_0'}{p_0}\right)_H = \left(\frac{1}{2{,}15}\right)^{1/(1{,}4-1)} (1{,}71)^{1{,}4/(1{,}4-1)} = 0{,}956.$$

Далее вычисляем:

$$\frac{1}{p_{0F}'}\cdot\frac{\Delta p_0'}{\Delta n} = \frac{(0{,}956-0{,}930)\,p_0 \cos(11°+23°)}{0{,}930 p_0 \cdot 0{,}5 \cdot \sin 23°} = 0{,}12;$$

$$c_F = \frac{\sin^2 23°\cdot\cos 23°}{\cos(11°+23°)} = 0{,}17;$$

$$\Delta\beta_{FH} = \beta_H - \beta_F = (-1{,}23-1)^{-1}\left(40{,}51° - 35{,}87° + \frac{0{,}5}{10}\,0{,}0895\cdot 57{,}3° + \right.$$

$$\left. + \frac{0{,}5}{1{,}4}\,0{,}12\cdot 0{,}17\cdot 57{,}3°\right) = -2{,}38°$$

и находим угол наклона потока за скачком в точке H:

$$\beta_{cH} = \beta_F + \Delta\beta_{FH} = 11° - 2{,}38° = 8{,}62°.$$

По этому значению угла уточняем угол скачка, используя формулу (3.V.60):

$$\operatorname{tg} 8{,}62° = \operatorname{ctg}\theta_{cH}\left(3^2\cdot\sin^2\theta_{cH} - 1\right)\left[1 + \left(\frac{1{,}4+1}{2} - \sin^2\theta_{cH}\right)3^2\right]^{-1}.$$

Решая это уравнение относительно θ_{cH}, находим уточненный угол $\theta_{cH}=$ $=26{,}15°$.

V.34. Определим вначале по значениям $p_\infty=1$ *кГ/см*^{2} и $\mathbf{M}_\infty=3$ давление в форкамере трубы (давление торможения):

$$p_0 = p_\infty\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\infty^2\right)^{\frac{k}{k-1}} = 1\left(1 + \frac{1{,}4-1}{2}\,3^2\right)^{\frac{1{,}4}{1{,}4-1}} = 36{,}7\ кГ/см^2.$$

Затем вычислим плотность торможения ρ_0, полагая, что при нормальных условиях ($p_н=1$ *кГ/см*^{2}, $T_н=288$ K) плотность воздуха $\rho_н=$ $=0{,}125$ *кГ·сек*^{2}*/м*^{4}. Согласно уравнению состояния

$$\rho_0 = \rho_н\frac{p_0}{p_н}\cdot\frac{T_н}{T_0} = 0{,}125\,\frac{36{,}7}{1}\cdot\frac{288}{290} = 4{,}56\ кГ\cdot сек^2/м^4.$$

Плотность и температура потока на выходе сопла равны соответственно:

$$\rho_\infty = \rho_0\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\infty^2\right)^{-\frac{1}{k-1}} = 4{,}56\left(1 + \frac{1{,}4-1}{2}\,3^2\right)^{-\frac{1}{1{,}4-1}} =$$

$$= 0{,}348\ кГ\cdot сек^2/м^4;$$

$$T_\infty = T_0\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\infty^2\right)^{-1} = 290\left(1 + \frac{1{,}4-1}{2}\,3^2\right)^{-1} = 107\ \text{K}.$$

Определим теперь по этим данным число Рейнольдса $\mathbf{Re}_\infty=\rho_\infty V_\infty l/\mu_\infty$, где $l=0{,}4$ *м* — ширина сопла. Полагая, что при нормальной температу-

ре $T_н=288$ К скорость звука в воздухе $a_н=340$ *м/сек*, найдем соответствующую величину этой скорости на выходе сопла:

$$a_\infty = 20{,}1\sqrt{T_\infty} = 20{,}1\sqrt{107} = 208\ м/сек.$$

Таким образом, скорость потока

$$V_\infty = \mathbf{M}_\infty a_\infty = 3\cdot 208 = 624\ м/сек.$$

Имея в виду, что при температуре $T_н=288$ К коэффициент динамической вязкости $\mu_н=1{,}82\cdot 10^{-6}$ *кГ·сек/м²*, вычислим соответствующее значение этого коэффициента для условий на выходе сопла:

$$\mu_\infty = \mu_н\left(\frac{T_\infty}{T_н}\right)^n = 1{,}82\cdot 10^{-6}\left(\frac{107}{288}\right)^{0{,}76} = 0{,}91\cdot 10^{-6}\ кГ\cdot сек/м^2.$$

Согласно полученным данным число Рейнольдса

$$\mathbf{Re}_\infty = \frac{0{,}4\cdot 624\cdot 0{,}348}{0{,}91\cdot 10^{-6}} = 9{,}5\cdot 10^7.$$

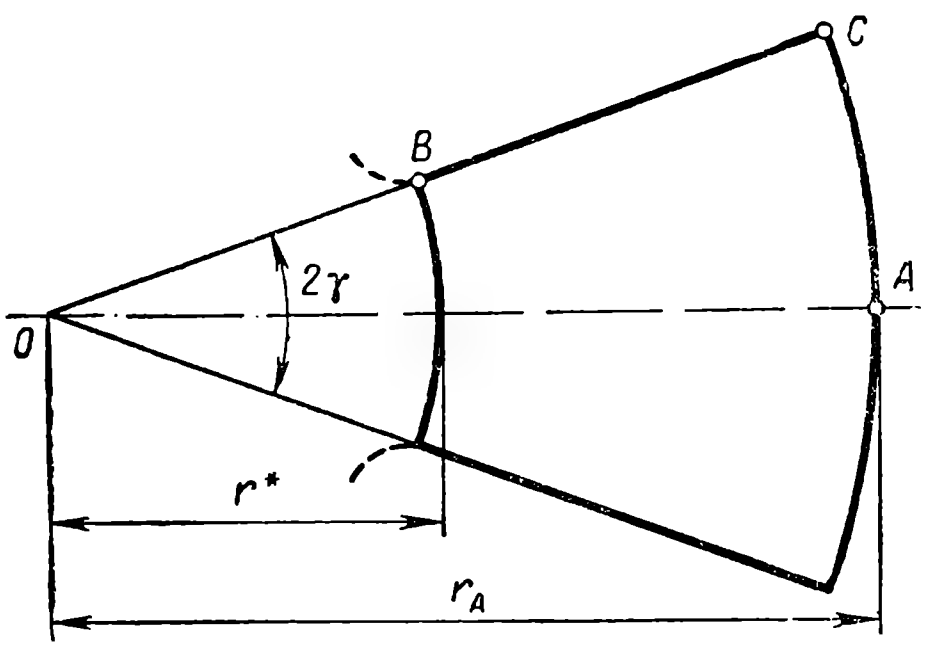


Рис. 3.V.6. Непрофилированное плоское сверхзвуковое сопло с радиальным потоком

Площадь критического сечения сопла $S^*=S\rho_\infty V_\infty/\rho^* a^*$, где $\rho_\infty V_\infty/\rho^* a^* = q$ — относительный удельный расход, являющийся функцией числа $\mathbf{M}_\infty$. Из табл. 10 [13] по величине $\mathbf{M}_\infty=3$ находим $q=0{,}236$ и вычисляем:

$$S^* = Sq = 0{,}16\cdot 0{,}236 = 0{,}0378\ м^2.$$

Нанесем на листе бумаги (рис. 3.V.6) контур сопла в виде прямой, совпадающей с радиусом окружности r_A, вычисляемым по формуле

$$r_A = S\cdot 360/(2\pi\cdot 2\gamma\cdot l).$$

Примем согласно экспериментальным данным угол раствора сопла $2\gamma=40°$. В соответствии с этим

$$r_A = 0{,}16\cdot 360/(2\pi\cdot 40\cdot 0{,}4) = 0{,}573\ м.$$

Аналогично вычисляем расстояние до критического сечения:

$$r^* = \frac{S^*\cdot 360}{2\pi\cdot 2\gamma\cdot l} = \frac{0{,}0378\cdot 360}{2\pi\cdot 40\cdot 0{,}4} = 0{,}135\ м.$$

Из точки O, как из центра, проведем в верхней полуплоскости семь близко расположенных радиальных прямых (рис. 3.V.7). В соответствии с этим малый угол между соседними прямыми будет $\Delta\gamma=2{,}5°$. Найдем теперь пересечение этих прямых с характеристикой второго семейства, проведенной из точки A. Эта характеристика имеет вид ломаной линии. Ее элемент в виде прямой AA_1 нанесем на чертеже под углом

$$\mu_\infty = -\arcsin\left(1/\mathbf{M}_\infty\right) = -\arcsin(1/3) = -19{,}47°.$$

Для дальнейших построений воспользуемся уравнением для характеристик второго семейства в плоскости годографа $\Delta\omega=-\Delta\beta$ или, поскольку $\Delta\beta=\Delta\gamma$, заменим $\Delta\omega=-\Delta\gamma$.

Рассматривая точки A и A_1, можем найти

$$\Delta\omega_A = \omega_{A1} - \omega_A,$$

откуда для точки A_1

$$\omega_{A1} = \omega_A + \Delta\omega_A = \omega_A - \Delta\gamma$$

Из табл. 10 [13] по значению $M_\infty=3$ находим $\omega_A=49{,}757°$ и вычисляем угол $\omega_{A1}=49{,}757°-2{,}5°=47{,}257°$. Затем из той же таблицы определяем соответствующее число $M_{A1}=2{,}87$ и угол $\mu_{A1}=20{,}39°$.

Под этим углом к прямой OA_1 проведем прямую до пересечения с соседним радиусом в точке A_2 и т. д. Дальнейшие расчеты и построения (см. рис. 3.V.7) осуществляем по аналогии с предыдущим. Результаты этих расчетов представлены в табл. 3.V.1.

Получив значения ω, M и μ для точки A_7 на последней промежуточной радиальной линии, проведем из нее под углом $\mu_7=-26{,}77°$ к этой

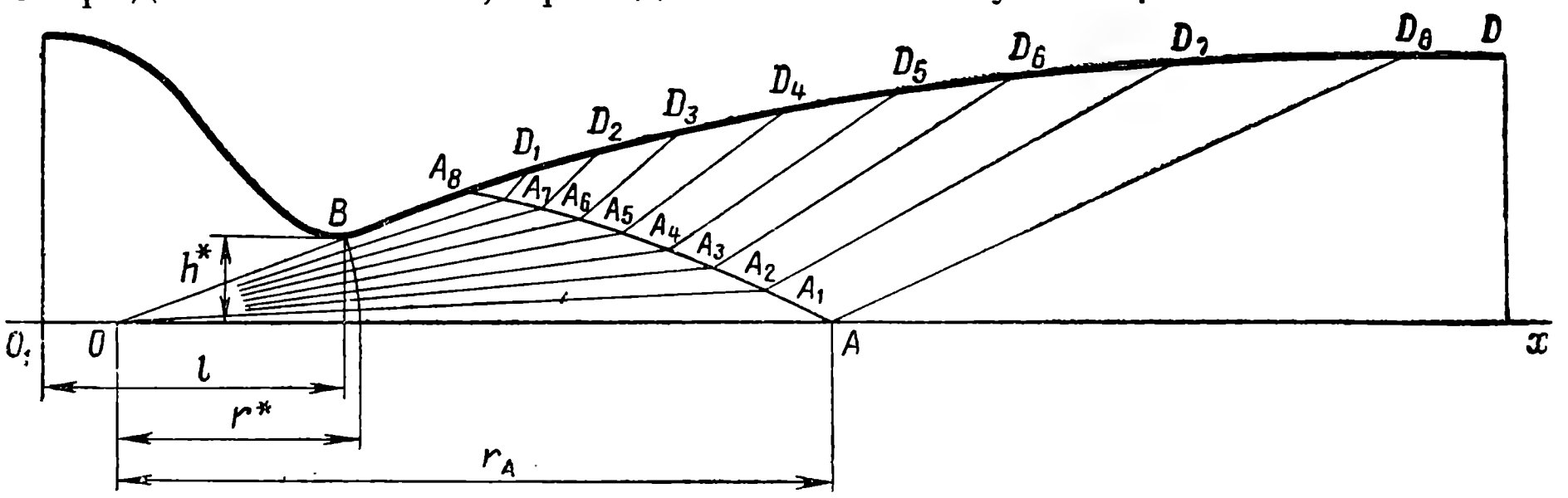


Рис. 3.V.7. Схема профилирования сверхзвуковой части плоского сопла

линии прямую до пересечения с верхним прямолинейным контуром сопла в точке A_8. За этой точкой контур сопла, который должен обеспечить получение на выходе равномерного параллельного потока, строится следующим образом. Начальный участок этого контура за точкой A_8 совпадает с направлением скорости на стенке и представляет собой прямую, являющуюся продолжением контура OA_8 до его пересечения в точке D_1 с характеристикой первого семейства A_7D_1, проведенной под углом $\mu=26{,}77°$ к прямой OA_7. За точкой D_1 элемент контура совпадает с направлением скорости в точке A_7. Этот элемент получим, проведя из точки D_1 прямую, параллельную лучу OA_7, до пересечения в точке D_2.

Таблица 3.V.1

Точки	ω, *град*	M	μ, *град*
A	49,757	3,00	19,47
A_1	47,257	2,87	20,39
A_2	44,757	2,75	21,31
A_3	42,257	2,64	22,26
A_4	39,757	2,53	23,28
A_5	37,257	2,44	24,19
A_6	34,757	2,32	25,53
A_7	32,257	2,22	26,77

Таблица 3.V.2

x/l	h, *см*
1	5,20
0,9	5,25
0,8	5,42
0,7	5,68
0,6	6,11
0,5	6,76
0,4	7,66
0,3	9,08
0,2	11,6
0,1	17,7

Аналогично ведется построение остальных участков контура. За точкой D_8, лежащей на характеристике AD_8, участок контура параллелен оси сопла. Контур, совпадающий с линией A_8D_8 и построенный в виде плавной кривой, обеспечит получение на выходе сопла параллельного сверхзвукового потока с заданным числом M_∞.

Дозвуковой участок сопла рассчитывается по формуле Витошинского (1.1.1), в которой $r=h$ (рис. 3.V.8). Результаты этого расчета приведены в табл. 3.V.2.

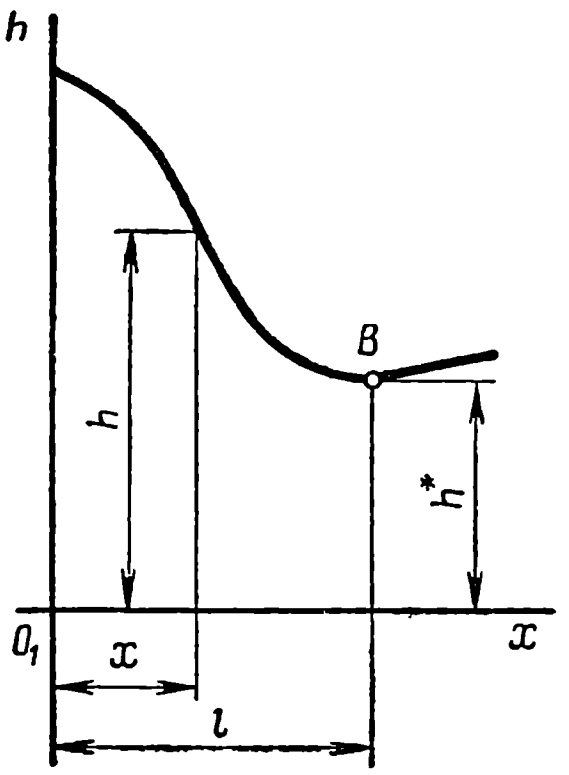


Рис. 3.V.8. Построение профиля дозвуковой части сопла

VI.1. Для определения аэродинамических коэффициентов тонкого профиля, обтекаемого несжимаемым потоком, следует воспользоваться зависимостями, с выводом которых можно познакомиться в книге [20].

Для коэффициента подъемной силы имеем формулу

$$c_{y\ \text{нсж}} = 2\pi(\alpha + \varepsilon_0), \tag{3.VI.1}$$

а для коэффициента момента —

$$-m_{z\ \text{нсж}} = 2\left(\frac{\pi}{4}\varepsilon_0 - \mu_0\right) + \frac{1}{4}c_{y\ \text{нсж}}, \tag{3.VI.2}$$

где

$$\varepsilon_0 = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\beta_1(1-\cos\theta)\,d\theta; \quad \mu_0 = -\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\beta_1(1-\cos 2\theta)\,d\theta. \tag{3.VI.3}$$

Коэффициент β_1 равен производной dy_1/dx_1, вычисляемой по уравнению $y_1 = y_1(x_1)$ средней линии профиля (рис. 3.VI.1), а угол θ связан с координатой x_1 зависимостью

$$x_1 = b(1-\cos\theta)/2. \tag{3.VI.4}$$

Найдем уравнение средней линии заданного профиля:

$$y_1 = \frac{1}{2}(y_{1\text{в}} + y_{1\text{н}}) = \frac{1}{2}\left[0{,}2x_1\left(1-\frac{x_1}{b}\right) - 0{,}12x_1\left(1-\frac{x_1}{b}\right)\right] =$$

$$= 0{,}04x_1\left(1-\frac{x_1}{b}\right).$$

Отсюда производная

$$\beta_1 = dy_1/dx_1 = 0{,}04(1-2x_1/b).$$

Заменяя здесь x_1 согласно (3.VI.4), найдем

$$\beta_1 = dy_1/dx_1 = 0{,}04\cos\theta.$$

Вычисляем ε_0 и μ_0 по формулам (3.VI.3):

$$\varepsilon_0 = -\frac{0{,}04}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\theta(1-\cos\theta)\,d\theta = 0{,}02;$$

$$\mu_0 = -\frac{0{,}04}{4}\int_0^{\pi}\cos\theta(1-2\cos\theta)\,d\theta = 0.$$

Теперь можно определить аэродинамические коэффициенты по (3.VI.1) и (3.VI.2):

$$c_{y\ \text{нсж}} = 2\pi(0{,}1 + 0{,}02) = 0{,}24\pi = 0{,}754;$$

$$-m_{z\ \text{нсж}} = 2\left(\frac{\pi}{4}0{,}02 - 0\right) + \frac{1}{4}0{,}24\pi = 0{,}07\pi = 0{,}220$$

и соответствующий коэффициент центра давления:

$$(c_{\text{ц.д}})_{\text{нсж}} = x_{\text{ц.д}}/b = -m_{z\ \text{нсж}}/c_{y\ \text{нсж}} = 0{,}07\pi/0{,}24\pi = 0{,}291.$$

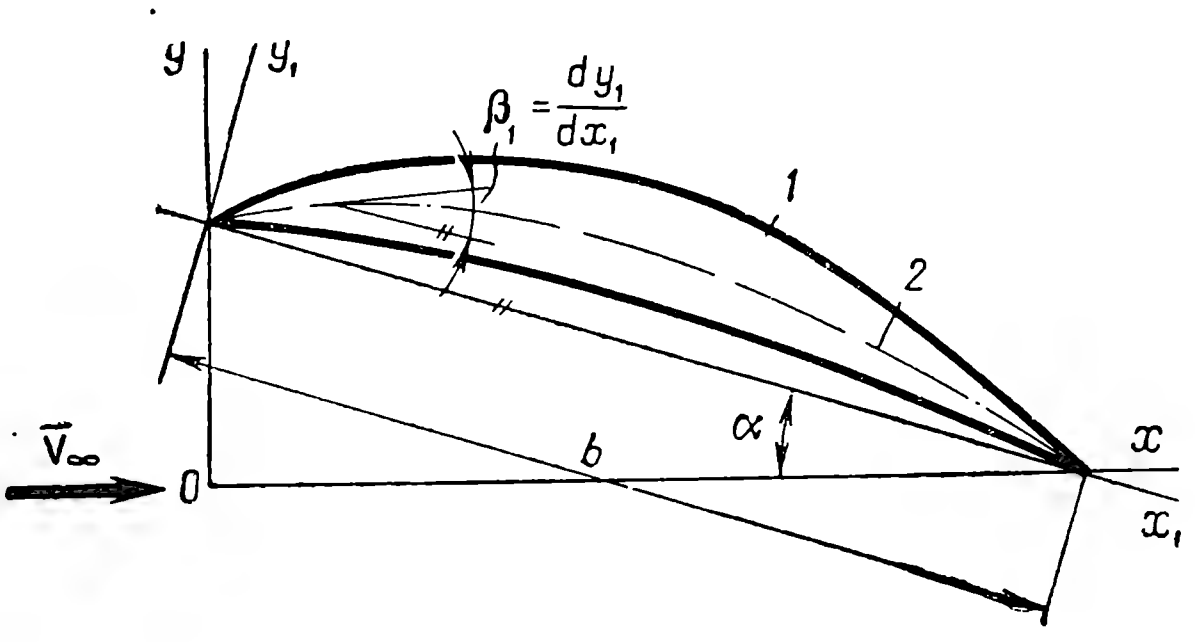


Рис. 3.VI.1. Тонкий профиль в несжимаемом потоке:
1 — профиль; *2* — средняя линия

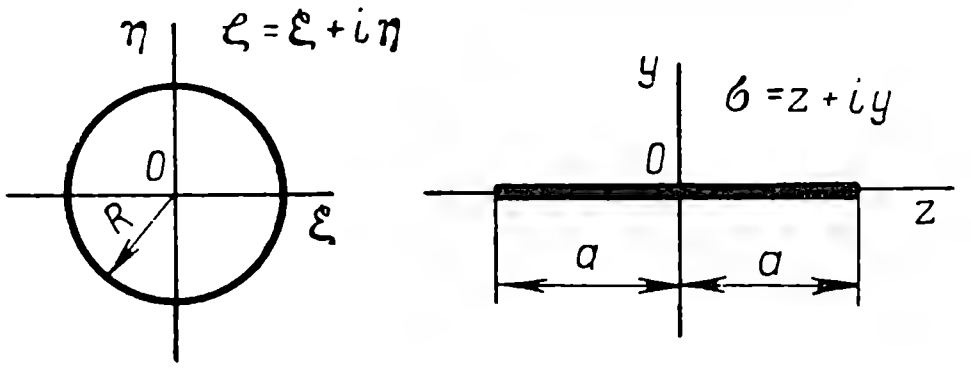


Рис. 3.VI.2. Конформное преобразование окружности в отрезок прямой

VI.2. Для симметричного профиля уравнение его средней линии будет $y_1=0$ и, следовательно, коэффициент $\beta_1=dy_1/dx_1=0$. Поэтому параметры ε_0 и μ_0 равны нулю [см. (3.VI.3)], а аэродинамические коэффициенты профиля в соответствии с (3.VI.1), (3.VI.2) будут следующими:

$$c_{y\ \text{нсж}} = 2\pi\alpha = 2\pi\cdot 0{,}1 = 0{,}628;$$

$$-m_{z\ \text{нсж}} = \frac{1}{4}\,c_{y\ \text{нсж}} = \frac{2\pi\alpha}{4} = \frac{\pi\alpha}{2} = \frac{\pi\cdot 0{,}1}{2} = 0{,}157.$$

Согласно этим данным коэффициент центра давления

$$(c_{\text{ц.д}})_{\text{нсж}} = -\frac{m_{z\ \text{нсж}}}{c_{y\ \text{нсж}}} = \frac{\pi\alpha/2}{2\pi\alpha} = 0{,}25.$$

VI.3. Запишем формулу $\sigma=\zeta+1/\zeta$ в виде

$$\sigma = z + iy = \xi + i\eta + \frac{1}{\xi + i\eta} = \xi + i\eta + \frac{\xi - i\eta}{\xi^2 + \eta^2}.$$

Приняв здесь $\xi^2+\eta^2=R^2$, после разделения на вещественную и мнимую части найдем:

$$z = \xi\,(1 + 1/R^2) \text{ и } iy = i\eta\,(1 - 1/R^2).$$

Для получения отрезка на плоскости yz (рис. 3.VI.2), расположенного вдоль оси z, полагаем $iy=0$ и находим значение $R=1$. При этом $z=2\xi$, что соответствует отрезку прямой длиной $2a=4$.

VI.4. Запишем формулу $\sigma=\zeta-1/\zeta$ в виде

$$\sigma = z + iy = \xi + i\eta - \frac{1}{\xi + i\eta} = \xi + i\eta - \frac{\xi - i\eta}{\xi^2 + \eta^2}.$$

Так как $\xi^2+\eta^2=R^2$, то

$$\sigma = z + iy = \xi(1 - 1/R^2) + i\eta(1 + 1/R^2).$$

Отсюда следует, что для получения отрезка, расположенного на вертикальной оси, необходимо принять радиус окружности $R=1$ (при этом действительная часть $z=0$). Значению $R=1$ соответствуют равенство $y=2\eta$ и длина вертикального отрезка, равная $2a=4$ (рис. 3.VI.3).

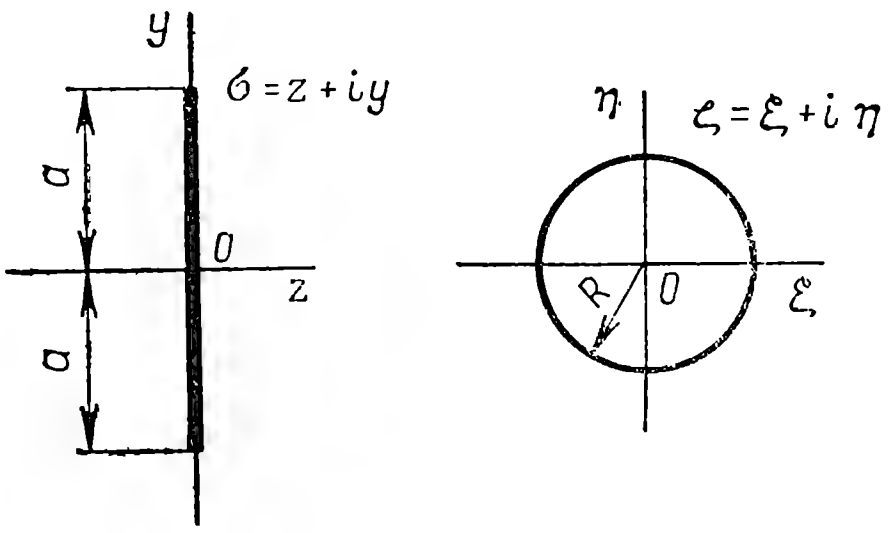


Рис. 3.VI.3. Конформное преобразование отрезка прямой в окружность

VI.5. Возьмем производную от комплексного потенциала $W=-iV_\infty(\zeta+1/\zeta)$ по переменному $\zeta=\xi+i\eta$:

$$dW/d\zeta = -iV_\infty(1 - 1/\zeta^2).$$

Эта величина называется комплексной скоростью. Модуль ее определяет абсолютное значение скорости в рассматриваемой точке потока. Согласно уравнению Бернулли давление в такой точке

$$p = p_0 - \frac{\rho_\infty}{2}\left(\frac{dW}{d\zeta}\right)^2 = p_0 - \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2}\left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right)^2,$$

где p_0 — давление в точке полного торможения на цилиндре (в критической точке).

Воспользовавшись формулой Жуковского — Чаплыгина, определим аэродинамическую силу:

$$F = X - iY = \frac{i\rho_\infty}{2}\oint\left(\frac{dW}{d\zeta}\right)^2 d\zeta.$$

Подставив сюда значение $dW/d\zeta$, получим

$$F = \frac{i\rho_\infty}{2}\oint V_\infty^2\left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right)^2 d\zeta = 0.$$

Таким образом, при бесциркуляционном обтекании потоком невязкой несжимаемой жидкости кругового цилиндра результирующая сила давления потока на тело равна нулю. Этот аэродинамический эффект называется парадоксом Эйлера — Даламбера.

VI.6. Потенциал скоростей для пластинки, обтекаемой несжимаемым потоком в поперечном направлении со скоростью V_∞ (см. рис. 2.VI.1), имеет вид $\varphi=\pm V_\infty\sqrt{a^2-z^2}$, где знак плюс соответствует верхней поверхности, а знак минус — нижней. Скорость на пластинке

$$V_z = \partial\varphi/\partial z = \mp V_\infty z/\sqrt{a^2 - z^2}.$$

Согласно этой формуле в точке с координатой $z=0$ скорость $V_z=0$, а у боковых кромок, где $z=\pm a$, $V_z\to\infty$. В соответствии с уравнением Бернулли

$$V_\infty^2/2 + p_\infty/\rho_\infty = V_z^2/2 + p_\infty/\rho$$

коэффициент давления

$$\bar{p} = \frac{p - p_\infty}{\rho_\infty V_\infty^2/2} = 1 - \frac{V_z^2}{V_\infty^2}. \qquad (3.VI.5)$$

Внося сюда значение V_z, получим

$$\bar{p} = 1 - z^2/(a^2 - z^2).$$

В точках на верхней и нижней поверхностях с координатой $z=0$ величина $\bar{p}=1$, а на боковых кромках ($z=\pm a$) коэффициент давления приобретает значение $-\infty$. Это значение практически не реализуется. и действительный коэффициент давления имеет конечную величину. На большей части пластинки этот коэффициент будет положительным. В частности, в точках с координатами $z=\pm a/2$ коэффициент $\bar{p}=1-(a/2)^2/[a^2-(a/2)^2]=1/3$, а в точках с координатами $z=\pm 2\,a/3$ величина $\bar{p}=1-(2/3)^2\,a^2/[a^2-(2/3)^2\,a^2]=1/5$. Распределение коэффициента давления по верхней и нижней поверхностям одинаково, поэтому аэродинамическое сопротивление равно нулю.

VI.7. Комплексная скорость определяется как производная от комплексного потенциала:

$$\frac{dW}{d\sigma} = V_\infty\left(1 - \frac{1}{\sigma^2}\right) + i\,\frac{\Gamma}{2\pi\sigma}.$$

Для точек контура цилиндра единичного радиуса ($R=1$, см. рис. 2.VI.2) переменная

$$\sigma = x + iy = R\cos\theta + iR\sin\theta = e^{i\theta}.$$

В соответствии с этим выражением находится распределение скорости по обтекаемой поверхности. Для критических точек (точек полного торможения) этой поверхности, где скорость равна нулю, производная $dW/d\,\sigma=0$ и, следовательно,

$$V_\infty\left(1 - e^{-2i\theta}\right) = -\,i\,(\Gamma/2\pi)\,e^{-i\theta}.$$

Умножая обе части этого равенства на $e^{i\theta}$ и деля на V_∞, получим

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = -i(\Gamma/2\pi V_\infty).$$

Так как $(e^{i\theta}-e^{-i\theta})/(2i)=\sin\theta_{кр}$, то $\sin\theta_{кр}=-\Gamma/(4\pi\,V_\infty)$. По значениям Γ и V_∞ можно найти углы $\theta_{кр}$, определяющие положение критических точек (на рис. 3.VI.4 точки A и B). Подставляя данные, получим

$$\sin\theta_{кр} = -\,314/(4\pi\cdot 50) = -\,0{,}5.$$

В соответствии с этим значением (см. рис. 3.VI.4)

$$\theta^A_{кр} = -\,30^\circ \text{ и } \theta^B_{кр} = -\,150^\circ.$$

Распределение давления определяется из уравнения Бернулли:

$$p = p_\infty + \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} - \frac{\rho_\infty}{2}\left(\frac{dW}{d\sigma}\right)^2 = p_\infty + \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} - \frac{\rho_\infty}{2}\left[V_\infty\left(1-\frac{1}{\sigma^2}\right) + i\,\frac{\Gamma}{2\pi\sigma}\right]^2 = p_\infty + \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} - \frac{\rho_\infty}{2}\left(V_\infty^2 + \frac{V_\infty^2}{\sigma^4} - \frac{2V_\infty^2}{\sigma^2} + i\,\frac{\Gamma V_\infty}{\pi\sigma} - i\,\frac{\Gamma V_\infty}{\pi\sigma^3} - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2\sigma^2}\right).$$

Коэффициент давления

$$\bar{p} = \frac{p-p_\infty}{\rho_\infty V_\infty^2/2} = 1 - \left(1 + \frac{1}{\sigma^4} - \frac{2}{\sigma^2} + i\,\frac{\Gamma}{\pi V_\infty\sigma} - i\,\frac{\Gamma}{\pi V_\infty\sigma^3} - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 V_\infty^2\sigma^2}\right).$$

Подставляя сюда $\sigma=e^{i\theta}$, находим значение коэффициента давления в любой точке на поверхности цилиндра, определяемой углом θ.

Для нахождения результирующей силы давления на цилиндр применим формулу Жуковского — Чаплыгина

$$F = X - iY = \frac{i\rho_\infty}{2} \oint \left(\frac{dW}{d\sigma}\right)^2 d\sigma.$$

Подставляя сюда выражение для комплексной скорости, находим

$$X - iY = \frac{i\rho_\infty}{2} \oint \left(V_\infty^2 + \frac{V_\infty^2}{\sigma^4} - \frac{2V_\infty^2}{\sigma^2} + i\frac{\Gamma V_\infty}{\pi\sigma} - i\frac{\Gamma V_\infty}{\pi\sigma^3} - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2\sigma^2} \right) d\sigma.$$

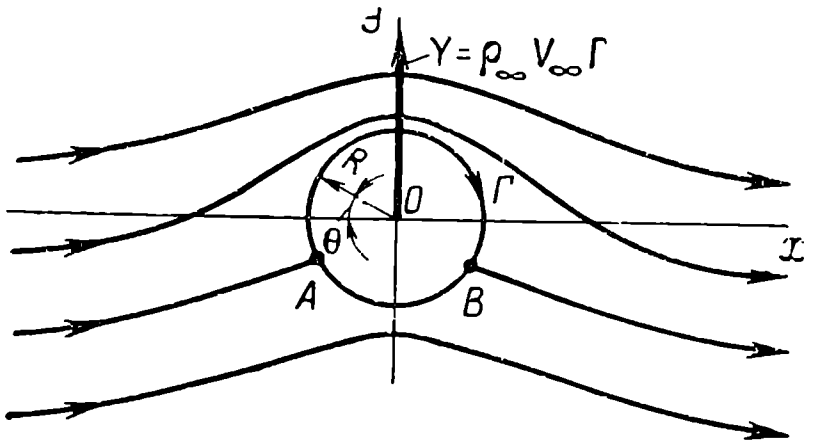


Рис. 3.VI.4. Круговой цилиндр в несжимаемом циркуляционно-поступательном потоке

Круговые интегралы от всех функций, записанных в этом выражении, за исключением функции $i\,\Gamma\,V_\infty/(\pi\,\sigma)$, равны нулю. Таким образом, получаем

$$X - iY = \frac{i\rho_\infty}{2} \oint i\frac{\Gamma V_\infty}{\pi} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{\rho_\infty V_\infty \Gamma}{2\pi} \oint \frac{d\sigma}{\sigma} = -i\rho_\infty V_\infty \Gamma.$$

В соответствии с этим результатом

$$X = 0, \quad Y = \rho_\infty V_\infty \Gamma.$$

Подставляя данные, находим величину подъемной силы для цилиндра единичной ширины:

$$Y = 0{,}125 \cdot 50 \cdot 314 \cdot 1 = 1960 \ кГ.$$

VI.8. Подъемная сила, действующая на пластинку с размахом l, равна

$$Y = 2\pi\alpha\, al\rho_\infty V_\infty^2.$$

Полагая для воздуха $\rho_\infty = 0{,}125\ кГ \cdot сек^2/м^4$, найдем

$$Y = 2\pi \cdot 0{,}1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0{,}125 \cdot 100^2 = 75 \cdot 10^3 \ кГ.$$

Соответствующий коэффициент подъемной силы

$$c_y = \frac{Y}{\left(\rho_\infty V_\infty^2/2\right) 2al} = \frac{2\pi\alpha\, al\rho_\infty V_\infty^2}{\left(\rho_\infty V_\infty^2/2\right) 2al} = 2\pi\alpha$$

или после подстановки данных

$$c_y = 2\pi \cdot 0{,}1 = 0{,}628.$$

Циркуляция скорости около пластинки

$$\Gamma = -2\pi\alpha a V_\infty$$

или согласно выражению для Y

$$\Gamma = -\frac{Y}{l\rho_\infty V_\infty} = -\frac{75 \cdot 10^3}{1 \cdot 0{,}125 \cdot 100} = -6 \cdot 10^3 \ м^2/сек;$$

знак минус соответствует направлению циркуляции по часовой стрелке.

Скорость на пластинке

$$V = V_\infty \left(1 \pm \alpha \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right) = V_\infty \left(1 \pm 0{,}1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right),$$

где знак плюс соответствует верхней, а знак минус — нижней поверхности. При $x=1$ *м* (точка задней кромки) $V=V_\infty$. Точке передней кромки ($x=-1$ *м*) соответствует бесконечно большое значение скорости ($V\to\pm\infty$). В реальных условиях обтекания тонких крыльев эти скорости будут большими, но конечными.

Рассмотрим значения скорости в точке $x=-12/13$ *м* (вблизи передней кромки):

$$V=100\left(1\pm 0{,}1\sqrt{\frac{1+12/13}{1-12/13}}\right)=100\,(1\pm 0{,}5).$$

На верхней стороне $V=100\ (1+0{,}5)=150$ *м/сек*, а на нижней $V=100\,(1-0{,}5)=50$ *м/сек*.

Используя формулу (3.VI.5), находим коэффициент давления:

$$\bar{p}=1-\left(1\pm 0{,}1\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2=\mp 0{,}2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-0{,}01\,\frac{1-x}{1+x}.$$

На задней кромке ($x=1$ *м*) $\bar{p}=0$, а на передней кромке ($x=-1$ *м*) коэффициент давления по абсолютной величине бесконечно велик, что практически нереально. Вблизи этой кромки (полагая $x=-12/13$ *м*)

$$\bar{p}=\mp 0{,}2\sqrt{\frac{1+12/13}{1-12/13}}-0{,}01\,\frac{1+12/13}{1-12/13}=\mp 1-0{,}25.$$

На верхней стороне $\bar{p}=-1{,}25$, а на нижней $\bar{p}=0{,}75$. Эти значения близки к реальным.

VI.9. Вихревая система, эквивалентная крылу конечного размаха прямоугольной формы в плане, индуцирует в потоке дополнительные скорости и этим вызывает скос потока. При помощи формулы Жуковского

$$Y=\rho_\infty V_\infty \Gamma_{ср} l$$

определяем среднюю циркуляцию по размаху крыла:

$$\Gamma_{ср}=\frac{Y}{\rho_\infty V_\infty l}=\frac{5000}{0{,}125\cdot 100\cdot 8}=50\ м^2/сек.$$

Для рассматриваемого крыла с размахом l вихревая система может быть заменена одним П-образным вихрем с постоянной циркуляцией $\Gamma_{ср}$; при этом расстояние между свободными (свернувшимися) вихрями принимается равным размаху крыла l.

Определим угол скоса потока ε, вызываемый такой вихревой системой в некоторой точке A (рис. 3.VI.5), расположенной на расстоянии L от крыла:

$$\varepsilon=\varepsilon_1+2\varepsilon_2'=\frac{\Gamma_{ср}(1+\sin\beta)}{\pi V_\infty l\sin\beta}. \qquad (3.VI.6)$$

Равенство $\varepsilon=\varepsilon_1+2\ \varepsilon_2'$ означает, что скос потока вызывается присоединенным вихрем (ε_1) и каждым из двух свободных (ε_2').

Угол β в формуле (3.VI.6), как видно из рис. 3.VI.5, определяется соотношением

$$\sin\beta=L/\sqrt{L^2+l^2/4}.$$

В частности, для точки, расположенной на расстоянии $L=3$ *м*,

$$\sin\beta=3/\sqrt{3^2+8^2/4}=0{,}6$$

и угол скоса потока согласно (3.VI.6)

$$\varepsilon=\frac{50\,(1+0{,}6)}{\pi\cdot 100\cdot 8\cdot 0{,}6}=\frac{1}{6\pi}\ рад\ (\approx 3^\circ).$$

VI.10. Угол скоса потока для крыла конечного размаха произвольной формы в плане определяется по формуле

$$\varepsilon = \frac{c_y}{\pi\lambda_{кр}}(1+\tau), \qquad (3.VI.7)$$

в которой коэффициент τ учитывает изменение скоса потока вдоль размаха и зависит от формы крыла в плане, его размаха, а также положения точки, в которой определяется величина угла скоса потока.

У крыла эллиптической формы в плане скос потока постоянен вдоль

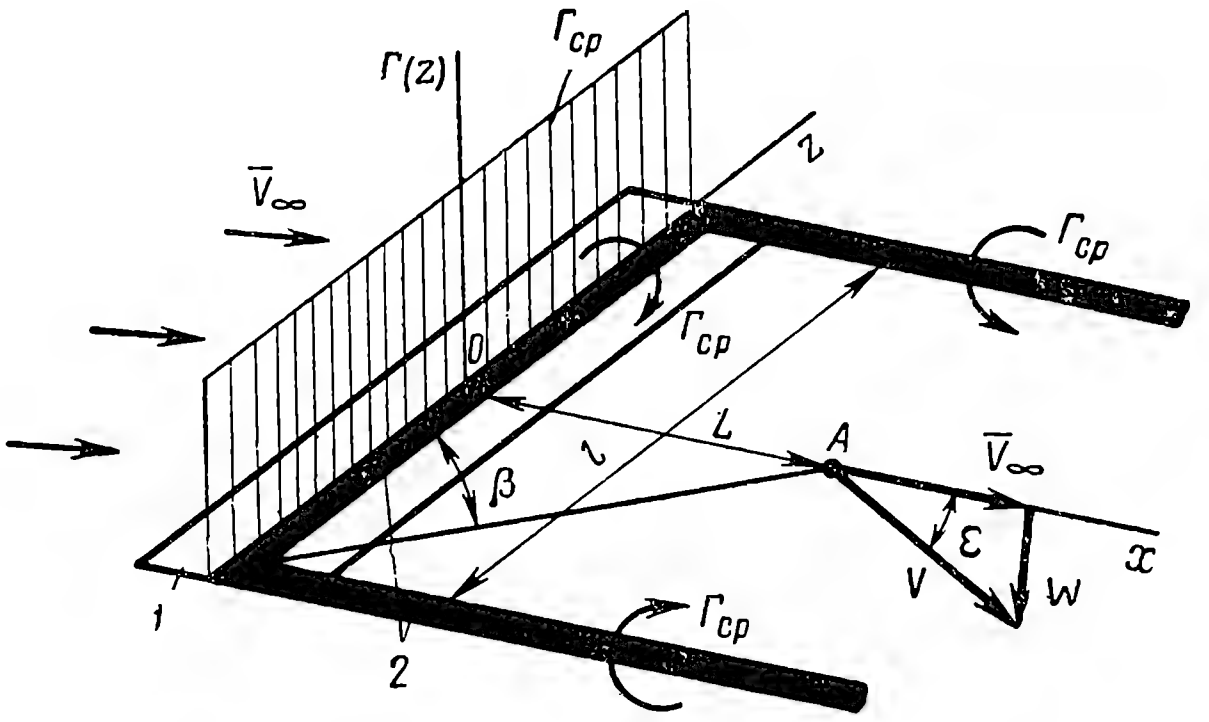


Рис .3.VI.5. К определению угла скоса потока, вызываемого П-образной вихревой системой:

1 — крыло; *2* — П-образный вихрь

размаха и подсчитывается по формуле (3.VI.7), в которой $\tau=0$. Таким образом,

$$\varepsilon = c_y/(\pi\lambda_{кр}). \qquad (3.VI.8)$$

Подъемная сила крыла

$$Y = c_y\left(\rho_\infty V_\infty^2/2\right)S_{кр},$$

или, используя (3.VI.8),

$$Y = \varepsilon\pi\lambda_{кр}\left(\rho_\infty V_\infty^2/2\right)S_{кр}. \qquad (3.VI.9)$$

Учитывая, что $\lambda_{кр}=l^2/S_{кр}$, подставляем данные в (3.VI.9) и получаем

$$Y = 0{,}035\pi\frac{8^2}{10}\cdot\frac{0{,}125\cdot 100^2}{2}10 = 4400\ кГ.$$

VI.11. Скос потока, возникающий за крылом конечного размаха, вызывает уменьшение угла атаки на величину угла скоса ε. В соответствии с этим истинное значение угла атаки

$$\alpha_и = \alpha - \varepsilon, \qquad (3.VI.10)$$

где α — установочный угол атаки. Это в свою очередь вызывает отклонение вектора аэродинамической силы, поскольку он должен быть нормален к направлению истинной скорости. В результате такого отклонения возникает составляющая X_i, направленная вдоль вектора скорости невозмущенного потока, называемая индуктивным сопротивлением. Как видно из рис. 3.VI.6, величина $X_i=\varepsilon Y$

VI.12. Если разделить индуктивное сопротивление $X_i=\varepsilon Y$ на величину $(\rho_\infty V_\infty^2/2)S_{кр}$, то получим коэффициент индуктивного сопротивления

$$c_{xi} = \varepsilon c_y, \qquad (3.VI.11)$$

или, используя (3.VI.8),

$$c_{xi} = \pi\lambda_{кр}\,\varepsilon^2. \qquad (3.VI.12)$$

Подставляя данные $\lambda_{кр}=l^2/S_{кр}=8^2/10$, $\varepsilon=2°$ (0,035 *рад*), получим

$$c_{xi} = \pi\,(8^2/10)\,0{,}035^2 = 0{,}0246.$$

Величина индуктивного сопротивления

$$X_i = c_{xi}\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2}S_{кр} = 0{,}0246\,\frac{0{,}125\cdot 100^2\cdot 10}{2} = 154\ кГ.$$

VI.13. Угол скоса потока за крылом определяется зависимостью (3.VI.7) и в соответствии с ней возрастает при уменьшении удлинения $\lambda_{кр}=l/b_{ср}$. Физически это можно объяснить следующим образом.

Скос потока обусловлен П-образной системой вихрей, индуцирующих в окружающей крыло среде некоторое поле скоростей, направленных вертикально, причем индукция вихрей быстро убывает с расстоянием (рис. 3.VI.7). Рассмотрим средний скос потока вдоль некоторой линии a—a, лежащей за крылом в плоскости вихрей.

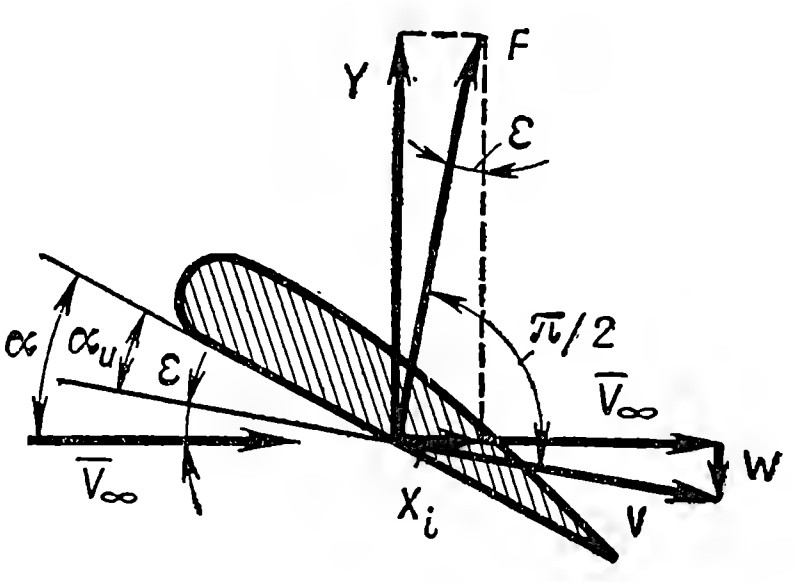


Рис. 3.VI.6. Скос потока у крыла и возникновение индуктивного сопротивления

Скорости V_y (z), индуцированные свободными вихрями, сходящими с концов крыла, изменяются в направлении размаха крыла, при этом средняя величина индуцированной скорости $V_{y\,ср}$ и, следовательно, сред-

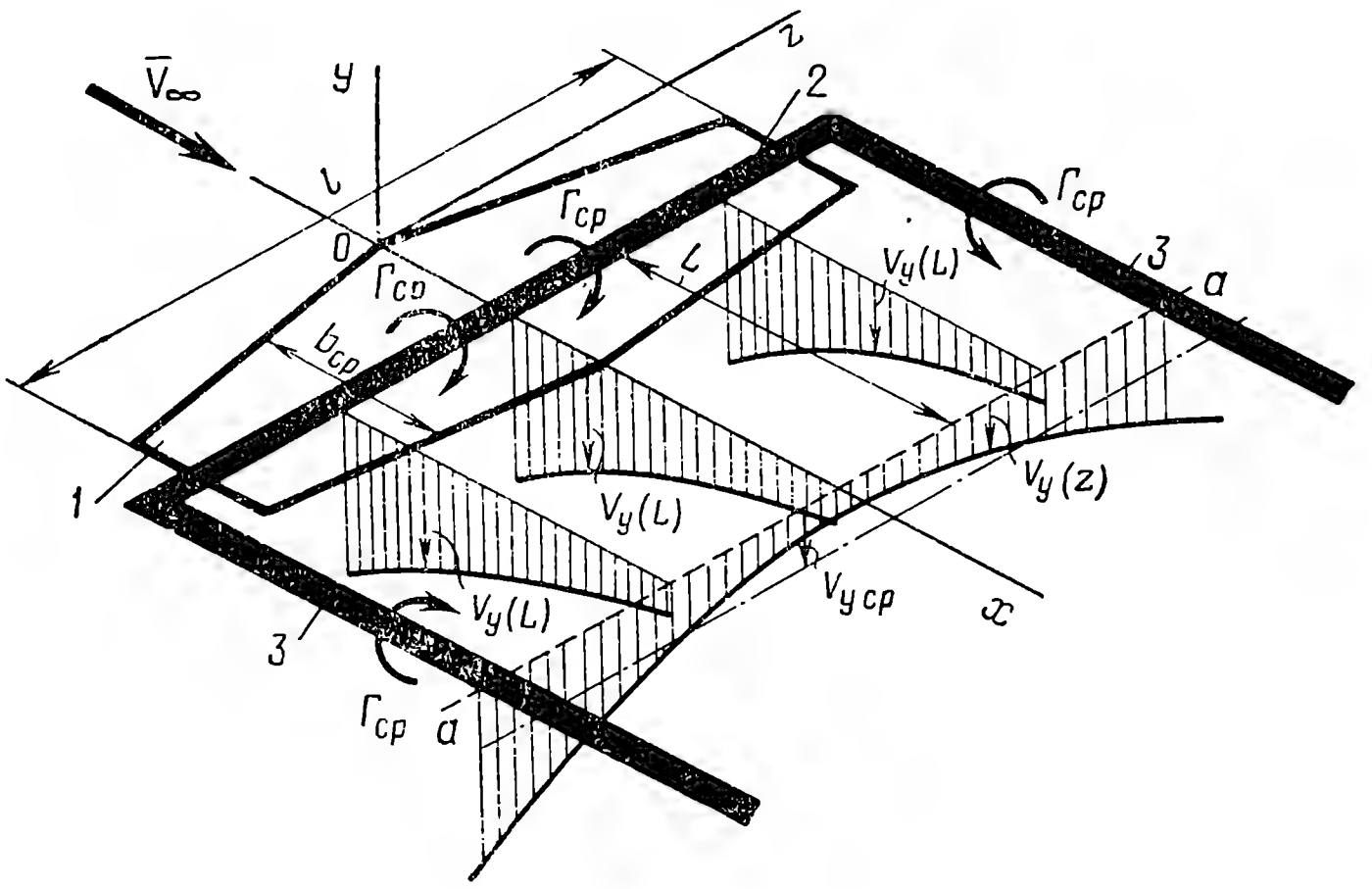


Рис. 3.VI.7. К объяснению зависимости угла скоса потока от удлинения крыла:

1 — крыло; *2* — присоединенный вихрь; *3* — свободный вихрь

ний угол скоса при постоянной величине интенсивности вихря $\Gamma_{ср}=(1/2)\,c_{y\,ср}\,b_{ср}\,V_\infty$ будут тем больше, чем меньше размах крыла l, и наоборот.

Скорость V_y (L), индуцированная присоединенным вихрем, и вызываемый ею угол скоса на данном расстоянии от крыла пропорциональны интенсивности вихря, т. е. средней циркуляции $\Gamma_{ср}$, которая согласно уравнению связи при постоянных значениях коэффициента подъемной

силы и скорости набегающего потока тем больше, чем больше хорда крыла $b_{ср}$.

Таким образом, суммарный средний угол скоса потока за крылом тем больше, чем меньше размах и больше хорда крыла, т. е. чем меньше вытянутость крыла вдоль размаха, характеризуемая удлинением $\lambda_{кр} = l/b_{ср}$.

VI.14. Истинный угол атаки в соответствии с выражениями (3.VI.10) и (3.VI.7)

$$\alpha_{и} = \alpha - \varepsilon = \alpha - \frac{c_y}{\pi\lambda_{кр}}(1 + \tau). \qquad (3.VI.13)$$

Величина этого угла, как видно из (3.VI.13), возрастает с увеличением удлинения, приближаясь к значению установочного угла атаки α. Истинный угол атаки (см. рис. 3.VI.6) измеряется по отношению к фактическому направлению потока около крыла, отличающемуся от направления невозмущенного потока за счет возникновения скоса потока. Скос же потока, как следует из (3.VI.7), уменьшается с увеличением удлинения крыла (см. задачу VI.13).

VI.15. В соответствии с формулой (3.VI.11) коэффициент индуктивного сопротивления уменьшается с уменьшением угла скоса потока. Такое влияние удлинения на индуктивное сопротивлние можно объяснить следующим образом. С физической точки зрения возникновение индуктивного сопротивлния обусловлено потерями части кинетической энергии движущегося крыла, затрачиваемой на образование вихрей, сходящих с его кромок. При этом чем больше удлинение, тем меньше суммарный средний угол скоса потока за крылом за счет меньшего индуцирующего влияния этих вихрей. Соответственно меньше доля кинетической энергии движущегося крыла, идущая на вихреобразование, что приводит к уменьшению индуктивного сопротивления.

VII.1. В соответствии с данными линеаризованной теории обтекания [20] углы атаки тонких профилей, один из которых расположен в несжимаемом потоке ($\alpha_{нсж}$), а другой — в сжимаемом ($\alpha_{сж}$), связаны между собой зависимостью

$$\alpha_{нсж} = \alpha_{сж}\left(\gamma/\sqrt{1-M_\infty^2}\right), \qquad (3.VII.1)$$

где γ—некоторый произвольный параметр, определяемый из условия

$$\varphi_0' = \varphi'\gamma, \qquad (3.VII.2)$$

в котором φ_0', φ' — потенциалы скоростей соответственно в несжимаемом и сжимаемом течениях. Соответствующие координаты точек профиля (y_0 и y) определяются из соотношения

$$y_0 = y\left(\gamma/\sqrt{1-M_\infty^2}\right). \qquad (3.VII.3)$$

По условию задачи, φ_0' и φ' одинаковы, следовательно, параметр $\gamma=1$, в соответствии с чем

$$\alpha_{нсж} = \alpha_{сж}/\sqrt{1-M_\infty^2},\ y_0 = y/\sqrt{1-M_\infty^2}.$$

Таким образом, линеаризованному потоку сжимаемого газа, обтекающему тонкий профиль, соответствует поток несжимаемой жидкости, имеющий тот же потенциал скоростей, но обтекающий профиль, толщина которого, как и угол атаки, больше в $\sqrt{1-M_\infty^2}$ раз. Физически это объясняется тем, что с ростом числа M_∞ дозвукового обтекания свойство сжимаемости среды приводит к более сильному увеличению местных скоростей возмущения, вызванных присутствием тонкого тела, причем это увеличение пропорционально $1/\sqrt{1-M_\infty^2}$. Такое явление обусловлено тем, что в сжимаемом газе при увеличении местных скоростей в струйках около тела уменьшение давления вызывает уменьшение плотности, а это в свою очередь вследствие постоянства местного расхода в струйках, равного расходу $\rho_\infty V_\infty$ в невозмущенном потоке перед телом, должно быть компенсировано более значительным возрастанием местной скорости, чем в сжимаемом потоке при прочих равных условиях. Это возрастание скоростей возмущения в сжимаемом потоке компенсируется увеличением толщины и угла атаки того же профиля, но обтекаемого потоком несжимаемой жидкости.

VII.2. В соответствии с линеаризованной теорией обтекания у двух одинаковых профилей, расположенных под одним и тем же углом атаки, коэффициенты давления в соответствующих точках профилей в сжимаемом ($\bar{p}_{сж}$) и в несжимаемом ($\bar{p}_{нсж}$) потоках связаны между собой зависимостью (4.1.32). Используя известные выражения для коэффициентов подъемной силы и продольного момента

$$c_y = \int_0 (\bar{p}_н - \bar{p}_в)\, d\bar{x}; \qquad (3.VII.4)$$

$$m_z = \int_0^1 (\bar{p}_н - \bar{p}_в)\, \bar{x}\cdot d\bar{x}, \qquad (3.VII.5)$$

а также зависимость (4.1.32), найдем связь между коэффициентами c_y и m_z в сжимаемом и несжимаемом потоках:

$$c_{y\,сж} = c_{y\,нсж}/\sqrt{1-M_\infty^2}; \qquad (3.VII.6)$$

$$m_{z\,сж} = m_{z\,нсж}/\sqrt{1-M_\infty^2}. \qquad (3.VII.7)$$

Из формул (3.VII.6) и (3.VII.7) следует, что для одного и того же профиля, расположенного под одним углом атаки, коэффициенты подъемной силы и момента в сжимаемом потоке в $1/\sqrt{1-M_\infty^2}$ раз больше, чем в несжимаемом. Такое изменение аэродинамических коэффициентов обусловлено более сильным увеличением местных скоростей на профиле, обтекаемом сжимаемым потоком (см. задачу VII.1), что приводит к более сильному разрежению (уменьшению коэффициента давления) на верхней стороне профиля (при положительном угле атаки). Как следует из формул (3.VII.4) и (3.VII.5), коэффициенты подъемной силы и момента в этом случае будут возрастать.

VII.3. Находим коэффициент подъемной силы профиля в сжимаемом потоке по (3.VII.6):

$$c_{y\,сж} = 0{,}3/\sqrt{1-0{,}5^2} = 0{,}347.$$

По формуле Жуковского, подъемная сила крыла единичного размаха с заданным профилем, обтекаемого несжимаемым потоком,

$$Y_{нсж} = \rho_\infty V_\infty \Gamma_{нсж}.$$

С другой стороны,

$$Y_{нсж} = c_{y\,нсж}\,\rho_\infty V_\infty^2\, b/2.$$

Отсюда циркуляция скорости

$$\Gamma_{нсж} = \frac{c_{y\,нсж} V_\infty b}{2} = \frac{c_{y\,нсж} M_\infty a_\infty b}{2} = \frac{0{,}3\cdot 0{,}5\cdot 340\cdot 2}{2} = 51 \ м^2/сек.$$

Для линеаризованного потока коэффициент $c_{y\,нсж}$ связан с коэффициентом $c_{y\,сж}$ и числом M_∞ зависимостью (3.VII.6). Принимая во внимание последнюю формулу, можно считать, что аналогичная зависимость связывает между собой $\Gamma_{нсж}$, $\Gamma_{сж}$ и M_∞. Таким образом, для сжимаемого потока

$$\Gamma_{сж} = c_{y\,сж} V_\infty b/2$$

и

$$\Gamma_{сж} = \Gamma_{нсж}\,(c_{y\,сж}/c_{y\,нсж}) = \Gamma_{нсж}/\sqrt{1-M_\infty^2}. \qquad (3.VII.8)$$

В соответствии с этим

$$\Gamma_{сж} = 51/\sqrt{1-0{,}5^2} = 59 \ м^2/сек.$$

VII.4. Критическим числом Маха $M_{\infty кр}$ называют такое число Маха невозмущенного дозвукового потока, при котором в какой-либо точке обтекаемой поверхности скорость становится равной местной скорости звука.

При увеличении толщины профиля число $M_{\infty кр}$ дозвукового набегающего потока уменьшается. Это объясняется тем, что увеличение толщины профиля приводит к бóльшему поджатию струйки жидкости и увеличению местной скорости потока. Следовательно, звуковая скорость на утолщенном профиле будет достигнута при меньшей скорости набегающего потока.

При увеличении угла атаки профиля $M_{\infty кр}$ уменьшается, что также объясняется бóльшим поджатием струек жидкости и связанным с этим увеличением местной дозвуковой скорости.

VII.5. Согласно гипотезе акад. С. А. Христиановича местная звуковая скорость, которой соответствует критическое число Маха $M_{\infty кр}$ набегающего потока, возникает в том месте профиля, где в случае обтекания несжимаемым потоком возникает наибольшее разрежение. С. А. Христианович установил связь между минимальным коэффициентом давления

$\bar{p}_{\min\,\text{нсж}}$, соответствующим этому наибольшему разрежению, и числом $\mathbf{M}_{\infty\text{кр}}$ (см. график на рис. 4.1.15). Согласно заданному распределению $\bar{p}$ на рис. 2.VII.1 коэффициент $\bar{p}_{\min\,\text{нсж}}=-1{,}25$. По этой величине из графика на рис. 4.1.15 находим $\mathbf{M}_{\infty\text{кр}}=0{,}5$.

Возможен также расчет $\mathbf{M}_{\infty\text{кр}}$ по методу С. А. Христиановича, основанному на применении полученной им таблицы относительных скоростей.

По значению $\bar{p}_{\min\,\text{нсж}}=-1{,}25$ подсчитываем относительную скорость так называемого фиктивного несжимаемого потока около профиля:

$$\Lambda_\infty=\frac{V_{\infty\,\text{нсж}}}{a^*}=\frac{0{,}7577}{\sqrt{1-\bar{p}_{\min\,\text{нсж}}}}=\frac{0{,}7577}{\sqrt{1-(-1{,}25)}}=0{,}505.$$

По таблице Христиановича (см. табл. 4.1.1) находим соответствующие этому значению $\Lambda_\infty=0{,}505$ величины $\lambda_{\infty\text{кр}}=0{,}540$ и $\mathbf{M}_{\infty\text{кр}}=0{,}502$.

VII.6. Из графика на рис. 2.VII.2 устанавливаем, что при $\mathbf{M}_\infty=0{,}5$ минимальный коэффициент давления на профиле $\bar{p}_{\min}=-1{,}0$. Вычислим соответствующий этому значению минимальный коэффициент давления в несжимаемом потоке. Сначала определим, принимая $k=1{,}4$, относительную скорость $\lambda=\lambda_\infty$, соответствующую числу $\mathbf{M}=\mathbf{M}_\infty=0{,}5$ [см. (3.III.9)]:

$$\lambda_\infty=\sqrt{\frac{(1{,}4+1)\,0{,}5^2/2}{1+(1{,}4-1)\,0{,}5^2/2}}=0{,}535.$$

По этому значению из табл. 4.1.1 находим относительную скорость фиктивного несжимаемого потока $\Lambda_\infty=0{,}498$. Далее по коэффициенту $\bar{p}_{\min}=-1{,}0$ определяем отношение абсолютных давлений:

$$\frac{p_{\min}}{p_\infty}=\bar{p}_{\min}\frac{k\mathbf{M}_\infty^2}{2}+1=-1\,\frac{1{,}4\cdot 0{,}5^2}{2}+1=0{,}825.$$

Местная относительная скорость

$$\lambda=\left\{\frac{k+1}{k-1}\left[1-\left(\frac{p_{\min}}{p_\infty}\cdot\frac{p_\infty}{p_0}\right)^{(k-1)/k}\right]\right\}^{1/2}=$$

$$=\left\{\frac{k+1}{k-1}\left[1-\left(\frac{p_{\min}}{p_\infty}\right)^{(k-1)/k}\left(1+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\infty^2\right)^{-1}\right]\right\}^{1/2}. \qquad (3.\text{VII}.9)$$

После подстановки данных

$$\lambda=\left\{\frac{1{,}4+1}{1{,}4-1}\left[1-0{,}825^{(1,4-1)/1,4}\left(1+\frac{1{,}4-1}{2}\,0{,}5^2\right)^{-1}\right]\right\}^{1/2}=0{,}770.$$

Из табл. 4.1.1 по значению $\lambda=0{,}770$ находим местную относительную скорость фиктивного несжимаемого потока $\Lambda=0{,}668$. Используя затем уравнение Бернулли, вычисляем соответствующий коэффициент давления:

$$p_{\min\,\text{нсж}}=1-(\Lambda/\Lambda_\infty)^2=1-(0{,}668/0{,}498)^2=-0{,}820.$$

По графику Христиановича (рис. 4.1.15) находим критическое число Маха набегающего потока: $\mathbf{M}_{\infty\text{кр}}=0{,}580$.

VII.7. На рис. 2.VII.3 находим минимальный коэффициент давления $\bar{p}_{\min\,\text{нсж}}=-0{,}8$ и определяем по величине этого коэффициента из графика Христиановича (рис. 4.1.15) критическое число Маха $\mathbf{M}_{\infty\text{кр}}=0{,}580$. Поскольку заданное число $\mathbf{M}_\infty=0{,}5$ меньше $\mathbf{M}_{\infty\text{кр}}=0{,}580$, режим обтекания профиля сжимаемым потоком будет докритическим и для пересчета давления можно использовать метод Христиановича. По числу $\mathbf{M}_\infty=0{,}5$ для $k=1{,}4$ вычисляем относительную скорость $\lambda_\infty=0{,}535$ (см. задачу VII.6).

Из табл. 4.1.1 находим фиктивную скорость несжимаемого потока $\Lambda_\infty = 0{,}498$ и по уравнению Бернулли, задаваясь пересчитываемыми значениями коэффициентов давления в несжимаемом потоке ($\bar{p}_{\text{нсж}}$), вычисляем соответствующие местные относительные скорости фиктивного несжимаемого потока:

$$\Lambda = \Lambda_\infty \sqrt{1 - \bar{p}_{\text{нсж}}}.$$

По найденным значениям Λ из табл. 4.1.1 находим местные относительные скорости действительного потока λ. Затем по формулам изэнтропического течения определяем отношение давлений:

$$\frac{p}{p_\infty} = \left[\frac{1-(k-1)\lambda^2/(k+1)}{1-(k-1)\lambda_\infty^2/(k+1)}\right]^{k/(k-1)} = \frac{\pi(\lambda)}{\pi(\lambda_\infty)}$$

и коэффициент давления:

$$\bar{p} = \frac{2}{kM_\infty^2}\left(\frac{p}{p_\infty} - 1\right) = \frac{2}{kM_\infty^2}\left[\frac{\pi(\lambda)}{\pi(\lambda_\infty)} - 1\right].$$

Таблица 3.VII.1

№ точек	$\bar{p}_{\text{нсж}}$	Λ	λ	p/p_∞	$\bar{p}$
1	0,2	0,444	0,465	1,040	0,23
2	—0,5	0,610	0,684	0,891	—0,62
3	—0,8	0,668	0,770	0,824	—1,00
4	1,0	0	0	1,185	1,06

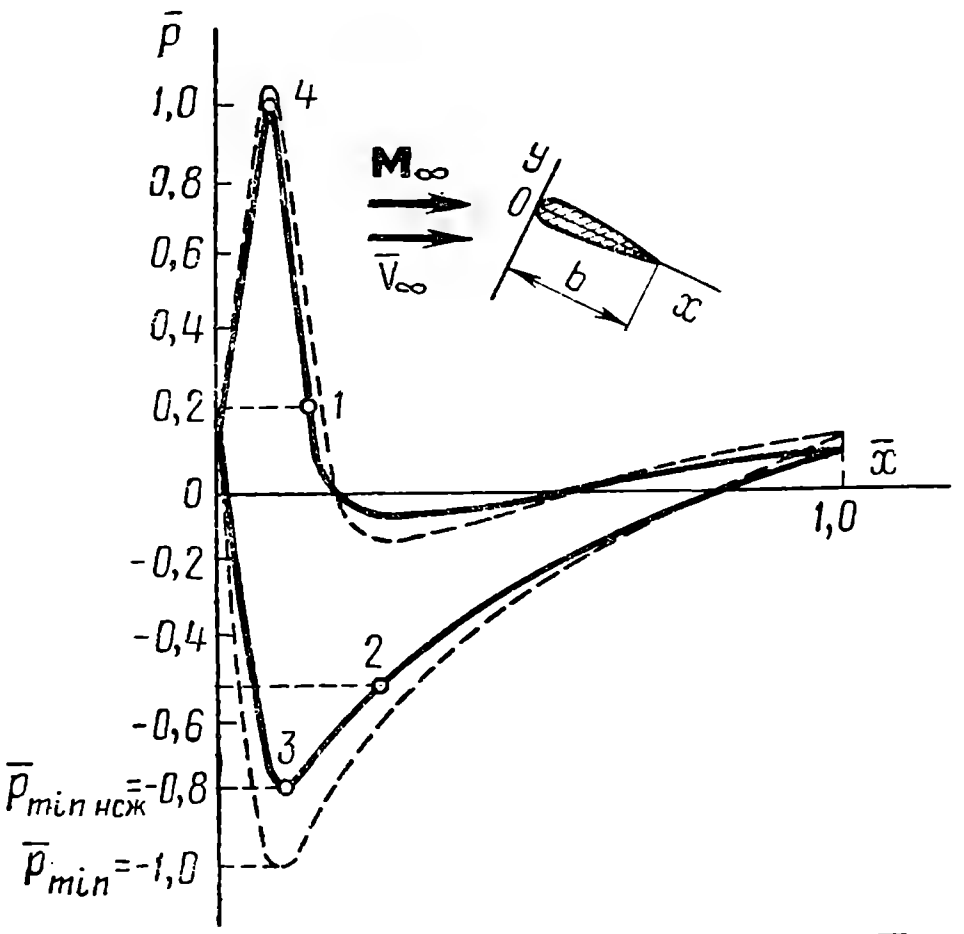


Рис. 3.VII.1. Координатные диаграммы $\bar{p} = f(\bar{x})$ для симметричного профиля в потоке под углом атаки:

——— — несжимаемый поток; — — — — — сжимаемый поток с числом $\mathbf{M}_\infty = 0{,}5$

Результаты расчета для точек *1*, *2*, *3*, *4* (см. рис. 2.VII.3) приведены в табл. 3.VII.1.

Соответствующее полученным данным распределение коэффициента давления при $\mathbf{M}_\infty = 0{,}5$ показано на рис. 3.VII.1.

VII.8. Вначале найдем критическое число Маха профиля, соответствующее заданному распределению $\bar{p}$ (см. рис. 2.VII.4). По числу $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\infty 1} = 0{,}4$ и $k = 1{,}4$ определим по формуле (3.III.9) $\lambda = \lambda_{\infty 1}$:

$$\lambda_{\infty 1} = \sqrt{\frac{(1{,}4+1)\,0{,}4^2/2}{1+(1{,}4-1)\,0{,}4^2/2}} = 0{,}431,$$

а из табл. 4.1.1 найдем для этой величины $\lambda_{\infty 1}$ значение $\Lambda_{\infty 1} = 0{,}419$.

Так как на рис. 2.VII.4 минимальный коэффициент давления $\bar{p}_{\min} = -0{,}6$, то отношение

$$\frac{p_{\min}}{p_\infty} = \bar{p}_{\min}\frac{kM_{\infty 1}^2}{2} + 1 = -0{,}6\,\frac{1{,}4\cdot 0{,}4^2}{2} + 1 = 0{,}933.$$

В соответствии с этим местная относительная скорость [см. (3.VII.9)]

$$\lambda = \left\{\frac{1{,}4+1}{1{,}4-1}\left[1 - (0{,}933)^{(1{,}4-1)/1{,}4}\left(1 + \frac{1{,}4-1}{2}\,0{,}4^2\right)^{-1}\right]\right\}^{1/2} = 0{,}550.$$

Из табл. 4.1.1 для $\lambda=0{,}550$ найдем величину $\Lambda=0{,}514$, а затем определим, зная $\Lambda_{\infty 1}=0{,}419$, коэффициент

$$\bar{p}_{\min\ нсж}=1-(\Lambda/\Lambda_{\infty 1})^2=1-(0{,}514/0{,}419)^2=-0{,}505.$$

По этой величине из графика на рис. 4.1.15 находим $\mathbf{M}_{\infty кр}=0{,}660$. Так как заданное число $\mathbf{M}_{\infty 2}<\mathbf{M}_{\infty кр}$, пересчет распределения давления на число $\mathbf{M}_{\infty 2}$ можно вести по методу С. А. Христиановича.

Для конкретности выберем на кривой (см. рис. 2.VII.4) точку с $\bar{p}'=0{,}4$ и найдем значение $\bar{p}''$ в этой точке, соответствующее $\mathbf{M}_{\infty 2}=0{,}6$. Вначале определим отношение давлений:

$$\frac{p'}{p_\infty}=\bar{p}'\frac{k\mathbf{M}_\infty^2}{2}+1=0{,}4\,\frac{1{,}4\cdot 0{,}4^2}{2}+1=1{,}045;$$

затем по формуле (3.VII.9), полагая в ней $p_{\min}=p'$, вычислим местную относительную скорость:

$$\lambda'=\left\{\frac{1{,}4+1}{1{,}4-1}\left[1-(1{,}045)^{(1,4-1)/1,4}\left(1+\frac{1{,}4-1}{2}\,0{,}4^2\right)^{-1}\right]\right\}^{1/2}=0{,}346$$

и по табл. 4.1.1 найдем величину $\Lambda'=0{,}336$. Соответствующий коэффициент давления несжимаемой жидкости

$$\bar{p}_{нсж}=1-(\Lambda'/\Lambda_{\infty 1})^2=1-(0{,}336/0{,}419)^2=0{,}355.$$

Производим пересчет этого коэффициента на число $\mathbf{M}_{\infty 2}=0{,}6$ (см. решение задачи VII.7). Находим по (3.III.9), полагая $\mathbf{M}=\mathbf{M}_{\infty 2}$ и $\lambda=\lambda_{\infty 2}$,

$$\lambda_{\infty 2}=\sqrt{\frac{(1{,}4+1)\,0{,}6^2/2}{1+(1{,}4-1)\,0{,}6^2/2}}=0{,}635$$

и по табл. 4.1.1 определяем $\Lambda_{\infty 2}=0{,}583$. Теперь для вычисленного коэффициента давления $\bar{p}_{нсж}=0{,}355$ подсчитываем

$$\Lambda''=\Lambda_{\infty 2}\sqrt{1-\bar{p}_{нсж}}=0{,}583\sqrt{1-0{,}355}=0{,}468.$$

Из табл. 4.1.1 видим, что этому значению соответствует $\lambda''=0{,}446$. Найдем отношение давлений:

$$\frac{p''}{p_\infty}=\left[\frac{1-(k-1)\,\lambda''^2/(k+1)}{1-(k-1)\,\lambda_{\infty 2}^2/(k+1)}\right]^{k/(k-1)}=$$

$$=\left[\frac{1-(1{,}4-1)\,0{,}446^2/(1{,}4+1)}{1-(1{,}4-1)\,0{,}635^2/(1{,}4+1)}\right]^{1,4/(1,4-1)}=1{,}131$$

и коэффициент давления:

$$\bar{p}''=\frac{2}{k\mathbf{M}_{\infty 2}^2}\left(\frac{p''}{p_\infty}-1\right)=\frac{2}{1{,}4\cdot 0{,}6^2}(1{,}131-1)=0{,}521.$$

Аналогично осуществляется пересчет этих коэффициентов для других точек заданной кривой. Результаты такого пересчета показаны на рис. 3.VII.2.

VII.9. Вначале следует найти критическое число Маха набегающего потока ($\mathbf{M}_{\infty кр}$). Используя метод С. А. Христиановича, по значению $\bar{p}_{\min\ нсж}=-1{,}25$ определяем $\mathbf{M}_{\infty кр}=0{,}502$ (см. решение задачи VII.5).

Коэффициент волнового сопротивления вычисляем по формуле (4.1.48), справедливой при условии, что числа $\mathbf{M}_\infty$ не превышают $\mathbf{M}_{\infty кр}$ более чем на 0,15. Расчет коэффициента волнового сопротивления по формуле (4.1.48) для ряда принятых значений числа Маха приведен в табл. 3.VII.2.

Таблица 3.VII.2

M_∞	$(M_\infty - M_{\infty кр})$	$(M_\infty - M_{\infty кр})^3$	$c_{xв}$
0,55	0,048	$0,111 \cdot 10^{-3}$	0,00122
0,60	0,098	$0,942 \cdot 10^{-3}$	0,0104
0,65	0,148	$3,25 \cdot 10^{-3}$	0,0358

Определим силу волнового сопротивления участка крыла с заданными размерами ($b=2$ *м*, $l=1$ *м*) при $\mathbf{M}_\infty=0,6$. Скорость полета вблизи Земли при скорости звука в воздухе $a_\infty=340$ *м/сек*

$$V_\infty = \mathbf{M}_\infty a_\infty = 0,6 \cdot 340 = 204 \text{ м/сек}.$$

Сила волнового сопротивления

$$X_в = c_{xв} (\rho_\infty V_\infty^2/2) S_{кр},$$

где $\rho_\infty V_\infty^2/2=0,125 \cdot 204^2/2=2,6 \cdot 10^3$ *кГ/м*^{2}; $S_{кр}=lb=1 \cdot 2=2$ *м*^{2}. С учетом этого

$$X_в = 0,0104 \cdot 2,6 \cdot 10^3 \cdot 2 = 54 \text{ кГ}.$$

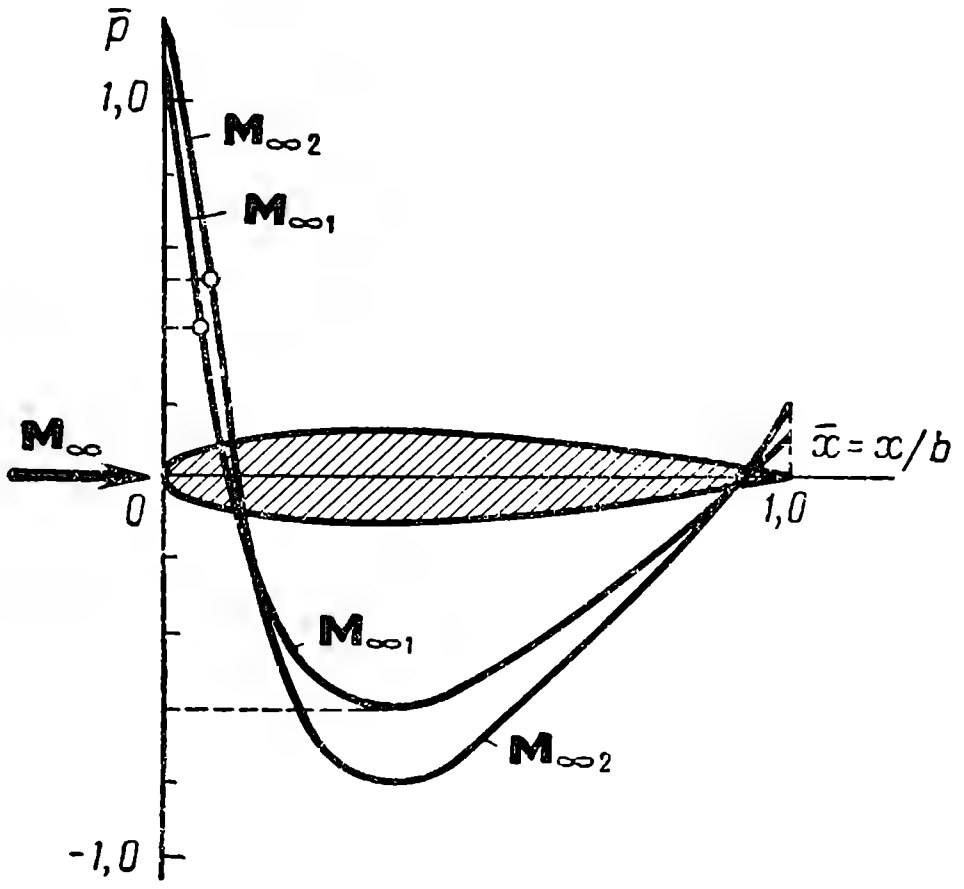


Рис. 3.VII.2. Координатные диаграммы $\bar{p}=f(\bar{x})$ для симметричного профиля, обтекаемого под нулевым углом атаки потоками с числами $\mathbf{M}_{\infty 1}=0,4$ и $\mathbf{M}_{\infty 2}=0,6$

VII.10. Плоский сверхзвуковой поток, обтекающий поверхность, которая образует с направлением невозмущенного течения тупой угол, больший 180°, называется течением Прандтля — Майера. Огибая угол, поток расширяется и, следовательно, скорость его увеличивается, а давление и плотность уменьшаются. При этом центрированной волной разрежения (веером разрежения) называется совокупность бесконечного множества линий Маха, выходящих из точки поверхности, обтекаемой сверхзвуковым потоком, рассматриваемым как течение Прандтля — Майера (рис. 3.VII.3). Этот веер разрежения ограничен линией Маха *OA* [ее угол наклона к вектору скорости $\bar{V}_\infty$ равен $\mu_\infty=\arcsin(1/\mathbf{M}_\infty)$] и линией Маха *OB*, для которой угол наклона ее к новому направлению потока *OC* равен $\mu=\arcsin(1/\mathbf{M})$, причем вследствие расширения сверхзвукового потока $\mathbf{M}>\mathbf{M}_\infty$ и $\mu<\mu_\infty$.

Из теории характеристик известно, что при отклонении потока на угол β

$$\omega = \beta + \omega_\infty, \qquad (3.VII.10)$$

где ω и ω_∞ — функции чисел Маха соответственно в отклоненном и набегающем потоках. При $k=1,4$ из табл. 5.3.1 [20] для $\mathbf{M}_\infty=2$ находим $\omega_\infty=26,4°$. Тогда

$$\omega = 30° + 26,4° = 56,4°.$$

Из той же таблицы или табл. 10 [13] по полученному значению $\omega=56,4°$ находим для отклоненной поверхности число $\mathbf{M}=3,38$. Соответствующий угол Маха $\mu=\arcsin(1/\mathbf{M})=\arcsin(1/3,38)=17,1°$. Отношение давлений

$$\frac{p}{p_\infty} = \left[\frac{1+(k-1)\,\mathbf{M}_\infty^2/2}{1+(k-1)\,\mathbf{M}^2/2}\right]^{k/(k-1)} = \left[\frac{1+(1,4-1)\,2^2/2}{1+(1,4-1)\,3,38^2/2}\right]^{1,4/(1,4-1)} = 0,547.$$

Аналогично находим отношение температур:

$$\frac{T}{T_\infty} = \frac{1 + (k-1)\,M_\infty^2/2}{1 + (k-1)\,M^2/2} = \frac{1 + (1{,}4-1)\,2^2/2}{1 + (1{,}4-1)\,3{,}38^2/2} = 0{,}845.$$

Из рис. 3.VII.3 видно, что угол веера разрежения

$$\theta = (\mu_\infty + \beta) - \mu, \qquad (3.VII.11)$$

где $\mu_\infty = \arcsin(1/M_\infty) = \arcsin(1/2) = 30°$. Таким образом,

$$\theta = (30° + 30°) - 17{,}1° = 42{,}9°.$$

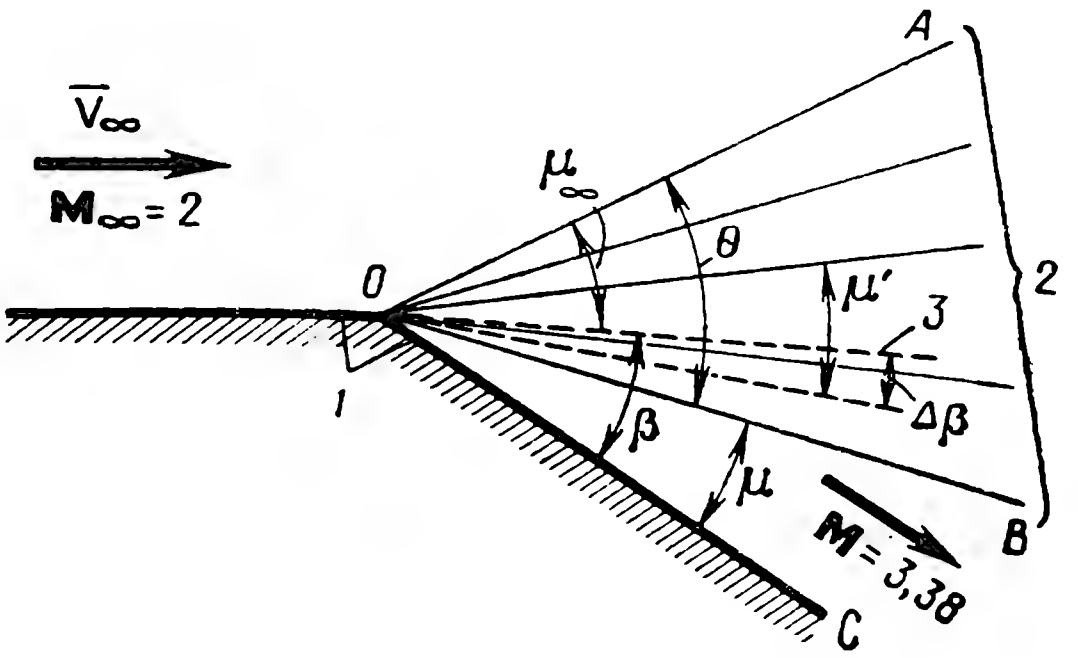


Рис. 3.VII.3. Схема обтекания сверхзвуковым потоком тупого угла:
1 — обтекаемая поверхность; *2* — веер разрежения; *3* — направление потока со скоростью $\bar{V}_\infty$

При переходе через веер разрежения поток поворачивает на угол $\beta = 30°$, претерпевая расширение. При этом число Маха увеличивается от значения $M_\infty = 2$ до величины $M = 3{,}38$ на отклоненной поверхности.

Найдем число M', которое соответствует отклонению потока от первоначального направления на некоторый угол $\Delta\beta$. Для этого используем уравнение

$$\omega = \Delta\beta + \omega_\infty. \qquad (3.VII.12)$$

Задавшись значением $\Delta\beta$, найдем величину ω, а затем определим число M'. В частности, примем $\Delta\beta = 3°36'$ (3,6°). Тогда $\omega = 3{,}6° + 26{,}4° = 30°$. Из табл. 10 [13] находим соответствующее число $M' = 2{,}13$ и угол $\mu' = \arcsin(1/2{,}13) = 28°$. Линию Маха, расположенную в веере разрежения, проведем из точки излома под углом $\mu' = 28°$ к плоскости, отклоненной от направления вектора V_∞ под углом $\Delta\beta = 3{,}6°$. Задаваясь рядом значений угла $\Delta\beta$, можно провести полный расчет течения в веере разрежения.

VII.11. Найдем параметр гиперзвукового подобия:

$$K = M_\infty \alpha = 10 \cdot 0{,}1 = 1$$

и определим соответствующий коэффициент давления:

$$\bar{p} = \left[\frac{k+1}{2} - \sqrt{\left(\frac{k+1}{2}\right)^2 + \frac{4}{K^2}}\right]\alpha^2 = \left[\frac{1{,}4+1}{2} - \sqrt{\left(\frac{1{,}4+1}{2}\right)^2 + \frac{4}{1^2}}\right]\alpha^2 = -1{,}13\alpha^2$$

или при $\alpha = 0{,}1$ *рад* $\bar{p} = -1{,}13 \cdot 0{,}1^2 = -0{,}0113$.

Находим число Маха на пластинке [20]:

$$M = \left(\frac{1}{M_\infty} - \frac{k-1}{2}\alpha\right)^{-1} = \left(\frac{1}{10} - \frac{1{,}4-1}{2}0{,}1\right)^{-1} = 12{,}5.$$

Рассмотрим аэродинамически подобный поток около пластинки с углом атаки $\alpha=0{,}05$ *рад*. Для этой пластинки $\mathbf{K}=\mathbf{M}_\infty\alpha=1$, поэтому

$$\mathbf{M}_\infty = \mathbf{K}/\alpha = 1/0{,}05 = 20.$$

Так как соотношение $\bar{p}/\alpha^2=-1{,}13$, то

$$\bar{p} = -1{,}13\alpha^2 = -1{,}13\cdot 0{,}05^2 = -2{,}83\cdot 10^{-3}.$$

Соответствующее число Маха

$$\mathbf{M} = \left(\frac{1}{20} - \frac{1{,}4-1}{2}\,0{,}05\right)^{-1} = 25.$$

VII.12. Определим параметры сверхзвукового подобия для пластинок:

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{M}_{\infty 1}\alpha = 5\cdot 0{,}1 = 0{,}5;\ \mathbf{K}_2 = \mathbf{M}_{\infty 2}\alpha = 20\cdot 0{,}1 = 2.$$

Как видим, эти параметры отличаются значительно. Первый из них соответствует линеаризованному, а второй — гиперзвуковому обтеканию.

В случае линеаризованного обтекания аэродинамические коэффициенты определяются по следующим формулам:

$$\frac{\bar{p}_\text{н} - \bar{p}_\text{в}}{\alpha^2} = \frac{c_y}{\alpha^2} = \frac{c_x}{\alpha^3} = \frac{4}{\mathbf{K}_1},\quad -\frac{m_z}{\alpha^2} = \frac{2}{\mathbf{K}_1}.$$

Избыточная величина коэффициента давления на нижней и верхней сторонах пластинки

$$\bar{p}_\text{н} - \bar{p}_\text{в} = 4\alpha^2/\mathbf{K}_1 = 4\cdot 0{,}1^2/0{,}5 = 0{,}08,$$

а аэродинамические коэффициенты имеют следующие значения:

$$c_y = 4\alpha^2/\mathbf{K}_1 = 4\cdot 0{,}1^2/0{,}5 = 0{,}08;$$

$$c_x = 4\alpha^3/\mathbf{K}_1 = 4\cdot 0{,}1^3/0{,}5 = 0{,}008;$$

$$-m_z = 2\alpha^2/\mathbf{K}_1 = 2\cdot 0{,}1^2/0{,}5 = 0{,}04.$$

Аэродинамическое качество

$$K = c_y/c_x = 1/\alpha = 1/0{,}1 = 10,$$

а коэффициент центра давления

$$c_{\text{ц.д}} = x_{\text{ц.д}}/b = -m_z/c_y = 0{,}04/0{,}08 = 0{,}5.$$

Рассмотрим случай гиперзвукового обтекания. Расчет аэродинамических коэффициентов ведется по формулам:

$$\frac{\bar{p}_\text{н} - \bar{p}_\text{в}}{\alpha^2} = \frac{c_y}{\alpha^2} = \frac{c_x}{\alpha^3} = 2\bar{\mathbf{K}},\quad -\frac{m_z}{\alpha^2} = \bar{\mathbf{K}},$$

где

$$\bar{\mathbf{K}} = \sqrt{\left(\frac{k+1}{4}\right)^2 + \frac{1}{\mathbf{K}_2^2}}.$$

После подстановки $\mathbf{K}_2=2$ и $k=c_p/c_v=1{,}4$ получим

$$\bar{\mathbf{K}} = \sqrt{\left(\frac{1{,}4+1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2^2}} = 0{,}78.$$

В соответствии с этим:

$$\bar{p}_\text{н} - \bar{p}_\text{в} = 2\bar{\mathbf{K}}\alpha^2 = 2\cdot 0{,}78\cdot 0{,}1^2 = 0{,}0156;$$

$$c_y = 2\bar{\mathbf{K}}\alpha^2 = 2\cdot 0{,}78\cdot 0{,}1^2 = 0{,}0156;$$

$$c_x = 2\bar{\mathbf{K}}\alpha^3 = 2\cdot 0{,}78\cdot 0{,}1^3 = 0{,}00156;$$

$$-m_z = \bar{\mathbf{K}}\alpha^2 = 0{,}78\cdot 0{,}1^2 = 0{,}0078.$$

Нетрудно заметить, что аэродинамическое качество и коэффициент центра давления будут такими же, как и в случае линеаризованного обтекания.

VII.13. Определим характер течения газа на верхней и нижней сторонах профиля. Для этого вычислим угол β наклона касательной к контуру профиля:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\beta = \pm 2\frac{\Delta}{b}\left(1 - \frac{2x}{b}\right) = \pm 2\frac{2}{12}\left(1 - \frac{2x}{12}\right) = \pm\frac{1}{3}\left(1 - \frac{x}{6}\right).$$

В точке на носке профиля (см. рис. 2.VII.5)

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \operatorname{tg}\beta_0 = \pm\frac{1}{3}; \quad |\beta_0| = 18°26'\,(18{,}43°).$$

Так как угол атаки $\alpha = 20°$ больше угла $\beta_0 = 18°26'$ у острия профиля, то обтекание верхней стороны будет происходить с расширением, а нижней — со сжатием, вызванным возникновением скачка уплотнения.

Рассмотрим верхнюю сторону. В произвольной точке контура

$$\omega = \omega_\infty + (\alpha - \beta).$$

Из табл. 5.3.1 [20] по $\mathbf{M}_\infty = 5$ находим $\omega_\infty = 76°55'$ (76,92°) и определяем

$$\omega = 76{,}92° + (20° - \beta) = 96{,}92° - \beta.$$

По значениям ω для выбранных точек с различными углами наклона касательных β находим из табл. 10 [13] соответствующие числа $\mathbf{M}$, по которым определяем отношения давлений:

$$\frac{p}{p_\infty} = \left[\frac{1 + (k-1)\,\mathbf{M}_\infty^2/2}{1 + (k-1)\,\mathbf{M}^2/2}\right]^{k/(k-1)} = \left[\frac{1 + (1{,}4-1)\,5^2/2}{1 + (1{,}4-1)\,\mathbf{M}^2/2}\right]^{1{,}4/(1{,}4-1)} =$$

$$= \left(\frac{6}{1 + 0{,}2\mathbf{M}^2}\right)^{3{,}5}.$$

В табл. 3.VII.3 даны результаты расчета чисел $\mathbf{M}$, отношений p/p_∞, а также коэффициентов давления

$$\bar{p} = \frac{2}{k\mathbf{M}_\infty^2}\left(\frac{p}{p_\infty} - 1\right) = \frac{2}{1{,}4\cdot 5^2}\left(\frac{p}{p_\infty} - 1\right) = 0{,}0572\left(\frac{p}{p_\infty} - 1\right)$$

для трех точек: $O\,(x=0)$, $N\,(x=b/2=6)$ и $B\,(x=b=12)$, показанных на рис. 2.VII.5.

Таблица 3.VII.3

Точки	x	$\operatorname{tg}\beta$	β, *град*	ω, *град*	$\mathbf{M}$	p/p_∞	$\bar{p}$
O	0	0,333	18,43	78,49	5,19	0,82	$-1{,}03\cdot 10^{-2}$
N	6	0	0	96,92	8,31	0,042	$-5{,}48\cdot 10^{-2}$
B	12	−0,333	−18,43	115,35	18,87	$1{,}64\cdot 10^{-4}$	$-5{,}72\cdot 10^{-2}$

Проведем расчет обтекания нижней стороны профиля (рис. 3.VII.4). Определим параметры газа в точке O, расположенной непосредственно за косым скачком уплотнения. При этом известными параметрами являются число $\mathbf{M}_\infty = 5$ и угол отклонения потока за скачком

$$\beta_c = \alpha + |\beta_0| = 20° + 18{,}43° = 38{,}43°\,(38°26').$$

Угол наклона скачка θ_{c0} находим из уравнения

$$\operatorname{tg}\theta_{c0} = \operatorname{ctg}\beta_c\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\rho_c}{\rho_\infty} - 1\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{\rho_c}{\rho_\infty} - 1\right)^2 - \frac{\rho_c}{\rho_\infty}\operatorname{tg}^2\beta_c}\right], \quad (3.VII.13)$$

в котором отношение плотностей для условий после и до скачка

$$\frac{\rho_c}{\rho_\infty} = \frac{M_\infty^2 \sin^2 \theta_{c0}}{2/(k+1) + (k-1) M_\infty^2 \sin^2 \theta_{c0}/(k+1)}. \qquad (3.VII.14)$$

Зададимся в первом приближении предельной величиной $\rho_c/\rho_\infty = 6$ и из уравнения (3.VII.13) найдем

$$\operatorname{tg} \theta_{c0} = \operatorname{ctg} 38°26' \left[\frac{1}{2}(6-1) - \sqrt{\frac{1}{4}(6-1)^2 - 6 \operatorname{tg}^2 38°26'} \right] = 1{,}17,$$

откуда $\theta_{c0} = 49°29'$.

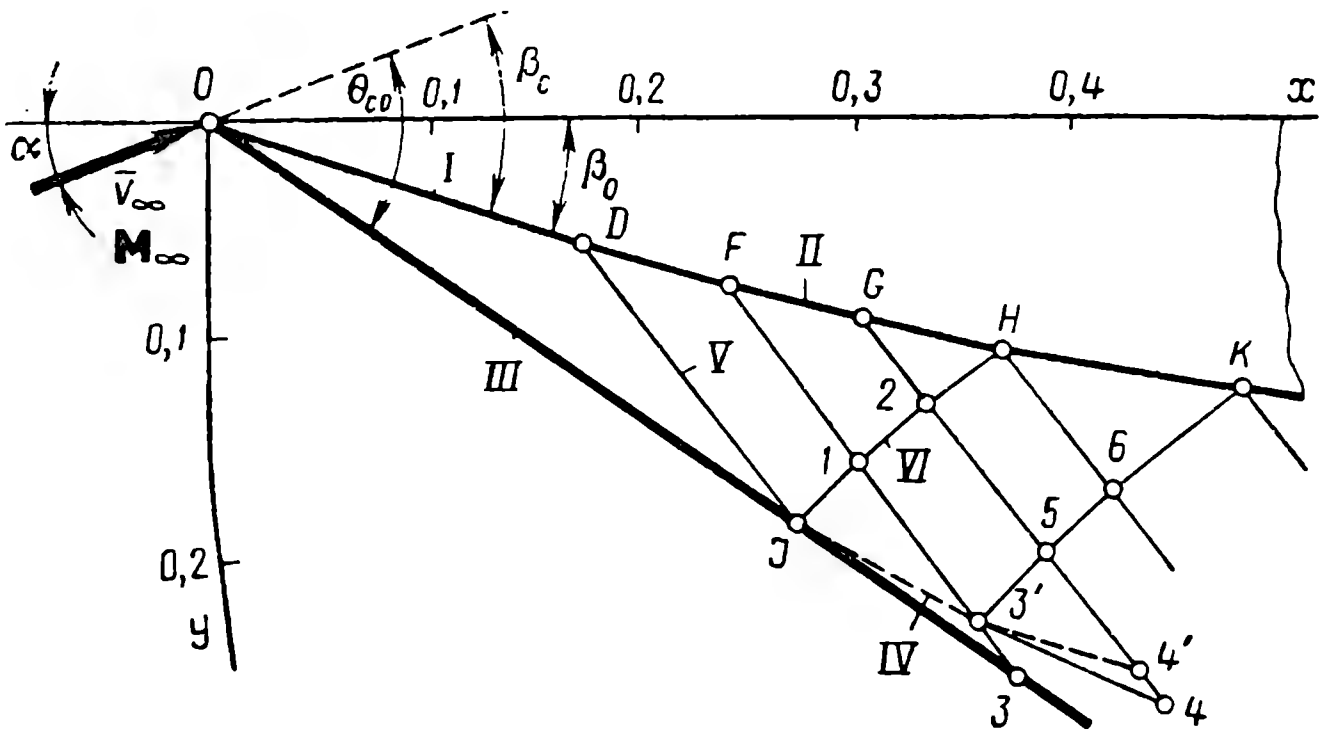


Рис. 3.VII.4. Сверхзвуковое обтекание нижней стороны профиля с образованием скачка уплотнения:

I — прямолинейный участок контура профиля; *II* — криволинейный участок контура профиля; *III* — прямолинейный участок скачка уплотнения; *IV* — криволинейный участок скачка уплотнения; *V* — элемент характеристики первого семейства; *VI* — элемент характеристики второго семейства

Действительный угол скачка будет больше найденной величины θ_{c0}, поэтому примем приближенно $\theta_{c0} = 60°$ и уточним отношение плотностей, используя (3.VII.14):

$$\frac{\rho_c}{\rho_\infty} = \frac{5^2 \sin^2 60°}{2/(1{,}4+1) + (1{,}4-1) 5^2 \sin^2 60°/(1{,}4+1)} = 4{,}74.$$

Теперь по уравнению (3.VII.13) определим во втором приближении угол скачка:

$$\operatorname{tg} \theta_{c0} = \operatorname{ctg} 38°26' \left[\frac{1}{2}(4{,}74-1) - \sqrt{\frac{1}{4}(4{,}74-1)^2 - 4{,}74 \operatorname{tg}^2 38°26'} \right] = 1{,}47,$$

откуда $\theta_{c0} = 55°46'$.

С учетом этого найдем новые значения:

$$\frac{\rho_c}{\rho_\infty} = \frac{5^2 \sin^2 55°46'}{2/(1{,}4+1) + (1{,}4-1) 5^2 \sin^2 55°46'/(1{,}4+1)} = 4{,}64;$$

$$\operatorname{tg} \theta_{c0} = \operatorname{ctg} 38°26' \left[\frac{1}{2}(4{,}64-1) - \sqrt{\frac{1}{4}(4{,}64-1)^2 - 4{,}64 \operatorname{tg}^2 38°26'} \right] = 1{,}50,$$

откуда $\theta_{c0} = 56°18'$.

На этом приближения заканчиваем. По найденным значениям ρ_c/ρ_∞ и θ_{c0} определяем число Маха $\mathbf{M}_c$ за скачком, а также отношения статических давлений p_c/p_∞ на скачке и давлений торможения p_0'/p_0 (p_0' — давление торможения за скачком уплотнения):

$$\mathbf{M}_c = \frac{[2/(k+1)]^{1/2}}{\sin(\theta_{c0}-\beta_c)\,[(\rho_c/\rho_\infty)-(k-1)/(k+1)]^{1/2}}; \qquad (3.VII.15)$$

$$\frac{p_c}{p_\infty} = \left(\frac{\rho_c}{\rho_\infty} - \frac{k-1}{k+1}\right)\Big/\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{\rho_c}{\rho_\infty}\right); \qquad (3.VII.16)$$

$$\frac{p_0'}{p_0} = \left(\frac{p_\infty}{p_c}\right)^{1/(k-1)}\left(\frac{\rho_c}{\rho_\infty}\right)^{k/(k-1)}. \qquad (3.VII.17)$$

Подставляем данные:

$$\mathbf{M}_c = \frac{[2/(1{,}4+1)]^{1/2}}{\sin(56°18'-38°26')\,[4{,}64-(1{,}4-1)/(1{,}4+1)]^{1/2}} = 1{,}41;$$

$$\frac{p_c}{p_\infty} = \left(4{,}64 - \frac{1{,}4-1}{1{,}4+1}\right)\Big/\left(1 - \frac{1{,}4-1}{1{,}4+1}\,4{,}64\right) = 19{,}7;$$

$$\frac{p_0'}{p_0} = \left(\frac{1}{19{,}7}\right)^{1/(1{,}4-1)}(4{,}64)^{1{,}4/(1{,}4-1)} = 0{,}124.$$

Коэффициент давления в точке O

$$\bar{p} = \frac{p_c - p_\infty}{\rho_\infty V_\infty^2/2} = \frac{2}{k\mathbf{M}_\infty^2}\left(\frac{p_c}{p_\infty} - 1\right) = \frac{2}{1{,}4\cdot 5^2}(19{,}7-1) = 1{,}07.$$

Будем рассматривать в окрестности точки O участки контура профиля OD и скачка OJ прямолинейными. При этом точку D выбираем из условия, чтобы в ней наклон касательной был меньше, чем в точке O на $(1/2)°$, т. е. $\beta_D=\beta_0-(1/2)°=18°26'-30'=17°56'$ (знак минус для удобства опущен). Из уравнения касательной к контуру, подставляя $\operatorname{tg}\beta_D=\operatorname{tg}17°56'=0{,}324$, находим

$$(1/3)(1 - x_D/6) = 0{,}324,$$

откуда $x_D=0{,}175$. Координата y_D определяется из уравнения контура:

$$y_D = \frac{x_D}{6}\left(2 - \frac{x_D}{6}\right) = \frac{0{,}175}{6}\left(2 - \frac{0{,}175}{6}\right) = 0{,}057.$$

В точке D число $\mathbf{M}_D=\mathbf{M}_C=1{,}41$, а угол Маха $\mu_D=\arcsin(1/\mathbf{M}_D)=\arcsin(1/1{,}41)=45°10'$ $(45{,}17°)$. Уравнение характеристики DJ первого семейства

$$y_J - y_D = \operatorname{tg}(\beta_D+\mu_D)(x_J - x_D)$$

или после подстановки

$$y_J - 0{,}057 = \operatorname{tg}(17°56'+45°10')(x_J - 0{,}175).$$

Уравнение прямолинейного участка скачка OJ

$$y_J = \operatorname{tg}(\theta_{c0}-\alpha)\,x_J = \operatorname{tg}(56°18'-20°)\,x_J.$$

Последние два уравнения запишем в виде:

$$y_J - 0{,}057 = 1{,}97(x_J - 0{,}175);$$
$$y_J = 0{,}735x_J.$$

Решая эту систему относительно x_J и y_J, находим $y_J=0{,}171$, $x_J=0{,}233$.

Рассмотрим теперь точку F (см. рис. 3.VII.4) на расстоянии $\Delta x=0{,}06$ от точки D, т. е. с координатами:

$$x_F = x_D + \Delta x = 0{,}175 + 0{,}06 = 0{,}235;$$

$$y_F = \frac{x_F}{6}\left(2 - \frac{x_F}{6}\right) = \frac{0{,}235}{6}\left(2 - \frac{0{,}235}{6}\right) = 0{,}0765.$$

Найдем наклон касательной в этой точке:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_F = \operatorname{tg}\beta_F = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{x_F}{6}\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{0{,}235}{6}\right) = 0{,}320,$$

откуда $\beta_F = 17°46'$ (17,77°).

Соответствующее число Маха определим следующим образом. По числу $\mathbf{M}_D = 1{,}41$ из табл. 5.3.1 [20] находим угол $\omega_D = 9°16'$ (9,26°). Выбрав для точки D среднее значение угла

$$(\beta_D)_{\text{ср}} = \frac{\beta_0 + \beta_D}{2} = \frac{18°26' + 17°56'}{2} = 18°11'\,(18{,}18°),$$

вычислим угол

$$\omega_F = \omega_D + [(\beta_D)_{\text{ср}} - \beta_F] = 9°16' + (18°11' - 17°46') = 9°41'\,(9{,}68°).$$

Из той же таблицы или табл. 10 [13] по значению $\omega_F = 9{,}68°$ находим $\mathbf{M}_F = 1{,}424$ и угол Маха:

$$\mu_F = \arcsin\left(1/\mathbf{M}_F\right) = \arcsin\left(1/1{,}424\right) = 44°36'\,(44{,}6°).$$

Проведем из точки F элемент характеристики первого семейства $F—1$:

$$y_1 - y_F = \operatorname{tg}\left(\beta_F + \mu_F\right)\left(x_1 - x_F\right),$$

а из точки J на скачке — элемент характеристики второго семейства $J—1$:

$$y_1 - y_J = \operatorname{tg}\left(\beta_J - \mu_j\right)\left(x_1 - x_J\right).$$

После подстановки данных $[\beta_J = (\beta_D)_{\text{ср}}]$ получим:

$$y_1 - 0{,}076 = \operatorname{tg}\left(17°46' + 44°36'\right)(x_1 - 0{,}235);$$

$$y_1 - 0{,}171 = \operatorname{tg}\left(18°11' - 45°10'\right)(x_1 - 0{,}233).$$

Решение этих уравнений дает координаты точки 1: $y_1 = 0{,}150$; $x_1 = 0{,}274$.

Вычислим изменение угла наклона линии тока при перемещении вдоль характеристики из точки 1 в точку 3, лежащую на продолжении прямолинейного скачка:

$$\Delta\beta_1 = \beta_3 - \beta_1 = \left[\left(\frac{d\omega}{d\beta}\right)_J - 1\right]^{-1}\left(\omega_1 - \omega_J + \frac{\Delta x_1}{k p'_{01}} \cdot \frac{\Delta p'_0}{\Delta n} C_1\right),$$

где

$$\left(\frac{d\omega}{d\beta}\right)_J = \left(\frac{d\mathbf{M}}{d\beta_c}\right)_J \left(\frac{d\omega}{d\mathbf{M}}\right)_J; \quad \Delta x_1 = x_3 - x_1;$$

$$\Delta p'_0 = p'_{01} - p'_{03}; \quad \Delta n = \frac{\cos\left(\beta_1 + \mu_1\right)}{\Delta x_1 \sin\mu_1};$$

$$\left(\frac{d\omega}{d\mathbf{M}}\right)_J = \sqrt{\mathbf{M}_J^2 - 1}\left[\mathbf{M}_J\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}_J^2\right]^{-1};\right.$$

$$\left(\frac{d\mathbf{M}}{d\beta_c}\right)_J = -\mathbf{M}_J\left[\operatorname{ctg}\left(\theta_{c0} - \beta_c\right)\left(\frac{d\theta_c}{d\beta_c} - 1\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{k+1}{4}\mathbf{M}_J^2 \sin^2\left(\theta_{c0} - \beta_c\right)\frac{d}{d\beta_c}\left(\frac{\rho_c}{\rho_\infty}\right)\right];$$

$$\frac{d}{d\beta_c}\left(\frac{\rho_c}{\rho_\infty}\right) = \frac{\rho_c}{\rho_\infty} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\theta_{c0}\cos^2\left(\theta_{c0} - \beta_c\right)}\left\{\frac{d\theta_{c0}}{d\beta_c}\left[\frac{\cos^2\left(\theta_{c0} - \beta_c\right)}{\cos^2\theta_{c0}} - \frac{\rho_c}{\rho_\infty}\right] + \frac{\rho_c}{\rho_\infty}\right\};$$

$$\frac{d\theta_{c0}}{d\beta_c} = \frac{\rho_c}{\rho_\infty}\left[2\cos^2\left(\theta_{c0} - \beta_c\right)\left(1 - \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{\rho_c}{\rho_\infty}\right) - \frac{\cos^2\left(\theta_{c0} - \beta_c\right)}{\cos^2\theta_{c0}} + \frac{\rho_c}{\rho_\infty}\right]^{-1}.$$

Производим вычисления:

$$\frac{d\theta_{c0}}{d\beta_c} = 4{,}64\left[2\cos^2(56°18' - 38°26')\left(1 - \frac{1{,}4-1}{1{,}4+1}\,4{,}64\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos^2(56°18' - 38°26')}{\cos^2 56°18'} + 4{,}64\right]^{-1} = 2{,}20;$$

$$\frac{d}{d\beta_c}\left(\frac{\rho_c}{\rho_\infty}\right) = 4{,}64\,\frac{1}{\operatorname{tg} 56°18'\cos^2(56°18' - 38°26')} \times$$

$$\times\left\{2{,}20\left[\frac{\cos^2(56°18' - 38°26')}{\cos^2 56°18'} - 4{,}64\right] + 4{,}64\right\} = 3{,}11;$$

$$\left(\frac{dM}{d\beta_c}\right)_J = -1{,}41\left[\operatorname{ctg}(56°18' - 38°26')(2{,}20 - 1) + \right.$$

$$\left. + \frac{1{,}4+1}{4}\,1{,}41^2\sin^2(56°18' - 38°26')\,3{,}11\right] = -5{,}74;$$

$$\left(\frac{d\omega}{dM}\right)_J = \sqrt{1{,}41^2 - 1}\left[1{,}41\left(1 + \frac{1{,}4-1}{2}\,1{,}41^2\right)\right]^{-1} = 0{,}505;$$

$$\left(\frac{d\omega}{d\beta}\right)_J = -5{,}74 \cdot 0{,}505 = -2{,}9.$$

Угол $\omega_1 = \omega_F = 9°41'$ (9,68°), а значение $\omega_J = \omega_D = 9°16'$ (9,26°). Кроме того, очевидно, $\mu_1 = \mu_F = 44°36'$ и $\beta_1 = \beta_F = 17°46'$.

Координату x_3 точки 3 найдем в результате решения системы уравнений:

$$y_3 - y_1 = \operatorname{tg}(\beta_1 + \mu_1)(x_3 - x_1);$$

$$y_3 = \operatorname{tg}(\theta_{c0} - \alpha)\,x_3,$$

которая после подстановки данных примет вид:

$$y_3 - 0{,}150 = \operatorname{tg}(17°46' + 44°36')(x_3 - 0{,}274);$$

$$y_3 = \operatorname{tg}(56°18' - 20°)\,x_3.$$

Решение этой системы дает $x_3 = 0{,}317$; $y_3 = 0{,}232$.

Для нахождения величины $\Delta p_0' = p_{03}' - p_{01}'$ надо знать p_{03}' с учетом искривления скачка. Примем в первом приближении, что отклонение потока в этой точке уменьшилось на величину $\Delta\beta_D = (\beta_D)_{ср} - \beta_F = 18°11' - 17°46' = 0°25'$, т. е. стало равным $\beta_c' = \beta_c - \Delta\beta_D = 38°26' - 0°25' = 38°01'$. По этому значению β_c' и числу M_∞ уточним угол θ_c, полагая величину ρ_c/ρ_∞ прежней и равной 4,64. По уравнению (3.VII.13),

$$\operatorname{tg}\theta_c = \operatorname{ctg} 38°01'\left[\frac{1}{2}(4{,}64 - 1) - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{1}{4}(4{,}64 - 1)^2 - 4{,}64\operatorname{tg}^2 38°01'}\right] = 1{,}45,$$

откуда $\theta_c = 55°24'$.

По этому значению θ_c уточним отношение плотностей:

$$\frac{\rho_c}{\rho_\infty} = \frac{5^2\sin^2 55°24'}{2/(1{,}4+1) + (1{,}4-1)\,5^2\sin^2 55°24'/(1{,}4+1)} = 4{,}63,$$

а затем угол скачка:

$$\operatorname{tg}\theta_c = \operatorname{ctg} 38°01'\left[\frac{1}{2}(4{,}63 - 1) - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{1}{4}(4{,}63 - 1)^2 - 4{,}63\operatorname{tg}^2 38°01'}\right] = 1{,}46,$$

откуда $\theta_c = 55°36'$.

По величине $\theta_c = 55°36'$ находим отношение давлений [см. (3.VII.16)]:

$$\frac{p_c}{p_\infty} = \left(4{,}63 - \frac{1{,}4-1}{1{,}4+1}\right)\Big|\left(1 - \frac{1{,}4-1}{1{,}4+1}4{,}63\right) = 19{,}6$$

и отношение давлений торможения [см. (3.VII.17)]:

$$\frac{p'_{03}}{p_0} = \left(\frac{1}{19{,}6}\right)^{1/(1{,}4-1)} (4{,}63)^{1{,}4/(1{,}4-1]} = 0{,}126.$$

Далее определяем:

$$\frac{\Delta p'_0}{p'_{01}} = \frac{p'_{03}/p_0 - p'_{01}/p_0}{p'_{01}/p_0}, \qquad (3.VII.18)$$

где величина $p'_{01}/p_0 = 0{,}124$ найдена ранее. Находим

$$\Delta p'_0/p'_{01} = (0{,}126 - 0{,}124)/0{,}124 = 0{,}0161.$$

Затем определяем:

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta n} = \frac{\cos(\beta_1 + \mu_1)}{\sin \mu_1} = \frac{\cos(17°46' + 44°36')}{\sin 44°36'} = 0{,}660;$$

$$C_1 = \frac{\sin^2 \mu_1 \cos \mu_1}{\cos(\beta_1 + \mu_1)} = \frac{\sin^2 44°36' \cos 44°36'}{\cos(17°46' + 44°36')} = 0{,}757.$$

Теперь вычисляем:

$$\Delta\beta_1 = \beta_3 - \beta_1 = (-2{,}9 - 1)^{-1}\left(0{,}169 - 0{,}162 + \frac{0{,}660}{1{,}4}0{,}0161 \cdot 0{,}757\right) =$$

$$= -0{,}0037\, рад; \quad \Delta\beta_1 = -0°13'$$

и находим угол отклонения потока за скачком в новой точке $3'$:

$$\beta'_c = \alpha + \beta_1 + \Delta\beta_1 = 20° + 17°46' - 0°13' = 37°33'.$$

Определим соответствующее число Маха. Для этого подсчитываем:

$$\Delta\omega_1 = \omega_1 + \left(\frac{d\omega}{d\beta_c}\right)_1 \Delta\beta_1 - \omega_1 = 9°16' + (-2{,}9)(-0°13') - 9°41' = 0°10';$$

$$\omega_{3'} = \Delta\omega_1 + \omega_1 = 0°10' + 9°41' = 9°51'.$$

Из табл. 10 [13] по углу $\omega_{3'} = 9°51'$ находим $\mathbf{M}_{3'} = 1{,}43$.

Уточним угол наклона скачка, используя формулу (3.VII.15) в виде

$$\mathbf{M}^2_{3'} \sin^2(\theta_c - \beta'_c) = \left(\frac{2}{k+1}\right)\left(\frac{\rho_c}{\rho_\infty} - \frac{k-1}{k+1}\right)^{-1}$$

и принимая $\rho_c/\rho_\infty = 4{,}63$. После подстановки получаем

$$1{,}43^2 \cdot \sin^2(\theta_c - 37°33') = \frac{2}{1{,}4+1}\left(4{,}63 - \frac{1{,}4-1}{1{,}4+1}\right)^{-1},$$

откуда $\theta_c = 55°09'$.

Найдем координаты точки $3'$ из уравнений:

$$y_{3'} - y_1 = \operatorname{tg}(\beta_{3'} + \mu_{3'})(x_{3'} - x_1);$$

$$y_{3'} - y_J = \operatorname{tg}(\theta_c - \alpha)(x_{3'} - x_J),$$

где

$$\beta_{3'} = \beta_1 + \Delta\beta_1 = 17°46' - 0°13' = 17°33';$$

$$\mu_{3'} = \arcsin(1/\mathbf{M}_{3'}) = \arcsin(1/1{,}43) = 44°22'.$$

После подстановки данных получаем:

$$y_{3'} - 0{,}150 = \operatorname{tg}(17°33' + 44°22')(x_{3'} - 0{,}274);$$

$$y_{3'} - 0{,}171 = \operatorname{tg}(55^\circ 09' - 20^\circ)(x_{3'} - 0{,}233).$$

Решение этих уравнений дает $y_{3'}=0{,}229$, $x_{3'}=0{,}316$.

Теперь выберем точку G на контуре вблизи точки F так, чтобы $x_G=x_F+\Delta x=0{,}235+0{,}06=0{,}295$. Другая координата этой точки

$$y_G = \frac{x_G}{6}\left(2-\frac{x_G}{6}\right) = \frac{0{,}295}{6}\left(2-\frac{0{,}295}{6}\right) = 0{,}096.$$

Наклон касательной здесь

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_G = \operatorname{tg}\beta_G = \frac{1}{3}\left(1-\frac{x_G}{6}\right) = \frac{1}{3}\left(1-\frac{0{,}295}{6}\right) = 0{,}317,$$

откуда $\beta_G=17°36'$.

Определяем

$$\omega_G = \omega_F + (\beta_F - \beta_G) = 9^\circ 41' + 17^\circ 46' - 17^\circ 36' = 9^\circ 51'.$$

Из табл. 10 [13] находим $\mathbf{M}_G=1{,}43$ и угол

$$\mu_G = \arcsin\left(1/\mathbf{M}_G\right) = \arcsin(1/1{,}43) = 44^\circ 22'.$$

Теперь проведем из точки G элемент характеристики первого семейства G—2:

$$y_2 - y_G = \operatorname{tg}(\beta_G + \mu_G)(x_2 - x_G)$$

или

$$y_2 - 0{,}096 = \operatorname{tg}(17^\circ 36' + 44^\circ 22')(x_2 - 0{,}295). \qquad (3.VII.19)$$

Из точки *1* проведем элемент характеристики второго семейства

$$y_2 - y_1 = \operatorname{tg}(\beta_1 - \mu_1)(x_2 - x_1)$$

или

$$y_2 - 0{,}150 = \operatorname{tg}(17^\circ 46' - 44^\circ 36')(x_2 - 0{,}274). \qquad (3.VII.20)$$

Решение уравнений (3.VII.19) и (3.VII.20) дает координаты точки *2*: $x_2=0{,}313$; $y_2=0{,}130$.

Теперь из точки *2* проведем элемент характеристики первого семейства *2*—*5*:

$$y_5 - y_2 = \operatorname{tg}(\beta_2 + \mu_2)(x_5 - x_2),$$

а из точки $3'$ — элемент характеристики второго семейства $3'$—*5*:

$$y_5 - y_{3'} = \operatorname{tg}(\beta_{3'} - \mu_{3'})(x_5 - x_{3'}).$$

После подстановки данных найдем:

$$y_5 - 0{,}130 = \operatorname{tg}(17^\circ 36' + 44^\circ 22')(x_5 - 0{,}313);$$

$$y_5 - 0{,}229 = \operatorname{tg}(17^\circ 33' - 44^\circ 22')(x_5 - 0{,}316).$$

Решение этой системы дает: $y_5=0{,}208$; $x_5=0{,}355$.

Найдем далее изменение направления потока при переходе от точки *2* к точке *5*:

$$\Delta\beta_2 = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{kp'_{02}}\cdot\frac{\Delta p'_0}{\Delta n}\left(\Delta x_{3'} t_{3'} + \Delta x_2 C_2\right) - (\omega_2 - \omega_{3'}) - (\beta_2 - \beta_{3'})\right].$$

Производим вычисления:

$$f = (x_5 - x_2)\sin\mu_{3'}\cos(\beta_2 + \mu_2) =$$

$$= (0{,}355 - 0{,}313)\sin 44^\circ 22'\cos(17^\circ 36' + 44^\circ 22') = 0{,}0138;$$

$$e = (x_5 - x_{3'}) \sin \mu_2 \cos (\beta_{3'} - \mu_{3'}) =$$

$$= (0{,}355 - 0{,}316) \sin 44^\circ 22' \cos (17^\circ 33' - 44^\circ 22') = 0{,}0243;$$

$$\frac{1}{kp'_{02}} \cdot \frac{\Delta p'_0}{\Delta n} = \frac{(p'_{05} - p'_{02}) \cos (\beta_2 + \mu_2) \cos (\beta_{3'} - \mu_{3'})}{kp'_{02}(f + e)} =$$

$$= \frac{(p'_{03}/p_0 - p'_{01}/p_0) \cos (\beta_2 + \mu_2) \cos (\beta_{3'} - \mu_{3'})}{k (p'_{01}/p_0)(f + e)} =$$

$$= \frac{0{,}0161 \cdot \cos (17^\circ 36' + 44^\circ 22') \cos (17^\circ 33' - 44^\circ 22')}{1{,}4 (0{,}0138 + 0{,}0243)} = 0{,}127$$

[здесь величина $(p'_{03}/p_0 - p'_{01}/p_0)/(p'_{01}/p_0)$, вычисляемая по формуле (3.VII.18), была определена ранее и равнялась 0,0161];

$$\Delta x_{3'} = x_5 - x_{3'} = 0{,}355 - 0{,}316 = 0{,}039;$$

$$\Delta x_2 = x_5 - x_2 = 0{,}355 - 0{,}313 = 0{,}042;$$

$$t_{3'} = \frac{\sin^2 \mu_{3'} \cos \mu_{3'}}{\cos (\beta_{3'} - \mu_{3'})} = \frac{\sin^2 44^\circ 22' \cdot \cos 44^\circ 22'}{\cos (17^\circ 33' - 44^\circ 22')} = 0{,}390;$$

$$C_2 = \frac{\sin^2 \mu_2 \cdot \cos \mu_2}{\cos (\beta_2 + \mu_2)} = \frac{\sin^2 44^\circ 22' \cdot \cos 44^\circ 22'}{\cos (17^\circ 36' + 44^\circ 22')} = 0{,}740.$$

В соответствии с этими результатами

$$\Delta\beta_2 = \frac{1}{2} [-0{,}127 (0{,}039 \cdot 0{,}390 + 0{,}042 \cdot 0{,}740) - (9^\circ 51' - 9^\circ 51') -$$

$$- (17^\circ 36' - 17^\circ 33')] = \frac{1}{2} [-0{,}127 (0{,}039 \cdot 0{,}390 + 0{,}042 \cdot 0{,}740) -$$

$$- (0{,}307 - 0{,}306)] = -0{,}00335 \text{ } рад (-0^\circ 12').$$

Таким образом, в точке *5*

$$\beta_5 = \beta_2 + \Delta\beta_2 = 17^\circ 36' - 0^\circ 12' = 17^\circ 24'.$$

Приращение угла ω

$$\Delta\omega_2 = \Delta\beta_2 + \frac{\Delta x_2}{kp'_{02}} \cdot \frac{\Delta p'_{01}}{\Delta n} C_2 = -0{,}00335 + 0{,}042 \cdot 0{,}127 \cdot 0{,}740 =$$

$$= 0{,}0006 \text{ } рад (0^\circ 02').$$

В соответствии с этим

$$\omega_5 = \omega_2 + \Delta\omega_2 = 9^\circ 51' + 0^\circ 02' = 9^\circ 53'.$$

Из табл. 10 [13] находим $\mathbf{M}_5 = 1{,}431$ и $\mu_5 = \arcsin (1/\mathbf{M}_5) = \arcsin (1/1{,}431) = 44^\circ 20'$.

Теперь из точки *2* проведем элемент характеристики второго семейства до пересечения со стенкой в точке *H*:

$$y_H - y_2 = \operatorname{tg} (\beta_2 - \mu_2)(x_H - x_2)$$

или

$$y_H - 0{,}130 = \operatorname{tg} (17^\circ 36' - 44^\circ 22')(x_H - 0{,}313). \qquad (3.VII.21)$$

Согласно уравнению контура

$$y_H = (x_H/6)(2 - x_H/6).$$

Решая это уравнение и (3.VII.21), находим: $y_H=0{,}112$; $x_H=0{,}350$.

Вычислим угол наклона касательной в точке H:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_H = \operatorname{tg}\beta_H = \frac{1}{3}\left(1-\frac{x_H}{6}\right) = \frac{1}{3}\left(1-\frac{0{,}350}{6}\right) = 0{,}314,$$

откуда $\beta_H=17°26'$.

Соответствующий угол

$$\omega_H = \omega_G + (\beta_G - \beta_H) = 9°\,51' + 17°\,36' - 17°\,26' = 10°\,01'.$$

Из табл. 10 [13] находим по этой величине ω_H число $\mathbf{M}_H=1{,}436$ и угол Маха $\mu_H=43°58'$.

В точке H и во всем пространстве перед нею, ограниченном характеристикой JH, течение безвихревое. Однако ниже по течению сказывается влияние искривленного скачка, что проявляется в изменении энтропии. Это влияние следует учитывать при расчете параметров потока и выборе соответствующих зависимостей метода характеристик. Такой расчет ведется следующим образом. Из точек *5* и H проводим характеристики разных семейств до пересечения в точке *6*, координаты которой определяются из решения уравнений:

$$y_6 - y_H = \operatorname{tg}(\beta_H + \mu_H)(x_6 - x_H);$$
$$y_6 - y_5 = \operatorname{tg}(\beta_6 - \mu_6)(x_6 - x_5)$$

или

$$y_6 - 0{,}112 = \operatorname{tg}(17°\,26' + 43°\,58')(x_6 - 0{,}350);$$
$$y_6 - 0{,}208 = \operatorname{tg}(17°\,26' - 43°\,58')(x_6 - 0{,}355).$$

Решение этих уравнений дает: $y_6=0{,}191$; $x_6=0{,}393$.

Изменение угла β в точке *6* будет следующим:

$$\Delta\beta_H = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{kp'_{0H}}\cdot\frac{\Delta p'_0}{\Delta n}(\Delta x_5 t_5 + \Delta x_H C_H) - (\omega_H - \omega_5) - (\beta_H - \beta_5)\right].$$

Производим вычисления:

$$f = (x_6 - x_H)\sin\mu_5\cos(\beta_н + \mu_H) = (0{,}393 - 0{,}350)\sin 44°\,20' \times$$
$$\times \cos(17°\,26' + 43°\,58') = 0{,}0144;$$

$$e = (x_6 - x_5)\sin\mu_H\cos(\beta_5 - \mu_5) = (0{,}393 - 0{,}355) \times$$
$$\times \sin 43°\,58'\cos(17°\,24' - 44°\,20') = 0{,}0235;$$

$$\frac{1}{kp'_{0H}}\cdot\frac{\Delta p'_0}{\Delta n} = \frac{(p'_{06} - p'_{0H})\cos(\beta_H + \mu_H)\cos(\beta_5 - \mu_5)}{kp'_{0H}(f+e)} =$$

$$= \frac{0{,}0161\cdot\cos(17°\,26' + 43°\,58')\cos(17°\,24' - 44°\,20')}{1{,}4\,(0{,}0144 + 0{,}0235)} = 0{,}129;$$

$$\Delta x_5 = x_6 - x_5 = 0{,}393 - 0{,}355 = 0{,}038;$$

$$\Delta x_H = x_6 - x_H = 0{,}393 - 0{,}350 = 0{,}043;$$

$$t_5 = \frac{\sin^2\mu_5\cdot\cos\mu_5}{\cos(\beta_5 - \mu_5)} = \frac{\sin^2 44°\,20'\cdot\cos 44°\,20'}{\cos(17°\,24' - 44°\,20')} = 0{,}392;$$

$$C_H = \frac{\sin^2\mu_H\cdot\cos\mu_H}{\cos(\beta_H + \mu_H)} = \frac{\sin^2 43°\,58'\cdot\cos 43°\,58'}{\cos(17°\,26' + 43°\,58')} = 0{,}725.$$

В соответствии с этими данными

$$\Delta\beta_H = \frac{1}{2}[-0{,}129\,(0{,}038\cdot 0{,}392 + 0{,}043\cdot 0{,}725) - (10^\circ 01' - 9^\circ 53') -$$

$$-(17^\circ 26' - 17^\circ 24')] = \frac{1}{2}[-0{,}129\,(0{,}038\cdot 0{,}392 + 0{,}043\cdot 0{,}725) -$$

$$-0{,}0023 - 0{,}0006] = -0{,}0044 \text{ } рад\ (-0^\circ 15').$$

Таким образом, для точки *6* угол

$$\beta_6 = \beta_H + \Delta\beta_H = 17^\circ 26' - 0^\circ 15' = 17^\circ 11',$$

а приращение угла ω

$$\Delta\omega_H = \Delta\beta_H + \frac{\Delta x_6}{kp'_{0H}} \cdot \frac{\Delta p'_0}{\Delta n} C_H = -0{,}0044 +$$

$$+ 0{,}043\cdot 0{,}129\cdot 0{,}725 = -0{,}0004 \text{ } рад\ (-0^\circ 01').$$

В соответствии с этим

$$\omega_6 = \omega_H + \Delta\omega_H = 10^\circ 01' - 0^\circ 01' = 10^\circ.$$

Из табл. 10 [13] находим по $\omega_6 = 10^\circ$ величину $\mathbf{M}_6 = 1{,}44$ и угол Маха $\mu_6 = 44^\circ 10'$.

Теперь из точки *6* проведем элемент характеристики второго семейства до пересечения в точке **K** с контуром (отрезок *6K* на рис. 3.VII.4). Координаты этой точки определяются из уравнений характеристики

$$y_K - 0{,}191 = \operatorname{tg}(17^\circ 11' - 44^\circ 10')\,(x_K - 0{,}393)$$

и контура профиля

$$y_K = (x_K/6)\,(2 - x_K/6).$$

В результате решений этих уравнений находим: $y_K = 0{,}151$; $x_K = 0{,}475$.

Для определения числа $\mathbf{M}_K$ в точке *K* воспользуемся уравнением

$$\Delta\omega_6 = \Delta\beta_6 + \frac{\Delta x_6}{kp'_{0K}} \cdot \frac{\Delta p'_0}{\Delta n} t_6.$$

Производим вычисления:

$$\frac{1}{kp'_{0K}} \cdot \frac{\Delta p'_0}{\Delta n} = \frac{(p'_{06} - p'_{0K})\cos(\beta_6 - \mu_6)}{kp'_{0K}(x_K - x_6)\sin\mu_6} =$$

$$= \frac{0{,}0161\cos(17^\circ 11' - 44^\circ 10)}{1{,}4\,(0{,}475 - 0{,}393)\sin 44^\circ 10'} = 0{,}254;$$

$$\Delta x_6 = x_K - x_6 = 0{,}475 - 0{,}393 = 0{,}082;$$

$$t_6 = \frac{\sin^2\mu_6\cos\mu_6}{\cos(\beta_6 - \mu_6)} = \frac{\sin^2 44^\circ 10'\cos 44^\circ 10'}{\cos(17^\circ 11' - 44^\circ 10')} = 0{,}389.$$

После подстановки находим

$$\Delta\omega_6 = -0{,}0044 + 0{,}082\cdot 0{,}254\cdot 0{,}389 = 0{,}0121 \text{ } рад\ (0^\circ 42').$$

Соответствующий угол

$$\omega_K = \omega_6 + \Delta\omega_6 = 10^\circ + 0^\circ 42' = 10^\circ 42'.$$

По этому значению ω_K из табл. 10 [13] находим $\mathbf{M}_K = 1{,}46$ и $\mu_K = 43^\circ 16'$.

Аналогично проводятся расчеты для остальной области потока, в результате которых определяется распределение чисел Маха по обтекаемому контуру и строится ударная волна в виде ломаной линии.

Затем по формуле

$$\frac{p}{p_\infty} = \frac{p_0'}{p_0}\left[\frac{1+(k-1)\,M_\infty^2/2}{1+(k-1)\,M^2/2}\right]^{k/(k-1)}, \qquad (3.VII.22)$$

в которой величина p_0'/p_0 была определена ранее, подсчитываем величину этого отношения:

$$\frac{p}{p_\infty} = 0{,}124\left[\frac{1+(1{,}4-1)\,5^2/2}{1+(1{,}4-1)\,M^2/2}\right]^{1{,}4/(1{,}4-1)} = 0{,}124\left(\frac{6}{1+0{,}2\,M^2}\right)^{3{,}5}.$$

Соответствующий коэффициент давления

$$\bar{p} = \frac{2}{k\,M_\infty^2}\left(\frac{p}{p_\infty}-1\right) = \frac{2}{1{,}4\cdot 5^2}\left(\frac{p}{p_\infty}-1\right) = 0{,}0572\left(\frac{p}{p_\infty}-1\right).$$

Результаты расчета представлены в табл. 3.VII.4.

Таблица 3.VII.4

Точки / Параметры	O	D	F	G	H	K
x	0	0,175	0,235	0,295	0,350	0,475
$\operatorname{tg}\beta$	0,333	0,324	0,320	0,317	0,314	0,307
M	1,41	1,41	1,42	1,43	1,44	1,46
p/p_∞	19,98	19,98	19,72	19,54	19,41	18,79
$\bar{p}$	1,086	1,086	1,071	1,060	1,053	1,018

VII.14. Для выбора метода расчета рассмотрим общий характер обтекания профиля. С этой целью определим течение за скачком уплотнения, возникающим перед клином.

Находим угол наклона скачка из уравнения (3.VII.13), полагая отношение плотностей предельной величиной $\rho_c/\rho_\infty = 6$:

$$\operatorname{tg}\theta_{c0} = \operatorname{ctg}15^\circ\left[\frac{1}{2}(6-1) - \sqrt{\frac{1}{4}(6-1)^2 - 6\operatorname{tg}^2 15^\circ}\right] = 0{,}336,$$

откуда $\theta_{c0} = 18^\circ 35'$.

В реальном случае угол скачка будет больше этой величины, поэтому в первом приближении зададимся величиной $\theta_{c0} = 24^\circ$ и найдем отношение плотностей, воспользовавшись (3.VII.14):

$$\frac{\rho_c}{\rho_\infty} = \frac{5^2\sin^2 24^\circ}{2/(1{,}4+1) + (1{,}4-1)\,5^2\sin^2 24^\circ/(1{,}4+1)} = 2{,}72.$$

Затем по уравнению (3.VII.13) уточним угол наклона скачка:

$$\operatorname{tg}\theta_{c0} = \operatorname{ctg}15^\circ\left[\frac{1}{2}(2{,}72-1) - \sqrt{\frac{1}{4}(2{,}72-1)^2 - 2{,}72\operatorname{tg}^2 15^\circ}\right] = 0{,}458,$$

откуда $\theta_{c0} = 24^\circ 35'$.

Проведем еще одно приближение:

$$\frac{\rho_c}{\rho_\infty} = \frac{5^2\sin^2 24^\circ 35'}{2/(1{,}4+1) + (1{,}4-1)\,5^2\sin^2 24^\circ 35'/(1{,}4+1)} = 2{,}78;$$

$$\operatorname{tg}\theta_{c0} = \operatorname{ctg}15^\circ\left[\frac{1}{2}(2{,}78-1) - \sqrt{\frac{1}{4}(2{,}78-1)^2 - 2{,}78\operatorname{tg}^2 15^\circ}\right] = 0{,}448,$$

откуда $\theta_{c0} = 24^\circ 10'$.

Полученное значение угла наклона скачка принимаем за окончательное и определяем соответствующее отношение плотностей:

$$\frac{\rho_c}{\rho_\infty} = \frac{5^2 \sin^2 24^\circ\ 10'}{2/(1{,}4+1) + (1{,}4-1)\,5^2 \sin^2 24^\circ\ 10'/(1{,}4+1)} = 2{,}74.$$

Число Маха за скачком согласно (3.VII.15)

$$M_c = \frac{[2/(1{,}4+1)]^{1/2}}{\sin(24^\circ\ 10' - 15^\circ)\,[2{,}74 - (1{,}4-1)/(1{,}4+1)]^{1/2}} = 3{,}57$$

и соответствующий угол Маха

$$\mu_c = \arcsin(1/M_c) = \arcsin(1/3{,}57) = 16^\circ\ 15'.$$

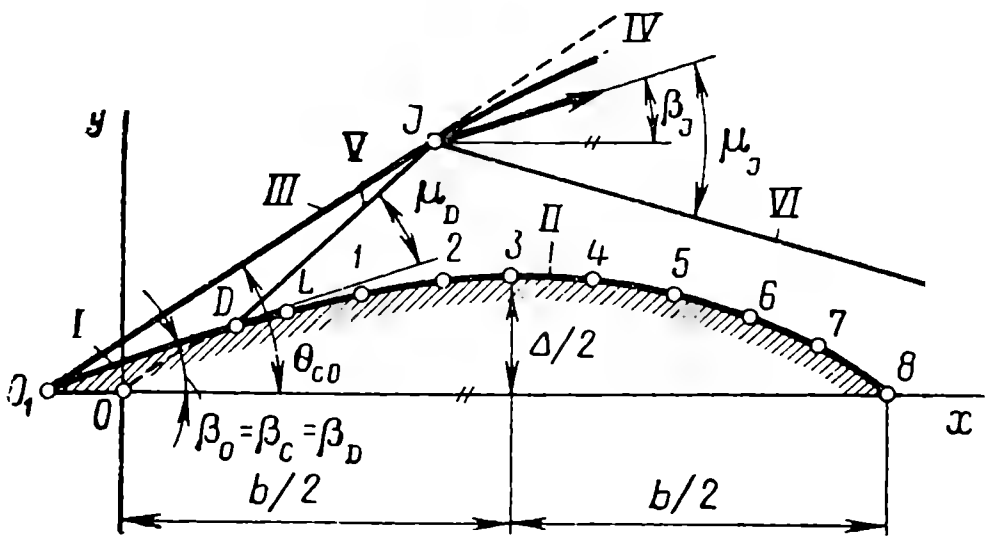


Рис. 3.VII.5. Сверхзвуковое обтекание заостренного профиля:

I — прямолинейный участок контура профиля; *II* — криволинейный участок контура профиля; *III* — прямолинейный участок скачка уплотнения; *IV* — криволинейный участок скачка уплотнения; *V* — линия Маха; *VI* — отраженная волна разрежения

Найдем координаты точки D, где наклон касательной к оси $\beta_D = \beta_0 = \beta_c = 15^\circ$ (рис. 3.VII.5):

$$\operatorname{tg}\beta_D = \left(\frac{dy}{dx}\right)_D = 2\frac{\Delta}{b}\left(1 - \frac{2x_D}{b}\right)$$

или после подстановки

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{2\cdot 2}{10}\left(1 - \frac{2x_D}{10}\right),$$

откуда $x_D = 1{,}65$ (эта координата отсчитывается от точки O; см. рис. 3.VII.5).

Другая координата

$$y_D = 2\Delta\frac{x_D}{b}\left(1 - \frac{x_D}{b}\right) = 2\cdot 2\frac{1{,}65}{10}\left(1 - \frac{1{,}65}{10}\right) = 0{,}55.$$

Координата x'_D точки D, отсчитываемая от точки O_1 (от носка профиля), определяется следующим образом:

$$x'_D = y_D/\operatorname{tg}\beta_0 = 0{,}55/\operatorname{tg} 15^\circ = 2{,}05.$$

Выбирая начало координат в точке O, получим для точки O_1 координату $x_{01} = x_D - x'_D = -0{,}40$.

Проведем из точки D характеристику первого семейства DJ до пересечения в точке J со скачком:

$$y_D - y_J = \operatorname{tg}(\beta_D + \mu_D)(x_D - x_J)$$

или

$$0{,}55 - y_J = \operatorname{tg}(15^\circ + 16^\circ\ 15')(1{,}65 - x_J).$$

Решая это уравнение совместно с уравнением линии скачка

$$y_J = \operatorname{tg}\theta_{c0}\, x_J = \operatorname{tg} 24^\circ\ 10'\, x_J = 0{,}449 x_J,$$

найдем координаты конца прямолинейного участка скачка: $y_J = 1{,}28$; $x_J = 2{,}85$.

Проведем из точки J характеристику второго семейства:

$$y - y_J = \operatorname{tg}(\beta_J - \mu_J)(x - x_J).$$

Так как здесь $\mu_J = \mu_D$ и $\beta_J = \beta_D$, то

$$y - 1{,}28 = \operatorname{tg}(15^\circ - 16^\circ 15')(x - 2{,}85)$$

или

$$y = 1{,}342 - 0{,}0218x.$$

На расстоянии $x = b/2 = 5$ координата точки характеристики $y = 1{,}233$, а в конце профиля, где $x = b = 10$, эта координата $y = 1{,}124$. Таким образом, характеристика, представляющая собой линию возмущения, отраженную от скачка, не пересекает профиль. Следовательно, криволинейный скачок, образующийся за точкой J, и возникающий в этой области вихревой поток не будут влиять на обтекание профиля. В соответствии с этим течение вблизи профиля можно рассматривать изэнтропическим и для расчета этого течения применять уравнения характеристик в виде

$$\omega_L = \omega_D + (\beta_D - \beta_L),$$

где L — произвольная точка на контуре (см. рис. 3.VII.5). Пусть координата этой точки $x_L = 2$. Найдем угол наклона касательной в этой точке:

$$\operatorname{tg}\beta_L = \left(\frac{dy}{dx}\right)_L = 2\frac{\Delta}{b}\left(1 - \frac{x_L}{b}\right) = 2\frac{2}{10}\left(1 - \frac{2}{10}\right) = 0{,}24,$$

откуда $\beta_L = 13^\circ 30'$.

Из табл. 5.3.1.[20] по $\mathbf{M}_D = \mathbf{M}_c = 3{,}57$ находим $\omega_D = 59^\circ 36'$ и определяем

$$\omega_L = 59^\circ 36' + (15^\circ - 13^\circ 30') = 61^\circ 06'.$$

Из той же таблицы или табл.10 [13] по $\omega_L = 61^\circ 06'$ определим $\mathbf{M}_L = 3{,}67$ и угол Маха $\mu_L = \arcsin(1/\mathbf{M}_L) = \arcsin(1/3{,}67) = 15^\circ 48'$. Давление в рассматриваемой точке L вычислим при помощи формулы (3.VII.22), в которой $p = p_L$, (p_0'/p_0) определим по (3.VII.17), а отношение давлений (p_c/p_∞) — по (3.VII.16).

Производим вычисления, принимая $\rho_c/\rho_\infty = 2{,}74$:

$$\frac{p_c}{p_\infty} = \frac{2{,}74 - (1{,}4 - 1)/(1{,}4 + 1)}{1 - [(1{,}4 - 1)/(1{,}4 + 1)]\,2{,}74} = 4{,}74;$$

$$\frac{p_0}{p_0} = (4{,}74)^{-1/(1{,}4-1)}\,(2{,}74)^{1{,}4/(1{,}4-1)} = 0{,}682;$$

$$\frac{p_L}{p_\infty} = 0{,}682\left[\frac{1 + (1{,}4 - 1)\,5^2/2}{1 + (1{,}4 - 1)\,3{,}67^2/2}\right]^{1{,}4/(1{,}4-1)} = 4{,}70.$$

Соответствующий коэффициент давления

$$\bar{p}_L = \frac{2}{k\mathbf{M}_\infty^2}\left(\frac{p_L}{p_\infty} - 1\right) = \frac{2}{1{,}4 \cdot 5^2}(4{,}70 - 1) = 0{,}211.$$

Аналогично производим расчет чисел $\mathbf{M}$ и давлений в других точках контура, задаваясь их координатами. Результаты этого расчета представлены в табл. 3.VII.5.

Рассмотрим контур скачка за прямолинейным участком O_1J (рис. 3.VII.6). Форма этого контура определяется углами его наклона θ_c в точках l, I, II,..., расположенных на характеристиках, проведенных соответственно из точек L, 1, 2,... на профиле. Покажем, как находится угол наклона скачка в точке $l(\theta_{cl})$. Его величина определяется по углу

Таблица 3.VII.5

Точки \ Параметры	x	y	tg β	β, *град*	ω, *град*	M	μ, *град*	p/p_∞	$\bar{p}$
O_1	—0,40	0	0,268	15°	59°36′	3,57	16°15′	4,74	0,242
D	1,65	0,55	0,268	15°	59°36′	3,57	16°15′	4,74	0,242
L	2	0,64	0,24	13°30′	61°06′	3,67	15°48′	4,70	0,211
1	3	0,84	0,16	9°06′	65°30′	3,99	14°32′	3,55	0,145
2	4	0,96	0,08	4°34′	70°02′	4,35	13°18′	2,23	0,0703
3	5	1,0	0	0°	74°36′	4,76	12°10′	1,34	0,0194
4	6	0,96	—0,08	— 4°34′	79°10′	5,26	10°58′	0,735	—0,0151
5	7	0,84	—0,16	— 9°06′	83°42′	5,82	9°53′	0,398	—0,0343
6	8	0,64	—0,24	—13°30′	88°06′	6,49	8°52′	0,204	—0,0456
7	9	0,36	—0,32	—18°40′	93°16′	7,46	7°42′	0,0837	—0,0522
8	10	0	—0,40	—21°50′	96°26′	8,20	7°00′	0,0457	—0,0543

β_l отклонения потока в этой точке, равному β_L (вдоль прямолинейной характеристики Ll угол наклона вектора скорости одинаков). Таким образом, $\beta_l=\beta_L=13°30'$. По этому углу и числу $M_\infty=5$ из графика на

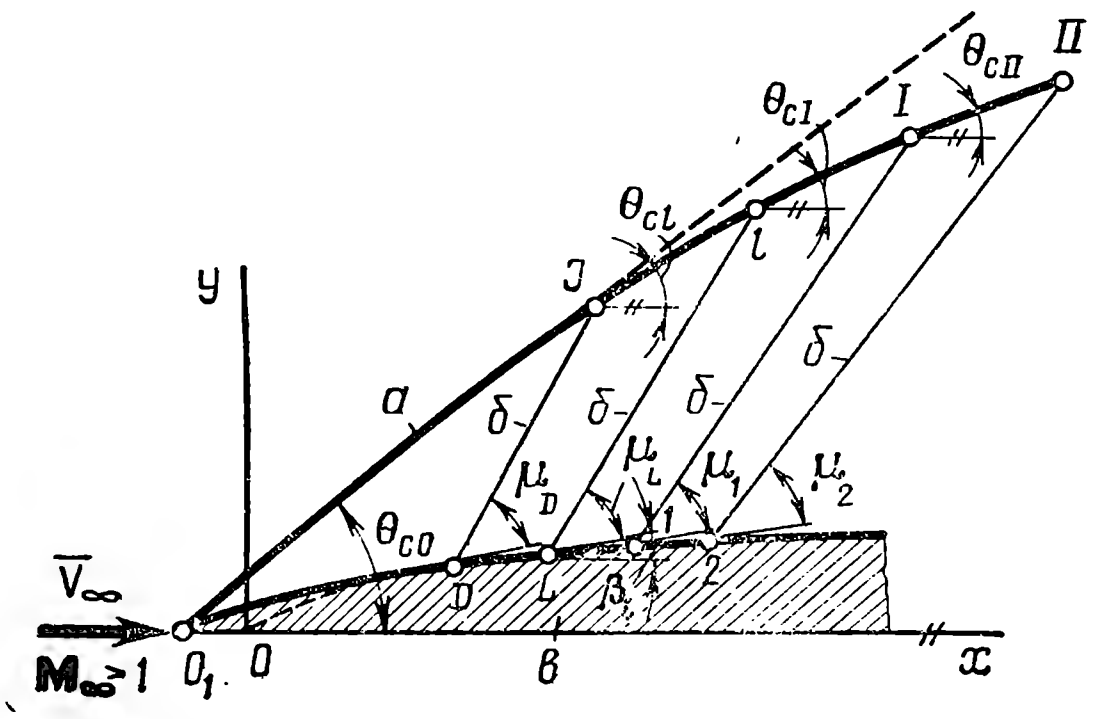


Рис. 3.VII.6. Построение контура скачка за прямолинейным участком O_1D профиля:

а — прямолинейный участок скачка уплотнения; *б* — линии Маха; *в* — профиль

рис. 4.3.1. [20] примем в качестве первого приближения $\theta_{cl}=23°$ и по уравнению (3.VII.14) найдем отношение плотностей:

$$\frac{\rho_c}{p_\infty}=\frac{5^2\sin^2 23°}{2/(1{,}4+1)+(1{,}4-1)\,5^2\sin^2 23°/(1{,}4+1)}=2{,}60.$$

Затем по формуле (3.VII.13) уточним угол наклона скачка:

$$\operatorname{tg}\theta_{cl}=\operatorname{ctg}13°30'\left[\frac{1}{2}(2{,}60-1)-\sqrt{\frac{1}{4}(2{,}60-1)^2-2{,}60\operatorname{tg}^2 13°30'}\right]=$$
$$=0{,}411,$$

откуда $\theta_{cl}=22°20'$.

По этому углу θ_{cl} находим новое отношение плотностей:

$$\frac{\rho_c}{\rho_\infty}=\frac{5^2\sin^2 22°20'}{2/(1{,}4+1)+(1{,}4-1)\,5^2\sin^2 22°20'/(1{,}4+1)}=2{,}50$$

и уточняем угол наклона скачка:

$$\operatorname{tg}\theta_{cl}=\operatorname{ctg}13°30'\left[\frac{1}{2}(2{,}50-1)-\right.$$

$$- \sqrt{\frac{1}{4}(2{,}50-1)^2 - 2{,}50\,\mathrm{tg}^2\,13^\circ 30'}\Big] = 0{,}418,$$

откуда $\theta_{cI}=22^\circ 22'$.

Под этим углом из точки J на скачке проводим элемент скачка Jl. Аналогично определяются другие точки (I, II, ...) и соответствующие углы наклона (θ_{cI}, θ_{cII}, ...).

VII.15. Определим общий характер обтекания, с тем чтобы решить вопрос о выборе возможного метода расчета. Рассмотрим течение у

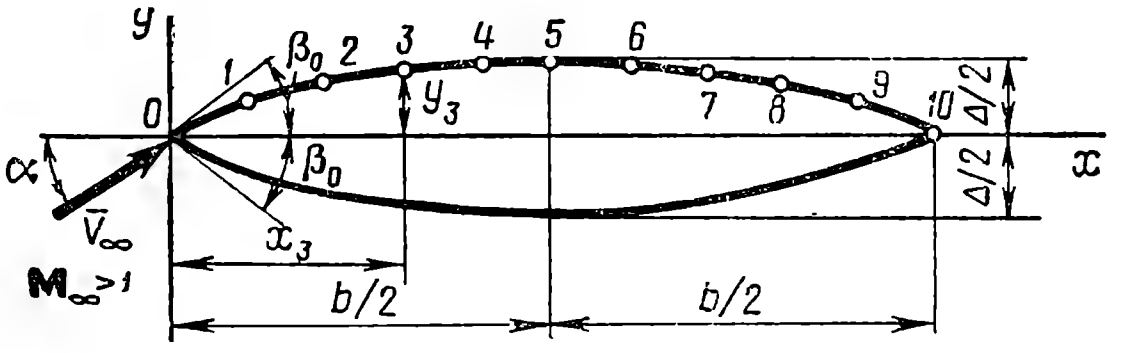


Рис. 3.VII.7. Симметричный криволинейный профиль, обтекаемый сверхзвуковым потоком под углом атаки α

точки O передней кромки (рис. 3.VII.7). Это течение определяется углом наклона касательной у острия:

$$\mathrm{tg}\,\beta_0 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \pm 2\frac{\Delta}{b}\left(1-\frac{2x}{b}\right)_{x=0} = \pm\frac{2\cdot 1}{20} = \pm 0{,}1,$$

откуда $\beta_0=\pm 0{,}1$ *рад*.

Рассматривая нижнюю сторону, найдем для точки O (при $\mathbf{M}_\infty=3$ и $\mathbf{M}_\infty=20$) соответствующие параметры:

$$\mathbf{K} = \mathbf{M}_\infty(\alpha-\beta_0) = 3\,[0{,}1-(-0{,}1)] = 0{,}6;$$

$$\mathbf{K} = 20\,[0{,}1-(-0{,}1)] = 4.$$

Согласно полученным значениям параметра $\mathbf{K}$ первый случай ($\mathbf{K}<1$) соответствует линеаризованному течению, а второй ($\mathbf{K}>1$) — маловозмущенному обтеканию с гиперзвуковой скоростью.

Гиперзвуковое обтекание ($\mathbf{M}_\infty=20$). Так как $\alpha=\beta_0$, то на верхней стороне расчет числа $\mathbf{M}$ ведем по формуле

$$\mathbf{M} = \left[\frac{1}{\mathbf{M}_\infty} - \frac{k-1}{2}(\alpha-\beta)\right]^{-1} = \left[\frac{1}{20} - \frac{1{,}4-1}{2}(0{,}1-\beta)\right]^{-1} =$$

$$= [0{,}05 - 0{,}2\,(0{,}1-\beta)]^{-1}.$$

В точке O передней кромки, где $\beta=\beta_0=\alpha=0{,}1$ *рад*, число Маха такое же, как и в набегающем потоке. В соседней точке с координатой $x_1=2$, где угол

$$\beta_1 \approx \mathrm{tg}\,\beta_1 = \frac{2\Delta}{b}\left(1-\frac{2x_1}{b}\right) = \frac{2\cdot 1}{20}\left(1-\frac{2\cdot 2}{20}\right) = 0{,}08,$$

число Маха

$$\mathbf{M}_1 = [0{,}05 - 0{,}2\,(0{,}1-0{,}08)]^{-1} = 21{,}7.$$

Аналогично проводим расчет этого числа для других точек на верхней стороне профиля. Коэффициенты давления в этих точках

$$\bar{p} = (\alpha-\beta)^2\left[\frac{k+1}{2} - \sqrt{\left(\frac{k+1}{2}\right)^2 + \frac{4}{\mathbf{K}^2}}\right].$$

Подставляя значения $k=1{,}4$, $\alpha=0{,}1$ и учитывая, что $\mathbf{K}=\mathbf{M}_\infty(\alpha-\beta)=20\,(0{,}1-\beta)$, найдем

$$\bar{p} = \frac{6}{5}(0{,}1-\beta)\left[(0{,}1-\beta) - \frac{1}{20}\sqrt{\mathbf{K}^2 - \frac{25}{9}}\right].$$

В частности, в точке $O(\beta=\beta_0=\alpha=0{,}1)$ коэффициент давления $\bar{p}_0=0$, а в соседней точке *1*, где $\beta=\beta_1=0{,}08$ и $\mathbf{K}=20\ (0{,}1-0{,}08)=0{,}4$, этот коэффициент $\bar{p}_1=-15{,}8\cdot10^{-4}$.

Рассмотрим нижнюю сторону. Коэффициент давления в произвольной точке на этой стороне

$$\bar{p}=(\alpha-\beta)^2\left[\frac{k+1}{2}+\sqrt{\left(\frac{k+1}{2}\right)^2+\frac{4}{\mathbf{K}^2}}\right]$$

или, так как $\alpha=0{,}1$, $k=1{,}4$, $\mathbf{M}_\infty=20$ и $\mathbf{K}=\mathbf{M}_\infty(\alpha-\beta)=20(0{,}1-\beta)$,

$$\bar{p}=\frac{6}{5}(0{,}1-\beta)\left[(0{,}1-\beta)+\frac{1}{20}\sqrt{\mathbf{K}^2+\frac{25}{9}}\right].$$

В точке O, где $(0{,}1-\beta_0)=[0{,}1-(0{,}1)]=0{,}2$ и $\mathbf{K}=20[0{,}1-(-0{,}1)]=4$,

$$\bar{p}_O=\frac{6\cdot0{,}2}{5}\left(0{,}2+\frac{1}{20}\sqrt{4^2+\frac{25}{9}}\right)=0{,}1,$$

а в соседней точке, где $\beta=-0{,}08$, $(0{,}1-\beta)=[0{,}1-(-0{,}08)]=0{,}18$, $\mathbf{K}=20\ [0{,}1-(-0{,}08)]=3{,}6$,

$$\bar{p}=\frac{6\cdot0{,}18}{5}\left(0{,}18+\frac{1}{20}\sqrt{3{,}6^2+\frac{25}{9}}\right)=0{,}0817.$$

В точке задней кромки, где $(0{,}1-\beta)=0$, величина $\bar{p}=0$. Аналогично определяем коэффициенты давления в остальных точках нижней стороны профиля.

Найдем распределение чисел **M**. Сначала определим число Маха в точке передней кромки, используя формулы:

$$\frac{\mathbf{M}_O^2}{\mathbf{M}_\infty^2}=\mathbf{K}_c^2\Big/\left[\left(\frac{2k}{k+1}\mathbf{K}_c^2-\frac{k-1}{k+1}\right)\left(\frac{2}{k+1}+\frac{k-1}{k+1}\mathbf{K}_c^2\right)\right];$$

$$\mathbf{K}_c=\mathbf{M}_\infty\theta_{c0}=\bar{p}_O M_\infty/[2(\alpha-\beta_0)].$$

В точке O коэффициент $\bar{p}_O=0{,}1$, разность углов $(\alpha-\beta_0)=[0{,}1-(-0{,}1)]=0{,}2$, поэтому

$$\mathbf{K}_c=0{,}1\cdot20/(2\cdot0{,}2)=5.$$

В соответствии с этим

$$\frac{\mathbf{M}_O^2}{\mathbf{M}_\infty^2}=5^2\Big/\left[\left(\frac{2\cdot1{,}4}{1{,}4+1}5^2-\frac{1{,}4-1}{1{,}4+1}\right)\left(\frac{2}{1{,}4+1}+\frac{1{,}4-1}{1{,}4+1}5^2\right)\right]=0{,}170,$$

откуда

$$\mathbf{M}_O=20\sqrt{0{,}170}=8{,}25.$$

За передней кромкой число Маха определим по уравнению характеристик:

$$\mathbf{M}=\left[\frac{1}{\mathbf{M}_O}+\frac{k-1}{2}(\beta_0-\beta)\right]^{-1}=\left[\frac{1}{8{,}25}-0{,}2(0{,}1+\beta)\right]^{-1}.$$

Например, в точке с координатой $x=2$, где $(0{,}1+\beta)=(0{,}1-0{,}08)=0{,}02$,

$$\mathbf{M}=\left(\frac{1}{8{,}25}-0{,}2\cdot0{,}02\right)^{-1}=8{,}55,$$

а в точке задней кромки, для которой $x=20$ и $(0{,}1+\beta)=(0{,}1+0{,}1)=0{,}2$,

$$\mathbf{M}=\left(\frac{1}{8{,}25}-0{,}2\cdot0{,}2\right)^{-1}=12{,}4.$$

Таблица 3.VII.6

№ точек	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Верхняя поверхность											
β	0,10	0,08	0,06	0,04	0,02	0,00	—0,02	—0,04	—0,06	—0,08	—0,10
$0,1-\beta$	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20
M	20	21,7	23,8	26,3	29,4	33,3	38,5	45,5	55,5	71,4	100
$K=20\,(0,1-\beta)$	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8	3,2	3,6	4,0
$-\bar{p}\cdot 10^4$	0	15,8	25,1	31,0	34,6	36,0	37,6	38,5	39,2	39,7	40,0
Нижняя поверхность											
β	—0,10	—0,08	—0,06	—0,04	—0,02	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10
$0,1-\beta$	0,20	0,18	0,16	0,14	0,12	0,10	0,08	0,06	0,04	0,02	0
$K=20\,(0,1-\beta)$	4	3,6	3,2	2,8	2,4	2,0	1,6	1,2	0,8	0,4	0
$\bar{p}\cdot 10^2$	10,0	8,17	6,52	5,09	3,84	2,77	1,88	1,17	0,64	0,25	0
$0,1+\beta$	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20
M	8,25	8,55	8,85	9,17	9,52	9,90	10,3	10,8	11,2	11,8	12,4

Таблица 3.VII.7

№ точек	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Верхняя поверхность											
β	0,10	0,08	0,06	0,04	0,02	0	—0,02	—0,04	—0,06	—0,08	—0,10
$0,1-\beta$	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20
$-\bar{p}$	0	0,0141	0,0284	0,0425	0,0566	0,0707	0,0850	0,0990	0,113	0,127	0,141
Нижняя поверхность											
β	—0,10	—0,08	—0,06	—0,04	—0,02	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10
$0,1-\beta$	0,20	0,18	0,16	0,14	0,12	0,10	0,08	0,06	0,04	0,02	0
$\bar{p}$	0,141	0,127	0,113	0,0990	0,0850	0,0707	0,0566	0,0425	0,0284	0,0141	0

Аналогично определяем числа Маха в остальных точках нижнего контура. Все результаты расчета параметров обтекания профиля приведены в табл. 3.VII.6.

Линеаризованное обтекание ($M_\infty=3$). На верхней стороне профиля коэффициент давления

$$\bar{p}=-\frac{2(\alpha-\beta)}{\sqrt{M_\infty^2-1}}=-\frac{2(0{,}1-\beta)}{\sqrt{3^2-1}}=-0{,}707(0{,}1-\beta).$$

В точке передней кромки, где $\beta=\beta_0=0{,}1$ *рад*, этот коэффициент $\bar{p}_0=0$. В соседней точке ($x_1=2$, $\beta=\beta_1=0{,}08$)

$$\bar{p}_1=-0{,}707(0{,}1-0{,}08)=-0{,}0141.$$

В точке задней кромки ($x_{10}=20$, $\beta=\beta_{10}=-0{,}10$)

$$\bar{p}_{10}=-0{,}707[0{,}1-(-0{,}1)]=-0{,}141.$$

Аналогично рассчитываются коэффициенты давления в остальных точках верхнего контура.

На нижней стороне

$$\bar{p}=\frac{2(\alpha-\beta)}{\sqrt{M_\infty^2-1}}=\frac{2(0{,}1-\beta)}{\sqrt{3^2-1}}=0{,}707(0{,}1-\beta).$$

В точке передней кромки ($x=0$, $\beta=\beta_0=-0{,}1$)

$$\bar{p}_0=0{,}707[0{,}1-(-0{,}1)]=0{,}141,$$

а в соседней точке, где $x=2$ и $\beta=-0{,}08$,

$$\bar{p}=0{,}707[0{,}1-(-0{,}08)]=0{,}127.$$

В точке задней кромки, для которой $x=20$ и $\beta=0{,}1$, коэффициент давления равен нулю. Для остальных точек коэффициенты давления находим аналогично. Все результаты расчета приведены в табл. 3.VII.7

VII.16. Для определения аэродинамических коэффициентов профиля заданной формы используем результаты распределения давления, полученные в решении задачи VII.15.

Запишем общие формулы для аэродинамических коэффициентов: коэффициент продольной силы

$$c_R=-\int_0^1\bar{p}_{\text{н}}\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{н}}d\bar{x}+\int_0^1\bar{p}_{\text{в}}\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{в}}d\bar{x};\qquad(3.VII.23)$$

коэффициент нормальной силы

$$c_N=\int_0^1(\bar{p}_{\text{н}}-\bar{p}_{\text{в}})\,d\bar{x}.\qquad(3.VII.24)$$

В поточной системе осей координат коэффициент волнового сопротивления (при небольшом угле атаки $\alpha=0{,}1$ *рад*)

$$c_x=c_N\alpha+c_R=0{,}1c_N+c_R,\qquad(3.VII.25)$$

а коэффициент подъемной силы

$$c_y=c_N-c_R\alpha=c_N-0{,}1c_R.\qquad(3.VII.26)$$

Расчет коэффициента момента тангажа ведем по формуле

$$-m_z=\frac{-M_z}{q_\infty b^2}=\int_0^1(\bar{p}_{\text{н}}-\bar{p}_{\text{в}})\,\bar{x}d\bar{x}+\int_0^1\left[\bar{p}_{\text{н}}\bar{y}_{\text{н}}\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{н}}-\bar{p}_{\text{в}}\bar{y}_{\text{в}}\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{в}}\right]d\bar{x},\qquad(3.VII.27)$$

где $\bar{x}=x/b$, $\bar{y}=y/b$.

Коэффициент центра давления

$$c_{\text{ц.д}} = x_{\text{ц.д}}/b = -m_z/c_N. \qquad (3.VII.28)$$

В приведенные зависимости входят производные dy/dx для верхней и нижней сторон. Находим

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{в,н}} = \pm 2\frac{\Delta}{b}\left(1 - \frac{2x}{b}\right) = \pm 2\frac{1}{20}\left(1 - \frac{2x}{20}\right) = \pm 0{,}1\,(1 - 0{,}1x)$$

или, вводя $\bar{x} = x/b$,

$$(dy/dx)_{\text{в,н}} = \pm 0{,}1\,(1 - 2\bar{x}) \approx \beta_{\text{в,н}}. \qquad (3.VII.29)$$

В относительных координатах $\bar{x}$ и $\bar{y}$ уравнение контура примет вид

$$\bar{y} = \pm 2\,\bar{\Delta}\bar{x}\,(1 - \bar{x}) = \pm 2\frac{1}{20}\,\bar{x}\,(1 - \bar{x})$$

или

$$\bar{y} = \pm 0{,}1\,\bar{x}\,(1 - \bar{x}). \qquad (3.VII.30)$$

Внесем в формулу (3.VII.23) значение $dy/dx \approx \beta$:

$$c_R = -\int_0^1 \bar{p}_{\text{н}}\beta_{\text{н}}\,d\bar{x} + \int_0^1 \bar{p}_{\text{в}}\beta_{\text{в}}\,d\bar{x}. \qquad (3.VII.23')$$

Гиперзвуковые скорости ($M_\infty = 20$). Вычисление интегралов по приведенным формулам осуществляется графически с использованием данных из табл. 3.VII.6. По этим данным рассчитываются вначале необходимые для такого интегрирования параметры (см. табл. 3.VII.8).

По данным табл. 3.VII.8 строим график функции $f_1(\bar{x})$ для разных значений $\bar{x}$ (рис. 3.VII.8) и определяем площадь под кривой этой функции:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 1750 - 120 + 27 = 1657\ \text{мм}^2.$$

Данной площади соответствует коэффициент продольной силы $c_R = S\mu_{f1}\mu_{\bar{x}} = 1657 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-2} = 0{,}00166$, где $\mu_{f1} = 10^{-4}$ 1/мм и $\mu_{\bar{x}} = 10^{-2}$ 1/мм — масштабы соответственно величин f_1 и $\bar{x}$.

Аналогично ведется расчет коэффициента c_N. По данным табл. 3.VII.8 строим график $f_2(\bar{x})$ (рис. 3.VII.9) и находим между кривой и осью $\bar{x}$ площадь $S = 3950$ мм^2. Эта площадь определяет коэффициент нормальной силы

$$c_N = S\mu_{f2}\mu_{\bar{x}} = 3950 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-2} = 0{,}0395,$$

где $\mu_{f2} = 10^{-3}$ 1/мм и $\mu_{\bar{x}} = 10^{-2}$ 1/мм — масштабы соответственно f_2 и $\bar{x}$.

В поточных осях коэффициент волнового сопротивления

$$c_x = 0{,}1 \cdot 0{,}0395 + 0{,}00166 = 0{,}00561,$$

а коэффициент подъемной силы

$$c_y = 0{,}0395 - 0{,}1 \cdot 0{,}00166 = 0{,}0393.$$

Аэродинамическое качество

$$K = c_y/c_x = 0{,}0393/0{,}00561 = 7{,}0.$$

Для определения коэффициента момента, используя значение функции $f_3(\bar{x})$ в табл. 3.VII.8, строим кривую этой функции (рис. 3.VII.10).

Таблица 3.VII.8

№ точек	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$\bar{x}=x/20$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Нижняя поверхность											
$\beta_н$	—0,10	—0,08	—0,06	—0,04	—0,02	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10
$\bar{p}_н 10^2$	10	8,17	6,52	5,09	3,84	2,77	1,88	1,17	0,64	0,25	0
$-\bar{p}_н\beta_н 10^2$	1,0	0,654	0,391	0,204	0,0768	0	—0,0376	0,0468	—0,0384	—0,0200	0
$\bar{y}_н=y_н/20$	0	—0,009	—0,016	—0,021	—0,024	—0,025	—0,024	—0,021	—0,016	—0,009	0
$\bar{p}_н\beta_н\bar{y}_н 10^2$	0	0,0058	0,0062	0,0042	0,0018	0	—0,00091	0,00099	0,00061	0,00018	0
Верхняя поверхность											
$\beta_в$	0,1	0,08	0,06	0,04	0,02	0	—0,02	—0,04	—0,06	—0,08	—0,10
$\bar{p}_в\cdot 10^4$	0	—15,8	—25,1	—31,0	—34,6	—36,0	—37,6	—38,5	—39,2	—39,7	—40,0
$\bar{p}_в\beta_в 10^4$	0	—1,26	—1,51	—1,24	—0,69	0	0,75	1,54	2,35	3,17	4,0
$\bar{y}_в=y_в/20$	0	0,009	0,016	0,021	0,024	0,025	0,024	0,021	0,016	0,009	0
$\bar{p}_в\beta_в\bar{y}_в 10^4$	0	—0,011	—0,024	—0,026	—0,016	0	0,018	0,032	0,037	0,029	0
Функция $f_1=-\bar{p}_н\beta_н+\bar{p}_в\beta_в$											
$f_1 10^3$	10	6,41	3,76	1,92	0,699	0	—0,301	—0,314	—0,149	0,117	0,400
Функция $f_2=\bar{p}_н-\bar{p}_в$											
f_2	0,100	0,083	0,068	0,054	0,042	0,031	0,023	0,016	0,010	0,006	0,004
Функция $f_3=(\bar{p}_н-\bar{p}_в)\bar{x}+\bar{p}_н\beta_н\bar{y}_н-\bar{p}_в\beta_в\bar{y}_в$											
$(\bar{p}_н-\bar{p}_в)\bar{x}$	0	0,0083	0,0136	0,0162	0,0168	0,0155	0,0138	0,0112	0,0080	0,0054	0,0040
$(\bar{p}_н\beta_н\bar{y}_н-\bar{p}_в\beta_в\bar{y}_в)10^3$	0	0,0590	0,0640	0,0450	0,0200	0	—0,0109	—0,0131	—0,0098	—0,0047	0
f_3	0	0,00836	0,01370	0,01620	0,01680	0,01550	0,01379	0,01119	0,00799	0,00540	0,00400

Площадь под кривой, равная $S = 11\,100\ мм^2$, определяет коэффициент момента

$$-m_z = S\mu_{f3}\mu_{\bar{x}} = 11100 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-2} = 0{,}0111,$$

где $\mu_{f3} = 10^{-4}\ 1/мм$; $\mu_{\bar{x}} = 10^{-2}\ 1/мм$ — масштабы соответственно величин f_3 и $\bar{x}$.

По найденным значениям m_z и c_N находим коэффициент давления:

$$c_{ц.д} = x_{ц.д}/b = -m_z/c_N = 0{,}0111/0{,}0395 = 0{,}281.$$

Линеаризованное обтекание ($M_\infty = 3$). Коэффициент давления на верхней стороне профиля

$$\bar{p}_в = -\frac{2(\alpha - \beta_в)}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3^2 - 1}}[0{,}1 - 0{,}1(1 - 2\bar{x})] = -0{,}141\bar{x},$$

а на нижней

$$\bar{p}_н = \frac{2(\alpha - \beta_н)}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} = \frac{2}{\sqrt{3^2 - 1}} \times$$

$$\times [0{,}1 + 0{,}1(1 - 2\bar{x})] =$$

$$= 0{,}141(1 - \bar{x}).$$

Внося эти выражения, а также значения $\beta_{в,н}$, $\bar{y}_{в,н}$ [см. (3.VII.29), (3.VII.30)] в формулы (3.VII.23′), (3.VII.24), (3.VII.27), получим:

$$c_R = -\int_0^1 0{,}141(1 - \bar{x})[-0{,}1(1 - 2\bar{x})]\,d\bar{x} + \int_0^1 (-0{,}141\bar{x}) \times$$

$$\times [0{,}1(1 - 2\bar{x})]\,d\bar{x} = -0{,}0047;$$

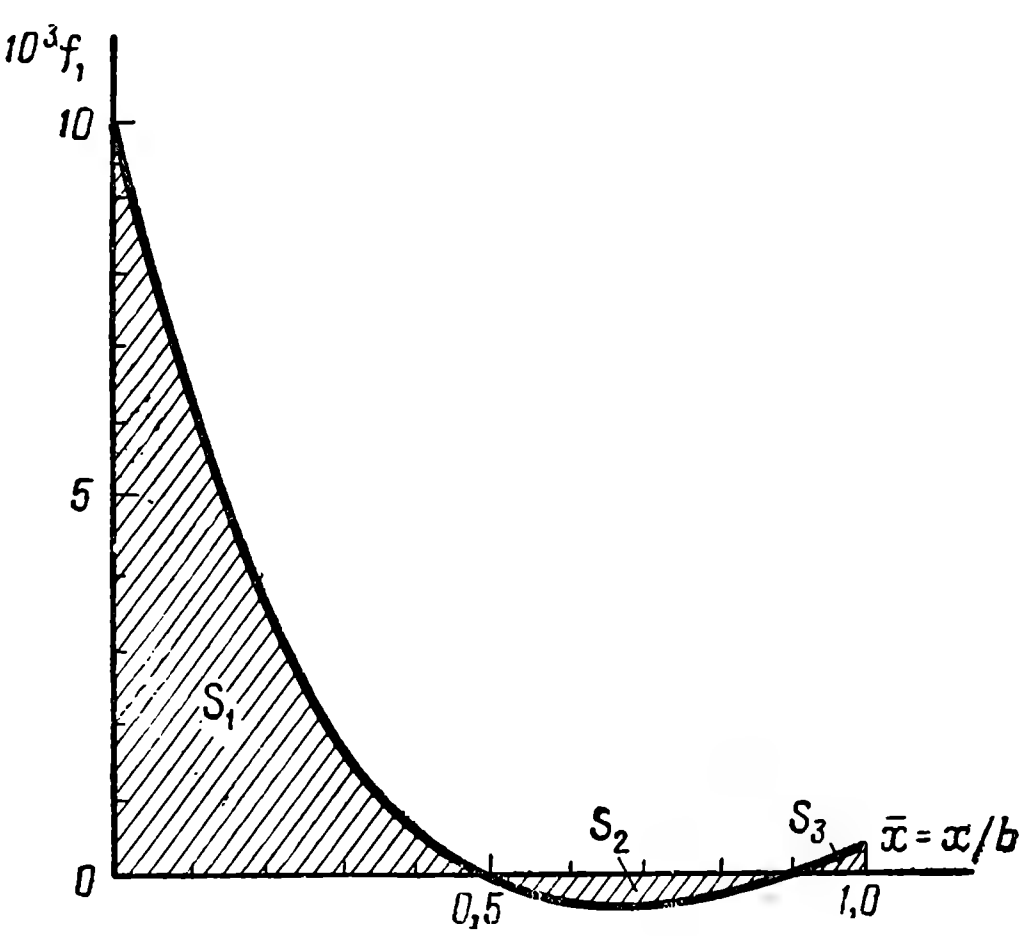


Рис. 3.VII.8. График функции $f_1(\bar{x})$

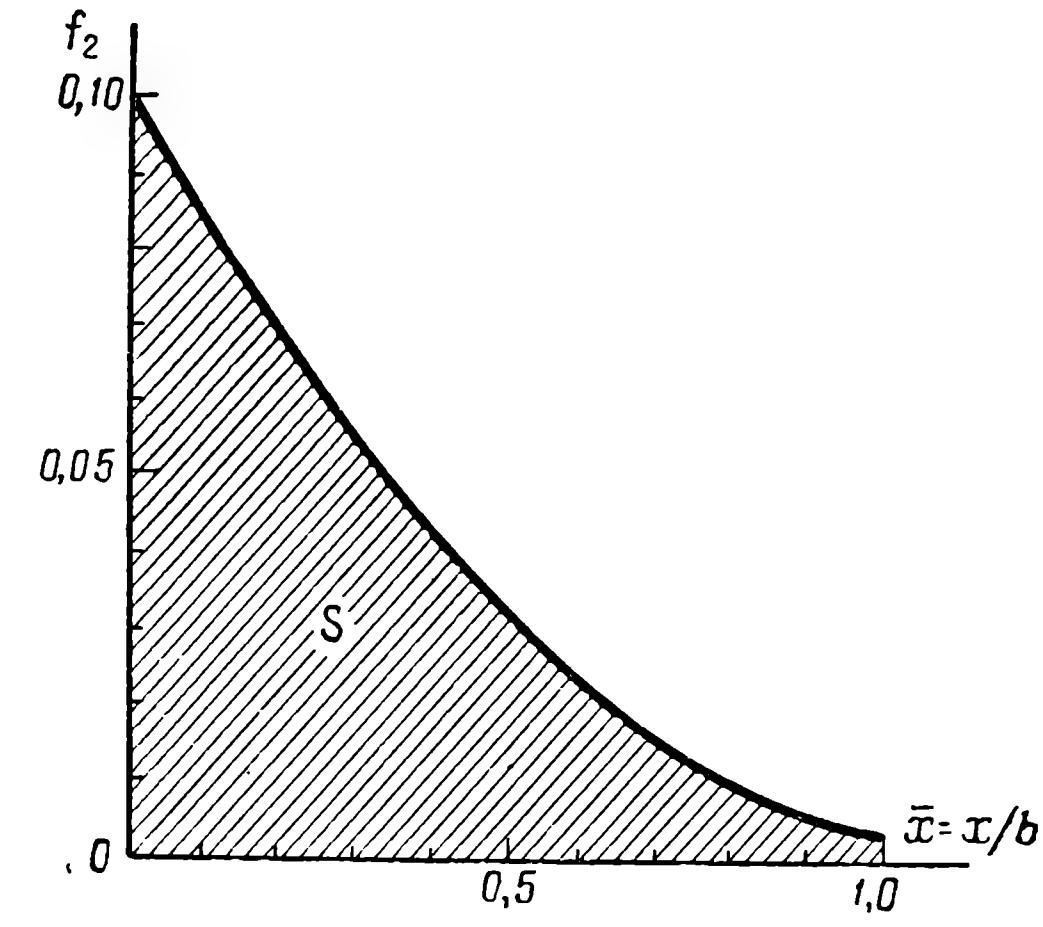


Рис. 3.VII.9. График функции $f_2(\bar{x})$

$$c_N = \int_0^1 [0{,}141(1 - \bar{x}) - (-0{,}141\bar{x})]\,d\bar{x} = 0{,}141;$$

$$-m_z = \int_0^1 [0{,}141(1 - \bar{x}) - (-0{,}141\bar{x})]\,\bar{x}d\bar{x} + \int_0^1 \{0{,}141(1 - \bar{x})[-0{,}1\bar{x}(1 - \bar{x})] \times$$

$$\times [-0{,}1(1 - 2\bar{x})] - (-0{,}141\bar{x})[0{,}1\bar{x}(1 - \bar{x})]\,0{,}1(1 - 2\bar{x})\}\,d\bar{x} = 0{,}0705.$$

Коэффициент c_N профиля оказался таким же, как для пластинки под углом атаки α:

$$c_N = 4\alpha/\sqrt{\mathbf{M}_\infty^2 - 1} = 4 \cdot 0{,}1/\sqrt{3^2 - 1} = 0{,}141.$$

Величина коэффициента момента для пластинки под тем же углом атаки

$$m_z = -c_N/2 = -0{,}0705$$

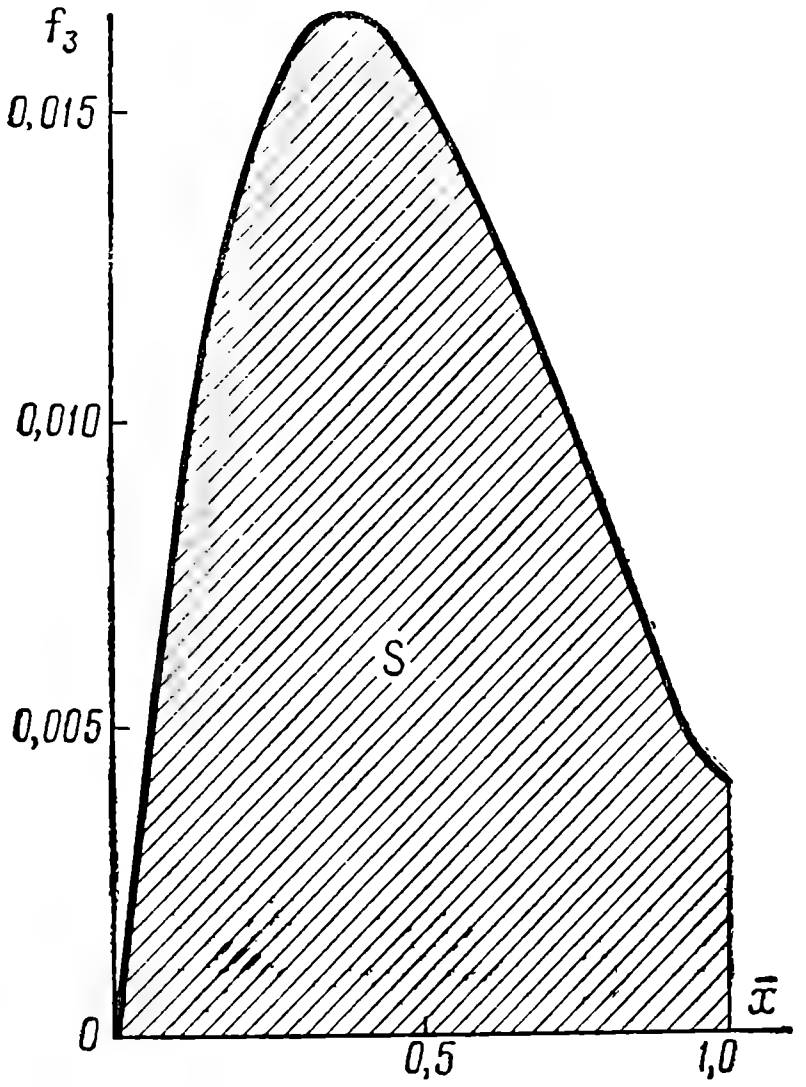


Рис. 3.VII.10. График функции $f_3(\bar{x})$

также совпадает с полученным значением для тонкого профиля. Учитывая, что для пластинки шириной b координата центра давления $x_{\text{д.ц}} = b/2$, коэффициент $c_{\text{ц.д}} = x_{\text{ц.д}}/b = -m_z/c_N = 1/2$. Такой же результат получим для тонкого профиля при линеаризованном обтекании.

VII.17. Для выбора метода расчета произведем оценку режимов течения около профиля указанных формы и размеров. Из рис. 2.VII.7 видно, что $\beta_{\text{в,н}} = \pm\Delta/b = \pm 0{,}1$.

Параметры подобия, рассчитанные по углу $\beta_{\text{в,н}}$, будут следующими: для числа $\mathbf{M}_\infty = 3$ значение $\mathbf{K} = \mathbf{M}_\infty|\beta_{\text{в,н}}| = 3 \cdot 0{,}1 = 0{,}3$; для числа $\mathbf{M}_\infty = 20$ значение $\mathbf{K} = \mathbf{M}_\infty|\beta_{\text{в,н}}| = 20 \cdot 0{,}1 = 2$.

В соответствии с этими значениями $\mathbf{K}$ принимаем, что в первом случае течение будет линеаризованным ($\mathbf{K} < 1$), а во втором — маловозмущенным сверхзвуковым ($\mathbf{K} > 1$). Определение аэродинамических коэффициентов рассмотрим для каждого случая отдельно.

Гиперзвуковое течение. Коэффициент давления на передней площадке верхней стороны [20]

$$\bar{p}_{\text{в}}^{\text{п}} = (\alpha - \beta_{\text{в}}^{\text{п}})^2 \left[\frac{k+1}{2} + \sqrt{\left(\frac{k+1}{2}\right)^2 + \frac{4}{\mathbf{K}^2}} \right]$$

или, так как $\mathbf{K}^2 = \mathbf{M}_\infty^2 (\alpha - \beta_{\text{в}}^{\text{п}})^2$,

$$\bar{p}_{\text{в}}^{\text{п}} = (\alpha - \beta_{\text{в}}^{\text{п}}) \left[(\alpha - \beta_{\text{в}}^{\text{п}}) \left(\frac{k+1}{2}\right) + \frac{2}{\mathbf{M}_\infty} \sqrt{\frac{\mathbf{K}^2}{4} \left(\frac{k+1}{2}\right)^2 + 1} \right].$$

Учитывая, что $(k+1)/2 = 1{,}2$; $\mathbf{M}_\infty = 20$; $|\alpha - \beta_{\text{в}}^{\text{п}}| = |0{,}05 - 0{,}1| = 0{,}05$; $\mathbf{K} = \mathbf{M}_\infty|\alpha - \beta_{\text{в}}^{\text{п}}| = 20 \cdot 0{,}05 = 1$, найдем

$$\bar{p}_{\text{в}}^{\text{п}} = 0{,}05 \left(0{,}05 \cdot 1{,}2 + \frac{2}{20} \sqrt{\frac{1}{4} 1{,}2^2 + 1} \right) = 0{,}00650.$$

На задней площадке [20]

$$\bar{p}_{\text{в}}^{\text{з}} = (\alpha - \beta_{\text{в}}^{\text{з}}) \left[(\alpha - \beta_{\text{в}}^{\text{з}}) \left(\frac{k+1}{2}\right) - \frac{2}{\mathbf{M}_\infty} \sqrt{\frac{\mathbf{K}^2}{4} \left(\frac{k+1}{2}\right)^2 + 1} \right]$$

или, учитывая, что $\alpha - \beta_{\text{в}}^{\text{з}} = 0{,}05 - (-0{,}1) = 0{,}15$ и $\mathbf{K} = \mathbf{M}_\infty(\alpha - \beta_{\text{в}}^{\text{з}}) = 20 \times \times 0{,}15 = 3$,

$$\bar{p}_{\text{в}}^{\text{з}} = 0{,}15 \left(0{,}15 \cdot 1{,}2 - \frac{2}{20} \sqrt{\frac{3^2}{4} 1{,}2^2 + 1} \right) = -0{,}00384.$$

Аналогично проводится расчет для двух площадок по нижней стороне. На передней площадке

$$\bar{p}_{\text{н}}^{\text{п}} = (\alpha - \beta_{\text{н}}^{\text{п}}) \left[(\alpha - \beta_{\text{н}}^{\text{п}}) \left(\frac{k+1}{2} \right) + \frac{2}{M_\infty} \sqrt{\frac{K^2}{4} \left(\frac{k+1}{2} \right)^2 + 1} \right]$$

или, поскольку $(\alpha - \beta_{\text{н}}^{\text{п}}) = 0{,}05 - (-0{,}1) = 0{,}15$ и $K = M_\infty (\alpha - \beta_{\text{н}}^{\text{п}}) = 20 \cdot 0{,}15 = 3$,

$$\bar{p}_{\text{н}}^{\text{п}} = 0{,}15 \left(0{,}15 \cdot 1{,}2 + \frac{2}{20} \sqrt{\frac{3^2}{4} 1{,}2^2 + 1} \right) = 0{,}0578.$$

На задней площадке, где $\alpha < \beta_{\text{н}}^{\text{з}}$, возникает течение разрежения, и коэффициент давления

$$\bar{p}_{\text{н}}^{\text{з}} = (\alpha - \beta_{\text{н}}^{\text{з}}) \left[(\alpha - \beta_{\text{н}}^{\text{з}}) \left(\frac{k+1}{2} \right) - \frac{2}{M_\infty} \sqrt{\frac{K^2}{4} \left(\frac{k+1}{2} \right)^2 + 1} \right].$$

Так как $|\alpha - \beta_{\text{н}}^{\text{з}}| = |0{,}05 - 0{,}1| = 0{,}05$ и $K = M_\infty |\alpha - \beta_{\text{н}}^{\text{з}}| = 20 \cdot 0{,}05 = 1$, то

$$\bar{p}_{\text{н}}^{\text{з}} = 0{,}05 \left(0{,}05 \cdot 1{,}2 - \frac{2}{20} \sqrt{\frac{1}{4} 1{,}2^2 + 1} \right) = -0{,}00283.$$

Определим теперь аэродинамические коэффициенты продольной и нормальной сил. Для ромбовидного профиля:

$$c_R = -\bar{p}_{\text{н}} \left(\frac{dy}{dx} \right)_{\text{н}} + \bar{p}_{\text{в}} \left(\frac{dy}{dx} \right)_{\text{в}} = -\bar{p}_{\text{н}}^{\text{п}} \beta_{\text{н}}^{\text{п}} - \bar{p}_{\text{н}}^{\text{з}} \beta_{\text{н}}^{\text{з}} + \bar{p}_{\text{в}}^{\text{п}} \beta_{\text{в}}^{\text{п}} + \bar{p}_{\text{в}}^{\text{з}} \beta_{\text{в}}^{\text{з}} =$$

$$= -0{,}0578\,(-0{,}1) - (-0{,}00283)\,0{,}1 + 0{,}00650 \cdot 0{,}1 +$$

$$+ (-0{,}00384)\,(-0{,}1) = 0{,}00710;$$

$$c_N = \bar{p}_{\text{н}}^{\text{п}} + \bar{p}_{\text{н}}^{\text{з}} - \bar{p}_{\text{в}}^{\text{п}} - \bar{p}_{\text{в}}^{\text{з}} = 0{,}0578 + (-0{,}00283) -$$

$$- 0{,}00650 - (-0{,}00384) = 0{,}0523.$$

Соответствующие коэффициенты сопротивления и подъемной силы (в поточных осях):

$$c_x = c_R + c_N \alpha = 0{,}00710 + 0{,}0523 \cdot 0{,}05 = 0{,}00972;$$

$$c_y = c_N - c_R \alpha = 0{,}0523 - 0{,}00710 \cdot 0{,}05 = 0{,}0521.$$

Коэффициент момента тангажа будет определяться из выражения

$$-m_z = \frac{-M_z}{q_\infty b^2} = \int_0^{1/2} (\bar{p}_{\text{н}}^{\text{п}} - \bar{p}_{\text{в}}^{\text{п}})\, \bar{x} d\bar{x} + \int_{1/2}^{1} (\bar{p}_{\text{н}}^{\text{з}} - \bar{p}_{\text{в}}^{\text{з}})\, \bar{x} d\bar{x} +$$

$$+ \int_0^{1/2} (\bar{p}_{\text{н}}^{\text{п}} \beta_{\text{н}}^{\text{п}} \bar{x} \beta_{\text{н}}^{\text{п}} - \bar{p}_{\text{в}}^{\text{п}} \beta_{\text{в}}^{\text{п}} \bar{x} \beta_{\text{в}}^{\text{п}})\, d\bar{x} +$$

$$+ \int_{1/2}^{1} \{\bar{p}_{\text{н}}^{\text{з}} \beta_{\text{н}}^{\text{з}} [-(1 - \bar{x})]\, \beta_{\text{н}}^{\text{з}} - \bar{p}_{\text{в}}^{\text{з}} \beta_{\text{в}}^{\text{з}} [-(1 - \bar{x})]\, \beta_{\text{в}}^{\text{з}}\}\, d\bar{x}.$$

После подстановки и интегрирования получаем

$$-m_z = (0{,}0578 - 0{,}00650)\, \frac{1}{8} + [-0{,}00283 - (-0{,}00384)]\, \frac{3}{8} +$$

$$+ [0{,}0578\,(-0{,}1)^2 - 0{,}00650\,(0{,}1)^2]\, \frac{1}{8} +$$

$$+ [(-0{,}0283)\,(0{,}1)^2 - (-0{,}00384)\,(-0{,}1)^2] \left(-\frac{3}{8} \right) = 0{,}00684.$$

В соответствии с этим коэффициент центра давления

$$c_{\text{с.д}} = x_{\text{ц.д}}/b = -m_z/c_N = 0{,}00684/0{,}0523 = 0{,}131.$$

Линеаризованное обтекание. Коэффициенты давления на передних площадках сверху и снизу определяются следующим образом:

$$\bar{p}^{\text{п}}_{\text{в}} = -\frac{2\left(\alpha - \beta^{\text{п}}_{\text{в}}\right)}{\sqrt{M^2_\infty - 1}} = -\frac{2\,(0{,}05 - 0{,}1)}{\sqrt{3^2 - 1}} = 0{,}0437;$$

$$\bar{p}^{\text{п}}_{\text{н}} = \frac{2\left(\alpha - \beta^{\text{п}}_{\text{н}}\right)}{\sqrt{M^2_\infty - 1}} = \frac{2\,[0{,}05 - (-0{,}1)]}{\sqrt{3^2 - 1}} = 0{,}131.$$

На задних площадках:

$$\bar{p}^{\text{з}}_{\text{в}} = -\frac{2\left(\alpha - \beta^{\text{з}}_{\text{в}}\right)}{\sqrt{M^2_\infty - 1}} = -\frac{2\,[0{,}05 - (-0{,}1)]}{\sqrt{3^2 - 1}} = -0{,}131;$$

$$\bar{p}^{\text{з}}_{\text{н}} = \frac{2\left(\alpha - \beta^{\text{з}}_{\text{н}}\right)}{\sqrt{M^2_\infty - 1}} = \frac{2\,(0{,}05 - 0{,}1)}{\sqrt{3^2 - 1}} = -0{,}0437.$$

Находим соответствующие аэродинамические коэффициенты профиля:

$$c_R = -\bar{p}^{\text{п}}_{\text{н}}\beta^{\text{п}}_{\text{н}} - \bar{p}^{\text{з}}_{\text{н}}\beta^{\text{з}}_{\text{н}} + \bar{p}^{\text{п}}_{\text{в}}\beta^{\text{п}}_{\text{в}} + \bar{p}^{\text{з}}_{\text{в}}\beta^{\text{з}}_{\text{в}} = -0{,}131\,(-0{,}1) -$$

$$-(-0{,}0437)\,0{,}1 + 0{,}0437 \cdot 0{,}1 + (-0{,}131)\,(-0{,}1) = 0{,}0349;$$

$$c_N = \bar{p}^{\text{п}}_{\text{н}} + \bar{p}^{\text{з}}_{\text{н}} - \bar{p}^{\text{п}}_{\text{в}} - \bar{p}^{\text{з}}_{\text{в}} = 0{,}131 - 0{,}0437 - 0{,}0437 - (-0{,}131) = 0{,}175;$$

$$c_x = 0{,}0349 + 0{,}175 \cdot 0{,}05 = 0{,}0437;$$

$$c_y = 0{,}175 - 0{,}0349 \cdot 0{,}05 = 0{,}173;$$

$$-m_z = (0{,}131 - 0{,}0437)\frac{1}{8} + [-0{,}0437 - (-0{,}131]\frac{3}{8} +$$

$$+ [0{,}131\,(-0{,}1)^2 - 0{,}0437\,(0{,}1)^2]\frac{1}{8} +$$

$$+ [(-0{,}0437)\,(0{,}1)^2 - (-0{,}131)\,(-0{,}1)^2]\left(-\frac{3}{8}\right) = 0{,}0434.$$

С учетом значений m_z и c_N коэффициент центра давления

$$c_{\text{ц.д}} = x_{\text{ц.д}}/b = -m_z/c_N = 0{,}0434/0{,}175 = 0{,}248.$$

VII.18. Определим по заданным геометрическим размерам профиля углы (см. рис. 2.VII.8):

$$\beta_{\text{в}} = \beta^{\text{п}}_{\text{в}} = |\beta^{\text{з}}_{\text{в}}| = \operatorname{arctg}\frac{y^{\text{в}}_m}{b/2} = \operatorname{arctg}\frac{2}{4} = 26°34';$$

$$\beta_{\text{н}} = |\beta^{\text{п}}_{\text{н}}| = \beta^{\text{з}}_{\text{н}} = \operatorname{arctg}\frac{|y^{\text{н}}_m|}{b/2} = \operatorname{arctg}\frac{1}{4} = 14°02'.$$

Эти углы определяют характер обтекания профиля и значения соответствующих параметров этого обтекания на верхней и нижней сторонах.

Передняя (верхняя) площадка *OA*. Определим по углу $\beta_{\text{в}} = 26°34'$ и $M_\infty = 5$ угол наклона скачка уплотнения $\theta^{\text{в}}_{\text{с}}$. Вначале из рис. III.1 [17]

найдем приближенную величину $\theta_c^в = 37°40'$ и вычислим отношение плотностей по (3.VII.14):

$$\frac{\rho_c}{\rho_\infty} = \frac{5^2 \sin^2 37°40'}{2/(1{,}4+1) + (1{,}4-1)\,5^2 \sin^2 37°40'/(1{,}4+1)} = 3{,}91.$$

По этой величине уточним угол наклона скачка [см. (3.VII.13)]:

$$\operatorname{tg}\theta_c^в = \operatorname{ctg} 26°34' \left[\frac{1}{2}(3{,}91-1) - \sqrt{\frac{1}{4}(3{,}91-1)^2 - 3{,}91\cdot\operatorname{tg}^2 26°34'}\right] = 0{,}778,$$

откуда $\theta_c^в = 37°54'$.

Затем осуществим следующее приближение:

$$\frac{\rho_c}{\rho_\infty} = \frac{5^2 \sin^2 37°54'}{2/(1{,}4+1) + (1{,}4-1)\,5^2 \sin^2 37°54'/(1{,}4+1)} = 3{,}92;$$

$$\operatorname{tg}\theta_c^в = \operatorname{ctg} 26°34' \left[\frac{1}{2}(3{,}92-1) - \sqrt{\frac{1}{4}(3{,}92-1)^2 - 3{,}92\cdot\operatorname{tg}^2 26°34'}\right] = 0{,}775,$$

откуда $\theta_c^в = 37°47'$.

Принимаем это значение угла скачка за окончательное. Ему соответствует отношение плотностей

$$\frac{\rho_c}{\rho_\infty} = \frac{5^2 \sin^2 37°47'}{2/(1{,}4+1) + (1{,}4-1)^2\,5^2 \sin^2 37°47'/(1{,}4+1)} = 3{,}91.$$

Находим далее, используя (3.VII.6), (3.VII.17) и (3.VII.15), значения:

$$\frac{p_c}{p_\infty} = \frac{p_{OA}}{p_\infty} = \left(3{,}91 - \frac{1{,}4-1}{1{,}4+1}\right)\Big/\left(1 - \frac{1{,}4-1}{1{,}4+1}\,3{,}91\right) = 10{,}8;$$

$$\left(\frac{p_0'}{p_0}\right)_в = \left(\frac{1}{10{,}8}\right)^{1/(1{,}4-1)} (3{,}91)^{1{,}4/(1{,}4-1)} = 0{,}309;$$

$$\mathbf{M}_c = \mathbf{M}_{OA} = \frac{\left(\frac{2}{1{,}4+1}\right)^{1/2}}{\sin(37°47' - 26°34')\left(3{,}91 - \frac{1{,}4-1}{1{,}4+1}\right)^{1/2}} = 2{,}40,$$

а также коэффициент давления

$$\bar{p}_{OA} = \frac{2}{k\mathbf{M}_\infty^2}\left(\frac{p_{OA}}{p_\infty} - 1\right) = \frac{2}{1{,}4\cdot 5^2}(10{,}8-1) = 0{,}560.$$

Передняя (нижняя) площадка *OC*. По углу наклона этой площадки $\beta_н = 14°02'$ и $\mathbf{M}_\infty = 5$ из рис. III.1 [17] находим приближенный угол скачка $\theta_c^н = 23°30'$ и определяем соответствующее отношение плотностей:

$$\frac{\rho_c}{\rho_\infty} = \frac{5^2 \sin^2 23°30'}{2/(1{,}4+1) + (1{,}4-1)\,5^2 \sin^2 23°30'/(1{,}4+1)} = 2{,}66.$$

Затем уточняем угол скачка:

$$\operatorname{tg}\theta_c^н = \operatorname{ctg} 14°02' \left[\frac{1}{2}(2{,}66-1) - \sqrt{\frac{1}{4}(2{,}66-1)^2 - 2{,}66\operatorname{tg}^2 14°02'}\right] = 0{,}428,$$

откуда $\theta_c^н = 23°09'$,

и осуществляем еще одно приближение:

$$\frac{\rho_c}{\rho_\infty} = \frac{5^2 \sin^2 23°09'}{2/(1,4+1) + (1,4-1)\,5^2 \sin^2 23°09'/(1,4+1)} = 2,61;$$

$$\operatorname{tg}\theta_c^н = \operatorname{ctg} 14°02' \left[\frac{1}{2}(2,61-1) - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{1}{4}(2,61-1)^2 - 2,61\operatorname{tg}^2 14°02'}\right] = 0,433,$$

откуда $\theta_c^н = 23°24'$.

Принимая это значение угла скачка за окончательное, определим соответствующее отношение плотностей:

$$\frac{\rho_c}{\rho_\infty} = \frac{5^2 \sin^2 23°24'}{2/(1,4+1) + (1,4-1)\,5^2 \sin^2 23°24'/(1,4+1)} = 2,65,$$

а также величины:

$$\frac{p_c}{p_\infty} = \frac{p_{OC}}{p_\infty} = \left(2,65 \frac{1,4-1}{1,4+1}\right) \Big/ \left(1 - \frac{1,4-1}{1,4+1}2,65\right) = 4,44;$$

$$\left(\frac{p_0'}{p_0}\right)_н = \left(\frac{1}{4,44}\right)^{1/(1,4-1)} (2,65)^{1,4/(1,4-1)} = 0,728;$$

$$\mathbf{M}_{OC} = \frac{\left(\frac{2}{1,4+1}\right)^{1/2}}{\sin(23°24' - 14°02')\left(2,65 - \frac{1,4-1}{1,4+1}\right)^{1/2}} = 3,57;$$

$$\bar{p}_{OC} = \frac{2}{k\mathbf{M}_\infty^2}\left(\frac{p_{OC}}{p_\infty} - 1\right) = \frac{2}{1,4\cdot 5^2}(4,44-1) = 0,197.$$

Рассмотрим обтекание задних площадок, которое сопровождается расширением сверхзвукового потока.

Задняя (верхняя) площадка AB. По числу $\mathbf{M}_{OA}=2,40$ из таблицы [17] находим угол $\omega_{OA}=36°42'$. Затем из той же таблицы по величине $\omega_{AB}=\omega_{OA}+2\beta_в=36°42'+2\cdot 26°34'=89°51'$ определим $\mathbf{M}_{AB}=6,79$ и подсчитаем:

$$\frac{p_{AB}}{p_0'} = \left(1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}_{AB}^2\right)^{-k/(k-)} = \left(1 + \frac{1,4-1}{2}6,79^2\right)^{-1,4/(1,4-1)} = 0,000293.$$

Соответствующий коэффициент давления

$$\bar{p}_{AB} = \frac{2}{k\mathbf{M}_\infty^2}\left(\frac{p_{AB}}{p_0'}\cdot\frac{p_0'}{p_0}\cdot\frac{p_0}{p_\infty} - 1\right) =$$

$$= \frac{2}{1,4\cdot 5^2}\left(0,000293\cdot 0,309\,\frac{1}{0,00189} - 1\right) = -0,0543,$$

где

$$\frac{p_\infty}{p_0} = \left(1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\infty^2\right)^{-k/(k-1)} = \left(1 + \frac{1,4-1}{2}5^2\right)^{-1,4/(1,4-1)} = 0,00189.$$

Задняя (нижняя) площадка CB. Из таблицы [17] по $\mathbf{M}_{OC}=3,57$ находим $\omega_{OC}=59°36'$, а по углу $\omega_{CB}=\omega_{OC}+2\beta_н=59°36'+2\cdot 14°02'=87°40'$ — число $\mathbf{M}_{CB}=6,42$. Затем подсчитываем отношение:

$$\frac{p_{CB}}{p_0'} = \left(1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}_{CB}^2\right)^{-k/(k-1)} = \left(1 + \frac{1,4-1}{2}6,42^2\right)^{-1,4/(1,4-1)} = 0,000417$$

и коэффициент давления:

$$\bar{p}_{CB} = \frac{2}{kM_\infty^2}\left(\frac{p_{CB}}{p_0'} \cdot \frac{p_0'}{p_0} \cdot \frac{p_0}{p_\infty} - 1\right) =$$

$$= \frac{2}{1{,}4 \cdot 5^2}\left(0{,}000417 \cdot 0{,}728\,\frac{1}{0{,}00189} - 1\right) = -0{,}0480.$$

На рис. 3.VII.11 показан характер распределения коэффициента давления по профилю. Найдем соответствующие этому распределению аэродинамические характеристики профиля:

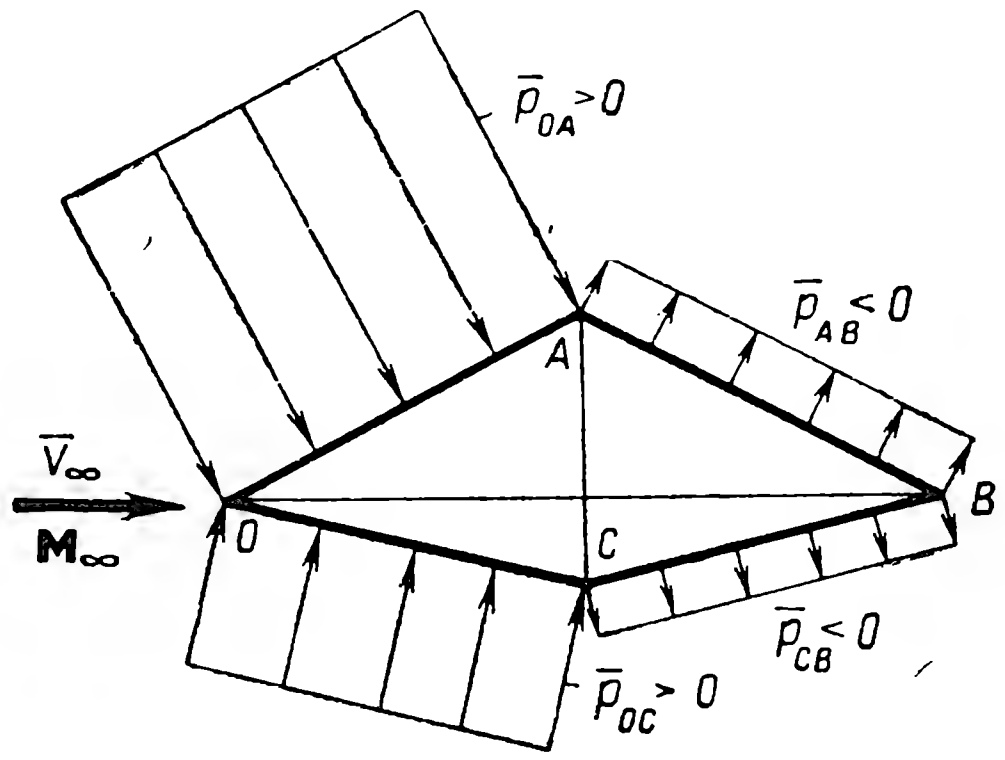


Рис. 3.VII.11. Характер распределения коэффициента давления по несимметричному ромбовидному профилю, обтекаемому сверхзвуковым потоком с $M_\infty = 5$ под нулевым углом атаки

коэффициент волнового сопротивления

$$c_x = (\bar{p}_{OA} + |\bar{p}_{AB}|)\,\frac{\operatorname{tg}\beta_в}{2} + (p_{OC} + |\bar{p}_{CB}|)\,\frac{\operatorname{tg}\beta_н}{2} =$$

$$= (0{,}560 + 0{,}0543)\,\frac{1/2}{2} + (0{,}197 + 0{,}0480)\,\frac{1/4}{2} = 0{,}184;$$

коэффициент подъемной силы

$$c_y = (\bar{p}_{OC} - \bar{p}_{OA} + \bar{p}_{CB} - \bar{p}_{AB})/2 =$$

$$= (0{,}197 - 0{,}560 - 0{,}0480 + 0{,}0543)/2 = -0{,}178;$$

коэффициент продольного момента

$$-m_z = (\bar{p}_{OC} - \bar{p}_{OA})\,\frac{1}{8} + (\bar{p}_{CB} - \bar{p}_{AB})\,\frac{3}{8} =$$

$$= (0{,}197 - 0{,}560)\,\frac{1}{8} + (-0{,}0480 + 0{,}0543)\,\frac{3}{8} = -0{,}043;$$

коэффициент центра давления

$$c_{ц.д} = -m_z/c_y = 0{,}043/0{,}178 = 0{,}242.$$

VII.19. Обтекание несжимаемым потоком с некоторой скоростью V_∞ под углом атаки α скользящего крыла эквивалентно обтеканию прямого крыла со скоростью $V_{\infty n} = V_\infty \cdot \cos\chi$ под углом атаки $\alpha_n = \alpha/\cos\chi$.

Коэффициенты подъемной силы и момента такого крыла можно определить соответственно по формулам (3.VI.1), (3.VI.2) при условии, что угол атаки принимается равным величине $\alpha_n = \alpha/\cos\chi$. При расчете по этим формулам необходимо знать также коэффициент β_1, который следует принять равным производной dy_1/dx_1, вычисляемой по уравнению $y_1 = y_1(x_1)$ средней линии профиля в плоскости x_1Oy_1 (см. рис. 2.VII.9), и, кроме того, угол θ, связанный с координатой x_1 зависимостью $x_1 = (b_n/2)\,(1 - \cos\theta)$.

Найдем уравнение средней линии заданного профиля:

$$y_1 = \frac{1}{2}(y_{1в} + y_{1н}) = \frac{1}{2}\left[0{,}2x_1\left(1 - \frac{x_1}{b_n}\right) - 0{,}12x_1\left(1 - \frac{x_1}{b_n}\right)\right] =$$

$$= 0{,}04x_1\left(1 - \frac{x_1}{b_n}\right).$$

Согласно этому уравнению

$$\beta_1 = dy_1/dx_1 = 0{,}04\,(1 - 2x_1/b_n),$$

или после замены $x_1 = (b_n/2)\,(1 - \cos\theta)$

$$\beta_1 = 0{,}04 \cdot \cos\theta.$$

Вычисляем ε_0 и μ_0:

$$\varepsilon_0 = -\frac{0{,}04}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\theta\,(1 - \cos\theta)\,d\theta = 0{,}02;$$

$$\mu_0 = -\frac{0{,}04}{4}\int_0^{\pi} \cos\theta\,(1 - 2\cos\theta)\,d\theta = 0.$$

По этим значениям ε_0, μ_0 и углу атаки

$$\alpha_n = \alpha/\cos\chi = 0{,}1/\cos 60^\circ = 0{,}2$$

находим коэффициенты $c_{y\,нсж}$ и $m_{z\,нсж}$, отнесенные к скоростному напору $q_{\infty n} = \rho_\infty V_{\infty n}^2/2$:

$$c_{y\,нсж} = 2\pi\,(\alpha_n + \varepsilon_0) = 2\pi\,(0{,}2 + 0{,}02) = 0{,}44\pi = 1{,}38;$$

$$-m_{z\,нсж} = 2\left(\frac{\pi}{4}\varepsilon_0 - \mu_0\right) + \frac{1}{4}c_{y\,нсж} =$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{4}0{,}02 - 0\right) + \frac{0{,}44}{4}\pi = 0{,}12\pi = 0{,}377.$$

Соответствующий коэффициент центра давления

$$(c_{ц.д})_{нсж} = \frac{x_{ц.д}}{b} = -\frac{m_{z\,нсж}}{c_{y\,нсж}} = \frac{0{,}12\pi}{0{,}44\pi} = 0{,}273.$$

Подъемная сила

$$Y_{нсж} = c_{y\,нсж}\,q_{\infty n}\,S_{кр},$$

где скоростной напор

$$q_{\infty n} = \frac{\rho_\infty V_{\infty n}^2}{2} = \frac{\rho_\infty V_\infty^2 \cdot \cos^2\chi}{2} = \frac{1}{2}\,0{,}125 \cdot 100^2 \cdot 0{,}5^2 = 156\ кГ/м^2;$$

площадь участка крыла

$$S_{кр} = \Delta z b_n/\cos\chi = 1 \cdot 1/\cos 60^\circ = 2м^2.$$

С учетом этих данных

$$Y_{нсж} = 1{,}38 \cdot 156 \cdot 2 = 431\ кГ.$$

Момент относительно передней кромки

$$M_{z\,нсж} = m_{z\,нсж}\,q_{\infty n}\,S_{кр}\,b_л = -0{,}377 \cdot 156 \cdot 2 \cdot 1 = -117{,}5\ кГ \cdot м.$$

Рассмотрим подсасывающую силу, возникающую при дозвуковом обтекании крыла, у которого передняя кромка может быть закруглена. Мы уже знаем, что для тонкого симметричного профиля, обтекаемого под

углом атаки, коэффициент подъемной силы $C_{унсж}=2\pi(\alpha+\varepsilon_0)$. Его величину можно рассматривать как сумму двух составляющих: $c_{унсж1}=2\pi\alpha$ — коэффициент для плоской пластины под углом атаки α — и $c_{унсж2}=2\pi\varepsilon_0$ — коэффициента, соответствующего значению для профиля в виде слабоискривленной дуги с уравнением средней линии $y_1=(y_{1в}+y_{1н})/2$ под нулевым углом атаки.

Рассмотрим, создает ли подсасывающую силу этот профиль. Вычислим для этого вначале производную $dc_{унсж2}/d\theta$. Так как $\varepsilon_0=-(1/\pi)\int_0^\pi \beta_1(1-\cos\theta)\,d\theta$, то

$$\frac{dc_{унсж2}}{d\theta}=-2\beta_1(1-\cos\theta).$$

Учитывая также, что $\bar{x}_1=x_1/b_n=(1-\cos\theta)/2$, найдем $d\bar{x}_1=\sin\theta d\theta/2$. Таким образом,

$$\frac{dc_{унсж2}}{d\bar{x}_1}=-4\beta_1\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}.$$

Эту формулу можно выразить также через местные коэффициенты давления на нижней и верхней сторонах:

$$\frac{dc_{унсж2}}{d\bar{x}_1}=\bar{p}_н-\bar{p}_в=\Delta\bar{p}.$$

Известно, что для тонкого профиля коэффициент давления связан с добавочной составляющей скорости V_x' выражением $\bar{p}=-2V_x'/V_{\infty n}$.

Полагая, что на верхней и нижней сторонах значения V_x' отличаются только знаком, получим для абсолютной величины V_x' зависимость $V_x'=\Delta\bar{p}V_{\infty n}/4$, в соответствии с которой

$$V_x'=\frac{V_{\infty n}}{4}\cdot\frac{dc_{у\ нсж2}}{d\bar{x}_1}=-\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\beta_1 V_{\infty n}.$$

Подсасывающая сила прямого крыла единичного размаха

$$T_1=\pi\rho_\infty c^2,$$

где

$$c^2=\lim_{x_1\to x_{п.к}}\left[(V_x')^2(x_1-x_{п.к})\right].$$

Так как координата передней кромки в рассматриваемом случае $x_{п.к}=0$, то, очевидно,

$$c^2=\lim_{x_1\to 0}\left[V_x')^2 x_1\right]$$

или, учитывая, что $x_1=\bar{x}_1 b_n=(b_n/2)(1-\cos\theta)$,

$$c^2=\lim_{\theta\to 0}\left[(V_x')^2(b_n/2)(1-\cos\theta)\right]$$

Внося сюда значение $(V_x')^2$, получим

$$c^2=\lim_{\theta\to 0}\left[\frac{V_{\infty n}^2\beta_1^2(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}\cdot\frac{b_n}{2}(1-\cos\theta)\right],$$

где $\beta_1=dy_1/dx_1=0{,}04\cos\theta$. Нетрудно заметить, что величина $c=0$. Таким образом, в соответствии с формулой для подсасывающей силы $T_1=\pi\rho_\infty c^2$ тонкий профиль в виде слабоизогнутой дуги под нулевым углом атаки не создает подсасывающей силы. Эту силу создает тонкая

пластинка с закругленной передней кромкой, для которой $c^2 = b_n \alpha_n^2 V_{\infty n}^2$. Величина подсасывающей силы на участке скользящего крыла шириной Δz (см. рис. 2.VII.9)

$$T = (T_1 \Delta z_n) \cos \chi = \pi \alpha^2 \rho_\infty V_\infty^2 b_n \Delta z.$$

После подстановки данных получим

$$T = \pi \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}125 \cdot 100^2 \cdot 1 \cdot 1 = 38{,}6\ кГ.$$

VII.20. Так как форма и размеры крыла, а также угол атаки те же, что и в задаче VII.19, то можно использовать данные, полученные в результате решения этой задачи и относящиеся к условиям обтекания несжимаемым потоком.

Проведем пересчет коэффициента подъемной силы на скоростной напор $q_\infty = 0{,}5 \rho_\infty V_\infty^2$:

$$c'_{y\,\text{нсж}} = c_{y\text{нсж}} \frac{V_{\infty n}^2}{V_\infty^2} = c_{y\,\text{нсж}} \cos^2 \chi.$$

Так как $c_{y\text{нсж}} = 1{,}38$, а $\chi = 60°$, то

$$c'_{y\,\text{нсж}} = 1{,}38 \cos^2 60° = 0{,}345.$$

Коэффициент момента вычислим по величине скоростного напора $q_\infty = 0{,}5 \rho_\infty V_\infty^2$ и хорде $b_{\text{кр}} = b_n / \cos \chi$:

$$m'_{z\,\text{нсж}} = m_{z\,\text{нсж}} \frac{V_{\infty n}^2}{V_\infty^2} \cdot \frac{b_n}{b_{\text{кр}}} = m_{z\,\text{нсж}} \cos^3 \chi,$$

или после подстановки

$$m'_{z\,\text{нсж}} = -0{,}377 \cos^3 60° = -0{,}0472.$$

Коэффициент центра давления

$$(c'_{\text{ц.д}})_{\text{нсж}} = \frac{x_{\text{ц.д}}}{b_{\text{кр}}} = -\frac{m'_{z\,\text{нсж}}}{c'_{y\,\text{нсж}}} = \frac{0{,}0472}{0{,}345} = 0{,}137.$$

Определим для случая несжимаемого обтекания коэффициент подсасывающей силы (см. задачу VII.19):

$$(c'_{x\text{т}})_{\text{нсж}} = \frac{2T}{\rho_\infty V_\infty^2 S_{\text{кр}}} = \frac{2\pi\alpha^2 \rho_\infty V_\infty^2 b_n \Delta z}{\rho_\infty V_\infty^2 b_n (\Delta z / \cos \chi)} =$$

$$= 2\pi\alpha^2 \cos \chi = 2\pi \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}5 = 0{,}0314,$$

а затем подсчитаем соответствующие коэффициенты с учетом влияния числа Маха:

$$c'_{y\text{сж}} = \frac{c'_{y\,\text{нсж}}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} = \frac{0{,}345}{\sqrt{1 - 0{,}5^2}} = 0{,}399;$$

$$m'_{z\,\text{сж}} = \frac{m'_{z\,\text{нсж}}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} = \frac{-0{,}0472}{\sqrt{1 - 0{,}5^2}} = -0{,}0545;$$

$$(c'_{x\text{т}})_{\text{сж}} = \frac{(c'_{x\text{т}})_{\text{нсж}}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} = \frac{0{,}0314}{\sqrt{1 - 0{,}5^2}} = 0{,}0373.$$

VII.21. Выберем на передней кромке скользящего крыла какую-либо точку, рассматривая ее как источник возмущения. Из этой точки прой-

дет линия Маха, образующая с направлением вектора V_∞ угол

$$\mu_\infty = \arcsin\left(1/\mathbf{M}_\infty\right) = \arcsin\left(1/1{,}2\right) = 56°24'.$$

Так как угол скольжения ($\chi = 60°$)

$$\chi > \pi/2 - \mu_\infty = 33°36',$$

то нормальная к передней кромке составляющая скорости $V_{\infty n}$ будет меньше скорости звука, т. е. $V_{\infty n} = V_\infty \cos\chi < a_\infty$. Следовательно, передняя кромка будет дозвуковой, и расчет обтекания необходимо вести по соответствующим зависимостям дозвуковой аэродинамики.

Найдем сначала аэродинамические характеристики профиля в несжимаемом потоке. Так как профиль симметричный, то $c_{y\,\text{нсж}} = 2\pi\alpha_n$, где $\alpha_n = \alpha/\cos\chi$. Величина $c_{y\,\text{нсж}}$ рассчитана по скоростному напору $\rho_\infty V_{\infty n}^2/2$. Для другой величины скоростного напора, равной $q_\infty = 0{,}5\rho_\infty V_\infty^2$,

$$c'_{y\ \text{нсж}} = c_{y\,\text{нсж}} \frac{V_{\infty n}}{V_\infty^2} = 2\pi \frac{\alpha}{\cos\chi} \cos^2\chi = 2\pi\alpha\cos\chi,$$

или

$$c'_{y\,\text{нсж}} = 2\pi \cdot 0{,}1 \cdot \cos 60° = 0{,}314.$$

С учетом сжимаемости

$$c'_{y\,\text{сж}} = \frac{c'_{y\,\text{нсж}}}{\sqrt{1 - \mathbf{M}_{\infty n}^2}} = \frac{c'_{y\,\text{нсж}}}{\sqrt{1 - \mathbf{M}_\infty^2 \cos^2\chi}} = \frac{0{,}314}{\sqrt{1 - 1{,}2^2 \cdot 0{,}5^2}} = 0{,}392.$$

Коэффициент момента

$$-m_{z\,\text{нсж}} = \pi\alpha_n/2 = \pi\alpha/(2\cos\chi).$$

Пересчитывая эту величину на скоростной напор q_∞, получим

$$-m'_{z\,\text{нсж}} = \frac{\pi\alpha}{2\cos\chi} \cdot \frac{V_{\infty n}^2}{V_\infty^2} = \frac{\pi\alpha}{2\cos\chi}\cos^2\chi = \frac{\pi\alpha\cos\chi}{2}.$$

После подстановки данных

$$-m'_{z\,\text{нсж}} = \pi \cdot 0{,}1 \cdot \cos 60°/2 = \pi \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}0785.$$

С учетом сжимаемости

$$m'_{z\,\text{сж}} = \frac{m_{z\,\text{нсж}}}{\sqrt{1 - \mathbf{M}_{\infty n}^2}} = \frac{m_{z\,\text{нсж}}}{\sqrt{1 - \mathbf{M}_\infty^2 \cos^2\chi}} =$$

$$= \frac{-0{,}0785}{\sqrt{1 - 1{,}2^2 \cdot \cos^2 60°}} = -0{,}0981.$$

Отнеся это значение в хорде $b_{\text{кр}} = b/\cos\chi = 1/\cos 60° = 2$ *м*, найдем

$$\left(m'_{z\,\text{кр}}\right)_{\text{сж}} = m'_{z\text{сж}} \frac{b_n}{b_{\text{кр}}} = m'_{z\text{сж}} \cos\chi = -0{,}0981 \cdot \cos 60° = -0{,}0491.$$

Коэффициент подсасывающей силы несжимаемой среды, рассчитанный по скоростному напору $q_\infty = 0{,}5\rho_\infty V_\infty^2$ (см. решение задачи VII.20), $(c'_{x\text{т}})_{\text{нсж}} = 0{,}0314$. С учетом сжимаемости

$$\left(c'_{x\text{т}}\right)_{\text{сж}} = \frac{\left(c'_{x\text{т}}\right)_{\text{нсж}}}{\sqrt{1 - \mathbf{M}_\infty^2 \cos^2\chi}} = \frac{0{,}0314}{\sqrt{1 - 1{,}2^2 \cdot \cos^2 60°}} = 0{,}0392.$$

Определим соответствующие силы и момент, действующие на участок крыла площадью $S_{кр}=\Delta z(b_n/\cos\chi)=1\,(1/\cos 60°)=2$ $м^2$. Полагая $\rho_{атм}=\rho_\infty=0{,}125$ $кГ\cdot сек^2/м^4$, $a_{атм}=a_\infty=340$ $м/сек$, находим при скорости движения $V_\infty=\mathbf{M}_\infty a_\infty=1{,}2\cdot 340=408$ $м/сек$:

$$Y=c'_{y\,сж}\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2}S_{кр}=0{,}392\frac{0{,}125\cdot 408^2}{2}2=8160\ кГ;$$

$$M_z=(m'_{z\,кр})_{сж}\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2}\cdot S_{кр}b_{кр}=-0{,}0491\frac{0{,}125\cdot 408^2}{2}2\cdot 2=-2045\ кГ\cdot м;$$

$$T=(c'_{xт})_{сж}\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2}S_{кр}=0{,}0392\frac{0{,}125\cdot 408^2}{2}2=816\ кГ.$$

VII.22. Определим нормальную к передней кромке составляющую скорости $V_{\infty n}=V_\infty\cos\chi$. Так как $V_\infty=\mathbf{M}_\infty a_\infty$, то

$$V_{\infty n}=\mathbf{M}_\infty a_\infty\cos\chi=3a_\infty\cos 60°=1{,}5a_\infty.$$

Таким образом, нормальная составляющая скорости $V_{\infty n}$ оказывается сверхзвуковой; следовательно, для расчета обтекания профиля необходимо применить соотношения сверхзвуковой аэродинамики.

Вследствие того что $\mathbf{M}_{\infty n}=\mathbf{M}_\infty\cos\chi=3\cos 60°=1{,}5$ невелико и профиль тонкий, для расчета аэродинамических коэффициентов можно применить соотношения линеаризованной теории.

Коэффициент давления на профиле

$$\bar p_n=\pm 2\alpha_{ni}/\sqrt{\mathbf{M}_{\infty n}^2-1}\,.$$

Этот коэффициент, пересчитанный на скоростной напор $q_\infty=0{,}5\rho_\infty V_\infty^2=0{,}5\,kp_\infty\mathbf{M}_\infty^2$,

$$\bar p=\bar p_n\frac{V_{\infty n}^2}{V_\infty^2}=\bar p_n\cos^2\chi=\pm\frac{2\alpha_{ni}\cos^2\chi}{\sqrt{\mathbf{M}_\infty^2\cos^2\chi-1}}.$$

Здесь угол атаки для местной пластинки на крыле

$$\alpha_{ni}=\alpha_n-\beta_{н(в)},$$

где $\beta_{н(в)}$ — угол наклона местных пластинок на нижней (или верхней) стороне профиля, или, учитывая, что $\alpha_n=\alpha/\cos\chi$,

$$\alpha_{ni}=\alpha/\cos\chi-\beta_{н(в)}.$$

В результате получаем

$$\bar p=\pm\frac{2\,(\alpha/\cos\chi-\beta_{н(в)})\cos^2\chi}{\sqrt{\mathbf{M}_\infty^2\cos^2\chi-1}}.$$

Здесь знак плюс соответствует нижней стороне, а знак минус — верхней. Найдем значения углов, пользуясь уравнением контура:

$$\beta_{н(в)}\approx\mp\frac{d}{dx}\left[2\Delta\frac{x_1}{b_n}\left(1-\frac{x_1}{b_n}\right)\right]=\mp 2\frac{\Delta}{b_n}\left(1-\frac{2x_1}{b_n}\right)=$$
$$=\mp\frac{2\cdot 0{,}05}{1}\left(1-\frac{2x_1}{1}\right)=\mp 0{,}1\,(1-2x_1).$$

В соответствии с этим

$$\bar p_{н(в)}=\pm\frac{2\,[0{,}1/\cos 60°\pm 0{,}1\,(1-2x_1)]\cos^2 60°}{\sqrt{3^2\cos^2 60°-1}}=\pm 0{,}448\,[0{,}2\pm(0{,}1-0{,}2x_1)].$$

На нижней стороне

$$\bar{p}_{\text{н}} = 0{,}448\,(0{,}2 + 0{,}1 - 0{,}2\bar{x}_1) = 0{,}0896\,(1{,}5 - \bar{x}_1),$$

а на верхней

$$\bar{p}_{\text{в}} = -\,0{,}448\,(0{,}2 - 0{,}1 + 0{,}2\bar{x}_1) = -\,0{,}0896\,(0{,}5 + \bar{x}_1).$$

Теперь найдем коэффициент нормальной силы:

$$c_N = \int_0^1 (\bar{p}_{\text{н}} - \bar{p}_{\text{в}})\, d\bar{x}_1 \quad (\bar{x}_1 = x_1/b\ ).$$

Подставив данные, получим

$$c_N = \int_0^1 [0{,}0896\,(1{,}5 - \bar{x}_1) + 0{,}0896\,(0{,}5 + \bar{x}_1)]\, d\bar{x}_1 = 0{,}179.$$

Коэффициент продольной силы

$$c_R = -\int_0^1 \bar{p}_{\text{н}}\beta_{\text{н}}\, d\bar{x}_1 + \int_0^1 \bar{p}_{\text{в}}\beta_{\text{в}}\, d\bar{x}_1 = -\int_0^1 0{,}0896\,(1{,}5 - \bar{x}_1)\,[-0{,}1\,(1 - 2\bar{x}_1)]\, d\bar{x}_1 + \int_0^1 -0{,}0896\,(0{,}5 + \bar{x}_1)\,[0{,}1\,(1 - 2\bar{x}_1)]\, d\bar{x}_1 = 0{,}00299.$$

Соответствующие коэффициенты подъемной силы и сопротивления (в поточных координатах):

$$c_y = c_N - \alpha_n c_R = 0{,}179 - \left(\frac{0{,}1}{\cos 60^\circ}\right) 0{,}00299 = 0{,}178;$$

$$c_x = c_R + \alpha_n c_N = 0{,}00299 + \left(\frac{0{,}1}{\cos 60^\circ}\right) 0{,}179 = 0{,}0388.$$

Составляющие коэффициента подъемной силы

$$c_y' \approx c_y = 0{,}178,$$

а коэффициента силы сопротивления

$$c_x' = c_x \cos\chi = 0{,}0388 \cdot \cos 60^\circ = 0{,}0194.$$

Коэффициент момента относительно точки на передней кромке [см. формулу (3.VII.27), в которой второй интеграл принимается равным нулю]

$$-m_z = \int_0^1 (\bar{p}_{\text{н}} - \bar{p}_{\text{в}})\,\bar{x}_1\, d\bar{x}_1 = \int_0^1 [0{,}0896\,(1{,}5 - \bar{x}_1) + 0{,}0896\,(0{,}5 + \bar{x}_1)]\,\bar{x}_1\, d\bar{x}_1 = 0{,}0896.$$

Коэффициент центра давления

$$c_{\text{ц.д}} = \frac{x_{\text{ц.д}}}{b_n} = -\frac{m_z}{c_N} = \frac{0{,}0896}{0{,}179} = 0{,}5.$$

Вычислим силы и моменты, действующие на участок крыла площадью

$$S_{\text{кр}} = \frac{b_n}{\cos\chi}\,\Delta z = \frac{1}{0{,}5}\,1 = 2\ м^2.$$

Подъемная сила $Y = c_y' q_\infty S_{\text{кр}}$. Так как скоростной напор

$$q_\infty = kp_\infty M_\infty^2/2 = 1{,}4 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 3^2/2 = 6{,}3 \cdot 10^4\ кГ/м^2,$$

то

$$Y = 0{,}178 \cdot 6{,}3 \cdot 10^4 \cdot 2 = 22{,}5 \cdot 10^3 \ кГ.$$

Сила сопротивления

$$X = c_x' q_\infty S_{кр} = 0{,}0194 \cdot 6{,}3 \cdot 10^4 \cdot 2 = 2{,}44 \cdot 10^3 \ кГ$$

и момент

$$M_z = m_z q_\infty S_{кр} b = -0{,}0896 \cdot 6{,}3 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 1 = -11{,}3 \cdot 10^3 \ кГ \cdot м.$$

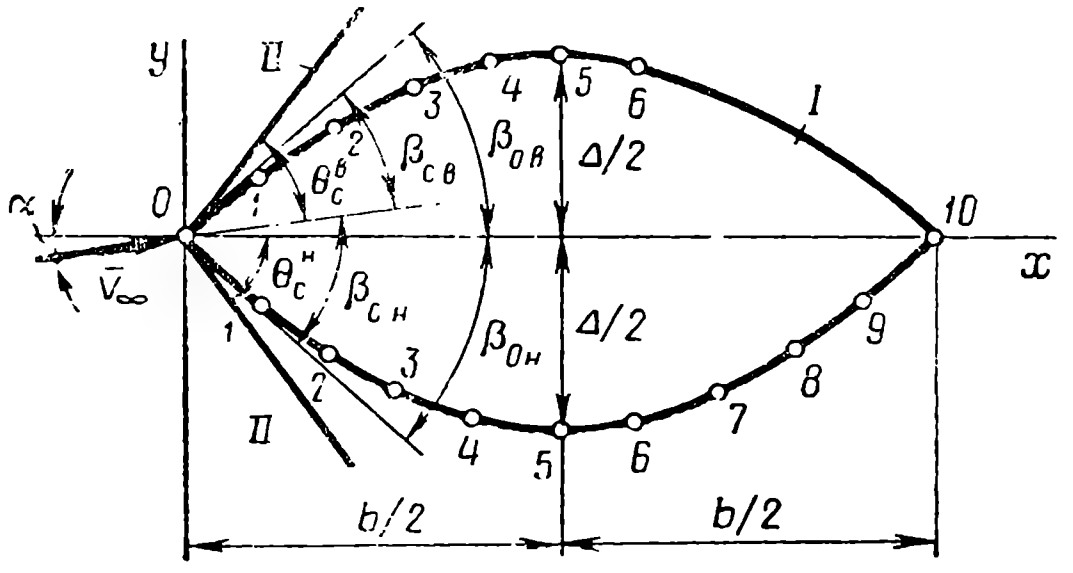


Рис. 3.VII.12. К расчету обтекания симметричного профиля диссоциирующим сверхзвуковым потоком:

I — профиль; *II* — скачок уплотнения

VII.23. Решение задачи начинаем с определения параметров среды, где происходит движение. По таблице стандартной атмосферы [21] для высоты $H = 20$ *км* находим:

$$p_\infty = \left(\frac{p_H}{p_3}\right) p_3 = 5{,}455 \cdot 10^{-2} \cdot 1{,}033 = 5{,}64 \cdot 10^{-2} \ кГ/см^2;$$

$$\rho_\infty = \left(\frac{\rho_H}{\rho_3}\right) \rho_3 = 7{,}255 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}1249 = 0{,}907 \cdot 10^{-2} \ кГ \cdot сек^2/м^4;$$

$$T_\infty = 216{,}7\text{K}, \quad a_\infty = 295{,}1 \ м/сек, \quad \mu_{ср\,\infty} = 28{,}97 \ кг/кмоль.$$

Принимаем $k_\infty = c_{p\infty}/c_{v\infty} = 1{,}4$ и $c_{p\infty} = 1002 \ дж/(кг \cdot град)$.
Соответствующая энтальпия

$$i_\infty = c_{p\infty} T_\infty = 1002 \cdot 216{,}7 = 0{,}217 \cdot 10^6 \ м^2/сек^2.$$

По скорости $V_\infty = 5000 \ м/сек$ и скорости звука $a_\infty = 295{,}1 \ м/сек$ подсчитываем число Маха:

$$\mathbf{M}_\infty = V_\infty/a_\infty = 5000/295{,}1 = 16{,}9.$$

Скоростной напор набегающего потока

$$q_\infty = 0{,}5\rho_\infty V_\infty^2 = 0{,}5k_\infty p_\infty \mathbf{M}_\infty^2 = 0{,}5 \cdot 1{,}4 \cdot 5{,}64 \cdot 10^{-2} \cdot 16{,}9^2 =$$
$$= 11{,}3 \cdot 10^4 \ кГ/м^2.$$

Энтальпия торможения

$$i_0 = \frac{V_\infty^2}{2} + i_\infty = \frac{5^2 \cdot 10^6}{2} + 0{,}217 \cdot 10^6 = 12{,}7 \cdot 10^6 \ м^2/сек^2.$$

Определим параметры обтекания на клиновидных поверхностях у передней кромки профиля сверху и снизу. Эти параметры равны соответствующим значениям непосредственно за косыми скачками уплотнения, образующимися перед клином с углом $\beta_{с.в}$ и клином с углом $\beta_{с.н}$ (рис. 3.VII.12).

Скачок, образующийся на верхней стороне, рассчитывается по углу отклонения потока $\beta_{с.в}=\beta_{0в}-\alpha$, где угол $\beta_{0в}$ находится из уравнения контура профиля:

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{dy}{dx}=\pm 2\frac{\Delta}{b}\left(1-\frac{2x}{b}\right).$$

Полагая здесь $x=0$, найдем для верхней стороны (знак плюс) $\operatorname{tg}\beta_{0в}=2\cdot 2/4=1$, откуда $\beta_{0в}=45°$ и $\beta_{с.в}=\beta_{0в}-\alpha=45°-5°=40°$.

По методике, изложенной в [21], пользуясь графиками, приведенными в работе [17], проводим расчет параметров газа на косом скачке с учетом диссоциации (см. решение аналогичной задачи IV.51). В результате этого расчета получаем:

$$\theta_с^в=\theta_{с0}^в=46°\,30';\quad p_{с.в}=11{,}1\ кГ/см^2;\quad i_{с.в}=6{,}92\cdot 10^6\ м^2/сек^2;$$

$$T_{с.в}=4140К;\quad (\mu_{ср})_{св}=26{,}23\ кг/кмоль;\quad S_{с.в}=10{,}3\cdot 10^3\ м^2/(сек^2\cdot град);$$

$$a_{с.в}=1260\ м/сек;\quad V_{с.в}=3400\ м/сек;\quad \mathbf{M}_{с.в}=V_{с.в}/a_{с.в}=$$

$$=3400/1260=2{,}69.$$

На нижней стороне расчет скачка уплотнения следует вести по углу отклонения потока $\beta_{с.н}=|\beta_{0н}|+\alpha$. Так как $|\beta_{0н}|=\beta_{0в}=45°$, то $\beta_{с.н}=45°+5°=50°$. Далее расчет параметров ведется так же, как и для верхней стороны. В результате находим:

$$\theta_с^н=\theta_{с0}^н=60°;\quad p_{с.н}=15{,}4\ кГ/см^2;\quad i_{с.н}=9{,}49\cdot 10^6\ м^2/сек^2;$$

$$T_{с.н}=5120К;\quad (\mu_{ср})_{с.н}=24{,}92\ кг/кмоль;\quad S_{с.н}=10{,}8\cdot 10^3\ м^2/(сек^2\cdot град);$$

$$a_{с.н}=1470\ м/сек;\ V_{с.н}=2520\ м/сек;\quad \mathbf{M}_{с.н}=V_{с.н}/a_{с.п}=2520/1470=1{,}71.$$

Используя данные о параметрах газа на передней кромке, можно провести расчет обтекания всей поверхности.

Нижняя сторона. Расчет параметров газа на этой стороне профиля ведем в предположении, что течение изэнтропическое. Для энтальпии торможения $i_0=12{,}7\cdot 10^6\ м^2/сек^2$, а также параметров непосредственно за скачком в точке O — энтропии $S_{с.н}=S_O=10{,}8\cdot 10^3\ м^2/(сек^2\cdot град)$ и скорости $V_{с.н}=V_O=2520\ м/сек$ (или энтальпии $i_{с.н}=i_O=9{,}5\cdot 10^6\ м^2/сек^2$) — из таблиц [23] находим угол $\omega_{с.н}=\omega_O=22{,}50°$ $(22°30')$.

Далее находим углы β наклона касательных в выбранных точках, определяем разности $\Delta\beta=\beta_{0н}-\beta$ и подсчитываем в каждой из этих точек значения $\omega=\omega_O+|\Delta\beta|$. Из той же таблицы [23] для $S_{с.н}=S_O=10{,}8\cdot 10^3\ м^2/(сек^2\cdot град)$ и $i_0=12{,}7\cdot 10^6\ м^2/сек^2$ по значениям углов ω находим соответствующие параметры газа: V, i, a, $\mathbf{M}$. Затем по значениям i и S из i—S-диаграммы [17] определяем давление p, подсчитываем разность $p-p_\infty$ и коэффициент давления $\bar{p}=(p-p_\infty)/q_\infty$.

В качестве примера рассмотрим такой расчет для точки *1* на нижней стороне профиля (см. рис. 3.VII.12). Находим (для $x_1=0{,}4$):

$$\operatorname{tg}\beta_1=-\frac{2\cdot 2}{4}\left(1-\frac{2\cdot 0{,}4}{4}\right)=-0{,}8\ (\beta_1=-38°\,40');$$

$$\Delta\beta_1=-45°-(-38°\,40')=-6°\,20';$$

$$\omega_1=22°\,30'+|-6°\,20'|=28°\,50'.$$

Из таблицы [23] для этого значения ω_1 по $S_{с.н}=S_O=10{,}8\times\times 10^3\ м^2/(сек^2\cdot град)$ и $i_0=12{,}7\cdot 10^6\ м^2/сек^2$ находим: $V_1=2709\ м/сек$, $i_1=9{,}03\cdot 10^6\ м^2/сек^2$, $a_1=1408\ м/сек$, $\mathbf{M}_1=1{,}92$.

По диаграмме i—S на рис. I.1 [17], зная $i_1=9{,}03\cdot 10^6\ м^2/сек^2$ и $S_{с.н}=S_O=10{,}8\cdot 10^3\ м^2/(сек^2\cdot град)$, определяем давление $p_1=10\ кГ/см^2$. Затем вычисляем $\Delta p_1=p_1-p_\infty=10-0{,}0564=9{,}944\ кГ/см^2$ и соответствующий коэффициент давления

$$\bar{p}_1=\Delta p_1/q_\infty=9{,}944\cdot 10^4/(11{,}3\cdot 10^4)=0{,}88.$$

Таблица 3.VII.9

Точки	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
x / Параметры	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8	3,2	3,6	4,0
tgβ	—1,0	—0,8	—0,6	—0,4	—0,2	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
β	—45°	—38°40′	—30°58′	—21°48′	—11°18′	0	11°18′	21°48′	30°58′	38°40′	45°
Δβ	0	—6°20′	—14°02′	—23°12′	—33°42′	—45°	—56°18′	—66°48′	—75°58′	—83°40′	—90°
ω	22°30′	28°50′	36°32′	46°12′	56°12′	67°30′	78°48′	89°18′	98°28′	106°10′	112°30′
	22,5°	28,8°	36,5°	46,2°	56,2°	67,5°	78,8°	89,3°	98,5°	106,2°	112,5°
$i \cdot 10^{-6}$, $м^2/сек^2$	9,49	9,03	8,44	7,65	6,93	6,14	5,25	4,42	3,76	3,30	2,85
V, $м/сек$	2520	2709	2920	3165	3396	3638	3869	4066	4220	4369	4505
a, $м/сек$	1470	1408	1359	1275	1200	1125	1063	1006	954	924	889
M	1,71	1,92	2,16	2,48	2,83	3,23	3,64	4,04	4,43	4,73	5,06
$p \cdot 10^{-4}$, $кГ/м^2$	15	10	6,8	4,0	1,8	1,1	0,60	0,25	0,13	0,06	0,03
$\Delta p \cdot 10^{-4}$, $кГ/м^2$	14,944	9,944	6,744	3,944	1,744	1,044	0,544	0,194	0,069	0,036	—0,023
$\bar{p}$	1,32	0,88	0,59	0,35	0,154	0,092	0,048	0,017	0,006	0,003	—0,002

Аналогично проводим расчет для остальных точек нижнего контура (см. табл. 3.VII.9).

Верхняя сторона. По энтальпии торможения $i_0=12{,}7\cdot10^6$ *м²/сек²*, энтропии $S_{с.в}=S_O=10{,}3\cdot10^3$ *м²/(сек²·град)* и скорости $V_{с.в}=V_O=3400$ *м/сек* (или энтальпии $i_{с.в}=i_0=6{,}92\cdot10^6$ *м²/сек²*) у острия профиля находим из таблиц [23] угол $\omega_{с.в}=\omega_O=52°$. Затем задаемся рядом произвольных точек на контуре, для каждой из них находим угол наклона касательной $\beta=\operatorname{arctg}(dy/dx)$ и разность углов $\Delta\beta=\beta_{0в}-\beta$. По этим значениям подсчитываем углы $\omega=\omega_O+\Delta\beta$, для которых из тех же таблиц [23] по прежним значениям $S_{с.в}=S_O=10{,}3\cdot10^3$ *м²/(сек²·град)* и $i_0=12{,}7\cdot10^6$ *м²/сек²* находим соответствующие параметры.

Для примера рассчитаем параметры в точке *1*. Так как координата этой точки $x_1=0{,}4$, то

$$\operatorname{tg}\beta_1=\frac{2\cdot2}{4}\left(1-\frac{2\cdot0{,}4}{4}\right)=0{,}8;\quad \beta_1=38°\,40';$$

$$\Delta\beta_1=45°-38°\,40'=6°\,20';$$

$$\omega_1=52°+6°\,20'=58°\,20'.$$

Из таблиц [23] по этому значению ω_1 для $S_{с.в}=S_O=10{,}3\times\times10^3$ *м²/(сек²·град)* и $i_0=12{,}7\cdot10^6$ *м²/сек²* находим: $V_1=3560$ *м/сек*; $i_1=6{,}75\cdot10^6$ *м²/сек²*; $a_1=1220$ *м/сек* и $\mathbf{M}_1=2{,}93$. Далее для $i_1=6{,}75\times\times10^6$ *м²/сек²* и $S_{с.в}=S_O=10{,}3\cdot10^3$ *м²/(сек²·град)* по *i*—*S*-диаграмме [17] находим давление $p_1=9{,}5$ *кГ/см²*, вычисляем разность $\Delta p_1=p_1-p_\infty=9{,}5-$ $-0{,}0564=9{,}4$ *кГ/см²* и коэффициент давления $\bar{p}_1=(p_1-p_\infty)/q_\infty=9{,}4\times\times10^4/(11{,}3\cdot10^4)=0{,}83$.

Аналогично рассчитываются параметры обтекания для других точек на верхней поверхности профиля (см. табл. 3.VII.10).

VII.24. Определим необходимые для расчета параметры набегающего потока. Из диаграммы *i*—*S* [17] по температуре $T_\infty=4000$ К и давлению $p_\infty=0{,}01$ *кГ/см²* находим: $i_\infty=8{,}8\cdot10^6$ *м²/сек²*; $S_\infty=13{,}1\cdot10^3$ *м²/(сек²×*$\times$*град)*; $\rho_\infty=7\cdot10^{-5}$ *кГ·сек²/м⁴*, а из диаграммы *a*—*i* [17] по значениям S_∞ и i_∞ определяем скорость звука $a_\infty=1300$ *м/сек*.

Из графика на рис. 1.4.7 [20] по p_∞ и T_∞ находим средний молекулярный вес $\mu_{ср\infty}=24$ *кг/кмоль*. Затем подсчитываем число $\mathbf{M}_\infty=V_\infty/a_\infty=$ $=5000/1300=3{,}85$ и энтальпию торможения $i_0=V_\infty^2/2+i_\infty=5^2\cdot10^6/2+$ $+8{,}8\cdot10^6=21{,}3\cdot10^6$ *м²/сек²*.

С учетом этих параметров набегающего потока проведем расчет обтекания верхней и нижней поверхности пластинки.

Верхняя поверхность. На этой поверхности имеет место течение расширения, вызванное поворотом потока на угол $\alpha=20°$ относительно вектора $\bar{V}_\infty$. Скорость течения определяется по методу характеристик следующим образом. Из таблиц [23] для $S_\infty=13{,}1\cdot10^3$ *м²/(сек²·град)* и $i_0=$ $=21{,}3\cdot10^6$ *м²/сек²* по $V_\infty=5000$ *м/сек* (или $i_\infty=8{,}8\cdot10^6$ *м²/сек²*) находим угол $\omega_\infty=96°46'$, а затем вычисляем $\omega=\omega_\infty+\alpha=96°46'+20°=116°46'$ (116,76°).

По этому значению ω из тех же таблиц для $S_\infty=13{,}1\cdot10^3$ *м²/(сек²×*$\times$*град)* и $i_0=21{,}3\cdot10^6$ *м²/сек²* находим: $V_в=5425$ *м/сек*, $i_в=6{,}58\cdot10^6$ *м²/сек²*, $a_в=1078$ *м/сек*, $\mathbf{M}=5{,}04$, а по *i*—*S*-диаграмме [17] по $i_в=6{,}58\cdot10^6$ *м²/сек²* и $S_\infty=13{,}1\cdot10^3$ *м²/(сек²·град)* определяем давление $p_в=1{,}51\cdot10^{-3}$ *кГ/см²*, температуру $T_в=2910$ К и плотность $\rho_в=1{,}6\cdot10^{-5}$ *кГ·сек²/м⁴*. Соответствующий коэффициент давления

$$\bar{p}_в=\frac{2(p_в-p_\infty)}{\rho_\infty V_\infty^2}=\frac{2(1{,}51\cdot10^{-3}-0{,}01)\,10^4}{7\cdot10^{-5}\cdot5^2\cdot10^6}=-0{,}097.$$

Нижняя поверхность. Параметры диссоциирующего газа на нижней поверхности будут такими, как за косым скачком уплотнения, вызван-

Таблица 3.VII.10

Точки	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Параметры \ *x*	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4
$\mathrm{tg}\beta$	1,0	0,8	0,6	0,4	0,2	0	—0,2
β	45°	38°40′	30°58′	21°48′	11°18′	0	—11°18′
$\Delta\beta$	0	6°20′	14°02′	23°12′	33°42′	45°	56°18′
ω	52°	58°20′	66°02′	75°12′	85°42′	97°	108°18′
	52°	58,3°	66,0°	75,2°	85,7°	97°	108,3°
$i\cdot10^{-6}$, *м²/сек²*	6,92	6,75	6,04	5,30	4,49	3,60	2,78
V, *м/сек*	3400	3560	3730	3920	4120	4340	4520
a, *м/сек*	1260	1220	1160	1110	1040	976	906
M	2,69	2,93	3,21	3,54	4,00	4,45	4,99
$p\cdot10^{-4}$, *кГ/м²*	12	9,5	5,3	2,7	1,2	0,42	0,10
$\Delta p\cdot10^{-4}$, *кГ/м²*	11,944	9,444	5,244	2,644	1,144	0,364	0,044
$\bar{p}$	1,06	0,83	0,44	0,23	0,10	0,03	0,006

ным поворотом потока на угол $\beta_c=\alpha=20°$. Такой поворот потока при $M_\infty=3{,}85$ в случае недиссоциированного газа вызывает (см. график на рис. III.1 [17]) наклон скачка на угол $\theta_c=33°$. Соответствующий угол скачка в диссоциирующем потоке будет меньше. Примем его величину в первом приближении равной 30°. Затем подсчитываем (см. решение задачи IV.51):

$$\Delta\bar{V}_n = 1 - \frac{\mathrm{tg}\,(30°-20°)}{\mathrm{tg}\,30°} = 0{,}695;$$

$$\frac{p_н}{p_\infty} = 1 + \frac{7\cdot10^{-5}\cdot5^2\cdot10^6}{0{,}01\cdot10^4}\,0{,}695\sin^2 30° = 4{,}04;$$

$$p_н = \left(\frac{p_н}{p_\infty}\right)p_\infty = 4{,}04\cdot0{,}01 = 4{,}04\cdot10^{-2}\ кГ/см^2;$$

$$i_н = 8{,}8\cdot10^6 + \frac{5^2\cdot10^6}{2}\sin^2 30°\cdot0{,}695\,(2-0{,}695) = 11{,}6\cdot10^6\ м^2/сек^2.$$

Из графика на рис. I-1 [17] по $i_н = 11{,}6 \cdot 10^6$ *м²/сек²* и $p_н = 4{,}04 \times \times 10^{-2}$ *кГ/см²* находим $T_н = 4550$ К, а из графика на рис. 1.4.7 [20] по $T_н$ и $p_н$ определяем средний молекулярный вес $(\mu_{ср})_н \approx 23$ *кг/кмоль*.

Теперь вычисляем:

$$A = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{0{,}01 \cdot 10^4}{7 \cdot 10^{-5} \cdot 5^2 \cdot 10^6 \sin^2 30°}\right) = 0{,}386;$$

$$B = \frac{0{,}01 \cdot 10^4}{7 \cdot 10^{-5} \cdot 5^2 \cdot 10^6 \sin^2 30°}\left(\frac{4550}{4000} \cdot \frac{24}{23} - 1\right) = 0{,}0418$$

и определяем во втором приближении:

$$\Delta\bar{V}_n = 0{,}386 + \sqrt{0{,}386^2 - 0{,}0418} = 0{,}713;$$

$$\operatorname{tg}\theta_c = \frac{\frac{0{,}713}{\operatorname{tg} 20°} - \sqrt{\left(\frac{0{,}713}{\operatorname{tg} 20°}\right)^2 - 4\,(1 - 0{,}713)}}{2\,(1 - 0{,}713)} = 0{,}526,$$

откуда $\theta_c = 27°44'$.

Найденному значению $\theta_c = 27°44'$ соответствуют следующие параметры:

$$\frac{p_н}{p_\infty} = 1 + \frac{7 \cdot 10^{-5} \cdot 5^2 \cdot 10^6}{0{,}01 \cdot 10^4} 0{,}713 \sin^2 27° 44' = 3{,}70;$$

$$p_н = 3{,}70 \cdot 0{,}01 = 3{,}70 \cdot 10^{-2}\ кГ/см^2;$$

$$i_н = 8{,}8 \cdot 10^6 + \frac{5^2 \cdot 10^6}{2} \sin^2 27° 44' \cdot 0{,}713\,(2 - 0{,}713) = 11{,}3 \cdot 10^6\ м^2/сек^2.$$

Одновременно из i—S-диаграммы [17] по значениям $p_н$ и $i_н$ определяем температуру $T_н = 4420$ К. Теперь вновь можно подсчитать $A = = 0{,}368$ и $B = 0{,}0390$, что дает в третьем приближении значения $\Delta\bar{V}_n = = 0{,}679$ и $\operatorname{tg}\theta_c = 0{,}550$ ($\theta_c = 28°12'$), мало отличающиеся от найденных во втором приближении.

Принимая окончательно $\theta_c = 28°12'$, $p_н = 3{,}70 \cdot 10^{-2}$ *кГ/см²*, $i_н = = 11{,}3 \cdot 10^6$ *м²/сек²* и $T_н = 4420$ К, находим по $i - p$-диаграмме [17] энтропию $S_н = 14{,}1 \cdot 10^3$ *м²/(сек² · град)* и плотность $\rho_н = 2{,}25 \cdot 10^{-5}$ *кГ · сек²/м⁴*, а из диаграммы a—i по $i_н = 11{,}3 \cdot 10^6$ *м²/сек²* и $S_н = 14{,}1 \cdot 10^3$ *м²/(сек² × × град)* — скорость звука $a_н = 1430$ *м/сек*.

Далее вычисляем (см. задачу IV.51):

$$V_{нп} = 5000(1 - 0{,}679)\sin 28°\,12' = 759\ м/сек;$$

$$V_н = V_{нп}/\sin(\theta_c - \alpha) = 759/\sin(28°\,12' - 20°) = 5320\ м/сек;$$

$$M_н = V_н/a_н = 5320/1430 = 3{,}72$$

и определяем соответствующий коэффициент давления:

$$\bar{p}_н = \frac{2\,(p_н - p_\infty)}{\rho_\infty V_\infty^2} = \frac{2\,(3{,}7 \cdot 10^{-2} - 0{,}01)\,10^4}{7 \cdot 10^{-5} \cdot 5^2 \cdot 10^6} = 0{,}309.$$

По найденным значениям $\bar{p}_в$ и $\bar{p}_н$ вычисляем коэффициент нормальной силы:

$$c_N = \bar{p}_н - \bar{p}_в = 0{,}309 - (-0{,}097) = 0{,}406.$$

Очевидно, коэффициент продольной силы $c_R = 0$.

Коэффициент подъемной силы (в поточных координатах)

$$c_y = c_N \cos\alpha = 0{,}406 \cdot \cos 20° = 0{,}382,$$

а коэффициент волнового сопротивления

$$c_{xв} = c_N \sin\alpha = 0{,}406 \cdot \sin 20° = 0{,}139.$$

Коэффициент момента относительно передней кромки

$$-m_z = c_N\left(x_{\text{ц.д}}/b\right) = 0{,}406 \cdot 0{,}5 = 0{,}203.$$

По аэродинамическим коэффициентам подсчитываем для участка крыла площадью $S_{\text{кр}} = bl = 2 \cdot 5 = 10$ $м^2$ подъемную силу:

$$Y = c_y \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} S_{\text{кр}} = 0{,}382 \frac{7 \cdot 10^{-5} \cdot 5^2 \cdot 10^6}{2} 10 = 3{,}34 \cdot 10^3 \ кГ,$$

волновое сопротивление:

$$X_{\text{в}} = c_{x\text{в}} \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} S_{\text{кр}} = 0{,}139 \frac{7 \cdot 10^{-5} \cdot 5^2 \cdot 10^6}{2} 10 = 1{,}22 \cdot 10^3 \ кГ$$

и момент:

$$M_z = m_z \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} S_{\text{кр}}\, b = -0{,}203 \frac{7 \cdot 10^{-5} \cdot 5^2 \cdot 10^6}{2} 10 \cdot 2 = -3{,}55 \cdot 10^3 \ кГ \cdot м.$$

VII.25. Определим параметры набегающего потока диссоциирующего воздуха, воспользовавшись диаграммами термодинамических функций воздуха [17]. По давлению $p_\infty = 0{,}01$ $кГ/см^2$ и температуре $T_\infty = 4000$ K из i—p-диаграммы находим $i_\infty = 8{,}8 \cdot 10^6$ $м^2/сек^2$, $S_\infty = 13{,}1 \cdot 10^3$ $м^2/(сек^2 \cdot град)$, $\rho_\infty = 7 \cdot 10^{-5}$ $кГ \cdot сек^2/м^4$, а по значениям i_∞ и S_∞ из a—i-диаграммы — скорость звука $a_\infty = 1300$ $м/сек$. Затем определим энтальпию торможения:

$$i_0 = \frac{V_\infty^2}{2} + i_\infty = \frac{4^2 \cdot 10^6}{2} + 8{,}8 \cdot 10^6 = 16{,}8 \cdot 10^6 \ м^2/сек^2.$$

Теперь рассмотрим характер обтекания верхней стороны профиля, т. е. выясним, происходит ли оно со сжатием или с расширением потока. Для этого найдем угол заострения передней кромки, равный углу наклона касательной к контуру в точке $x = 0$:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \operatorname{tg}\beta_0 = 2\frac{\Delta}{b}\left(1 - \frac{2x}{b}\right)_{x=0} = \frac{2 \cdot 1}{10} = 0{,}2; \quad \beta_0 = 11^\circ 19'.$$

Заданный угол атаки ($\alpha = 17^\circ 11'$) больше этого угла заострения, поэтому обтекание верхней стороны происходит с р а с ш и р е н и е м.

Для расчета этого обтекания следует поступить следующим образом. Сначала по значениям $S_\infty = 13{,}1 \cdot 10^3$ $м^2/(сек^2 \cdot град)$, $i_0 = 16{,}8 \cdot 10^6$ $м^2/сек^2$, $V_\infty = 4000$ $м/сек$ из таблицы [23] найдем угол $\omega_\infty = 72{,}94^\circ (72^\circ 56')$. К этому значению ω_∞ прибавим угол $\Delta\beta_A$, на который отклоняется поток от направления V_∞ при обтекании контура в точке A. Для нахождения угла $\Delta\beta_A$ определим угол наклона касательной к контуру в этой точке ($x_A = 6$):

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_A=6} = \operatorname{tg}\beta_A = \frac{2y_m}{x_m}\left(1 - \frac{x}{x_m}\right)_{x_A=6} = \frac{2 \cdot 0{,}5}{5}\left(1 - \frac{6}{5}\right) = -0{,}04;$$

$$\beta_A \approx -2^\circ 18'.$$

Таким образом, угол, на который отклоняется поток,

$$\Delta\beta_A = \alpha - \beta_A = 17^\circ 11' - (-2^\circ 21') = 19^\circ 29'.$$

Соответствующая величина

$$\omega = \omega_\infty + \Delta\beta_A = 72°56' + 19°29' = 92°25' (92{,}42°).$$

Из таблиц [23] по этому значению $\omega = 92{,}42°$, а также величинам $S_\infty = 13{,}1 \cdot 10^3$ *м²/(сек²·град)* и $i_0 = 17 \cdot 10^6$ *м²/сек²* находим:

$$V_A = 4440 \text{ м/сек};\ i_A = 7{,}14 \cdot 10^6 \text{ м}^2/\text{сек}^2;\ a_A = 1140 \text{ м/сек};\ \mathbf{M}_A = 3{,}89.$$

По $i_A = 7{,}14 \cdot 10^6$ *м²/сек²* и $S_\infty = 13{,}1 \cdot 10^3$ *м²/(сек²·град)* из *i—S*-диаграммы [17] находим давление $p_A = 2{,}4 \cdot 10^{-3}$ *кГ/см²* и определяем соответствующий коэффициент давления:

$$\bar{p}_A = \frac{2(p_A - p_\infty)}{\rho_\infty V_\infty^2} = \frac{2(2{,}4 \cdot 10^{-3} - 0{,}01)\,10^4}{7 \cdot 10^{-5} \cdot 4^2 \cdot 10^6} = -0{,}136.$$

VII.26. Для решения задачи воспользуемся диаграммами термодинамических функций воздуха при высоких температурах [17]. По значениям $p_в = 0{,}01$ *кГ/см²* и $T_в = 3500$ К из *i—S*-диаграммы находим энтальпию $i_в = 7{,}75 \cdot 10^6$ *м²/сек²* и энтропию $S_в = 12{,}8 \cdot 10^3$ *м²/(сек²·град)*, а по $i_в$ и $S_в$ из диаграммы *a—i* — скорость звука $a_в = 1230$ *м/сек*. Соответствующее число Маха на верхней стороне $\mathbf{M}_в = V_в/a_в = 4000/1230 = 3{,}25$, а энтальпия торможения

$$i_0 = i_в + V_в^2/2 = 7{,}75 \cdot 10^6 + 4^2 \cdot 10^6/2 = 15{,}8 \cdot 10^6 \text{ м}^2/\text{сек}^2.$$

Из таблиц [23] по i_0, $S_в$ и $V_в$ находим угол $\omega_в = 73{,}42°$ (73°25′). Вычитая из него угол $\alpha = 20°$, получим $\omega_\infty = \omega_в - \alpha = 73°25' - 20° = 53°25'$. По этому значению угла, а также по i_0 и $S_в$ из тех же таблиц определим $V_\infty = 3440$ *м/сек*, $i_\infty = 9{,}90 \cdot 10^6$ *м²/сек²*, $a_\infty = 1370$ *м/сек*, а затем подсчитаем $\mathbf{M}_\infty = V_\infty/a_\infty = 3440/1370 = 2{,}52$. Наконец, по i_∞ и $S_\infty = S_в$ из *i—S*-диаграммы найдем давление $p_\infty = 5 \cdot 10^{-2}$ *кГ/см²*, плотность $\rho_\infty = 3 \cdot 10^{-4}$ *кГ·сек²/м⁴* и температуру $T_\infty = 4240$ К.

VII.27. Найдем параметры набегающего потока. Сначала по давлению $p_\infty = 0{,}01$ *кГ/см²* и температуре $T_\infty = 5000$ К по *i — p*-диаграмме [17] найдем энтальпию $i_\infty = 15{,}1 \cdot 10^6$ *м²/сек²*, энтропию $S_\infty = 14{,}5 \cdot 10^3$ *м²/(сек²·град)*, плотность $\rho_\infty = 5{,}2 \cdot 10^{-5}$ *кГ·сек²/м⁴*, а затем по энтальпии $i_\infty = 15{,}1 \cdot 10^6$ *м²/сек²* и энтропии $S_\infty = 14{,}5 \cdot 10^3$ *м²/(сек²·град)* из диаграммы *a — i* определим скорость звука $a_\infty = 1470$ *м/сек*. Соответствующее число Маха $\mathbf{M}_\infty = V_\infty/a_\infty = 4000/1470 = 2{,}72$.

Определим угол заострения профиля:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \operatorname{tg}\beta_0 = 2\frac{\Delta}{b}\left(1 - \frac{2x}{b}\right)_{x=0} = \frac{2 \cdot 1}{10} = 0{,}2;\ \beta_0 = 11°19'.$$

Таким образом, угол атаки $\alpha = 0{,}3$ *рад* (17°11′) больше угла заострения $\beta_0 = 11°19'$, поэтому обтекание нижней стороны будет происходить со сжатием, а верхней — с расширением. Заданная точка *A* расположена на верхней стороне, поскольку в ней число $\mathbf{M}_A = \mathbf{M}_\infty + 0{,}5 = 2{,}72 + 0{,}5 = 3{,}22$, т. е. больше числа Маха набегающего потока.

Координаты этой точки определяются следующим образом. Вычислим энтальпию торможения:

$$i_0 = \frac{V_\infty^2}{2} + i_\infty = \frac{4^2 \cdot 10^6}{2} + 15{,}1 \cdot 10^6 = 23{,}1 \cdot 10^6 \text{ м}^2/\text{сек}^2$$

и по ее значению для $S_\infty = 14{,}5 \cdot 10^3$ *м²/(сек²·град)* и $V_\infty = 4000$ *м/сек* из таблицы [23] найдем угол $\omega_\infty = 61{,}95°$ (61°57′). Из той же таблицы по

значениям i_0 и S_∞ для $\mathbf{M}_A=3{,}22$ определим для точки A угол $\omega_A=$ $=86{,}72°\,(86°43')$. Разность углов $\omega_A-\omega_\infty$ дает угол отклонения потока в точке A от направления $\overline{V}_\infty$:

$$\Delta\beta_A=\alpha-\beta_A=\omega_A-\omega_\infty=86°\,43'-61°\,57'=24°\,46'\,(24{,}77°).$$

Отсюда

$$\beta_A=\alpha-\Delta\beta_A=17°\,11'-24°\,46'=-7°\,35'\text{ и }\operatorname{tg}\beta_A=-0{,}133.$$

Продифференцируем уравнение верхнего контура:

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\beta=2\frac{\Delta}{b}\left(1-\frac{2x}{b}\right)=\frac{2\cdot1}{10}\left(1-\frac{2x}{10}\right)=0{,}2\,(1-0{,}2\,x).$$

В соответствии с этим

$$\operatorname{tg}\beta_A=0{,}2\,(1-0{,}2\,x_A),$$

откуда

$$x_A=\left(1-\frac{\operatorname{tg}\beta_A}{0{,}2}\right)\frac{1}{0{,}2}=\left(1-\frac{-0{,}133}{0{,}2}\right)\frac{1}{0{,}2}=8{,}33.$$

Вторая координата

$$y_A=2\Delta\,\frac{x_A}{b}\left(1-\frac{x_A}{b}\right)=2\cdot1\,\frac{8{,}33}{10}\left(1-\frac{8{,}33}{10}\right)=0{,}278.$$

VIII.1. Определим прежде всего характер передней кромки рассматриваемого крыла. Найдем угол Маха:

$$\mu_\infty = \arcsin\left(1/\mathbf{M}_\infty\right) = \arcsin\left(1/1{,}5\right) = 41^\circ 50'$$

и угол стреловидности передней кромки консоли:

$$\chi = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{l/2}{b_{кр}}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{\pi}{2} - 38^\circ 40' = 51^\circ 20'.$$

Поскольку $\mu_\infty > (\pi/2 - \chi)$, линия Маха проходит перед передней кромкой, которая, следовательно, будет дозвуковой (рис. 3.VIII.1).

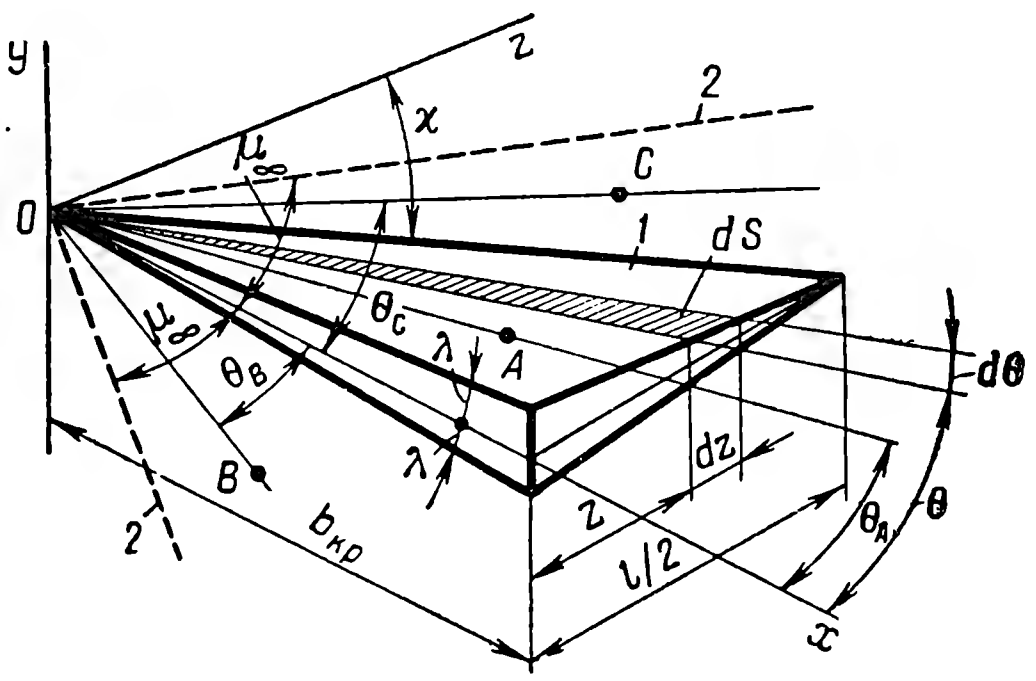


Рис. 3.VIII.1. К расчету обтекания треугольной консоли крыла с дозвуковой передней кромкой:

1 — консоль крыла; *2* — линии Маха

Для определения коэффициента давления в произвольной точке на поверхности консоли (например, в точке A, см. рис. 3.VIII.1) необходимо использовать следующую зависимость:

$$\bar{p} = \frac{2\lambda}{\pi\alpha' \sqrt{n^2-1}} \operatorname{arch} \frac{n^2 - \sigma}{n(1-\sigma)}, \qquad (3.\text{VIII.1})$$

где $\alpha' = \sqrt{\mathbf{M}_\infty^2 - 1}$; $n = \operatorname{tg}\chi/\alpha'$; $\sigma = \operatorname{tg}\chi \cdot \operatorname{tg}\theta$.

Из формулы (3.VIII.1) следует, что во всех точках на линии с углом θ ее наклона к оси x давление одинаково.

Произведем вычисления:

$$\alpha' = \sqrt{\mathbf{M}_\infty^2 - 1} = \sqrt{1{,}5^2 - 1} = 1{,}12;$$

$$n = \operatorname{tg}\chi/\alpha' = \operatorname{tg} 51^\circ 20'/1{,}12 = 1{,}12;$$

$$\sigma = \operatorname{tg}\chi \cdot \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg} 51^\circ 20' \cdot \operatorname{tg}\theta = 1{,}25 \operatorname{tg}\theta;$$

$$a = \frac{n^2 - \sigma}{n(1-\sigma)} = \frac{1{,}12^2 - 1{,}25\operatorname{tg}\theta}{1{,}12(1 - 1{,}25\operatorname{tg}\theta)} = \frac{1{,}12(1 - \operatorname{tg}\theta)}{1 - 1{,}25\operatorname{tg}\theta}. \qquad (3.\text{VIII.2})$$

После подстановки данных формула (3.VIII.1) принимает вид:

$$\bar{p} = \frac{2 \cdot 0{,}1}{\pi \cdot 1{,}12 \sqrt{1{,}12^2 - 1}} \operatorname{arch} a = 0{,}114 \operatorname{arch} a$$

или, используя зависимость $\operatorname{arch} a = 2{,}3 \lg\left(a + \sqrt{a^2-1}\right)$,

$$\bar{p} = 0{,}114 \cdot 2{,}3 \lg\left(a + \sqrt{a^2-1}\right) = 0{,}262 \lg\left(a + \sqrt{a^2-1}\right), \qquad (3.\text{VIII.3})$$

где a определяется по (3.VIII.2).

Для точек на поверхности крыла в корневом сечении $\theta = 0$, величина $a = 1{,}12$ и

$$\bar{p} = 0{,}262 \lg\left(1{,}12 + \sqrt{1{,}12^2 - 1}\right) = 0{,}0548.$$

Рассмотрим точку A на поверхности крыла, для которой примем $\operatorname{tg}\theta_A = 0{,}5$ ($\theta_A = 26^\circ 33'$). По (3.VIII.2) определяем $a = 1{,}12(1-0{,}5)/(1-1{,}25 \cdot 0{,}5) = 1{,}49$, а по (3.VIII.3) — коэффициент давления

$$\bar{p} = 0{,}262 \lg\left(1{,}49 + \sqrt{1{,}49^2 - 1}\right) = 0{,}108.$$

Аналогично находится коэффициент давления для других точек на поверхности крыла ($0<\theta<\pi/2-\chi$). При этом на передней кромке ($\sigma=1$) теоретический коэффициент давления, как следует из (3.VIII.1), равен бесконечности. Практически, на передней кромке, которая несколько скруглена, реализуется давление торможения, соответствующее дозвуковой скорости потока $V_{\infty n}=V_\infty\cos\chi$. По величине $\mathbf{M}_{\infty n}=\mathbf{M}_\infty\cos\chi=$ $=1{,}5\ \cos 51°20'=0{,}935$ находим коэффициент давления на передней кромке [см. (4.1.34)]:

$$\bar{p}_0=1+\frac{\mathbf{M}_{\infty n}^2}{4}+\frac{2-k}{24}\mathbf{M}_{\infty n}^4=1+\frac{0{,}935^2}{4}+\frac{2-1{,}4}{24}0{,}935^4=1{,}24.$$

Рассмотрим, как определяется коэффициент давления в точках, расположенных вне крыла. Коэффициент давления для точек, лежащих между боковой кромкой — осью x — и линией Маха (например, точка B на рис. 3.VIII.1), определится по формуле

$$\bar{p}=\frac{2\lambda}{\pi\alpha'\sqrt{n^2-1}}\operatorname{arch}\frac{n^2+\sigma}{n(1+\sigma)}. \qquad (3.VIII.4)$$

Найдем величину

$$a_1=\frac{n^2+\sigma}{n(1+\sigma)}=\frac{1{,}12^2+1{,}25\operatorname{tg}\theta}{1{,}12(1+1{,}25\operatorname{tg}\theta)}=\frac{1{,}12(1+\operatorname{tg}\theta)}{1+1{,}25\operatorname{tg}\theta}. \qquad (3.VIII.5)$$

Тогда, учитывая, что $\operatorname{arch}a_1=2{,}3\lg\ (a_1+\sqrt{a_1^2-1})$, запишем (3.VIII.4) в следующем виде:

$$\bar{p}=0{,}262\lg\left(a_1+\sqrt{a_1^2-1}\right). \qquad (3.VIII.6)$$

Примем для точки B значение $\operatorname{tg}\theta_B=0{,}5\,(\theta_B=26°33')$ и по формуле (3.VIII.5) найдем

$$a_1=\frac{1{,}12(1+0{,}5)}{1+1{,}25\cdot0{,}5}=1{,}033,$$

а по формуле (3.VIII.6) — коэффициент давления

$$\bar{p}=0{,}262\lg\left(1{,}033+\sqrt{1{,}033^2-1}\right)=0{,}0288.$$

Для линии $\theta=0$ формулы (3.VIII.5), (3.VIII.6) дают значения $a_1=$ $=a=1{,}12$ и $\bar{p}=0{,}0548$.

В точках вне крыла, расположенных между передней кромкой крыла и линией Маха (например, в точке C на рис. 3.VIII.1), коэффициент давления

$$\bar{p}=\frac{2\lambda}{\pi\alpha'\sqrt{n^2-1}}\operatorname{arch}\frac{n^2-\sigma}{n(\sigma-1)}. \qquad (3.VIII.7)$$

После подстановки данных и использования зависимости $\operatorname{arch}a_2=$ $=2{,}3\ \lg(a_2+\sqrt{a_2^2-1})$ формула (3.VIII.7) получает вид:

$$\bar{p}=0{,}262\lg\left(a_2+\sqrt{a_2^2-1}\right), \qquad (3.VIII.8)$$

где

$$a_2=\frac{n^2-\sigma}{n(\sigma-1)}=\frac{1{,}12(1-\operatorname{tg}\theta)}{1{,}25\operatorname{tg}\theta-1}. \qquad (3.VIII.9)$$

Например, для точки C примем $\theta_C=40°\,(\pi/2-\chi<\theta_C<\mu_\infty)$. Тогда в соответствии с формулами (3.VIII.9) и (3.VIII.8) найдем:

$$a_2=\frac{1{,}12(1-\operatorname{tg}40°)}{1{,}25\operatorname{tg}40°-1}=3{,}76;$$

$$\bar{p}=0{,}262\lg\left(3{,}76+\sqrt{3{,}76^2-1}\right)=0{,}227.$$

На линии Маха, для которой $\theta = \mu_\infty$, имеем

$$\sigma = \operatorname{tg}\chi \operatorname{tg}\mu_\infty = \operatorname{tg}\chi \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} = \frac{\operatorname{tg}\chi}{\alpha'} = n.$$

Из формулы (3.VIII.9) следует, что

$$a_2 = \frac{n^2 - \sigma}{n(\sigma - 1)} = \frac{n^2 - n}{n(n-1)} = 1.$$

Тогда, согласно (3.VIII.8)

$$\bar{p} = 0{,}262 \lg\left(1 + \sqrt{1^2 - 1}\right) = 0.$$

Вычислим волновое сопротивление рассматриваемой консоли. Сначала определим элементарную величину этой силы, действующую на площадку $dS = (1/2)\, b_{кр} dz$ (см. рис. 3.VIII.1):

$$dX_в = (p - p_\infty)\, dS\lambda.$$

Принимая во внимание, что давление действует на обе (верхнюю и нижнюю) стороны крыла, и интегрируя по всей поверхности, найдем силу волнового сопротивления:

$$X_в = 2\int_S (p - p_\infty)\, \lambda dS,$$

откуда, учитывая, что $c_{xв} = X_в/(q_\infty S_{кр})$,

$$c_{xв} = 2\int_0^1 \bar{p}\lambda d\bar{S}, \qquad (3.VIII.10)$$

где $d\bar{S} = d(S/S_{кр})$.

Так как $z/b_{кр} = \operatorname{tg}\theta$, то

$$dS = (1/2)\, b_{кр}^2\, d(\operatorname{tg}\theta)$$

или, имея в виду, что $\sigma = \operatorname{tg}\chi \cdot \operatorname{tg}\theta$,

$$dS = (1/2) b_{кр}^2\, (d\sigma/\operatorname{tg}\chi).$$

Разделив на площадь консоли крыла $S_{кр} = b_{кр}(l/2)/2$ и учитывая, что $(l/2)\ (b_{кр}) = 1/\operatorname{tg}\chi$, получим

$$d\bar{S} = d(S/S_{кр}) = d\sigma. \qquad (3.VIII.11)$$

С учетом (3.VIII.11) и (3.VIII.1) формула (3.VIII.10) примет вид

$$c_{xв} = 2\int_0^1 \frac{2\lambda^2}{\pi\alpha'\sqrt{n^2 - 1}} \operatorname{arch}\frac{n^2 - \sigma}{n(1 - \sigma)}\, d\sigma,$$

или после подстановки данных

$$c_{xв} = 0{,}0227\int_0^1 \operatorname{arch}\frac{1{,}25 - \sigma}{1{,}12(1 - \sigma)}\, d\sigma. \qquad (3.VIII.12)$$

Расчет коэффициента волнового сопротивления по (3.VIII.12) проведем путем графического интегрирования, полагая, что на передней кромке ($\sigma = 1$) коэффициент давления равен определенной ранее величине $\bar{p}_0$. Из формул (3.VIII.10) и (3.VIII.12) найдем соответствующее значение

$$\operatorname{arch}\frac{1{,}25 - \sigma}{1{,}12(1 - \sigma)} = \frac{2\lambda\bar{p}_0}{0{,}0227} = \frac{2 \cdot 0{,}1 \cdot 1{,}24}{0{,}0227} = 10{,}9.$$

Определив, таким образом, значение подынтегральной функции

$$c = \operatorname{arch} \frac{1{,}25 - \sigma}{1{,}12\,(1-\sigma)}$$

при $\sigma = 1$, строим далее кривую $c = f(\sigma)$ по ряду значений $\sigma\,(0 \leqslant \sigma \leqslant 1)$ и c (рис. 3.VIII.2) и определяем площадь F, $мм^2$ под этой кривой. Коэффициент волнового сопротивления

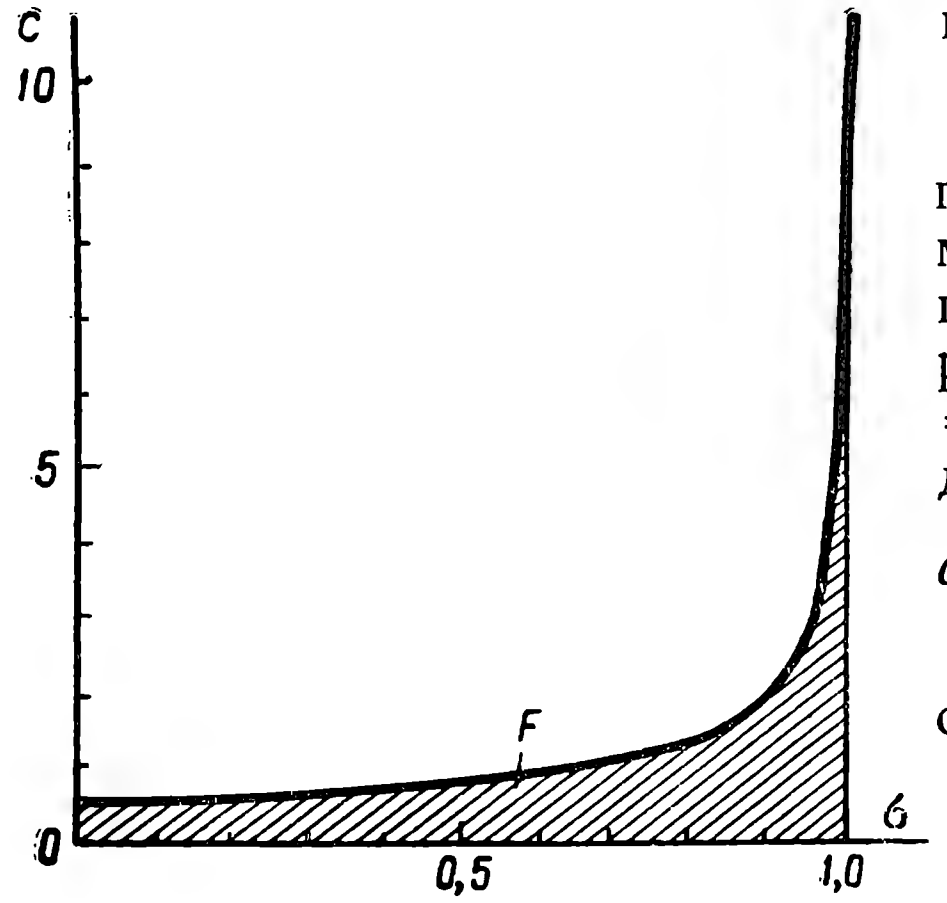


Рис. 3.VIII.2. Кривая зависимости $c = f(\sigma)$ для треугольной консоли крыла с дозвуковой передней кромкой

$$c_{x\text{в}} = 0{,}0227\, F \mu_c \mu_\sigma,$$

где μ_c и μ_σ, $1/мм$ — соответственно масштабы по осям ординат и абсцисс величин c и σ. Как показали расчеты, $F = 1100\ мм^2$ (при $\mu_c = 10^{-1}\ 1/мм$ и $\mu_\sigma = 10^{-2}\ 1/мм$). Следовательно,

$$c_{x\text{в}} = 0{,}0227 \cdot 1100 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-2} = 0{,}025.$$

Для заданных размеров консоли сила волнового сопротивления

$$X_\text{в} = c_{x\text{в}} q_\infty S_\text{кр} = c_{x\text{в}} \frac{k p_\infty \mathbf{M}_\infty^2}{2} \times$$

$$\times \frac{b_\text{кр}\,(l/2)}{2} = 0{,}025 \frac{1{,}4 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 1{,}5^2}{2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} =$$

$$= 3{,}94 \cdot 10^3\ кГ.$$

VIII.2. Из решения задачи VIII.1 имеем угол Маха $\mu_\infty = 41°50'$ и угол стреловидности $\chi = 51°20'$ (рис. 3.VIII.3). Из этих данных следует, что $\mu_\infty > (\pi/2 - \chi)$ и, следовательно, передние кромки крыла являются дозвуковыми (линии Маха располагаются перед этими кромками, как показано на рис. 3.VIII.3). С учетом этого выбираем соответствующие расчетные зависимости.

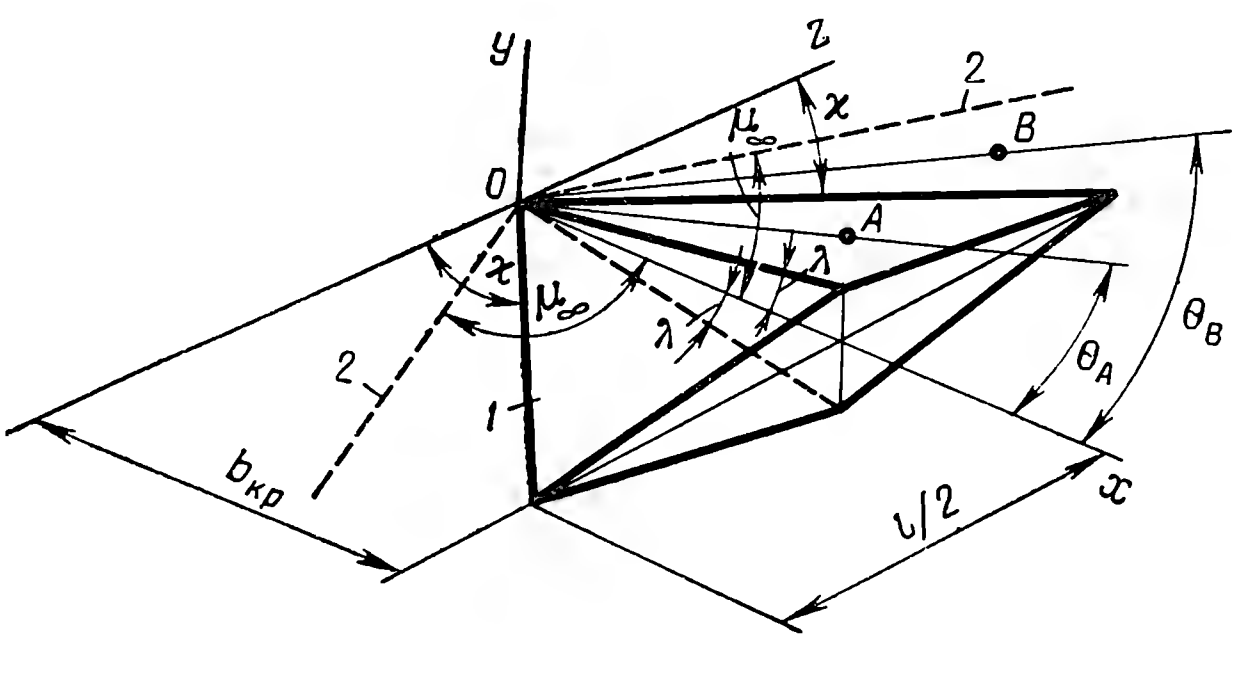


Рис. 3.VIII.3. К расчету обтекания треугольного крыла с дозвуковыми передними кромками:

1 — крыло; *2* — линии Маха

Коэффициент давления в произвольной точке на поверхности крыла

$$\bar{p} = \frac{4\lambda}{\pi \alpha' \sqrt{n^2 - 1}} \operatorname{arch} \sqrt{\frac{n^2 - \sigma^2}{1 - \sigma^2}}, \qquad (3.\text{VIII}.13)$$

где $\alpha' = \sqrt{\mathbf{M}_\infty^2 - 1} = \sqrt{1{,}5^2 - 1} = 1{,}12;$

$$n = \operatorname{tg} \chi / \alpha' = \operatorname{tg} 51°\,20' / 1{,}12 = 1{,}12;$$

$$\sigma = \operatorname{tg} \chi \cdot \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} 51°\,20' \cdot \operatorname{tg} \theta = 1{,}25 \cdot \operatorname{tg} \theta$$

После подстановки этих данных получаем

$$\bar{p} = \frac{4 \cdot 0{,}1}{\pi \cdot 1{,}12 \sqrt{1{,}12^2 - 1}} \operatorname{arch} \sqrt{\frac{1{,}12^2 - 1{,}25^2 \operatorname{tg}^2 \theta}{1 - 1{,}25^2 \operatorname{tg}^2 \theta}} =$$

$$= 0{,}227 \operatorname{arch} \sqrt{\frac{1{,}25 - 1{,}56 \operatorname{tg}^2 \theta}{1 - 1{,}56 \operatorname{tg}^2 \theta}}$$

или, используя соотношение $\operatorname{arch} a = 2{,}3 \lg (a + \sqrt{a^2 - 1})$,

$$\bar{p} = 0{,}522 \lg \left(a + \sqrt{a^2 - 1}\right), \qquad (3.\text{VIII}.14)$$

где

$$a = \sqrt{\frac{1{,}25 - 1{,}56 \operatorname{tg}^2 \theta}{1 - 1{,}56 \operatorname{tg}^2 \theta}}. \qquad (3.\text{VIII}.15)$$

Для точек профиля, лежащих в корневом сечении крыла, $\theta = 0$, $a = \sqrt{1{,}25}$ и

$$\bar{p} = 0{,}522 \lg \left[\sqrt{1{,}25} + \sqrt{\left(\sqrt{1{,}25}\right)^2 - 1}\right] = 0{,}110.$$

Для точек на крыле (в частности, точка A на рис. 3.VIII.3), для которых $\sigma = 0{,}5$ и, следовательно, $\theta = \theta_A = \operatorname{arctg}(\sigma / \operatorname{tg} \chi) = \operatorname{arctg}(0{,}5 / \operatorname{tg} 51°20') = 21°48'$, найдем:

$$a = \sqrt{\frac{1{,}25 - 1{,}56 \operatorname{tg}^2 21° 48'}{1 - 1{,}56 \operatorname{tg}^2 21° 48'}} = \sqrt{\frac{4}{3}};$$

$$\bar{p} = 0{,}522 \lg \left[\sqrt{\frac{4}{3}} + \sqrt{\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 - 1}\right] = 0{,}124.$$

Для точек, близко расположенных к передней кромке ($\operatorname{tg} \theta \to 1 / \operatorname{tg} \chi$, откуда $\sigma \to 1$), $\bar{p} \to \infty$ [см. формулу (3.VIII.13)].

Рассмотрим область между передней кромкой и линией Маха. Здесь коэффициент давления определяется по формуле

$$\bar{p} = \frac{4\lambda}{\pi \alpha' \sqrt{n^2 - 1}} \operatorname{arch} \sqrt{\frac{n^2 - 1}{\sigma^2 - 1}}. \qquad (3.\text{VIII}.16)$$

После подстановки известных величин получим

$$\bar{p} = \frac{4 \cdot 0{,}1}{\pi \cdot 1{,}12 \sqrt{1{,}12^2 - 1}} \operatorname{arch} \sqrt{\frac{1{,}12^2 - 1}{1{,}25^2 \operatorname{tg}^2 \theta - 1}},$$

или, используя соотношение $\operatorname{arch} a_1 = 2{,}3 \lg (a_1 + \sqrt{a_1^2 - 1})$,

$$\bar{p} = 0{,}522 \lg \left(a_1 + \sqrt{a_1^2 - 1}\right), \qquad (3.\text{VIII}.17)$$

где

$$a_1 = 0{,}5 / \sqrt{1{,}56 \operatorname{tg}^2 \theta - 1}. \qquad (3.\text{VIII}.18)$$

На линии Маха, где $\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \mu_\infty = \operatorname{tg} 41°50'$,

$$a_1 = \frac{0{,}5}{\sqrt{1{,}56 \operatorname{tg}^2 41° 50' - 1}} = 1;$$

$$\bar{p} = 0{,}522 \lg \left(1 - \sqrt{1^2 - 1}\right) = 0.$$

На произвольной линии с углом θ (при $\pi/2 - \chi < \theta < \mu_\infty$), в частности

для точки B, для которой $\theta_B=41°$ (см. рис. 3.VIII.3), находим

$$a_1=\frac{0{,}5}{\sqrt{1{,}56\,\mathrm{tg}^2\,41°-1}}=1{,}19;$$

$$\bar{p}=0{,}522\lg\left(1{,}19+\sqrt{1{,}19^2-1}\right)=0{,}138.$$

Для другой консоли крыла и области между передней кромкой и линией Маха расчет ведется аналогичным образом.

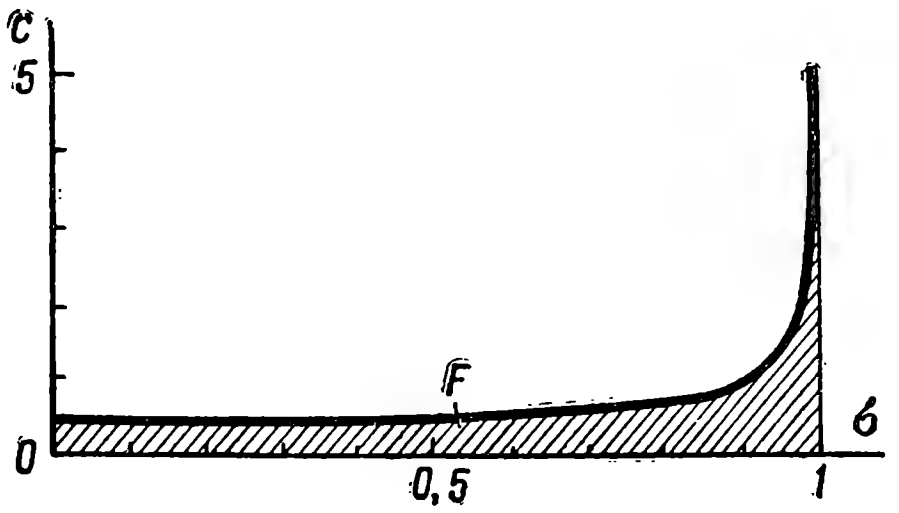


Рис. 3.VIII.4. Кривая зависимости $c=f(\sigma)$ для треугольного крыла с дозвуковыми передними кромками

Вычислим теперь коэффициент волнового сопротивления. Поскольку $S_{кр}=(b_{кр}l)/2$, вместо (3.VII.11) получим соотношение

$$d\bar{S}=d\sigma/2. \qquad (3.VIII.11')$$

Учитывая (3.VIII.11′) и принимая во внимание, что коэффициент давления определяется по (3.VIII.13), а крыло состоит из двух консолей, соединенных вместе, выражение (3.VIII.10) можно записать в следующем виде:

$$c_{xв}=\frac{X_в}{q_\infty S_{кр}}=\frac{1}{2}\,2\cdot 2\int_0^1\bar{p}\lambda\,d\sigma=$$

$$=\frac{8\lambda^2}{\pi\alpha'\sqrt{n^2-1}}\int_0^1\mathrm{arch}\sqrt{\frac{n^2-\sigma^2}{1-\sigma^2}}\,d\sigma. \qquad (3.VIII.19)$$

После интегрирования по частям получаем

$$c_{xв}=\frac{8\lambda^2}{\pi\alpha'\sqrt{n^2-1}}\left(\ln n+\sqrt{n^2-1}\arcsin\frac{1}{n}\right) \qquad (3.VIII.20)$$

или, подставляя данные,

$$c_{xв}=\frac{8\cdot 0{,}1^2}{\pi\cdot 1{,}12\sqrt{1{,}12^2-1}}\left(\ln 1{,}12+\sqrt{1{,}12^2-1}\arcsin\frac{1}{1{,}12}\right)=0{,}12.$$

Полученное теоретическое значение коэффициента волнового сопротивления является завышенным. Это объясняется тем, что, как отмечалось ранее, на передней кромке ($\sigma=1$) вычисленный коэффициент давления равен бесконечности [см. (3.VIII.13)], тогда как практически на ней реализуется давление торможения дозвукового потока, имеющего скорость $V_{\infty n}$. Воспользовавшись найденным в задаче VIII.1 значением этого коэффициента давления $\bar{p}_0=1{,}24$, определим входящее в (3.VIII.19) значение

$$\mathrm{arch}\sqrt{\frac{n^2-\sigma^2}{1-\sigma^2}}=\frac{2\lambda\pi\alpha'\sqrt{n^2-1}\,\bar{p}_0}{8\lambda^2}=\frac{2\cdot 0{,}1\cdot\pi\cdot 1{,}12\sqrt{1{,}12^2-1}\,1{,}24}{8\cdot 0{,}1^2}=5{,}45.$$

Определив таким образом значение подынтегральной функции при $\sigma=1$, находим коэффициент волнового сопротивления по (3.VIII.19) графическим интегрированием. Для этого строим кривую $c=f(\sigma)$ [где $f(\sigma)=\mathrm{arch}\sqrt{(n^2-\sigma^2)/(1-\sigma^2)}$] по ряду значений $\sigma(0\leqslant\sigma\leqslant 1)$ (рис. 3.VIII.4) и определяем площадь F, $мм^2$, под этой кривой. Соответствующий коэффициент волнового сопротивления

$$c_{xв}=\frac{8\lambda^2}{\pi\alpha'\sqrt{n^2-1}}F\mu_c\mu_\sigma,$$

где μ_c и μ_σ, $1/мм$ — соответственно масштабы по осям ординат и абсцисс величин c и σ. Как показали расчеты, $F=695\ мм^2$ (при $\mu_c=10^{-1}\ 1/мм$ и $\mu_\sigma=10^{-2}\ 1/мм$). В этом случае

$$c_{xв}=\frac{8\cdot 0,1^2}{\pi\cdot 1,12\sqrt{1,12^2-1}}\,695\cdot 10^{-1}\cdot 10^{-2}=0,032.$$

По этому коэффициенту вычисляем силу волнового сопротивления:

$$X_в=c_{xв}\,q_\infty\,S_{кр}=c_{xв}\,\frac{kp_\infty\,M_\infty^2}{2}\,2\,\frac{b_{кр}\,(l/2)}{2}=$$

$$=0,032\,\frac{1,4\cdot 1\cdot 10^4\cdot 1,5^2}{2}\,2\,\frac{5\cdot 4}{2}=9,9\cdot 10^3\ кГ.$$

VIII.3. Определим угол наклона линии Маха:

$$\mu_\infty=\arcsin\left(1/M_\infty\right)=\arcsin\left(1/2,5\right)=23^\circ 35'.$$

Из решения задачи VIII.1 находим угол стреловидности крыла $\chi=51^\circ 20'$. Поскольку выполняется условие $\mu_\infty<(\pi/2-\chi)$, передние кромки будут сверхзвуковыми (линии Маха проходят на поверхности крыла, как показано на рис. 3.VIII.5).

Соответствующая зависимость для коэффициента давления в точках на поверхности крыла между линией Маха и передней кромкой имеет вид

$$\bar{p}=2\lambda/\left(\alpha'\sqrt{1-n^2}\right),\quad (3.VIII.21)$$

где

$$\alpha'=\sqrt{M_\infty^2-1}=$$

$$=\sqrt{2,5^2-1}=2,29;$$

$$n=\operatorname{tg}\chi/\alpha'=\operatorname{tg}51^\circ 20'/2,29=0,546.$$

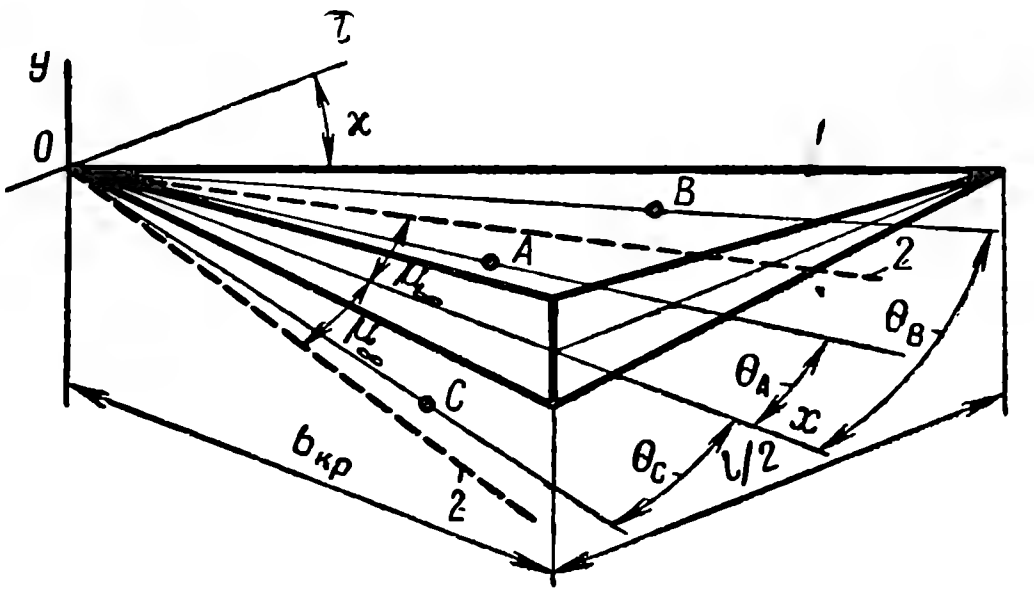


Рис. 3.VIII.5. К расчету обтекания треугольной консоли крыла со сверхзвуковой передней кромкой:

1 — консоль крыла; *2* — линии Маха

Таким образом, для всех точек в этой области (в том числе для точки B, см. рис. 3.VIII.5) коэффициент давления будет одинаковым и равным

$$\bar{p}=2\cdot 0,1/\left(2,29\sqrt{1-0,546^2}\right)=0,104.$$

В области между боковой кромкой и линией Маха этот коэффициент

$$\bar{p}=\frac{2\lambda}{\alpha'\sqrt{1-n^2}}\left[1-\frac{1}{\pi}\arccos\frac{\sigma-n^2}{n\,(1-\sigma)}\right].\quad (3.VIII.22)$$

Вносим в эту формулу известные величины:

$$\bar{p}=\frac{2\cdot 0,1}{2,29\sqrt{1-0,546^2}}\left[1-\frac{1}{\pi}\arccos\frac{\sigma-0,546^2}{0,546\,(1-\sigma)}\right]=$$

$$=0,104\left[1-\frac{1}{\pi}\arccos\frac{\sigma-0,298}{0,546\,(1-\sigma)}\right],\quad (3.VIII.23)$$

где $\sigma=\operatorname{tg}\chi\cdot\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}51^\circ 20'\cdot\operatorname{tg}\theta=1,25\cdot\operatorname{tg}\theta$.

Для корневой хорды ($\theta=0$; $\sigma=0$)

$$\bar{p}=0,104\left[1-\frac{1}{\pi}\arccos\left(-0,546\right)\right]=0,0333.$$

Для точек на линии Маха, где $\theta=\mu_\infty$ и $\sigma=\operatorname{tg}\chi\cdot\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}\chi\cdot\operatorname{tg}\mu_\infty=$ $=\operatorname{tg}\chi/\alpha'=n$, получим из (3.VIII.22)

$$\bar{p}=\frac{2\lambda}{\alpha'\sqrt{1-n^2}}=0{,}104,$$

т. е. давление будет такое же, как на участке между передней кромкой и линией Маха.

Для произвольной точки A давление определяется следующим образом. Пусть $\theta_A=20°$, тогда $\sigma=\operatorname{tg}\chi\cdot\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}51°20'\cdot\operatorname{tg}20°=0{,}455$ и согласно формуле (3.VIII.23)

$$\bar{p}=0{,}104\left[1-\frac{1}{\pi}\arccos\frac{0{,}455-0{,}298}{0{,}546\,(1-0{,}455)}\right]=0{,}0707.$$

Рассмотрим область между боковой кромкой и линией Маха. Здесь коэффициент давления

$$\bar{p}=\frac{2\lambda}{\pi\alpha'\sqrt{1-n^2}}\arccos\frac{n^2+\sigma}{n\,(1+\sigma)}. \qquad \text{(3.VIII.24)}$$

После подстановки данных в (3.VIII.24) получим

$$\bar{p}=\frac{2\cdot01}{\pi\cdot2{,}29\sqrt{1-0{,}546^2}}\arccos\frac{0{,}546^2+\sigma}{0{,}546\,(1+\sigma)}=$$

$$=\frac{0{,}104}{\pi}\arccos\frac{0{,}298+\sigma}{0{,}546\,(1+\sigma)}, \qquad \text{(3.VIII.25)}$$

где $\sigma=\operatorname{tg}\chi\cdot\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}51°20'\cdot\operatorname{tg}\theta=1{,}25\cdot\operatorname{tg}\theta$.

В корневом сечении ($\theta=0$; $\sigma=0$)

$$\bar{p}=\frac{0{,}104}{\pi}\arccos\frac{0{,}298}{0{,}546}=0{,}333.$$

На линии Маха, где $\theta=\mu_\infty$ и $\sigma=\operatorname{tg}\chi\cdot\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}\chi\cdot\operatorname{tg}\mu_\infty=\operatorname{tg}\chi/\alpha'=n$, как следует из формулы (3.VIII.24),

$$\bar{p}=\frac{2\lambda}{\pi\alpha'\sqrt{1-n^2}}\arccos\frac{n^2+n}{n\,(1+n)}=0.$$

Теперь определим коэффициент волнового сопротивления, используя формулы (3.VIII.10), (3.VIII.11), причем коэффициент давления в (3.VIII.10) заменяется выражениями (3.VIII.21) и (3.VIII.22) соответственно для двух областей крыла. Получим

$$c_{x\text{в}}=\frac{X_\text{в}}{q_\infty S_\text{кр}}=2\left\{\int_n^1\frac{2\lambda^2}{\alpha'\sqrt{1-n^2}}\,d\sigma+\int_0^n\frac{2\lambda^2}{\alpha'\sqrt{1-n^2}}\left[1-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\pi}\arccos\frac{\sigma-n^2}{n\,(1-\sigma)}\right]d\sigma\right\}=2\left[\frac{2\lambda^2}{\alpha'\sqrt{1-n^2}}\left(\int_n^1 d\sigma+\int_0^n d\sigma\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{2\lambda^2}{\alpha'\sqrt{1-n^2}\,\pi}\int_0^n\arccos\frac{\sigma-n^2}{n\,(1-\sigma)}\,d\sigma\right]=\frac{4\lambda^2}{\alpha'\sqrt{1-n^2}}\left[1-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\pi}\int_0^n\arccos\frac{\sigma-n^2}{n\,(1-\sigma)}\,d\sigma\right]=0{,}0208\times$$

$$\times\left[1-\frac{1}{\pi}\int_0^{0{,}546}\arccos\frac{\sigma-0{,}298}{0{,}546\,(1-\sigma)}\,d\sigma\right]. \qquad \text{(3.VIII.26)}$$

Представим (3.VIII.26) в следующем виде:

$$c_{xв} = 0{,}0208\,(1 - A/\pi), \qquad (3.VIII.26')$$

где $A = \int_0^{0{,}546} c\,d\sigma$; $c = \arccos a$; $a = (\sigma - 0{,}298)/[0{,}546(1-\sigma)]$. Задаваясь рядом значений σ, определим a и c (см. табл. 3.VIII.1).

По данным табл. 3.VIII.1 строим график $c = f(\sigma)$ (рис. 3.VIII.6) и определяем площадь F, $мм^2$, под кривой. При выбранных масштабах $\mu_c = 2 \cdot 10^{-2}$ и $\mu_\sigma = 10^{-2}$ $1/мм$ эта площадь $F = 4000$ $мм^2$. Соответствующее значение

Таблица 3.VIII.1

σ	a	c
0	—0,546	2,15
0,1	—0,402	1,98
0,2	—0,224	1,80
0,3	0,005	1,57
0,4	0,313	1,25
0,5	0,740	0,74
0,546	1,000	0,00

$$A = \int_0^{0{,}546} c\,d\sigma = F\mu_c\mu_\sigma = 4000 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-2} = 0{,}8,$$

а коэффициент волнового сопротивления

$$c_{xв} = 0{,}0208\,(1 - 0{,}8/\pi) = 0{,}016.$$

По этому коэфициенту определяем волновое сопротивление:

$$X_в = c_{xв} q_\infty S_{кр} = c_{xв} \frac{kp_\infty M_\infty^2}{2} \cdot \frac{b_{кр}\,(l/2)}{2} =$$

$$= 0{,}016 \frac{1{,}4 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 2{,}5^2}{2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 7 \cdot 10^3\ кГ.$$

VIII.4. Из решения задачи VIII.3 следует, что угол $\mu_\infty = 23°35'$, а из решения задачи VIII.1 — угол $\chi = 51°20'$. Так как выполняется условие $\mu_\infty < (\pi/2 - \chi)$, т. е. линии Маха проходят за передними кромками по поверхности крыла, как показано на рис. 3.VIII.7, то передние кромки будут сверхзвуковыми.

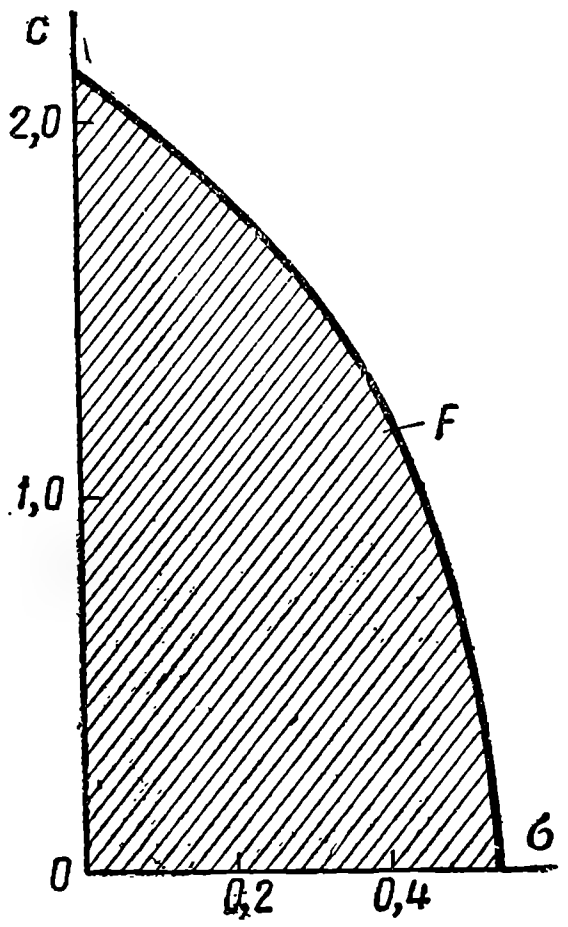


Рис. 3.VIII.6. График функции $c = f(\sigma)$ для треугольной консоли крыла со сверхзвуковой передней кромкой

Коэффициент давления в любой точке на поверхности крыла в области между передней кромкой и линией Маха (в частности, в точке B, см. рис. 3.VIII.7) один и тот же. Его величина определяется по формуле (3.VIII.21) и, как следует из решения задачи VIII.3, равна 0,104.

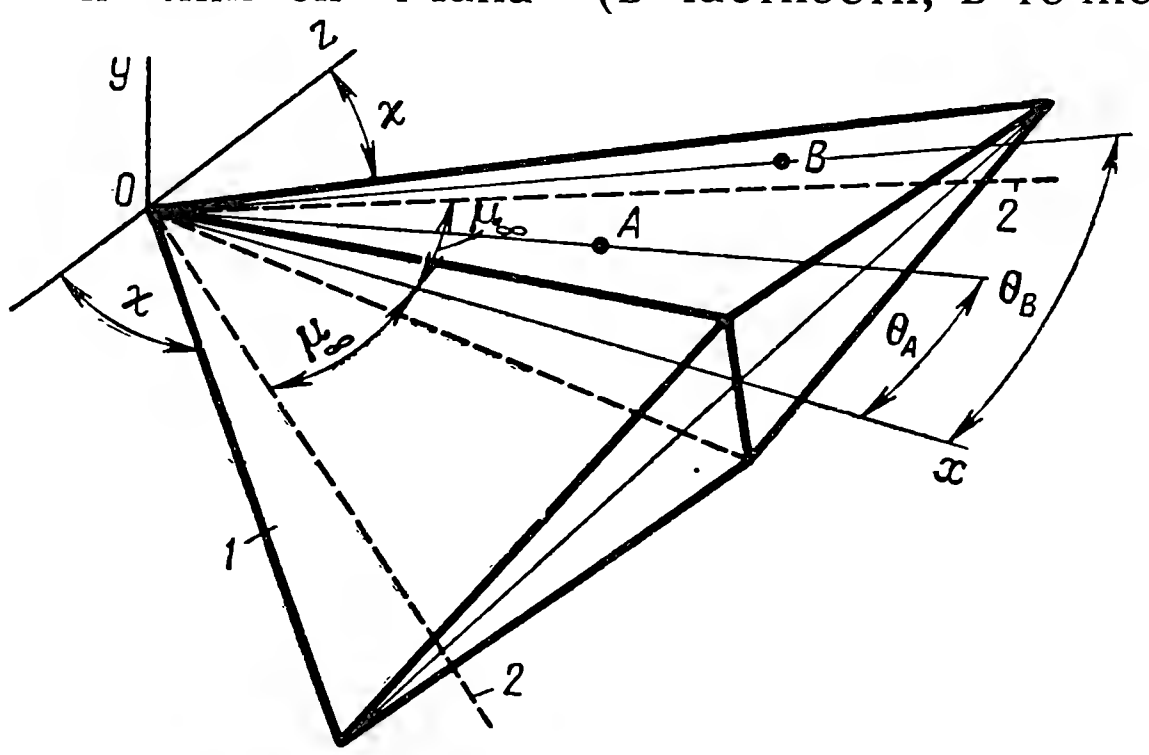


Рис. 3.VIII.7. К расчету обтекания треугольного крыла со сверхзвуковыми передними кромками:

1 — крыло; *2* — линии Маха

В области между линиями Маха коэффициент давления на поверхности крыла

$$\bar{p} = \frac{2\lambda}{\alpha' \sqrt{1-n^2}} \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{n^2-\sigma^2}{1-\sigma^2}}\right), \qquad (3.VIII.27)$$

где $\alpha' = 2{,}29$, $n = 0{,}546$, $\lambda = 0{,}1$ (см. решение задачи VIII.3). Внося эти величины в (3.VIII.27), получим

$$\bar{p} = \frac{2 \cdot 0{,}1}{2{,}29 \sqrt{1-0{,}546^2}} \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{0{,}546^2-\sigma^2}{1-\sigma^2}}\right) =$$

$$= 0{,}104 \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{0{,}298-\sigma^2}{1-\sigma^2}}\right).$$

Для точек, лежащих в корневом сечении крыла ($\theta = 0$; $\sigma = 0$),

$$\bar{p} = 0{,}104 \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{0{,}298}\right) = 0{,}0657.$$

На линии Маха, где $\theta = \mu_\infty$ и $\sigma = n = 0{,}546$, согласно (3.VIII.27) коэффициент давления

$$\bar{p} = 2\lambda / \left(\alpha' \sqrt{1-n^2}\right) = 0{,}104.$$

Для произвольной точки A (см. рис. 3.VIII.7), расположенной внутри угла Маха, коэффициент давления определяется следующим образом. Пусть $\theta_A = 20°$, тогда $\sigma = \operatorname{tg}\chi \cdot \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg} 51°20' \cdot \operatorname{tg} 20° = 0{,}455$ и по формуле (3.VIII.27) находим

$$\bar{p} = 0{,}104 \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{0{,}298-0{,}455^2}{1-0{,}455^2}}\right) = 0{,}0640.$$

Определим коэффициент волнового сопротивления, воспользовавшись формулами (3.VIII.10), (3.VIII.11′), (3.VIII.21), (3.VIII.27) и учитывая, что крыло состоит из двух консолей:

$$c_{x\text{в}} = \frac{X_\text{в}}{q_\infty S_\text{кр}} = \frac{1}{2} 2 \cdot 2 \left[\int_n^1 \frac{2\lambda^2}{\alpha' \sqrt{1-n^2}} d\sigma + \right.$$

$$\left. + \int_0^n \frac{2\lambda^2}{\alpha' \sqrt{1-n^2}} \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{n^2-\sigma^2}{1-\sigma^2}}\right) d\sigma\right] =$$

$$= \frac{4\lambda^2}{\alpha' \sqrt{1-n^2}} \left(1 - \frac{2}{\pi} \int_0^n \arcsin \sqrt{\frac{n^2-\sigma^2}{1-\sigma^2}} d\sigma\right). \qquad (3.VIII.28)$$

Так как

$$\int_0^n \arcsin \sqrt{\frac{n^2-\sigma^2}{1-\sigma^2}} d\sigma = \frac{\pi}{2} \left(1 - \sqrt{1-n^2}\right),$$

то в соответствии с (3.VIII.28) коэффициент волнового сопротивления

$$c_{x\text{в}} = 4\lambda^2/\alpha' = 4 \cdot 0{,}1^2/2{,}29 = 0{,}017.$$

Сила волнового сопротивления

$$X_\text{в} = c_{x\text{в}} q_\infty S_\text{кр} = c_{x\text{в}} \frac{k p_\infty M_\infty^2}{2} \cdot \frac{b_\text{кр}\, l}{2} = 0{,}017 \frac{1{,}4 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 2{,}5^2}{2} 5 \cdot 4 = 14{,}9 \cdot 10^3 \text{ кГ}.$$

VIII.5. Определим угол Маха:

$$\mu_\infty = \arcsin(1/M_\infty) = \arcsin(1/1{,}3) = 50°\,18'$$

и углы стреловидности передней и средней кромок (рис. 3.VIII.8):

$$\chi_1 = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{l/2}{b_{кр}}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{6/2}{5}\right) = 59°;$$

$$\chi_2 = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{l/2}{b_{кр} - b'}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{6/2}{5-2}\right) = 45°.$$

Поскольку $\mu_\infty > (\pi/2 - \chi_1)$ и $\mu_\infty > (\pi/2 - \chi_2)$, обе кромки дозвуковые и линии Маха, проведеные из точек O и O_1 крыла, проходят перед ними.

Определим распределение давления по крылу. В области OAO_1 (или OA_1O_1) коэффициент давления будет постоянным вдоль лучей, выходящих из вершины крыла O под углом θ к оси x, и определяется по формуле

$$\bar{p} = \frac{4\lambda_1}{\pi\alpha' \sqrt{n_1^2 - 1}} \times \operatorname{arch} \sqrt{\frac{n_1^2 - \sigma_1^2}{1 - \sigma_1^2}}, \quad (3.VIII.29)$$

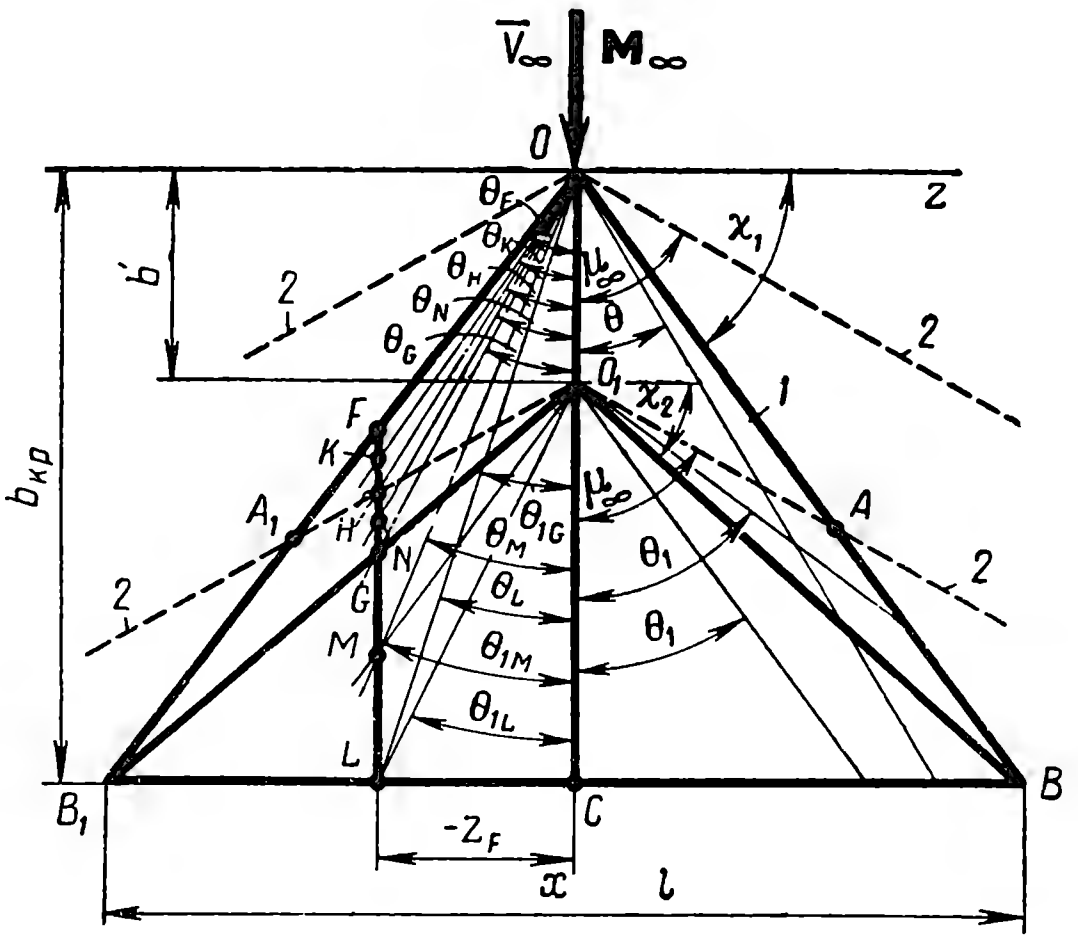


Рис. 3.VIII.8. К расчету обтекания треугольного крыла с симметричным ромбовидным профилем и дозвуковыми передними и средними кромками:

1 — крыло; *2* — линии Маха

в которой

$$\lambda_1 = \Delta/(2b') = 0{,}2/(2 \cdot 2) = 0{,}05;$$

$$\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = \sqrt{1{,}3^2 - 1} = 0{,}83;$$

$$n_1 = \operatorname{tg}\chi_1/\alpha' = \operatorname{tg}59°/0{,}83 = 2;$$

$$\sigma_1 = \operatorname{tg}\chi_1 \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}59° \operatorname{tg}\theta = 1{,}66 \operatorname{tg}\theta.$$

После подстановки этих данных в (3.VIII.29) получим

$$\bar{p} = \frac{4 \cdot 0{,}05}{\pi \cdot 0{,}83 \sqrt{2^2 - 1}} \operatorname{arch} \sqrt{\frac{2^2 - 1{,}66^2 \operatorname{tg}^2\theta}{1 - 1{,}66^2 \operatorname{tg}^2\theta}} =$$

$$= 0{,}045 \operatorname{arch} \sqrt{\frac{4 - 2{,}76 \operatorname{tg}^2\theta}{1 - 2{,}76 \operatorname{tg}^2\theta}}. \quad (3.VIII.29')$$

В области O_1AB (или $O_1A_1B_1$) коэффициент давления

$$\bar{p} = \frac{4\lambda_1}{\pi\alpha' \sqrt{n_1^2 - 1}} \operatorname{arch} \sqrt{\frac{n_1^2 - \sigma_1^2}{1 - \sigma_1^2}} - \frac{4(\lambda_2 + \lambda_1)}{\pi\alpha' \sqrt{n_1^2 - 1}} \operatorname{arch} \sqrt{\frac{n_2^2 - 1}{\sigma_2^2 - 1}}, \quad (3.VIII.30)$$

где

$$\lambda_2 = \Delta/[2(b_{кр} - b')] = 0{,}2/[2(5-1)] = 0{,}03;$$

$$n_2 = \operatorname{tg}\chi_2/\alpha' = \operatorname{tg}45°/0{,}83 = 1{,}21;$$

$$\sigma_2 = \operatorname{tg}\chi_2 \cdot \operatorname{tg}\theta_1 = \operatorname{tg}45° \cdot \operatorname{tg}\theta_1 = \operatorname{tg}\theta_1,$$

причем угол θ_1 — это угол между лучом, проведенным из точки O_1, и осью x (см. рис. 3.VIII.8). Подставляя данные в (3.VIII.30), находим

$$\bar{p}=\frac{4\cdot 0{,}05}{\pi\cdot 083\sqrt{2^2-1}}\operatorname{arch}\sqrt{\frac{2^2-1{,}66^2\operatorname{tg}^2\theta}{1-1{,}66^2\operatorname{tg}^2\theta}}-$$

$$-\frac{4\,(0{,}03+0{,}05)}{\pi\cdot 0{,}83\sqrt{2^2-1}}\operatorname{arch}\sqrt{\frac{1{,}21^2-1}{\operatorname{tg}^2\theta_1-1}}=0{,}045\operatorname{arch}\sqrt{\frac{4-2{,}76\operatorname{tg}^2\theta}{1-2{,}76\operatorname{tg}^2\theta}}-$$

$$-0{,}072\operatorname{arch}\sqrt{\frac{0{,}46}{\operatorname{tg}^2\theta_1-1}}. \qquad (3.\text{VIII}.30')$$

Наконец, в области O_1BC (или $O_1B_1C_1$) коэффициент давления

$$\bar{p}=\frac{4\lambda_1}{\pi\alpha'\sqrt{n_1^2-1}}\operatorname{arch}\sqrt{\frac{n_1^2-\sigma_1^2}{1-\sigma_1^2}}-\frac{4\,(\lambda_2+\lambda_1)}{\pi\alpha'\sqrt{n_2^2-1}}\operatorname{arch}\sqrt{\frac{n_2^2-\sigma_2^2}{1-\sigma_2^2}}, \qquad (3.\text{VIII}.31)$$

причем здесь, как и в (3.VIII.30), углы λ_1 и λ_2 берутся по абсолютной величине.

Подставляем данные:

$$\bar{p}=\frac{4\cdot 0{,}05}{\pi\cdot 0{,}83\sqrt{2^2-1}}\operatorname{arch}\sqrt{\frac{2^2-1{,}66^2\operatorname{tg}^2\theta}{1-1{,}66^2\operatorname{tg}^2\theta}}-$$

$$-\frac{4\,(0{,}03+0{,}05)}{\pi\cdot 0{,}83\sqrt{1{,}21^2-1}}\operatorname{arch}\sqrt{\frac{1{,}21^2-\operatorname{tg}^2\theta_1}{1-\operatorname{tg}^2\theta_1}}=$$

$$=0{,}045\operatorname{arch}\sqrt{\frac{4-2{,}76\operatorname{tg}^2\theta}{1-2{,}76\operatorname{tg}^2\theta}}-0{,}18\operatorname{arch}\sqrt{\frac{1{,}46-\operatorname{tg}^2\theta_1}{1-\operatorname{tg}^2\theta_1}}. \qquad (3.\text{VIII}.31')$$

Рассмотрим в качестве примера определение распределения коэффициента давления по профилю FL (см. рис. 3.VIII.8), координата z которого $|z_F|=1{,}5$.

В точке F (на передней кромке) $\theta=\pi/2-\chi_1$, $\operatorname{tg}\theta=1/\operatorname{tg}\chi_1$ и, следовательно, $\sigma=1$, а теоретический коэффициент давления в соответствии с (3.VIII.29) равен бесконечности. В некоторой точке K на участке FH, для которой $\theta_K=27°$ и $x_K=|z_F|/\operatorname{tg}\theta_K=1{,}5/\operatorname{tg}27°=2{,}95$, коэффициент давления

$$\bar{p}_K=0{,}045\operatorname{arch}\sqrt{\frac{4-2{,}76\operatorname{tg}^2 27°}{1-2{,}76\operatorname{tg}^2 27°}}=0{,}0850.$$

Определим положение точки H. Как видно из рис. 3.VIII.8,

$$x_H=b'+|z_F|/\operatorname{tg}\mu_\infty=b'+|z_F|\alpha'=2+1{,}5\cdot 0{,}83=3{,}24$$

и

$$\operatorname{tg}\theta_H=|z_F|/x_H=1{,}5/3{,}24=0{,}463\,(\theta_H=24°\,51').$$

Вычислим коэффициент давления в этой точке. Поскольку на линии O_1A_1 (или O_1A), являющейся линией Маха, $\sigma_2=\operatorname{tg}\chi_2\cdot\operatorname{tg}\mu_\infty=\operatorname{tg}\chi_2/\alpha'=n_2$, второй член в правой части выражения (3.VIII.30) равен нулю, и, следовательно, это выражение совпадает с формулой (3.VIII.29). Таким образом, для точки H

$$\bar{p}_H=0{,}045\operatorname{arch}\sqrt{\frac{4-2{,}76\cdot 0{,}463^2}{1-2{,}76\cdot 0{,}463^2}}=0{,}0775.$$

В некоторой точке N на участке HG, для которой, например, $\theta_N=24°$ ($\operatorname{tg}\theta_N=0{,}445$) и

$$x_N=\frac{|z_F|}{\operatorname{tg}\theta_N}=\frac{1{,}5}{0{,}445}=3{,}37,\quad \operatorname{tg}\theta_{1N}=\frac{|z_F|}{x_N-b'}=\frac{1{,}5}{3{,}37-2}=1{,}09,$$

коэффициент давления согласно (3.VIII.30′)

$$\bar{p}_N = 0{,}045 \operatorname{arch} \sqrt{\frac{4 - 2{,}76 \cdot 0{,}445^2}{1 - 2{,}76 \cdot 0{,}445^2}} - 0{,}072 \operatorname{arch} \sqrt{\frac{0{,}46}{1{,}09^2 - 1}} = 0{,}0020.$$

В точке G, лежащей на средней кромке,

$$\sigma_2 = \operatorname{tg} \chi_2 \cdot \operatorname{tg} \theta_1 = \operatorname{tg} \chi_2 / \operatorname{tg} \chi_2 = 1$$

и, как следует из (3.VIII.30) или (3.VIII.31), теоретический коэффициент давления равен $-\infty$.

Определим коэффициент давления в промежуточной точке M на участке GL. Примем $\theta_M = 20°$ ($\operatorname{tg} \theta_M = 0{,}364$), тогда

$$x_M = \frac{|z_F|}{\operatorname{tg} \theta_M} = \frac{1{,}5}{0{,}364} = 4{,}13, \quad \operatorname{tg} \theta_{1M} = \frac{|z_F|}{x_M - b'} = \frac{1{,}5}{4{,}13 - 2} = 0{,}704.$$

Согласно формуле (3.VIII.31′)

$$\bar{p}_M = 0{,}045 \operatorname{arch} \sqrt{\frac{4 - 2{,}76 \cdot 0{,}364^2}{1 - 2{,}76 \cdot 0{,}364^2}} - 0{,}18 \operatorname{arch} \sqrt{\frac{1{,}46 - 0{,}704^2}{1 - 0{,}704^2}} = -0{,}0830.$$

Аналогично находится коэффициент давления в точке L, для которой

$$\operatorname{tg} \theta_L = \frac{|z_F|}{b_{\text{кр}}} = \frac{1{,}5}{5} = 0{,}3, \quad \operatorname{tg} \theta_{1L} = \frac{|z_F|}{b_{\text{кр}} - b'} = \frac{1{,}5}{5 - 2} = 0{,}5.$$

Подставляя эти значения в (3.VIII.31′), подсчитываем

$$\bar{p}_L = 0{,}045 \operatorname{arch} \sqrt{\frac{4 - 2{,}76 \cdot 0{,}3^2}{1 - 2{,}76 \cdot 0{,}3^2}} - 0{,}18 \operatorname{arch} \sqrt{\frac{1{,}46 - 0{,}5^2}{1 - 0{,}5^2}} = -0{,}0745.$$

Характер распределения коэффициента давления по профилю FL показан на рис. 3.VIII.9, где

$$\bar{x}_F = \frac{x_F}{b_{\text{кр}}} = \frac{|z_F| \operatorname{tg} \chi_1}{b_{\text{кр}}} = \frac{1{,}5 \cdot 1{,}66}{5} \approx 0{,}5.$$

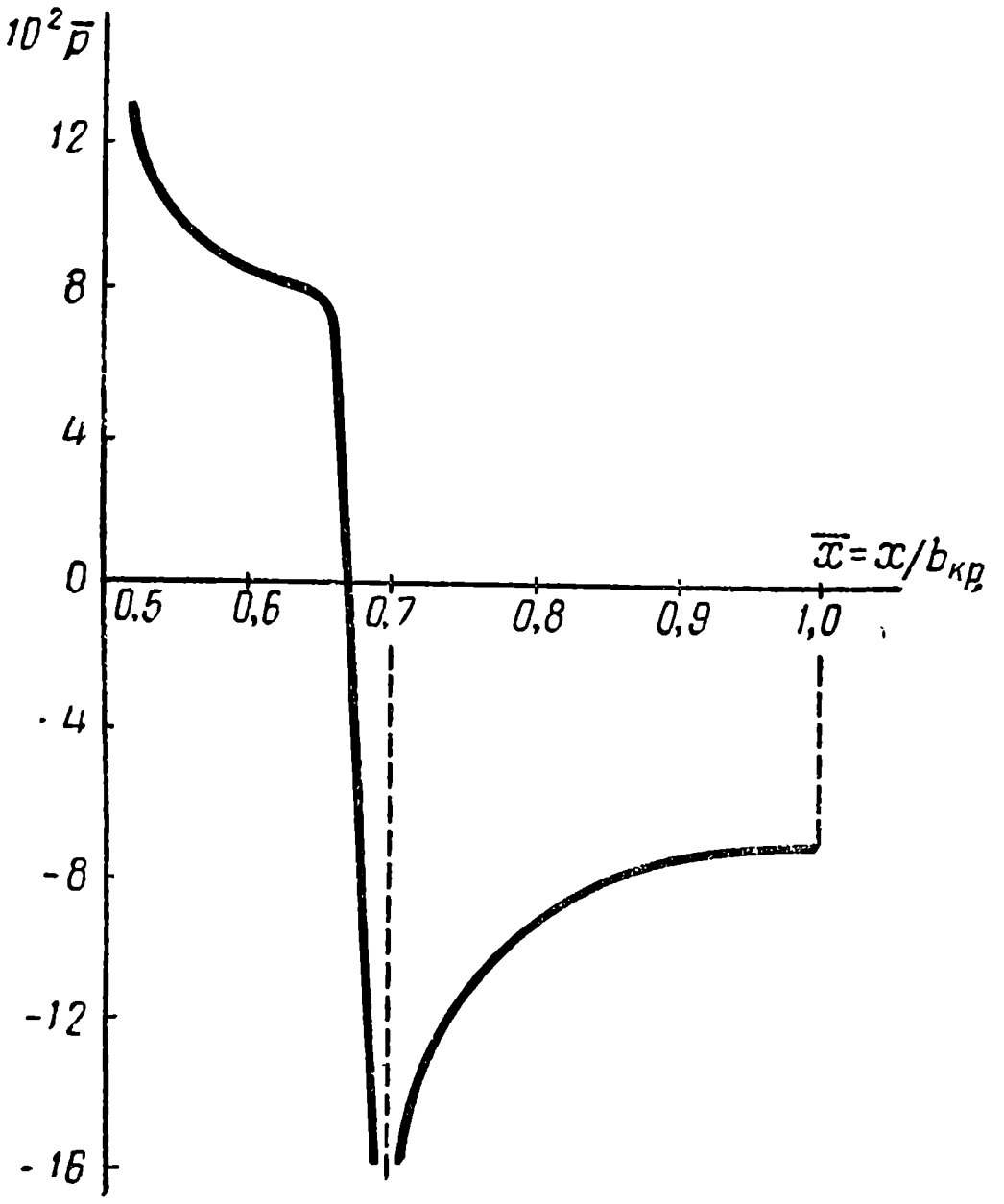


Рис. 3.VIII.9. Характер распределения коэффициента давления по профилю FL крыла, изображенного на рис. 3.VIII.8

Коэффициент сопротивления крыла определяется по формуле [48]:

$$c_{x\text{в}} = \frac{2\bar{\Delta}^2}{\pi \alpha'} \left\{ \frac{G_2'(n_1, r)}{r(1-r)^2} - \frac{F(n_2, r)}{(1-r)^2} + \frac{1}{r(1-r)} \times \right.$$
$$\left. \times \left[\frac{\ln(n_1 r)}{\sqrt{n_1^2 r^2 - 1}} - \frac{\ln n_1}{\sqrt{n_1^2 - 1}} + \arcsin \frac{1}{n_1 r} - \arcsin \frac{1}{n_1} \right] \right\},$$

в которой

$$r = (b_{\text{кр}} - b')/b_{\text{кр}}, \quad \bar{\Delta} = \Delta / b_{\text{кр}};$$

$$G_2'(n_1, r) = \frac{1-r}{1+r}\left\{\frac{\ln n_1}{\sqrt{n_1^2-1}} + \frac{r\,\mathrm{arch}\, n_1}{\sqrt{n_1^2-1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{n_1^2 r^2-1}} \ln\left[1 + \frac{2\sqrt{n_1^2 r^2-1}}{n_1(1-r) + \sqrt{n_1^2-1} - \sqrt{n_1^2 r^2-1}}\right]\right\};$$

$$F(n_2, r) = \frac{1-r}{1+r}\left\{\frac{\ln(n_1 r)}{\sqrt{n_1^2 r^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{n_1^2-1}} \ln\left[\frac{n_1^2 r - 1 + \sqrt{(n_1^2 r^2-1)(n_1^2-1)}}{n_1(1-r)}\right]\right\};$$

причем функция $F(n_2, r)$ записана с учетом того, что $n_2/n_1 = \mathrm{tg}\,\chi_2/\mathrm{tg}\,\chi_1 = r$.

Производим вычисления:

$$r = (5-2)/5 = 0{,}6, \quad \bar{\Delta} = 0{,}2/5 = 0{,}04;$$

$$G_2'(n_1, r) = \frac{1-0{,}6}{1+0{,}6}\left\{\frac{\ln 2}{\sqrt{2^2-1}} + \frac{0{,}6\,\mathrm{arch}\, 2}{\sqrt{2^2-1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{2^2\cdot 0{,}6^2-1}} \ln\left[1 + \frac{2\sqrt{2^2\cdot 0{,}6^2-1}}{2(1-0{,}6) + \sqrt{2^2-1} - \sqrt{2^2\cdot 0{,}6^2-1}}\right]\right\} = 0{,}354;$$

$$F(n_2, r) = \frac{1-0{,}6}{1+0{,}6}\left\{\frac{\ln(2\cdot 0{,}6)}{\sqrt{2^2\cdot 0{,}6^2-1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{2^2-1}} \ln\left[\frac{2^2\cdot 0{,}6 - 1 + \sqrt{(2^2\cdot 0{,}6^2-1)(2^2-1)}}{2(1-0{,}6)}\right]\right\} = 0{,}234;$$

$$c_{x\text{в}} = \frac{2\cdot 0{,}04^2}{\pi\cdot 0{,}83}\left\{\frac{0{,}354}{0{,}6(1-0{,}6)^2} - \frac{0{,}234}{(1-0{,}6)^2} + \frac{1}{0{,}6(1-0{,}6)}\left[\frac{\ln(2\cdot 0{,}6)}{\sqrt{2^2\cdot 0{,}6^2-1}} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\ln 2}{\sqrt{2^2-1}} + \arcsin\frac{1}{2\cdot 0{,}6} - \arcsin\frac{1}{2}\right]\right\} = 0{,}00482.$$

Соответствующая сила волнового сопротивления

$$X_{\text{в}} = c_{x\text{в}}\, q_\infty\, S_{\text{кр}} = c_{x\text{в}}\, \frac{k p_\infty\, \mathrm{M}_\infty^2}{2} \cdot \frac{b_{\text{кр}}\, l}{2} = 0{,}00482\, \frac{1{,}4\cdot 1\cdot 10^4\cdot 1{,}3^2}{2} \times$$

$$\times \frac{5\cdot 6}{2} = 0{,}858\cdot 10^3\ \kappa\Gamma.$$

VIII.6. Определяем угол Маха:

$$\mu_\infty = \arcsin\left(1/\mathbf{M}_\infty\right) = \arcsin(1/1{,}3) = 50^\circ\,18'$$

и углы стреловидности передней и средней кромок (рис. 3.VIII.10):

$$\chi_1 = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\left(\frac{l/2}{b_{\text{кр}}}\right) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\left(\frac{8/2}{5}\right) = 50^\circ\,21';$$

$$\chi_2 = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\left(\frac{l/2}{b_{\text{кр}} - b'}\right) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\left(\frac{8/2}{5-3}\right) = 26^\circ\,34'.$$

Для передней кромки имеет место условие $\mu_\infty > (\pi/2 - \chi_1)$, а для задней $\mu_\infty < (\pi/2 - \chi_2)$. Отсюда найдем, что передние кромки — дозвуковые (линии Маха, проведенные из вершины крыла, проходят перед кромками), а средние — сверхзвуковые (линии Маха, проведенные из точки O_1, расположены за ними; см. рис. 3.VIII.10).

Найдем распределение коэффициента давления по крылу. В обла-

стях OAO_1 (или OA_1O_1) величина этого коэффициента постоянна вдоль луча, проведенного из вершины крыла O под углом θ к оси x, и определяется по формуле

$$\bar{p} = \frac{4\lambda_1}{\pi\alpha' \sqrt{n_1^2 - 1}} \operatorname{arch} \sqrt{\frac{n_1^2 - \sigma_1^2}{1 - \sigma_1^2}}, \qquad (3.VIII.32)$$

в которой

$$\lambda_1 = \Delta/2b' = 0{,}6/2 \cdot 3 = 0{,}1, \quad \alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = \sqrt{1{,}3^2 - 1} = 0{,}83;$$

$$n_1 = \operatorname{tg}\chi_1/\alpha' = \operatorname{tg} 50^\circ 21'/0{,}83 = 1{,}45,$$

$$\sigma_1 = \operatorname{tg}\chi_1 \cdot \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg} 50^\circ 21' \cdot \operatorname{tg}\theta = 1{,}2 \operatorname{tg}\theta.$$

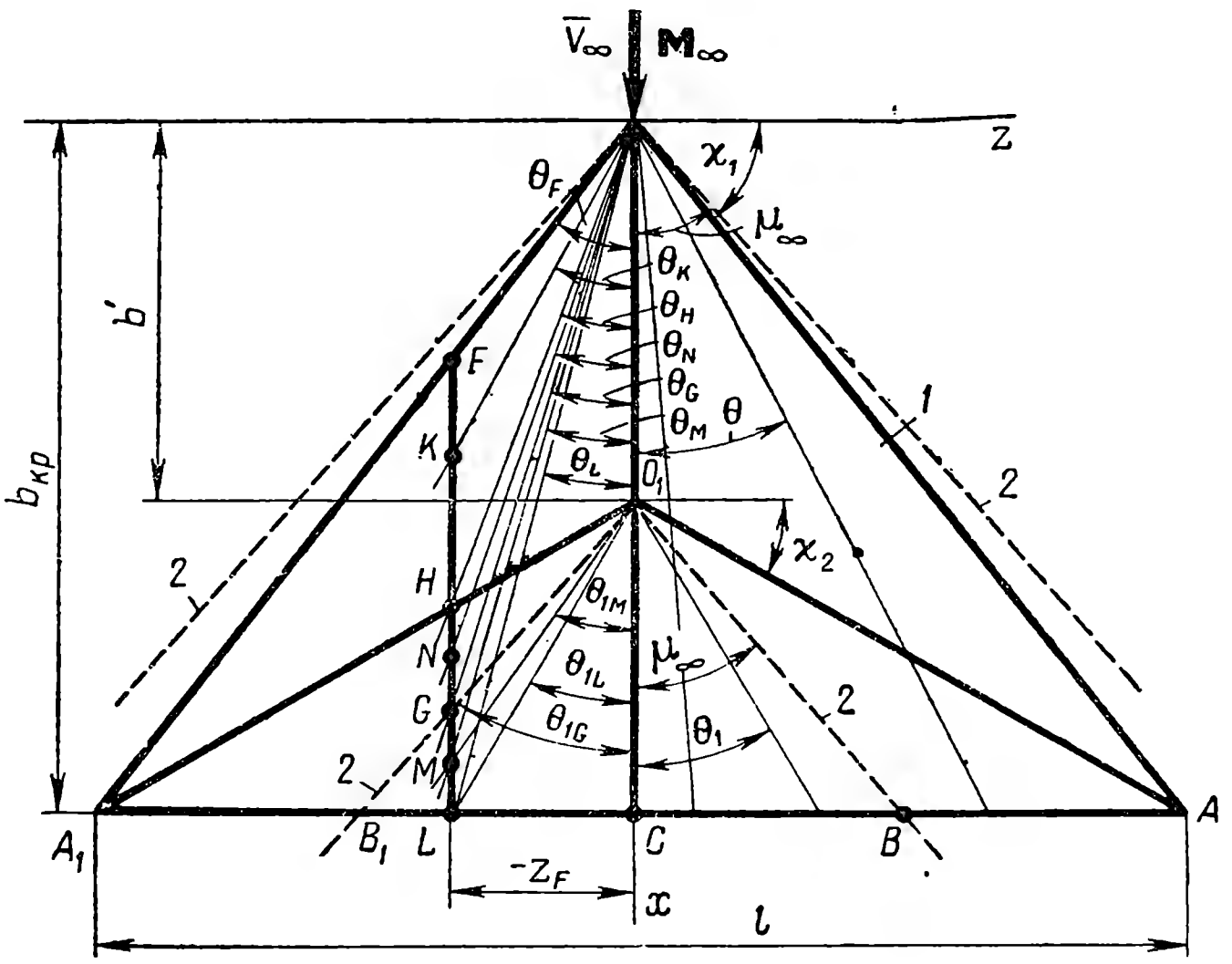


Рис. 3.VIII.10. К расчету обтекания треугольного крыла с симметричным ромбовидным профилем, дозвуковыми передними и сверхзвуковыми средними кромками:

1 — крыло; *2* — линии Маха

Подставляем эти данные в (3.VIII.32):

$$\bar{p} = \frac{4 \cdot 0{,}1}{\pi \cdot 0{,}83 \sqrt{1{,}45^2 - 1}} \operatorname{arch} \sqrt{\frac{1{,}45^2 - 1{,}2^2 \operatorname{tg}^2\theta}{1 - 1{,}2^2 \operatorname{tg}^2\theta}} =$$

$$= 0{,}146 \operatorname{arch} \sqrt{\frac{2{,}1 - 1{,}44 \operatorname{tg}^2\theta}{1 - 1{,}44 \operatorname{tg}^2\theta}}. \qquad (3.VIII.32')$$

В области O_1AB (или $O_1A_1B_1$) коэффициент давления

$$\bar{p} = \frac{4\lambda_1}{\pi\alpha' \sqrt{n_1^2 - 1}} \operatorname{arch} \sqrt{\frac{n_1^2 - \sigma_1^2}{1 - \sigma_1^2}} - \frac{2(\lambda_2 + \lambda_1)}{\alpha' \sqrt{1 - n_2^2}}, \qquad (3.VIII.33)$$

где значения углов λ_1 и λ_2 берутся по абсолютной величине. Имея в виду, что

$$\lambda_2 = \Delta/[2(b_{кр} - b')] = 0{,}6/[2(5 - 3)] = 0{,}15;$$

$$n_2 = \operatorname{tg}\chi_2/\alpha' = \operatorname{tg} 26^\circ 34'/0{,}83 = 0{,}603,$$

находим

$$\bar{p} = 0{,}146 \operatorname{arch} \sqrt{\frac{2{,}1 - 1{,}44 \operatorname{tg}^2\theta}{1 - 1{,}44 \operatorname{tg}^2\theta}} - \frac{2(0{,}15 + 0{,}1)}{0{,}83 \sqrt{1 - 0{,}603^2}} =$$

$$= 0{,}146 \operatorname{arch} \sqrt{\frac{2{,}1 - 1{,}44 \operatorname{tg}^2 \theta}{1 - 1{,}44 \operatorname{tg}^2 \theta}} - 0{,}753. \qquad (3.VIII.33')$$

В областях O_1BC (или O_1B_1C) коэффициент давления

$$\bar{p} = \frac{4\lambda_1}{\pi\alpha' \sqrt{n_1^2 - 1}} \operatorname{arch} \sqrt{\frac{n_1^2 - \sigma_1^2}{1 - \sigma_1^2}} -$$

$$- \frac{2(\lambda_2 + \lambda_1)}{\alpha' \sqrt{1 - n_2^2}} \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{n_2^2 - \sigma_2^2}{1 - \sigma_2^2}}\right), \qquad (3.VIII.34)$$

где

$$\sigma_2 = \operatorname{tg} \chi_2 \cdot \operatorname{tg} \theta_1 = \operatorname{tg} 26°34' \cdot \operatorname{tg} \theta_1 = 0{,}5 \operatorname{tg} \theta_1,$$

причем θ_1 представляет собой угол между лучом, проведенным из точки O_1, и осью x (см. рис. 3.VIII.10). Учитывая, что

$$n_2^2 = 0{,}603^2 = 0{,}364 \text{ и } \sigma_2^2 = 0{,}5^2 \operatorname{tg}^2 \theta_1 = 0{,}25 \operatorname{tg}^2 \theta_1,$$

записываем (3.VIII.34) в следующем виде:

$$\bar{p} = 0{,}146 \operatorname{arch} \sqrt{\frac{2{,}1 - 1{,}44 \cdot \operatorname{tg}^2 \theta}{1 - 1{,}44 \cdot \operatorname{tg}^2 \theta}} -$$

$$- 0{,}753 \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{0{,}364 - 0{,}25 \cdot \operatorname{tg}^2 \theta_1}{1 - 0{,}25 \cdot \operatorname{tg}^2 \theta_1}}\right). \qquad (3.VIII.34')$$

Рассчитаем коэффициенты давления для профиля FL (см. рис. 3.VIII.10), координата которого $|z_F| = 1{,}5$. В точке F (передняя кромка)

$$\theta = \pi/2 - \chi_1, \ \operatorname{tg} \theta = 1 / \operatorname{tg} \chi_1, \ \sigma_1 = 1,$$

и, следовательно, теоретический коэффициент давления равен бесконечности [см (3.VIII.32)]. В некоторой точке K на участке FH, для которой, например, $\theta_K = 30°$ ($\operatorname{tg} \theta_K = 0{,}577$) и $x_K = |z_F| / \operatorname{tg} \theta_K = 1{,}5/0{,}577 = 2{,}6$, коэффициент давления согласно формуле (3.VIII.32)

$$\bar{p}_K = 0{,}146 \operatorname{arch} \sqrt{\frac{2{,}1 - 1{,}44 \cdot 0{,}577^2}{1 - 1{,}44 \cdot 0{,}577^2}} = 0{,}171.$$

Определим положение точки H. Как видно из рис. 3.VIII.10,

$$x_H = b' + |z_F| / \operatorname{tg}(\pi/2 - \chi_2) = b' + |z_F| \operatorname{tg} \chi_2 = 3 + 1{,}5 \cdot 0{,}5 = 3{,}75.$$

Находим далее

$$\operatorname{tg} \theta_H = |z_F| / x_H = 1{,}5/3{,}75 = 0{,}4 \ (\theta_H = 21° 48')$$

и определяем коэффициент давления в этой точке по (3.VIII.32):

$$\bar{p}_H = 0{,}146 \operatorname{arch} \sqrt{\frac{2{,}1 - 1{,}44 \cdot 0{,}4^2}{1 - 1{,}44 \cdot 0{,}4^2}} = 0{,}148.$$

С другой стороны, точка H принадлежит области $O_1A_1B_1$, и коэффициент давления в ней определяется по формуле (3.VIII.33'), т. е.

$$\bar{p}'_H = 0{,}148 - 0{,}753 = -0{,}605.$$

Для некоторой токи N на участке HG принимаем $\theta_N = 20°$ ($\operatorname{tg} \theta_N = 0{,}364$). Тогда

$$x_N = |z_F| / \operatorname{tg} \theta_N = 1{,}5/0{,}364 = 4{,}13.$$

По формуле (3.VIII.33′) находим

$$\bar{p}_N = 0{,}146 \operatorname{arch} \sqrt{\frac{2{,}1 - 1{,}44 \cdot 0{,}364^2}{1 - 1{,}44 \cdot 0{,}364^2}} - 0{,}753 = -0{,}608.$$

Положение точки G определяется следующим образом. Как видно из рис. 3.VIII.10,

$$x_G = b' + |z_F| \alpha' = 3 + 1{,}5 \cdot 0{,}83 = 4{,}24,$$

тогда

$$\operatorname{tg} \theta_G = |z_F| / x_G = 1{,}5/4{,}24 = 0{,}354 \left(\theta_G = 19^\circ 30'\right).$$

Коэффициент давления в этой точке согласно (3.VIII.33′)

$$\bar{p}_G = 0{,}146 \operatorname{arch} \sqrt{\frac{2{,}1 - 1{,}44 \cdot 0{,}354^2}{1 - 1{,}44 \cdot 0{,}354^2}} - 0{,}753 = -0{,}609.$$

Такой же результат получаем и из формулы (3.VIII.34), полагая в ней

$$\sigma_2 = 0{,}5 \cdot \operatorname{tg} \theta_{1G} = 0{,}5 \operatorname{tg} \mu_\infty = 0{,}5/\alpha' = 0{,}5/0{,}83 = 0{,}603 = n_2.$$

Определим коэффициент давления в точке $M (\theta_M = 17^\circ 30'$; $\operatorname{tg} \theta_M = 0{,}315)$. Вычисляем:

$$x_M = |z_F| / \operatorname{tg} \theta_M = 1{,}5/0{,}315 = 4{,}77;$$

$$\operatorname{tg} \theta_{1M} = |z_F| / (x_M - b') = 1{,}5/(4{,}77 - 3) = 0{,}848.$$

Из формулы (3.VIII.34′) находим

$$\bar{p}_M = 0{,}146 \operatorname{arch} \sqrt{\frac{2{,}1 - 1{,}44 \cdot 0{,}315^2}{1 - 1{,}4\ 4 \cdot\ ,315^2}} -$$

$$- 0{,}753 + \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{0{,}364 - 0{,}25 \cdot 0{,}848^2}{1 - 0{,}25 \cdot 0{,}848^2}} =$$

$$= -0{,}297.$$

Наконец, в точке L, для которой

$$\operatorname{tg} \theta_L = |z_F| / b_{\text{кр}} = 1{,}5/5 = 0{,}3 \left(\theta_L = 16^\circ 42'\right);$$

$$\operatorname{tg} \theta_{1L} = |z_F| / \left(b_{\text{кр}}^{\sim} - b'\right) = 1{,}5/(5 - 3) = 0{,}75,$$

коэффициент давления

$$\bar{p}_L = 0{,}146 \operatorname{arch} \sqrt{\frac{2{,}1 - 1{,}44 \cdot 0{,}3^2}{1 - 1{,}44 \cdot 0{,}3^2}} - 0{,}753 +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{0{,}364 - 0{,}25 \cdot 0{,}75^2}{1 - 0{,}25 \cdot 0{,}75^2}} = -0{,}271.$$

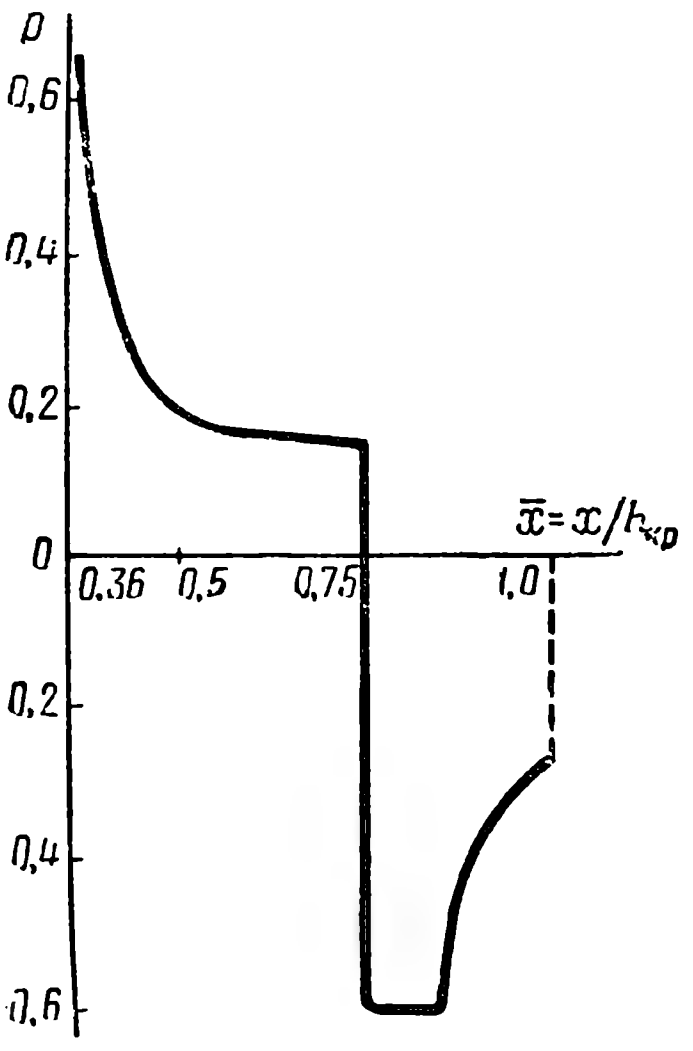


Рис. 3.VIII.11. Характер распределения коэффициента давления по профилю FL крыла, показанного на рис. 3.VIII.10

Характер распределения коэффициента давления по профилю FL показан на рис. 3.VIII.11, где

$$\bar{x}_F = x_F / b_{\text{кр}} = |z_F| \operatorname{tg} \chi_1 / b_{\text{кр}} = 1{,}5 \cdot 1{,}2/5 = 0{,}36.$$

Коэффициент волнового сопротивления крыла определяется по формуле [48]:

$$c_{x\text{в}} = \frac{2\,\bar{\Delta}^2}{\pi\alpha'}\left[\frac{G_2(n_1, r)}{r(1-r)^2} + \frac{1}{r(1-r)}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\ln n_1}{\sqrt{n_1^2-1}} - \arcsin\frac{1}{n_1}\right)\right],$$

в которой

$$G_2(n_1, r) = \frac{1-r}{1+r}\left[\frac{\ln n_1}{\sqrt{n_1^2-1}} + \frac{r\,\operatorname{arch} n_1}{\sqrt{n_1^2-1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\sqrt{1-n_1^2 r^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-n_1^2 r^2}}{n_1 + \sqrt{n_1^2-1} - n_1 r}\right)\right].$$

Учитывая, что

$$r = (b_{\text{кр}} - b')/b_{\text{кр}} = (5-3)/5 = 0{,}4 \text{ и } \bar{\Delta} = \Delta/b_{\text{кр}} = 0{,}6/5 = 0{,}12,$$

вычисляем:

$$G_2(n_1, r) = \frac{1-0{,}4}{1+0{,}4}\left[\frac{\ln 1{,}45}{\sqrt{1{,}45^2-1}} + \frac{0{,}4\,\operatorname{arch} 1{,}45}{\sqrt{1{,}45^2-1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\sqrt{1-1{,}45^2\cdot 0{,}4^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-1{,}45^2\cdot 0{,}4^2}}{1{,}45 + \sqrt{1{,}45^2-1} - 1{,}45\cdot 0{,}4}\right)\right] = 0{,}728;$$

$$c_{x\text{в}} = \frac{2\cdot 0{,}12^2}{\pi\cdot 0{,}83}\left[\frac{0{,}728}{0{,}4(1-0{,}4)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{0{,}4(1-0{,}4)}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\ln 1{,}45}{\sqrt{1{,}45^2-1}} - \arcsin\frac{1}{1{,}45}\right)\right] = 0{,}0755.$$

Соответствующая этому коэффициенту сила волнового сопротивления

$$X_{\text{в}} = c_{x\text{в}}\, q_\infty\, S_{\text{кр}} = c_{x\text{в}}\frac{kp_\infty \mathbf{M}_\infty^2}{2}\cdot\frac{b_{\text{кр}} l}{2} =$$

$$= 0{,}0755\frac{1{,}4\cdot 1\cdot 10^4\cdot 1{,}3^2}{2}\cdot\frac{5\cdot 8}{2} = 17{,}2\cdot 10^3\,\kappa\Gamma.$$

VIII.7. Определим угол Маха:

$$\mu_\infty = \arcsin(1/\mathbf{M}_\infty) = \arcsin(1/2) = 30^\circ$$

и углы стреловидности передней и задней кромок (рис. 3.VIII.12):

$$\chi_1 = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{l/2}{b_{\text{кр}}}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{8/2}{4}\right) = 45^\circ;$$

$$\chi_2 = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{l/2}{b_{\text{кр}} - b'}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{8/2}{4-2}\right) = 26^\circ 34'.$$

Поскольку $\mu_\infty < (\pi/2 - \chi_1)$ и $\mu_\infty < (\pi/2 - \chi_2)$, обе кромки — сверхзвуковые (линии Маха, проведенные из точек O и O_1 крыла соответственно, проходят за этими кромками, как показано на рис. 3.VIII.12).

Определим распределение давления по крылу. В области OAB (или OA_1B_1) коэффициент давления

$$\bar{p} = 2\lambda_1/\left(\alpha'\sqrt{1-n_1^2}\right) \qquad (3.\text{VIII}.35)$$

или, учитывая, что

$$\lambda_1 = \Delta/(2b') = 0{,}4/(2\cdot 2) = 0{,}1;$$

$$\alpha' = \sqrt{\mathbf{M}_\infty^2 - 1} = \sqrt{2^2-1} = 1{,}73;$$

$$n_1 = \operatorname{tg}\chi_1/\alpha' = \operatorname{tg}45°/1{,}73 = 0{,}578;$$

$$\bar{p} = 2\cdot 0{,}1/\left(1{,}73\sqrt{1-0{,}578^2}\right) = 0{,}118.$$

В области ABC (или $A_1B_1C_1$) коэффициент давления также будет постоянным; его величина определяется из выражения

$$\bar{p} = \frac{2\lambda_1}{\alpha'\sqrt{1-n_1^2}} - \frac{2(\lambda_2+\lambda_1)}{\alpha'\sqrt{1-n_2^2}}. \qquad (3.VIII.36)$$

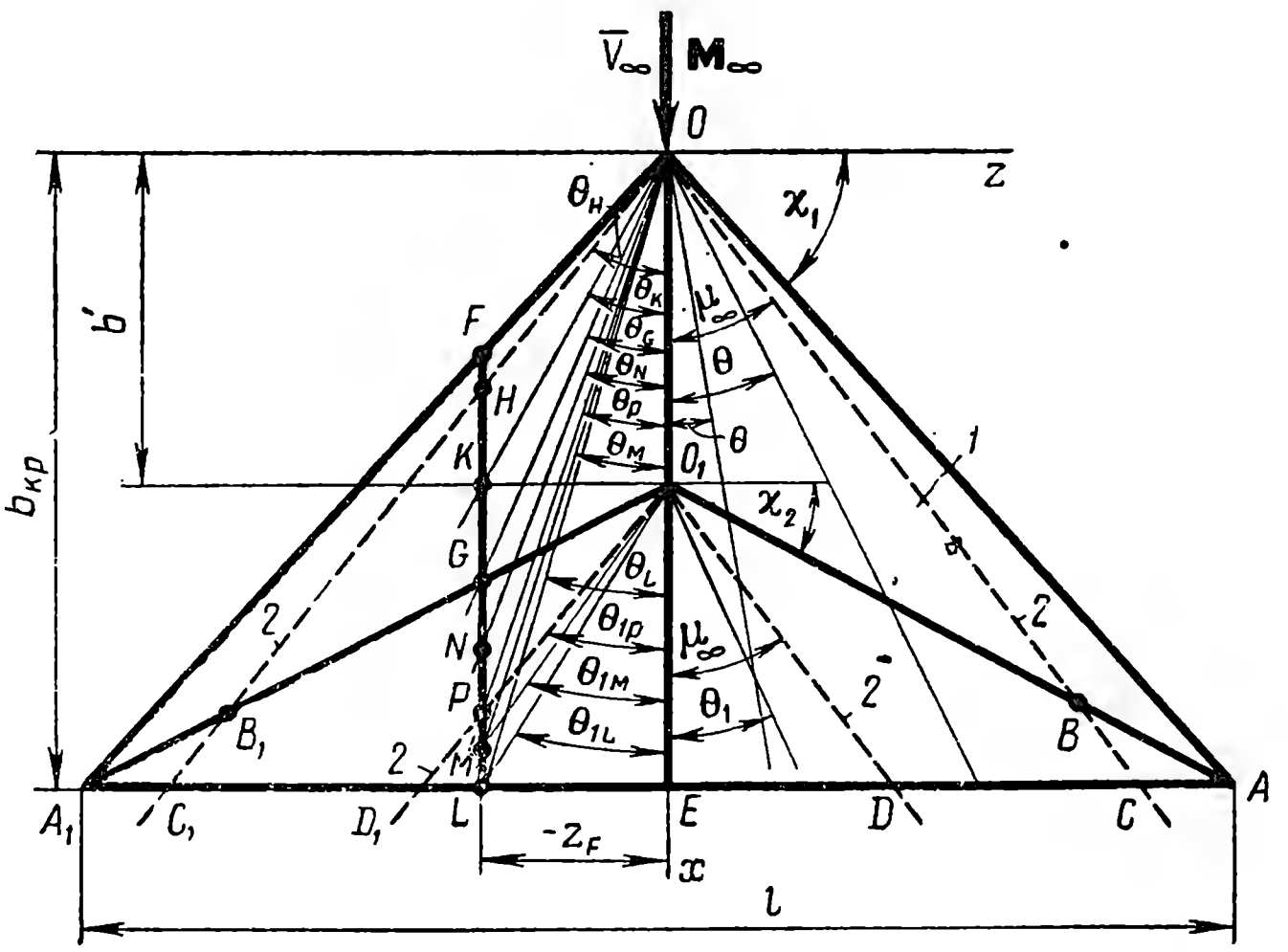


Рис. 3.VIII.12. К расчету обтекания треугольного крыла с симметричным ромбовидным профилем и сверхзвуковыми передними и средними кромками

1 — крыло; *2* — линии Маха

в котором

$$\lambda_2 = \Delta/[2(b_{кр}-b')] = 0{,}4/[2(4-2)] = 0{,}1;$$

$$n_2 = \operatorname{tg}\chi_2/\alpha' = \operatorname{tg}26°34'/1{,}73 = 0{,}289.$$

Вычисляем:

$$\bar{p} = 0{,}118 - \frac{2(0{,}1+0{,}1)}{1{,}73\sqrt{1-0{,}289^2}} = -0{,}124.$$

В области OBO_1 (или OB_1O_1) коэффициент давления

$$\bar{p} = \frac{2\lambda_1}{\alpha'\sqrt{1-n_1^2}}\left(1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{n_1^2-\sigma_1^2}{1-\sigma_1^2}}\right). \qquad (3.VIII.37)$$

Этот коэффициент является постоянным вдоль луча, проведенного из вершины крыла O под углом θ к оси x. Величина σ_1 в (3.VIII.37) определяется следующим образом:

$$\sigma_1 = \operatorname{tg}\chi_1\cdot\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}45°\cdot\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\theta.$$

После подстановки данных формула (3.VIII.37) примет вид

$$\bar{p} = 0{,}118\left(1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{0{,}334-\operatorname{tg}^2\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta}}\right). \qquad (3.VIII.37')$$

Рассмотрим теперь область O_1BCD (или $O_1B_1C_1D_1$). Коэффициент давления здесь

$$\bar{p} = \frac{2\lambda_1}{\alpha' \sqrt{1-n_1^2}} \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{n_1^2 - \sigma_1^2}{1-\sigma_1^2}} \right) - \frac{2(\lambda_2 + \lambda_1)}{\alpha' \sqrt{1-n_2^2}}, \qquad (3.VIII.38)$$

или, после подстановки данных,

$$\bar{p} = -\left(\frac{0{,}236}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{0{,}334 - \operatorname{tg}^2\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta}} + 0{,}124 \right). \qquad (3.VIII.38')$$

Наконец, в областях O_1DE и O_1D_1E коэффициент давления

$$\bar{p} = \frac{2\lambda_1}{\alpha' \sqrt{1-n_1^2}} \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{n_1^2 - \sigma_1^2}{1-\sigma_1^2}} \right) - \frac{2(\lambda_2 + \lambda_1)}{\alpha' \sqrt{1-n_2^2}} \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{n_2^2 - \sigma_2^2}{1-\sigma_2^2}} \right), \qquad (3.VIII.39)$$

где

$$\sigma_2 = \operatorname{tg}\chi_2 \cdot \operatorname{tg}\theta_1 = \operatorname{tg} 26°34' \cdot \operatorname{tg}\theta_1 = 0{,}5 \cdot \operatorname{tg}\theta_1,$$

причем θ_1 является углом между лучом, проведенным из точки O_1, и осью x (см. рис. 3.VIII.12). Учитывая, что

$$n_2^2 = 0{,}289^2 = 0{,}084 \text{ и } \sigma_2^2 = 0{,}5^2 \cdot \operatorname{tg}^2\theta_1 = 0{,}25 \operatorname{tg}^2\theta_1,$$

после подстановки данных в (3.VIII.39) получим

$$\bar{p} = \frac{0{,}484}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{0{,}084 - 0{,}25 \operatorname{tg}^2\theta_1}{1 - 0{,}25 \operatorname{tg}^2\theta_1}} - \frac{0{,}236}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{0{,}334 - \operatorname{tg}^2\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta}} - 0{,}124. \qquad (3.VIII.39')$$

Для примера покажем, как рассчитываются коэффициенты давления на профиле FL (см. рис. 3.VIII.12), расположенном на расстоянии $|z_F| = 1{,}0$ от корневой хорды и имеющем относительную координату

$$\bar{x}_F = x_F / b_{кр} = |z_F| \operatorname{tg}\chi_1 / b_{кр} = 1 \cdot \operatorname{tg} 45°/4 = 0{,}25.$$

На участке FH коэффициент давления будет постоянным и равным $\bar{p}_{FH} = 0{,}118$. Для точки H величина

$$\sigma_1 = \operatorname{tg}\chi_1 \cdot \operatorname{tg}\theta_H = \operatorname{tg}\chi_1 \cdot \operatorname{tg}\mu_\infty = \operatorname{tg}\chi_1 / \alpha' = n_1,$$

и из формулы (3.VIII.37) также следует, что $\bar{p}_H = 0{,}118$.

Определим коэффициент давления в точке K, для которой примем $\theta_K = 26°$ ($\operatorname{tg}\theta_K = 0{,}488$ и координата $x_K = |z_F| / \operatorname{tg}\theta_K = 1/0{,}488 = 2{,}05$):

$$\bar{p}_K = 0{,}118 \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{0{,}334 - 0{,}488^2}{1 - 0{,}488^2}} \right) = 0{,}0910.$$

Аналогично в точке G, для которой в соответствии с рис. 3.VIII.12

$$x_G = b' + |z_F| \operatorname{tg}\chi_2 = 2 + 1 \cdot \operatorname{tg} 26°34' = 2{,}5;$$

$$\operatorname{tg}\theta_G = |z_F| / x_G = 1/2{,}5 = 0{,}4 \ (\theta_G = 21°48'),$$

коэффициент давления

$$\bar{p}_G = 0{,}118\left(1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{0{,}334 - 0{,}4^2}{1 - 0{,}4^2}}\right) = 0{,}0824.$$

Поскольку точка G принадлежит области $O_1B_1C_1D_1$, коэффициент давления в ней можно определить по формуле (3.VIII.38):

$$\bar{p}'_G = 0{,}0824 - 0{,}242 = -0{,}160.$$

Положим $\theta_N = 18°$ ($\operatorname{tg}\theta_N = 0{,}325$; $x_N = |z_F|/\operatorname{tg}\theta_N = 1/0{,}325 = 3{,}08$). Тогда согласно (3.VIII.38′)

$$\bar{p}'_N = -\left(\frac{0{,}236}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{0{,}334 - 0{,}325^2}{1 - 0{,}325^2}} + 0{,}124\right) = -0{,}163.$$

В точке P, для которой

$$x_P = b' + |z_F|\,\alpha' = 2 + 1 \cdot 1{,}73 = 3{,}73;$$

$$\operatorname{tg}\theta_P = |z_F|/x_P = 1/3{,}73 = 0{,}268 \ (\theta_P = 15°),$$

коэффициент давления

$$\bar{p}_P = -\left(\frac{0{,}236}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{0{,}334 - 0{,}268^2}{1 - 0{,}268^2}} + 0{,}124\right) = -0{,}166.$$

Поскольку эта точка P принадлежит области O_1D_1E, коэффициент давления в ней можно определить также по формуле (3.VIII.39), которая с учетом того, что

$$\sigma_2 = 0{,}5 \cdot \operatorname{tg}\theta_{1P} = 0{,}5 \cdot \operatorname{tg}\mu_\infty = 0{,}5 \cdot \operatorname{tg} 30° = 0{,}289 = n_2,$$

дает то же значение $\bar{p}_P = -0{,}166$.

Определим теперь коэффициент давления в точке M ($\theta_M = 14°30'$; $\operatorname{tg}\theta_M = 0{,}259$). Для этой точки

$$x_M = |z_F|/\operatorname{tg}\theta_M = 1/0{,}259 = 3{,}85;$$

$$\operatorname{tg}\theta_{1M} = |z_F|/(x_M - b') = 1/(3{,}85 - 2) = 0{,}54.$$

Из формулы (3.VIII.39′) находим

$$\bar{p}_M = \frac{0{,}484}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{0{,}084 - 0{,}25 \cdot 0{,}54^2}{1 - 0{,}25 \cdot 0{,}54^2}} -$$

$$-\frac{0{,}236}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{0{,}334 - 0{,}259^2}{1 - 0{,}259^2}} - 0{,}124 = -0{,}144.$$

Наконец, в точке L, для которой

$$\operatorname{tg}\theta_L = |z_F|/b_{\text{кр}} = 1/4 = 0{,}25 \ (\theta_L = 14°02');$$

$$\operatorname{tg}\theta_{1L} = |z_F|/(b_{\text{кр}} - b') = 1/(4 - 2) = 0{,}5,$$

коэффициент давления

$$\bar{p}_L = \frac{0{,}484}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{0{,}0484 - 0{,}25 \cdot 0{,}5^2}{1 - 0{,}25 \cdot 0{,}5^2}} -$$

$$-\frac{0{,}236}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{0{,}334 - 0{,}25^2}{1 - 0{,}25^2}} - 0{,}124 = -0{,}143.$$

Характер распределения коэффициента давления по профилю FL показан на рис. 3.VIII.13.

Коэффициент волнового сопротивления [48]

$$c_{x\text{в}} = \frac{2\bar{\Delta}^2}{\pi\alpha'(1 - r^2)}\left\{\frac{1}{\sqrt{1 - n_1^2}}\arccos n_1 + \frac{1}{r\sqrt{1 - n_1^2 r^2}}\left[\frac{\pi}{2} + \arcsin(n_1 r)\right]\right\},$$

где

$$\bar{\Delta} = \Delta/b_{кр} = 0{,}4/4 = 0{,}1; \quad r = (b_{кр} - b')/b_{кр} = (4-2)/4 = 0{,}5.$$

Согласно этим данным

$$c_{xв} = \frac{2\cdot 0{,}1^2}{\pi\cdot 1{,}73\,(1-0{,}5^2)}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-0{,}578^2}}\arccos 0{,}578 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{0{,}5\sqrt{1-0{,}578^2\cdot 0{,}5^2}}\left[\frac{\pi}{2} + \arcsin(0{,}578\cdot 0{,}5)\right]\right\} = 0{,}0243.$$

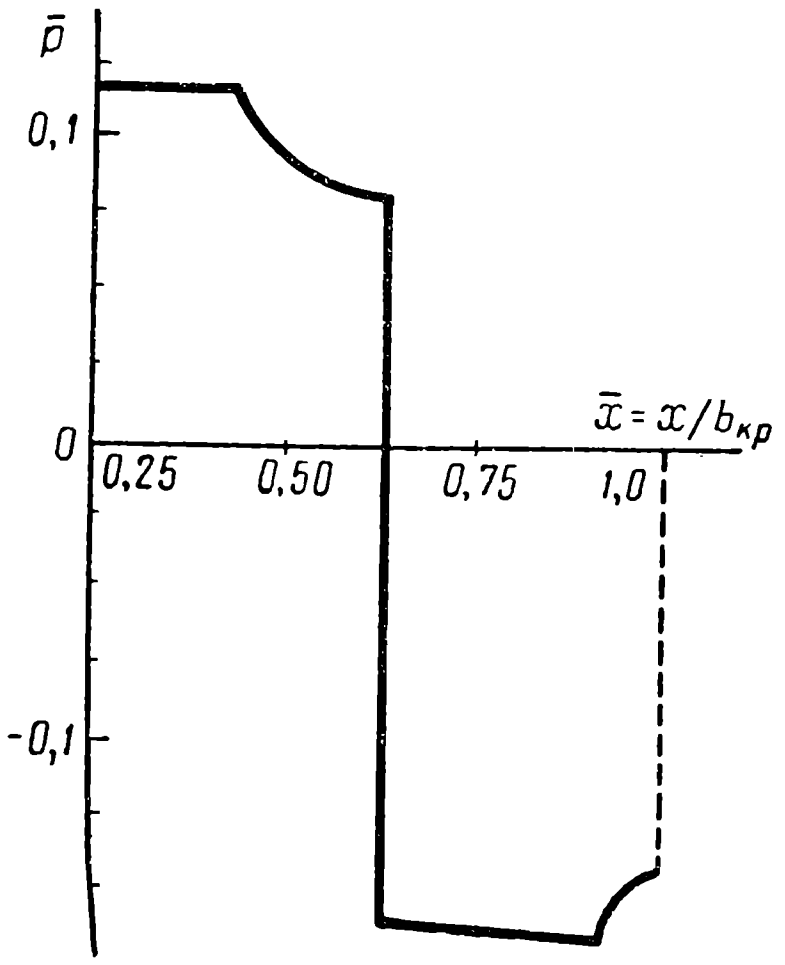


Рис. 3.VIII.13. Характер распределения коэффициента давления по профилю *FL* крыла, изображенного на рис. 3.VIII.12

Соответствующая сила волнового сопротивления

$$X_в = c_{xв} q_\infty S_{кр} = c_{xв} \frac{k p_\infty M_\infty^2}{2} \cdot \frac{b_{кр}\, l}{2} =$$

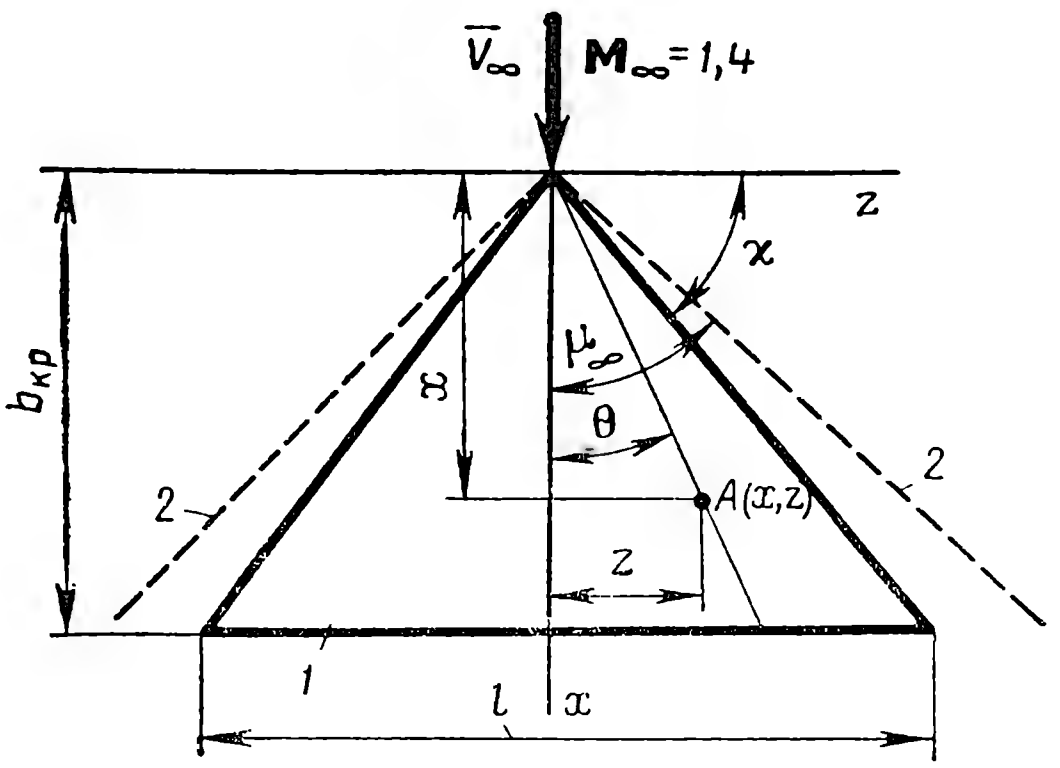


Рис. 3.VIII.14. К расчету обтекания плоского треугольного крыла с дозвуковыми кромками:

1 — крыло; *2* — линии Маха

$$= 0{,}0243\,\frac{1{,}4\cdot 1\cdot 10^4\cdot 2^2}{2}\cdot\frac{4\cdot 8}{2} = 10{,}9\cdot 10^3\,кГ.$$

VIII.8. Установим характер передних кромок рассматриваемого крыла. Найдем угол Маха:

$$\mu_\infty = \arcsin\left(1/M_\infty\right) = \arcsin(1/1{,}4) = 45°36'$$

и угол стреловидности передней кромки:

$$\chi = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{l/2}{b_{кр}}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{8/2}{5}\right) = 51°20'.$$

Поскольку $\mu_\infty > (\pi/2 - \chi)$, линии Маха располагаются перед передними кромками (рис. 3.VIII.14), которые, следовательно, будут дозвуковыми. Соответствующий коэффициент давления на поверхности крыла

$$\bar{p} = \frac{\pm 2\alpha}{E(k)\operatorname{tg}\chi\sqrt{1-\sigma^2}}, \qquad (3.VIII.40)$$

где $\sigma = \operatorname{tg}\theta\cdot\operatorname{tg}\chi = (z/x)\operatorname{tg}\chi$; $E(k)$ — эллиптический интеграл второго рода с параметром

$$k = \sqrt{1-1/n^2}; \qquad (3.VIII.41)$$

знак «+» определяет коэффициент давления на нижней, а знак «—» — на верхней сторонах крыла. Для заданных условий:

$$n = \operatorname{tg}\chi/\alpha' = \operatorname{tg}\chi/\sqrt{M_\infty^2 - 1} = \operatorname{tg} 51°20'/\sqrt{1{,}4^2 - 1} = 1{,}28;$$

$$k = \sqrt{1 - 1/1{,}28^2} = 0{,}62.$$

Величина $E(k)$ находится из табл. 4.2.1 по величине $1/n = 0{,}784$ или из таблиц эллиптических интегралов [8] по $\alpha = \arcsin k = \arcsin 0{,}62 = 38°20'$ и равна $E(k) = 1{,}407$. В соответствии с этим

$$\bar{p} = \frac{\pm 2 \cdot 0{,}1}{1{,}407 \cdot \operatorname{tg} 51°20' \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\theta \cdot \operatorname{tg}^2 51°20'}} = \pm \frac{0{,}091}{\sqrt{0{,}64 - \operatorname{tg}^2\theta}}.$$

Поле давлений на таком крыле является коническим относительно вершины крыла, т. е. на луче $\theta = \text{const}$ ($z/x = \text{const}$) коэффициент давления $\bar{p} = \text{const}$. На корневой хорде ($\operatorname{tg}\theta = 0$)

$$\bar{p} = \pm 0{,}091/\sqrt{0{,}64} = \pm 0{,}114.$$

Например, для некоторой точки A (см. рис. 3.VIII.14), расположенной на верхней стороне крыла, для которой $\theta_A = 30°$,

$$\bar{p}_A = -0{,}091/\sqrt{0{,}64 - \operatorname{tg}^2 30°} = -0{,}163.$$

Из формулы (3.VIII.40) следует, что у передней кромки, где $\operatorname{tg}\theta \to 1/\operatorname{tg}\chi$ и $\sigma \to 1$, коэффициент давления $\bar{p} \to \infty$.

Коэффициент подъемной силы

$$c_y = \frac{2\pi\alpha}{E(k)\operatorname{tg}\chi} = \frac{2\pi \cdot 0{,}1}{1{,}407 \cdot \operatorname{tg} 51°20'} = 0{,}357.$$

Коэффициент сопротивления, обусловленный действием подъемной силы (коэффициент индуктивного сопротивления),

$$c_{xi} = c_y \alpha = \frac{2\pi\alpha^2}{E(k)\operatorname{tg}\chi} = \frac{2\pi \cdot 0{,}1^2}{1{,}407 \cdot \operatorname{tg} 51°20'} = 0{,}0357.$$

Как известно, у крыльев с дозвуковой передней кромкой эту кромку несколько скругляют. При этом возникает подсасывающая сила, уменьшающая сопротивление. В результате общий коэффициент сопротивления уменьшается на величину коэффициента подсасывающей силы:

$$c_{x\text{т}} = \frac{c_y^2}{4\pi} \operatorname{tg}\chi \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{0{,}357^2}{4\pi} \operatorname{tg} 51°20' \cdot 0{,}62 = 0{,}00785.$$

Таким образом, коэффициент волнового сопротивления крыла

$$c_{x\text{в}} = c_{xi} - c_{x\text{т}} = 0{,}0357 - 0{,}00785 = 0{,}0279.$$

Центр давления крыла расположен в точке корневой хорды на расстоянии 2/3 высоты от вершины, т. е. $x_{\text{ц.д}} = (2/3)\, b_{\text{кр}}$. Следовательно, коэффициент центра давления

$$c_{\text{ц.д}} = x_{\text{ц.д}}/b_{\text{кр}} = 2/3.$$

В соответствии с формулой $c_{\text{ц.д}} = -m_z/c_y$ коэффициент момента

$$-m_z = c_y c_{\text{ц.д}} = 0{,}375\,(2/3) = 0{,}238.$$

Определяем сопротивление, подъемную силу и момент:

$$X_{\text{в}} = c_{x\text{в}} q_\infty S_{\text{кр}} = c_{x\text{в}} \frac{k p_\infty M_\infty^2}{2} \cdot \frac{b_{\text{кр}}\, l}{2} =$$

$$= 0{,}0279 \frac{1{,}4 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 1{,}4^2}{2} \cdot \frac{5 \cdot 8}{2} = 7{,}68 \cdot 10^3\ кГ;$$

$$Y = c_y q_\infty S_{\text{кр}} = c_y \frac{kp_\infty \mathbf{M}_\infty^2}{2} \cdot \frac{b_{\text{кр}}\, l}{2} =$$

$$= 0{,}357 \frac{1{,}4 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 1{,}4^2}{2} \cdot \frac{5 \cdot 8}{2} = 97{,}8 \cdot 10^3\ кГ;$$

$$M_z = m_z q_\infty S_{\text{кр}} b_{\text{кр}} = m_z \frac{kp_\infty \mathbf{M}_\infty^2}{2} \cdot \frac{b_{\text{кр}}\, l}{2} b_{\text{кр}} =$$

$$= -0{,}238 \frac{1{,}4 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 1{,}4^2}{2} \cdot \frac{5 \cdot 8}{2} 5 = -0{,}375 \cdot 10^6\ кГ \cdot м.$$

VIII.9. Определим угол Маха:

$$\mu_\infty = \arcsin\left(1/\mathbf{M}_\infty\right) = \arcsin\left(1/2\right) = 30°.$$

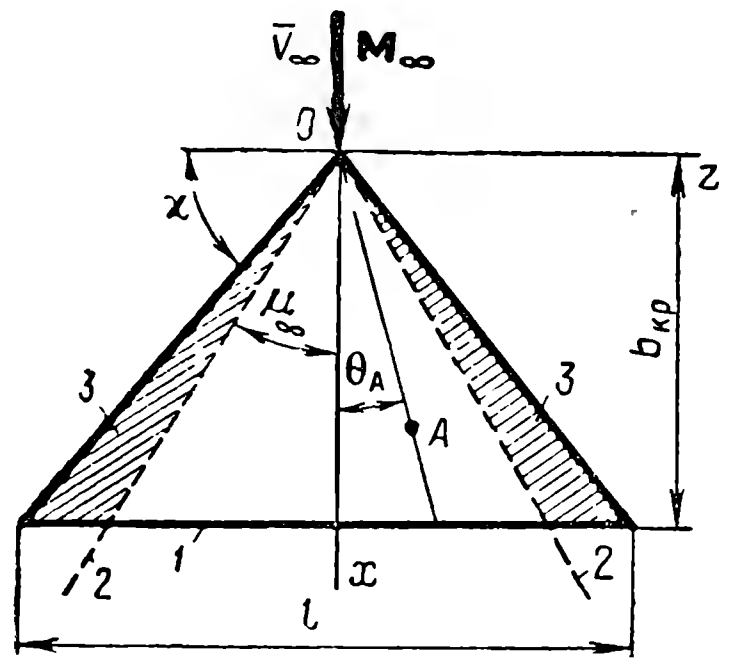


Рис. 3.VIII.15. К расчету обтекания плоского треугольного крыла со сверхзвуковыми кромками:

1 — крыло; *2* — линии Маха; *3* — область постоянного давления

Так как угол стреловидности $\chi = 51°20'$ (см. решение задачи VIII.8), то, очевидно, выполняется условие $\mu_\infty < (\pi/2 - \chi)$, что соответствует сверхзвуковым передним кромкам, когда линии Маха располагаются на поверхности крыла за этими кромками (рис. 3.VIII.15).

Коэффициент давления в областях между передней кромкой и линией Маха (заштрихованы на рис. 3.VIII.15) постоянен и определяется по формуле

$$\bar{p} = \frac{\pm 2\alpha}{\alpha' \sqrt{1 - n^2}}. \qquad (3.\text{VIII}.42)$$

Внося сюда значение $\alpha = 0{,}1\ рад$, а также значения

$$\alpha' = \sqrt{\mathbf{M}_\infty^2 - 1} = \sqrt{2^2 - 1} = 1{,}73;$$

$$n = \operatorname{tg}\chi/\alpha' = \operatorname{tg} 51°20'/1{,}73 = 0{,}722,$$

найдем

$$\bar{p} = \frac{\pm\, 2 \cdot 0{,}1}{1{,}73 \sqrt{1 - 0{,}722^2}} = \pm\, 0{,}167.$$

В области между линиями Маха коэффициент давления на поверхности крыла

$$\bar{p} = \frac{\pm\, 2\alpha}{\alpha' \sqrt{1 - n^2}} \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{n^2 - \sigma^2}{1 - \sigma^2}}\right), \qquad (3.\text{VIII}.43)$$

где $\sigma = \operatorname{tg}\chi \cdot \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg} 51°20' \cdot \operatorname{tg}\theta = 1{,}25 \operatorname{tg}\theta$. Подставляя данные, получим

$$\bar{p} = \pm \frac{2 \cdot 0{,}1}{1{,}73 \sqrt{1 - 0{,}722^2}} \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{0{,}722^2 - 1{,}25^2 \operatorname{tg}^2\theta}{1 - 1{,}25^2 \operatorname{tg}^2\theta}}\right) =$$

$$= \pm\, 0{,}167 \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{0{,}523 - 1{,}56 \operatorname{tg}^2\theta}{1 - 1{,}56 \operatorname{tg}^2\theta}}\right).$$

Определим, например, коэффициент давления в точке A, лежащей на верхней стороне крыла, для которой $\theta_A = 20°$:

$$\bar{p}_A = -0{,}167 \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{0{,}523 - 1{,}56 \operatorname{tg}^2 20°}{1 - 1{,}56 \operatorname{tg}^2 20°}}\right) = -0{,}0945.$$

На корневой хорде, где $\theta=0$ ($\operatorname{tg}\theta=0$), $\bar{p}=\pm 0{,}167\left(1-\right.$ $\left.-\frac{2}{\pi}\arcsin 0{,}722\right)=\pm\ 0{,}0813$.

Для точек на линии Маха, где $\theta=\mu_\infty$ и $\sigma=n$, из (3.VIII.43) следует, что коэффициент давления определяется по формуле (3.VIII.42) и равен $\bar{p}=\pm 0{,}167$.

Коэффициент подъемной силы будет таким же, как для тонкой пластинки. Согласно (4.2.16), где $c_1=1/\alpha'$,

$$c_y = 4\alpha/\alpha' = 4\cdot 0{,}1/1{,}73 = 0{,}231.$$

Коэффициент сопротивления

$$c_{x\text{в}} = c_y\,\alpha = 4\alpha^2/\alpha' = 4\cdot 0{,}1^2/1{,}73 = 0{,}0231.$$

Центр давления треугольного крыла находится на расстоянии 2/3 корневой хорды от вершины, следовательно, коэффициент центра давления

$$c_{\text{ц.д}} = x_{\text{ц.д}}/b_{\text{кр}} = 2/3.$$

Коэффициент продольного момента относительно оси Oz, проходящей через вершину,

$$-m_z = (2/3)\,c_y = (8/3)\,(\alpha/\alpha') = (8\cdot 0{,}1)/(3\cdot 1{,}73) = 0{,}154.$$

Определим подъемную силу, волновое сопротивление и момент:

$$Y = c_y\,\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2}\,S_{\text{кр}} = c_y\,\frac{kp_\infty \mathbf{M}_\infty^2}{2}\cdot\frac{b_{\text{кр}}\,l}{2} =$$

$$= 0{,}231\,\frac{1{,}4\cdot 1\cdot 10^4\cdot 2^2}{2}\cdot\frac{5\cdot 8}{2} = 131\cdot 10^3\,\kappa\Gamma;$$

$$X_{\text{в}} = c_{x\text{в}}\,\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2}\,S_{\text{кр}} = c_{x\text{в}}\,\frac{kp_\infty \mathbf{M}_\infty^2}{2}\cdot\frac{b_{\text{кр}}\,l}{2} =$$

$$= 0{,}0231\,\frac{1{,}4\cdot 1\cdot 10^4\cdot 2^2}{2}\cdot\frac{5\cdot 8}{2} = 13{,}1\cdot 10^3\,\kappa\Gamma;$$

$$M_z = m_z\,\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2}\,S_{\text{кр}}\,b_{\text{кр}} = m_z\,\frac{kp_\infty \mathbf{M}_\infty^2}{2}\cdot\frac{b_{\text{кр}}\,l}{2}\,b_{\text{кр}} =$$

$$= -\,0{,}154\,\frac{1{,}4\cdot 1\cdot 10^4\cdot 2^2}{2}\cdot\frac{5\cdot 8}{2}\,5 = -\,0{,}431\cdot 10^6\,\kappa\Gamma\cdot м.$$

VIII.10. Определим угол Маха

$$\mu_\infty = \arcsin\left(1/\mathbf{M}_\infty\right) = \arcsin(1/1{,}4) = 45^\circ\,36',$$

а также углы стреловидности передней и задней кромок (рис. 3.VIII.16):

$$\chi_1 = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{l/2}{b_1}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{5/2}{3}\right) = 50^\circ\,12';$$

$$\chi_2 = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{l/2}{b_{\text{кр}}-b_2}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi/2}{7-6}\right) = 21^\circ\,48'.$$

В соответствии с этими данными $(\pi/2-\chi_2)>\mu_\infty>(\pi/2-\chi_1)$.

Таким образом, передние кромки крыла являются дозвуковыми, а задние — сверхзвуковыми. Такой вид задних кромок исключает воздействие вихревой пелены за крылом на его обтекание. Однако необходимо учитывать влияние боковых кромок на течение газа в областях крыла, ограниченных соответствующими линиями Маха и этими кромками. Три области, в каждой из которых расчет коэффициента давления ведется по соответствующим формулам, показаны на рис. 3.VIII.16.

Коэффициент давления в области I находится по формуле (3.VIII.40), в которой $\chi=\chi_1$ и $\sigma=\operatorname{tg}\theta\cdot\operatorname{tg}\chi_1=(z/x)\operatorname{tg}\chi_1$. Находим для заданных условий:

$$\sigma=\operatorname{tg}50^\circ 12'\cdot\operatorname{tg}\theta=1{,}2\cdot\operatorname{tg}\theta;$$

$$\alpha'=\sqrt{M_\infty^2-1}=\sqrt{1{,}4^2-1}=0{,}98;$$

$$n=\operatorname{tg}\chi_1/\alpha'=\operatorname{tg}50^\circ 12'/0{,}98=1{,}23;$$

$$k=\sqrt{1-1/n^2}=\sqrt{1-1/1{,}23^2}=0{,}582.$$

Из таблиц полных эллиптических интегралов [8] по $\alpha=\arcsin k=$ $=\arcsin 0{,}582=35^\circ 36'$ находим $E(k)=1{,}74$. После подстановки в (3.VIII.40) получаем

$$\bar{p}_I=\pm\frac{2\cdot 0{,}1}{1{,}74\operatorname{tg}50^\circ 12'\sqrt{1-1{,}2^2\operatorname{tg}^2\theta}}=\pm\frac{0{,}08}{\sqrt{0{,}7-\operatorname{tg}^2\theta}}.$$

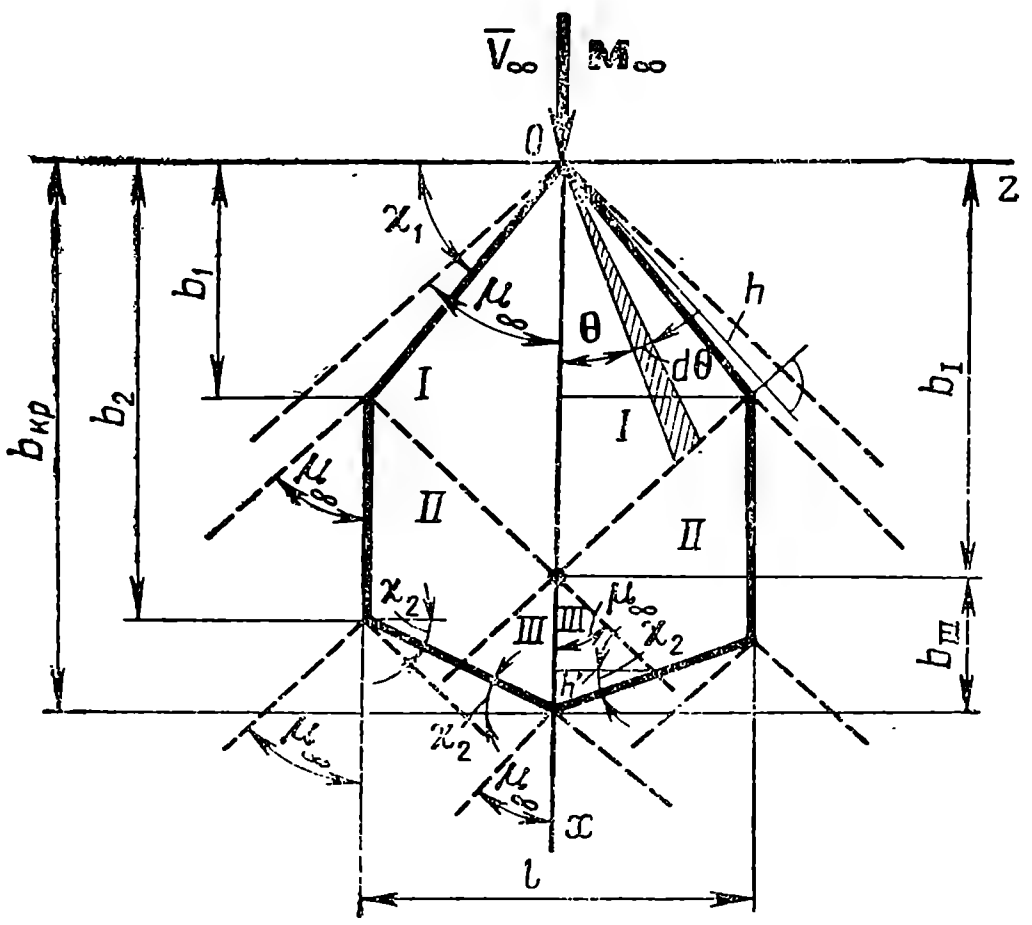


Рис. 3.VIII.16. К расчету обтекания плоского шестиугольного крыла с дозвуковыми передними и сверхзвуковыми задними кромками

(пунктиром показаны линии Маха)

Из этой формулы следует, что коэффициент давления в области I постоянен вдоль линии с углом θ. В частности, для точек на корневой хорде ($\theta=0$; $\operatorname{tg}\theta=0$)

$$\bar{p}_I=\pm\frac{0{,}08}{\sqrt{0{,}7}}=\pm 0{,}0957,$$

а на передней кромке, где $\operatorname{tg}\theta=1/\operatorname{tg}\chi_1$ и $\sigma_1=1$, значение $\bar{p}_I=\infty$. Вдоль луча с углом $\theta=$ $=30^\circ$, например,

$$\bar{p}_I=\pm\frac{0{,}08}{\sqrt{0{,}7-\operatorname{tg}^2 30^\circ}}=\pm 0{,}132.$$

В области II коэффициент давления

$$\bar{p}_{II}=\pm\frac{2\alpha}{E(k)\operatorname{tg}\chi_1}\sqrt{\alpha'\operatorname{tg}\chi_1(1+n)}. \qquad (3.VIII.44)$$

Из этой формулы следует, что во всех точках области II коэффициент давления одинаков:

$$\bar{p}_{II}=\pm\frac{2\cdot 0{,}1}{1{,}74\operatorname{tg}50^\circ 12'}\sqrt{0{,}98\operatorname{tg}50^\circ 12'(1+1{,}23)}=\pm 0{,}155.$$

В области III избыточное давление равно нулю и коэффициент давления $\bar{p}_{III}=0$.

Рассмотрим расчет коэффициента подъемной силы. Величина этой силы, найденная для области I,

$$Y_I=c_{yI}q_\infty S_{кр}=4\int_{S_I}\Delta p_I\,dS_I,$$

откуда

$$c_{yI}=4\int_0^{S_I/S_{кр}}\bar{p}_I\,d\bar{S}_I, \qquad (3.VIII.45)$$

где $d\overline{S_1}=d(S_I/S_{кр})$. Из рис. 3.VIII.16 видно, что

$$dS_I = (1/2)\,h^2\,d(\operatorname{tg}\theta),$$

где $h=b_I\sin\mu_\infty=[b_1+l/(2\operatorname{tg}\mu_\infty)]\sin\mu_\infty$. Учитывая, что $\sigma=\operatorname{tg}\theta\cdot\operatorname{tg}\chi_1$, находим $d(\operatorname{tg}\theta)=d\sigma/\operatorname{tg}\chi_1$ и

$$d\bar{S}_I = d\left(\frac{S_I}{S_{кр}}\right)=\left(\frac{h^2}{2\operatorname{tg}\chi_1 S_{кр}}\right)d\sigma, \qquad (3.VIII.46)$$

где $S_{кр}=lb_1/2+(b_2-b_1)\,l+l(b_{кр}-b_2)/2$.

С учетом (3.VIII.46) формула (3.VIII.45) запишется так:

$$c_{yI} = 4\,\frac{h^2}{2\operatorname{tg}\chi_1 S_{кр}}\int_0^1 \bar{p}_I\,d\sigma,$$

или, заменяя здесь коэффициент давления согласно (3.VIII.40),

$$c_{yI} = \frac{4h^2}{E(k)\operatorname{tg}^2\chi_1 S_{кр}}\int_0^1 \frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}.$$

Интегрируя, находим

$$c_{yI} = \frac{4h^2}{E(k)\operatorname{tg}^2\chi_1 S_{кр}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{4}=\frac{h^2\sqrt{\pi}}{E(k)\operatorname{tg}^2\chi_1 S_{кр}}. \qquad (3.VIII.47)$$

Производим вычисления:

$$S_{кр}=5\cdot 3/2+(6-3)\,5+5\,(7-6)/2=25;$$

$$h=[3+5/(2\operatorname{tg}45^\circ 36')]\sin 45^\circ 36'=3{,}92;$$

$$c_{yI}=\frac{3{,}92^2\sqrt{\pi}}{1{,}74\cdot\operatorname{tg}^2 50^\circ 12'\cdot 25}=0{,}434.$$

Для области *II* коэффициент подъемной силы

$$c_{yII}=\frac{Y_{II}}{q_\infty S_{кр}}=\frac{4\Delta p_{II}S_{II}}{q_\infty S_{кр}}=4\bar{p}_{II}\cdot\frac{S_{II}}{S_{кр}}. \qquad (3.VIII.48)$$

Определим площадь $S_{II}=S_{кр}/2-S_I-S_{III}$. Величина площади области *I* (см. рис. 3.VIII.16)

$$S_I=(1/2)\,b_I\,(l/2)=(1/2)\,[b_1+l/(2\operatorname{tg}\mu_\infty)]\,(l/2);$$

области *III*

$$S_{III}=(1/2)\,b_{III}\,h'=(1/2)\,b_{III}^2\,[\operatorname{tg}\mu_\infty/(1+\operatorname{tg}\mu_\infty\operatorname{tg}\chi_2)],$$

где $b_{III}=b_{кр}-b_I=b_{кр}-[b_1+l/(2\operatorname{tg}\mu_\infty)]$.

Производим вычисления:

$$b_I=3+5/(2\operatorname{tg}45^\circ 36')=5{,}45;$$

$$S_I=(1/2)\,5{,}45\,(5/2)=6{,}80;$$

$$b_{III}=7-5{,}45=1{,}55;$$

$$S_{III}=(1/2)\,1{,}55^2\,\frac{\operatorname{tg}45^\circ 36'}{1+\operatorname{tg}45^\circ 36'\cdot\operatorname{tg}21^\circ 48'}=0{,}84;$$

$$S_{II}=25/2-6{,}80-0{,}84=4{,}86;$$

$$c_{yII}=4\cdot 0{,}155\,(4{,}86/25)=0{,}116.$$

Для крыла в целом

$$c_y = c_{yI} + c_{yII} = 0{,}434 + 0{,}116 = 0{,}550.$$

Соответствующая подъемная сила

$$Y = c_y q_\infty S_{кр} = c_y \frac{kp_\infty M_\infty^2}{2} S_{кр} = 0{,}550 \frac{1{,}4 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 1{,}4^2}{2} 25 = 188 \cdot 10^3 \ кГ.$$

Коэффициент волнового сопротивления крыла

$$c_{xв} = c_{xi} - c_{xт},$$

где

$$c_{xi} = c_y \alpha = 0{,}550 \cdot 0{,}1 = 0{,}055;$$

$$c_{xт} = \frac{c_y^2}{4\pi} \operatorname{tg} \chi_1 \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{0{,}550^2}{4\pi} \operatorname{tg} 50^\circ 12' \sqrt{1 - \frac{1}{1{,}23^2}} = 0{,}017.$$

Таким образом,

$$c_{xв} = 0{,}055 - 0{,}017 = 0{,}038,$$

а сила волнового сопротивления

$$X_в = c_{xв} q_\infty S_{кр} = c_{xв} \frac{kp_\infty M_\infty^2}{2} S_{кр} = 0{,}038 \frac{1{,}4 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 1{,}4^2}{2} 25 = 13 \cdot 10^3 \ кГ.$$

VIII.11. По числу $M_\infty = 2$ определим угол Маха:

$$\mu_\infty = \arcsin(1/M_\infty) = \arcsin(1/2) = 30^\circ.$$

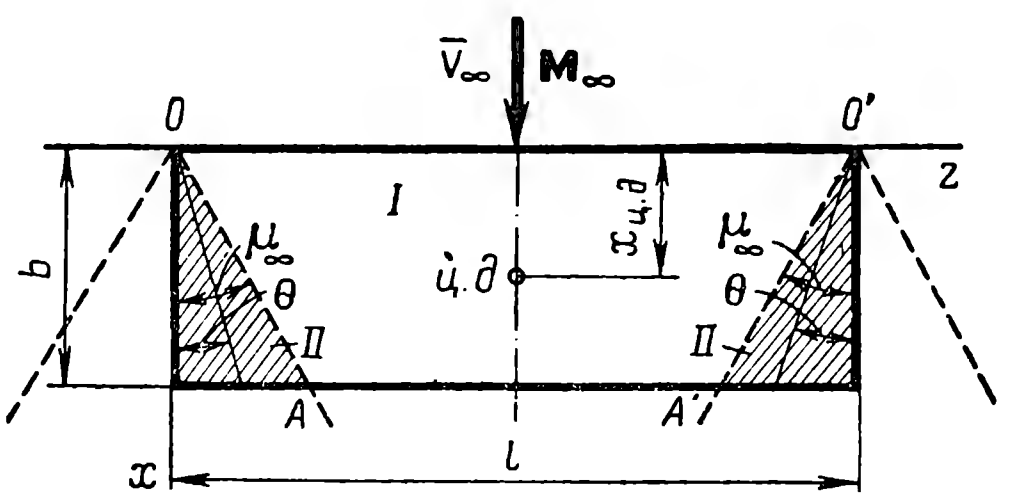


Рис. 3.VIII.17. К определению аэродинамических характеристик плоского прямоугольного крыла

(пунктиром показаны линии Маха; область влияния боковых кромок заштрихована)

Под этим углом к боковым кромкам крыла проведем из точек O и O' (рис. 3.VIII.17) линии Маха, которые разделяют поверхность крыла на две области (I и II) с различным характером возмущенного движения.

В области I вне конусов Маха коэффициент давления определяется так же, как для плоской пластинки бесконечного размаха:

$$\bar{p}_I = \pm \frac{2\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} = \pm \frac{2 \cdot 0{,}1}{\sqrt{2^2 - 1}} = \pm 0{,}116. \qquad (3.VIII.49)$$

Здесь знак «+» относится к нижней, а знак «—» — к верхней поверхностям крыла.

В области II коэффициент давления сохраняет постоянное значение вдоль лучей, исходящих из передних кромок O и O' концевых сечений (см. рис. 3.VIII.17), и определяется по формуле

$$\bar{p}_{II} = \pm \frac{4\alpha}{\pi \alpha'} \arcsin \sqrt{\alpha' \operatorname{tg} \theta}, \qquad (3.VIII.50)$$

где $\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = \sqrt{2^2 - 1} = 1{,}73$.

На боковых кромках ($\theta = 0$) коэффициент давления равен нулю, а на линиях Маха OA и $O'A'$, где $\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \mu_\infty = 1/\alpha'$,

$$\bar{p} = \pm \frac{4\alpha}{\pi\alpha'} \arcsin 1 = \pm \frac{4 \cdot 0{,}1}{\pi \cdot 1{,}73} \cdot \frac{\pi}{2} = \pm 0{,}116.$$

Коэффициент подъемной силы крыла (при $\lambda_{кр} = l/b = 6/2 = 3$)

$$c_y = \frac{4\alpha}{\alpha'} \left(1 - \frac{1}{2\lambda_{кр}\alpha'}\right) = \frac{4 \cdot 0{,}1}{1{,}73} \left(1 - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 1{,}73}\right) = 0{,}209. \quad (3.VIII.51)$$

Коэффициент волнового сопротивления

$$c_{xв} = c_y \alpha = 0{,}209 \cdot 0{,}1 = 0{,}021; \quad (3.VIII.52)$$

коэффициент момента относительно передней кромки

$$-m_z = \frac{2\alpha}{\alpha'} \left(1 - \frac{2}{3\lambda_{кр}\alpha'}\right) = \frac{2 \cdot 0{,}1}{1{,}73} \left(1 - \frac{2}{3 \cdot 3 \cdot 1{,}73}\right) = 0{,}105; \quad (3.VIII.53)$$

коэффициент центра давления

$$c_{ц.д} = \frac{x_{ц.д}}{b} = -\frac{m_z}{c_y} = \frac{0{,}105}{0{,}209} \approx 0{,}5. \quad (3.VIII.54)$$

Значения соответствующих сил и момента будут следующими:

$$Y = c_y q_\infty S_{кр} = c_y \frac{kp_\infty \mathbf{M}_\infty^2}{2} bl = 0{,}209 \frac{1{,}4 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 2^2}{2} 2 \cdot 6 = 70 \cdot 10^3 \ кГ;$$

$$X_в = c_{xв} q_\infty S_{кр} = c_{xв} \frac{kp_\infty \mathbf{M}_\infty^2}{2} bl = 0{,}021 \frac{1{,}4 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 2^2}{2} 2 \cdot 6 = 7 \cdot 10^3 \ кГ.$$

$$M_z = m_z q_\infty S_{кр} b = -Yx_{ц.д} = -Yc_{ц.д} b = -70 \cdot 10^3 \cdot 0{,}5 \cdot 2 = -70 \cdot 10^3 \ кГ \cdot м.$$

VIII.12. Определим угол Маха:

$$\mu_\infty = \arcsin\left(1/\mathbf{M}_\infty\right) = \arcsin\left(1/1{,}4\right) = 45° 39'$$

и проведем под этим углом к боковым кромкам линии Маха (рис. 3.VIII.18) до пересечения с задней кромкой. В этом случае поверхность крыла, как видно из рисунка, разбивается на три области (*I*, *II*, *III*), ограниченные линиями Маха и кромками крыла.

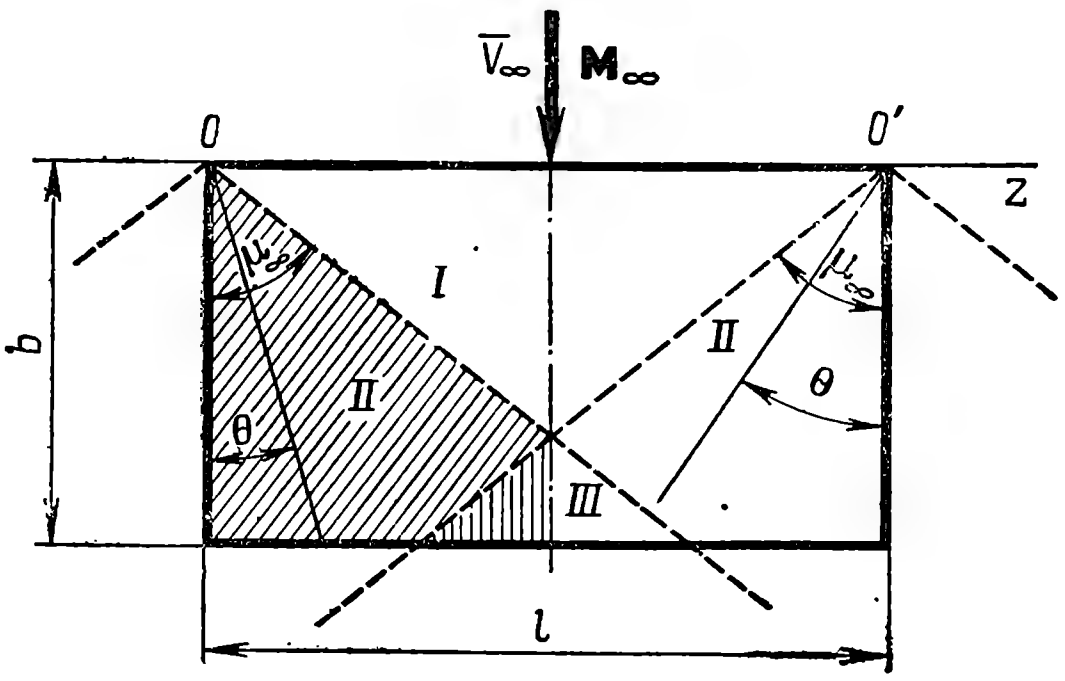


Рис. 3.VIII.18. К расчету обтекания плоского прямоугольного крыла

(пунктиром показаны линии Маха)

Коэффициенты давления в областях *I* и *II* рассчитываются соответственно по формулам (3.VIII.49) и (3.VIII.50), в которых $\mathbf{M}_\infty = 1{,}3; \alpha' = \sqrt{\mathbf{M}_\infty^2 - 1} = \sqrt{1{,}3^2 - 1} = 0{,}98$. Находим:

$$\bar{p}_I = \pm \frac{2 \cdot 0{,}1}{0{,}98} = \pm 0{,}204;$$

$$\bar{p}_{II} = \pm \frac{4 \cdot 0{,}1}{\pi \cdot 0{,}98} \arcsin \sqrt{0{,}98 \operatorname{tg} \theta} = \pm 0{,}13 \arcsin \sqrt{0{,}98 \operatorname{tg} \theta}.$$

Следует иметь в виду, что по последней формуле рассчитывается коэффициент давления вдоль луча с углом θ только в пределах области *II* (см. рис. 3.VIII.18).

В области *III* коэффициент давления

$$\bar{p}_{III} = 2\bar{p}_{II} - \bar{p}_I = \pm \frac{8\alpha}{\pi\alpha'} \arcsin\sqrt{\alpha' \operatorname{tg}\theta} \mp \frac{2\alpha}{\alpha'}$$

определяется для части луча, проведенного под углом θ из точки O (или O') и находящегося в этой области.

Рассмотрим расчет аэродинамических характеристик крыла. Представим подъемную силу, действующую на крыло, в виде суммы сил:

$$Y = Y_I + Y_{II} + Y_{III},$$

где Y_I, Y_{II}, Y_{III} — подъемные силы соответственно для областей *I*, *II* и *III*. Для каждой из этих сил можно записать:

$$Y_I = c_{yI} q_\infty S_{\text{кр}} = 2 \int_{S_I} \Delta p_I \, dS_I;$$

$$Y_{II} = c_{yII} q_\infty S_{\text{кр}} = 4 \int_{S'_{II}} \Delta p_{II} \, dS'_{II};$$

$$Y_{III} = c_{yIII} q_\infty S_{\text{кр}} = 4 \int_{S'_{III}} \Delta p_{III} \, dS'_{III}.$$

Интегрирование ведется по области *I* и по полуобластям *II* и *III* (заштрихованы на рис. 3.VIII.18), площади которых соответственно S_I, $S'_{II} = S_{II}/2$ и $S'_{III} = S_{III}/2$. Из записанных соотношений следует, что

$$c_y = 2\bar{p}_I \frac{S_I}{S_{\text{кр}}} + 4 \int_{S'_{II}} \bar{p}_{II} \, d\bar{S}'_{II} + 4 \int_{S'_{III}} \bar{p}_{III} \, d\bar{S}'_{III},$$

где $d\bar{S}'_{II} = d(S'_{II}/S_{\text{кр}})$ и $d\bar{S}'_{III} = d(S'_{III}/S_{\text{кр}})$. Подставляя выражения для $\bar{p}_I$, $\bar{p}_{II}$ и $\bar{p}_{III}$ и интегрируя, найдем коэффициент подъемной силы крыла, который будет определяться по формуле (3.VIII.51). Внося в нее значение $\lambda_{\text{кр}} = l/b = 6/4 = 1{,}5$, получим

$$c_y = \frac{4 \cdot 0{,}1}{0{,}98} \left(1 - \frac{1}{2 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}98}\right) = 0{,}269.$$

Коэффициенты волнового сопротивления, момента и центра давления соответственно будут следующими [см. (3.VIII.52) ÷ (3.VIII.54)]:

$$c_{x\text{в}} = 0{,}269 \cdot 0{,}1 = 0{,}027;$$

$$-m_z = \frac{2 \cdot 0{,}1}{0{,}98} \left(1 - \frac{2}{3 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}98}\right) = 0{,}112;$$

$$c_{\text{ц.д}} = \frac{0{,}112}{0{,}269} = 0{,}418.$$

Подъемная сила, волновое сопротивление и момент крыла относительно передней кромки соответственно равны:

$$Y = c_y q_\infty S_{\text{кр}} = c_y \frac{kp_\infty M_\infty^2}{2} bl = 0{,}269 \frac{1{,}4 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 1{,}4^2}{2} 4 \cdot 6 = 88{,}5 \cdot 10^3 \ кГ;$$

$$X_{\text{в}} = c_{x\text{в}} q_\infty S_{\text{кр}} = c_{x\text{в}} \frac{kp_\infty M_\infty^2}{2} bl = 0{,}027 \frac{1{,}4 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 1{,}4^2}{2} 4 \cdot 6 = 8{,}85 \cdot 10^3 \ кГ;$$

$$M_z = m_z q_\infty S_{\text{кр}} b = m_z \frac{kp_\infty M_\infty^2}{2} blb = -0{,}112 \frac{1{,}4 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 1{,}4^2}{2} 4 \cdot 6 \cdot 4 =$$

$$= -147 \cdot 10^3 \ кГ \cdot м.$$

IX.1. Рассмотрим картину обтекания сверхзвуковым потоком острого конуса с половинным углом $\beta_к$ при вершине. В этом случае перед конусом возникает скачок уплотнения в виде конической поверхности с соответствующим углом θ_c. Сверхзвуковое течение, образующееся между поверхностями конуса и скачка, является по своему характеру коническим. Это означает, что параметры потока (плотность, температура, давление и др.) остаются постоянными вдоль прямых, проведенных из вершины конуса. Этот признак конического течения остается в силе также и для прямых, совпадающих с поверхностями конуса и скачка.

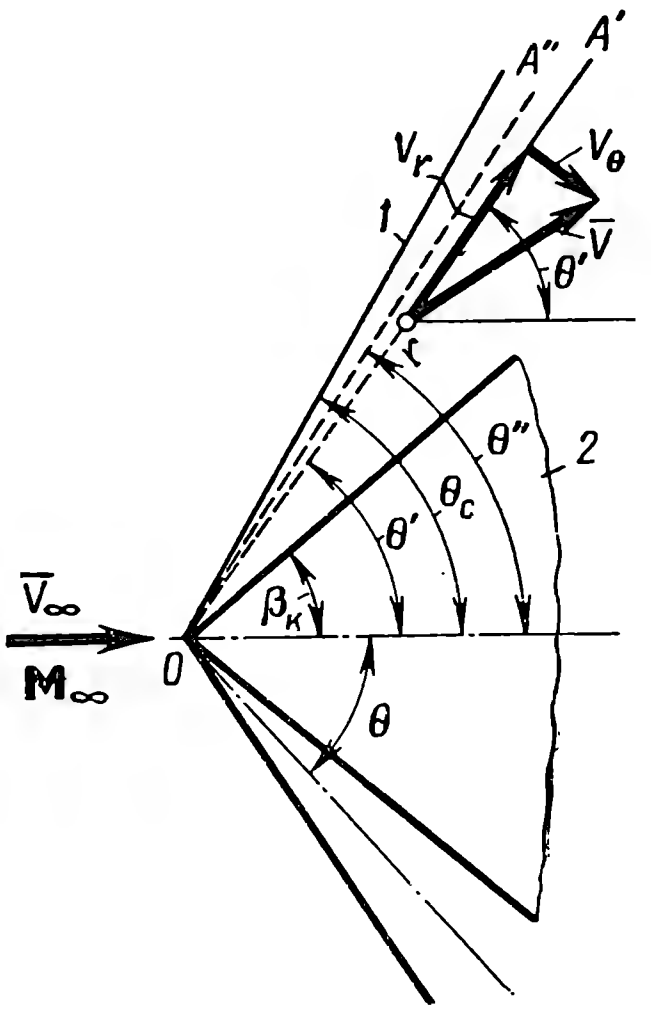


Рис. 3.IX.1. Коническое течение около острого конуса:
1 — скачок; *2* — конус

Рассматриваемые параметры изменяются при переходе от одной прямой (OA'), расположенной под углом θ' (рис. 3.IX.1), к другой (OA'') с углом θ''. При этом любой параметр является функцией угла θ, поэтому можно записать, что частные производные

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\rho, T, p, V) \neq 0. \qquad (3.IX.1)$$

Однако такого изменения не наблюдается вдоль прямых OA, поэтому любая частная производная от параметров газа по сферической координате r (см. рис. 3.IX.1) равна нулю, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial r}(\rho, T, p, V) = 0. \qquad (3.IX.2)$$

Коническое течение около конуса разрушается, если скорости за скачком становятся дозвуковыми.

IX.2. На рис. 2.IX.1 видно, что дуга радиуса a^* (критическая скорость звука) пересекает годограф скорости *2* в некоторой точке. Это значит, что скорости, определяемые участком годографа, лежащим внутри области, ограниченной радиусом a^*, будут дозвуковыми, а скорости, определяемые участком годографа, лежащим вне этой области, сверхзвуковыми. Таким образом, возмущенное течение будет смешанным. В области, примыкающей к скачку уплотнения, течение будет сверхзвуковым, а вблизи поверхности конуса — дозвуковым. Для еще большего угла конуса ($\beta_{к1} > \beta_{к2}$) годограф скорости *1* располагается левее дуги a^*, и, следовательно, возмущенный поток будет полностью дозвуковым. Что касается годографа *3*, то он определяет полностью сверхзвуковое течение в возмущенной области.

IX.3. Критическим называется такой угол конуса $\beta_{к.кр}$, при превышении которого скачок уплотнения отходит от острия конуса (рис. 3.IX.2,*б*) и превращается в отошедшую ударную волну. Критический угол является при заданных условиях обтекания (давление p_∞, плотность ρ_∞, показатель $k = c_p/c_v$) функцией только скорости V_∞ набегающего потока (соответственно числа $M_\infty = V_\infty/a_\infty$ или относительной скорости $\lambda_\infty = V_\infty/a^*$).

Определить $\beta_{к.кр}$ можно, проведя из начала координат O касательную OB к «яблоковидной» кривой так, как это показано на рис. 3.IX.2, *а*.

IX.4. Известно [20], что «яблоковидная» кривая, позволяющая графически определять параметры течения в возмущенной области между

скачком уплотнения и конусом, расположена относительно ударной поляры так, как показано на рис. 3.IX.2, *а*. Точки, лежащие на ударной поляре, определяют скорости потока сразу за скачком уплотнения.

Величины критических углов для конуса $\beta_{к.кр}$ и для клина $\beta_{кл.кр}$ на-

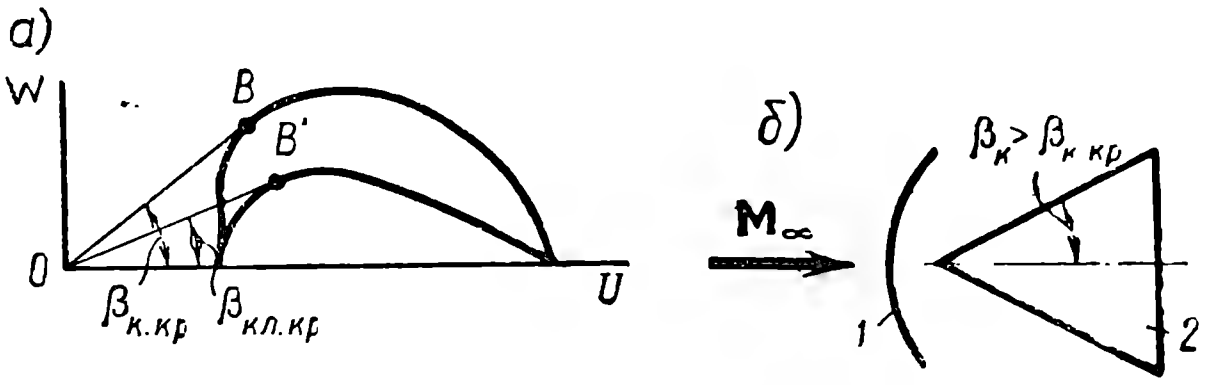


Рис. 3.IX.2. Определение критического угла конуса:

1 — отошедшая ударная волна; *2* — конус

ходят, проводя касательные соответственно к «яблоковидной» кривой и к поляре. Из рис. 3.IX.2 ясно видно, что $\beta_{к.кр} > \beta_{кл.кр}$, т. е. при заданном числе M_∞ максимальный угол полураствора конуса значительно больше соответствующего угла клина. Объясняется это тем, что течение около конуса имеет пространственный характер, обеспечивающий газу возможность более плавного изменения направления течения по сравнению с клином.

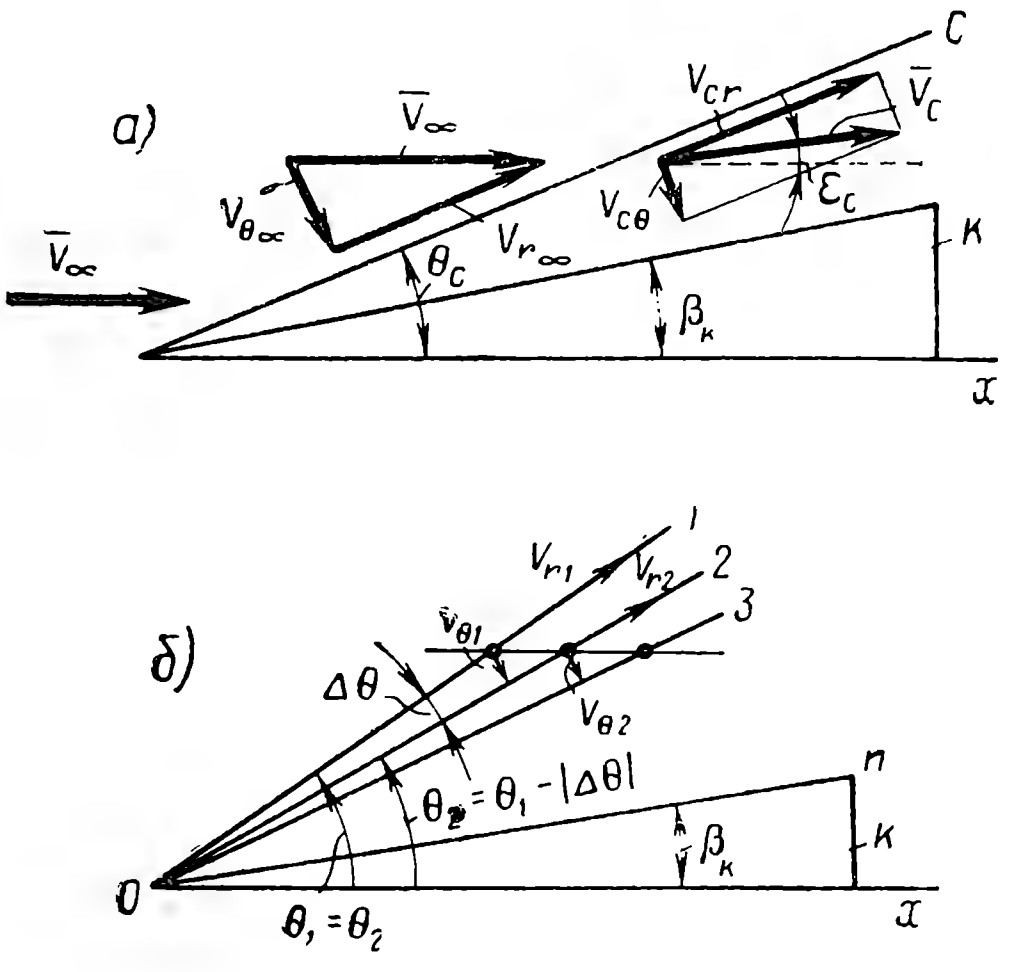


Рис. 3.IX.3. Расчетные схемы для определения параметров конического течения:

К — конус; *С* — скачок

IX.5. Задачу об обтекании конуса потоком с числом $M_\infty = 5$ решим в предположении, что удельные теплоемкости при переходе газа через скачок уплотнения останутся постоянными. Схема течения представлена на рис. 3.IX.3, *а*. Расчет произведем по методу, изложенному в § 9.2 [20].

Определим продольную составляющую скорости за скачком, отнесенную к максимальной скорости V_{max}:

$$V_{r\infty}/V_{max} = \tilde{V}_{r\infty} = \tilde{V}_{cr} = \tilde{V}_\infty \cos\theta_c.$$

Имея в виду, что

$$a_\infty^2 = \frac{k-1}{2}\left(V_{max}^2 - V_\infty^2\right)$$

и соответствующая этому значению безразмерная величина

$$\tilde{V}_\infty = V_\infty/V_{max} = \left(\frac{2}{k-1}\cdot\frac{1}{M_\infty^2} + 1\right)^{-1/2} = \left(\frac{2}{1{,}4-1}\cdot\frac{1}{5^2} + 1\right)^{-1/2} = 0{,}912,$$

найдем

$$\tilde{V}_{cr} = \tilde{V}_\infty \cos\theta_c = 0{,}912\cdot\cos 30^\circ = 0{,}79.$$

Обозначая для удобства дальнейших вычислений $\theta_c = \theta_1$, найдем нормальную составляющую скорости за скачком:

$$\tilde{V}_{c\theta} = \tilde{V}_{\theta 1} = \frac{1}{\tilde{V}_\infty \sin\theta_1}\left(-\tilde{a}^{*2} + \frac{k-1}{k+1}\tilde{V}_{r1}^2\right). \qquad (3.IX.3)$$

Здесь

$$\tilde{a}^{*2} = \frac{\frac{2}{k+1} + \frac{k-1}{k+1}M_\infty^2}{\frac{2}{k-1} + M_\infty^2} = \frac{\frac{2}{1,4+1} + \frac{1,4-1}{1,4+1}5^2}{\frac{2}{1,4-1} + 5^2} = 0,167.$$

Таким образом,

$$\tilde{V}_{\theta_1} = \frac{1}{0,912 \cdot \sin 30^\circ}\left(-0,167 + \frac{1,4-1}{1,4+1}0,79^2\right) = -0,136.$$

Область течения между скачком и конусом расчленим на участки при помощи прямых (лучей), выходящих из точки O (рис. 3.IX.3, *б*), и определим параметры последовательно на каждой из прямых, начиная с образующей скачка уплотнения. При этом величину шага $\Delta\theta$ выберем равной 0,5°. Так как $\Delta\theta$ откладывается каждый раз против положительного направления угла θ, то знак $\Delta\theta$ будет отрицательным. Все лучи пронумеруем, причем образующая скачка уплотнения будет являться первым таким лучом (см. рис. 3.IX.3, *б*). Для второго луча

$$\theta_2 = \theta_1 - |\Delta\theta| = 30^\circ - 0,5^\circ = 29,5^\circ.$$

Радиальная составляющая скорости на этом луче

$$\tilde{V}_{r2} = \tilde{V}_{r1} + \tilde{V}_{\theta 1}\Delta\theta = 0,79 + (-0,136)\frac{-0,5}{57,3} = 0,7912. \qquad (3.IX.4)$$

Соответствующая нормальная составляющая скорости

$$\tilde{V}_{\theta 2} = \tilde{V}_{\theta 1} + (d\tilde{V}_\theta/d\theta)_1 \Delta\theta, \qquad (3.IX.5)$$

где

$$\left(\frac{d\tilde{V}_\theta}{d\theta}\right)_1 = \left[-\tilde{V}_{\theta 1}\operatorname{ctg}\theta_1 + \tilde{V}_{r1}\left(\frac{\tilde{V}_{\theta 1}^2}{\tilde{a}_1^2} - 2\right)\right]\left(1 - \frac{\tilde{V}_{\theta 1}^2}{\tilde{a}_1^2}\right)^{-1}. \qquad (3.IX.6)$$

Находим:

$$\frac{a_1^2}{V_{max}^2} = \tilde{a}_1^2 = \frac{k-1}{2}\left[1 - \left(\tilde{V}_{r1}^2 + \tilde{V}_{\theta 1}^2\right)\right] = \frac{1,4-1}{2}\left[1 - (0,79^2 + 0,136^2)\right] = 0,0707;$$

$$\left(\frac{d\tilde{V}_\theta}{d\theta}\right)_1 = \left[0,136\operatorname{ctg}30^\circ + 0,79\left(\frac{0,136^2}{0,0707} - 2\right)\right]\left(1 - \frac{0,136^2}{0,0707}\right)^{-1} = -1,54.$$

Следовательно,

$$\tilde{V}_{\theta 2} = -0,136 + (-1,54)\left(-\frac{0,5}{57,3}\right) = -0,136 + 0,0135 = -0,1225.$$

Теперь определим скорость на третьем луче, для которого

$$\theta_3 = \theta_1 - 2|\Delta\theta| = 30^\circ - 2 \cdot 0,5^\circ = 29^\circ;$$

$$\tilde{V}_{r3} = \tilde{V}_{r2} + \tilde{V}_{\theta 2}\Delta\theta = 0,7912 + \frac{-0,5}{57,3}(-0,1225) = 0,7923,$$

$$\tilde{V}_{\theta 3} = \tilde{V}_{\theta 2} + \left(\frac{d\tilde{V}_\theta}{d\theta}\right)_2 \Delta\theta = -0,1225 + \left(\frac{d\tilde{V}_\theta}{d\theta}\right)_2 \Delta\theta.$$

Аналогично осуществляются расчеты для остальных прямых (лучей). Результаты таких расчетов представлены в табл. 3.IX.1.

Таблица 3.IX.1

Номер луча	$\theta=\theta_c+n\Delta\theta$, *град*	$\widetilde{V}_r$	$\widetilde{V}_\theta$	$\widetilde{a}^2$	$\frac{d\widetilde{V}_\theta}{d\theta}$
1	30	0,7900	—0,1360	0,0707	—1,54
2	29,5	0,7912	—0,1225	0,0714	—1,52
3	29	0,7923	—0,1095	0,0716	—1,50
4	28,5	0,7933	—0,0965	0,0720	—1,49
5	28	0,7941	—0,0845	0,0726	—1,50
6	27,5	0,7948	—0,0715	0,0728	—1,50
7	27	0,7954	—0,0595	0,0733	—1,51
8	26,5	0,7959	—0,0465	0,0736	—1,52
9	26	0,7963	—0,0335	0,0738	—1,54
10	25,5	0,7966	—0,0200	0,0740	—1,56
11	25	0,7968	—0,0065	0,0740	—1,58
12	24,5	0,7969	0,0065	—	—

Из табл. 3.IX.1 видно, что где-то между одиннадцатым и двенадцатым лучами скорость $\widetilde{V}_\theta=0$. Это может быть лишь на твердой поверхности отыскиваемого конуса, которая отстоит от одиннадцатого луча на угол [20]

$$\Delta\theta_n=\frac{-\widetilde{V}_{\theta 11}}{(d\widetilde{V}_\theta/d)_{11}}=\frac{-(-0,0065)}{-1,58}=-0,0041=-0,24°.$$

Таким образом,

$$\beta_к=\theta_1-\Sigma|\Delta\theta|=30°-5,24°=24°46';$$

$$\widetilde{V}_к=\widetilde{V}_r=0,797.$$

Теперь можно найти коэффициент давления на конусе:

$$\bar{p}_к=\frac{p_к-p_\infty}{q_\infty}=\frac{2}{k\mathbf{M}_\infty^2}\left[\frac{p_0'}{p_0}\left(\frac{1-\widetilde{V}_к^2}{1-\widetilde{V}_\infty^2}\right)^{\frac{k}{k-1}}-1\right], \qquad (3.IX.7)$$

где отношение давлений $p_0'/p_0=0,5$ определено по (9.2.26) [20] для $\theta_c=30°$ и $\mathbf{M}_\infty=5$. Следовательно,

$$\bar{p}_к=\frac{2}{1,4\cdot 5^2}\left[0,5\left(\frac{1-0,797^2}{1-0,912^2}\right)^{\frac{1,4}{1,4-1}}-1\right]=0,366.$$

Определим соответствующие плотность и температуру газа:

$$\frac{\rho_к}{\rho_\infty}=\frac{p_0'}{p_0}\left(\frac{1-\widetilde{V}_к^2}{1-\widetilde{V}_\infty^2}\right)^{\frac{1}{k-1}}=0,5\left(\frac{1-0,797^2}{1-0,912^2}\right)^{\frac{1}{1,4-1}}=3,38;$$

$$\frac{T_к}{T_\infty}=(1-\widetilde{V}_к^2)\left(1+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\infty^2\right)=(1-0,797^2)\left(1+\frac{1,4-1}{2}5^2\right)=2,17.$$

Известно, что для острого конуса коэффициент волнового сопротивления равен коэффициенту давления, т. е. $c_{xв}=\bar{p}_к$. Поэтому величина такого сопротивления

$$X_в=c_{xв}q_\infty S_{мид}=0,5k\pi\bar{p}_к\mathbf{M}_\infty^2 p_\infty r_{мид}^2. \qquad (3.IX.8)$$

Положив $p_\infty = 1$ *кГ/см*^{2}, а высоту конуса 5 *м*, получим

$$X_в = 0{,}5 \cdot 1{,}4 \cdot \pi \cdot 0{,}366 \cdot 5^2 \cdot 1 \cdot 10^4 (5 \cdot \operatorname{tg} 24° 46')^2 = 168 \cdot 10^4 \text{ кГ}.$$

IX.6. При обтекании острого конуса сверхзвуковым потоком перед ним возникает скачок уплотнения. Образующая этого скачка представляет собою прямую линию OA (см. рис. 2.IX.2). Если бы конус был бесконечной длины, то скачок продолжался бы за точку A в виде такой прямой. Это следует из того, что течение в области между поверхностями скачка и конуса по своему характеру коническое. Однако конечные размеры конуса являются причиной искривления скачка, начиная с точки A. Происходит это потому, что угловые точки конуса B и C (вернее,

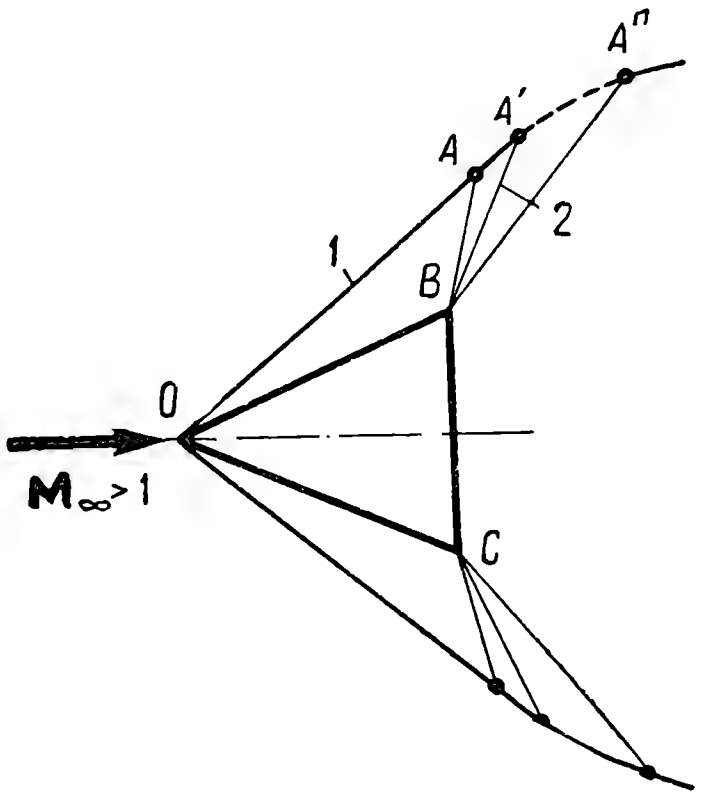


Рис. 3.IX.4. Взаимодействие конического скачка уплотнения с линиями слабых возмущений:

1 — скачок уплотнения; *2* — линии слабых возмущений

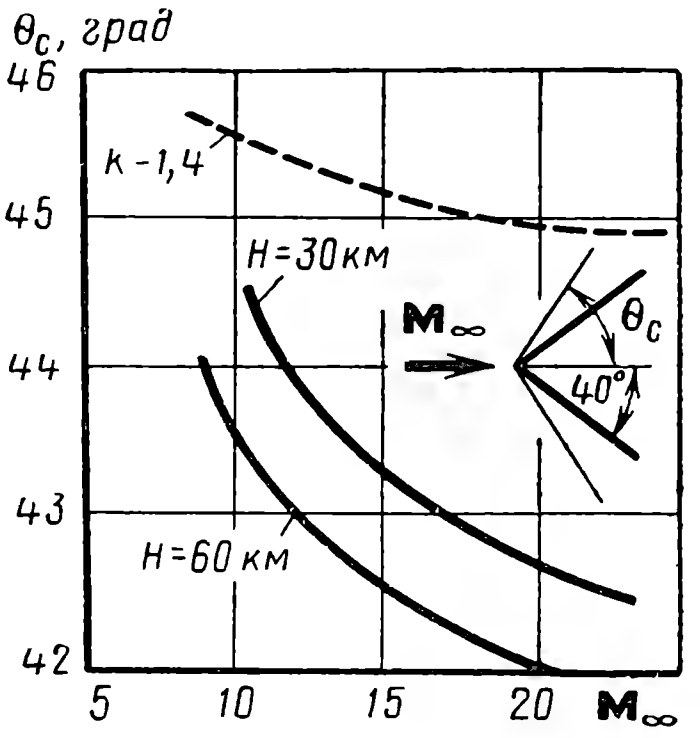


Рис. 3.IX.5. Изменение угла скачка уплотнения перед острым конусом при увеличении числа $\mathbf{M}_\infty$ полета

каждая точка, лежащая на окружности основания конуса) являются источниками малых возмущений (рис. 3.IX.4), которые, распространяясь в коническом потоке, достигают скачка уплотнения в точках A, A', ..., A^n. Внутри угла, ограниченного крайними линиями возмущений BA и BA^n, происходит расширение сверхзвукового потока. Возмущения, исходящие от точек B и C и являющиеся по своему характеру волнами разрежения, взаимодействуют со скачком уплотнения, уменьшая его интенсивность и тем способствуя его искривлению. Это искривление начинается в точке A, где на скачок падает первая линия BA слабых возмущений.

IX.7. Угол наклона скачка уплотнения θ_c перед острым конусом с ростом числа $\mathbf{M}_\infty$ полета уменьшается. Это, в частности, хорошо видно на рис. 3.IX.5, где по результатам расчетов обтекания острого конуса с углом $\beta_к = 40°$ построены графики зависимостей $\theta_c = \theta_c(\mathbf{M}_\infty)$ как без учета диссоциации ($k = 1{,}4$), так и с ее учетом. Такой характер изменения угла конуса обусловлен дополнительным уплотнением газа у обтекаемой поверхности при возрастании скорости и, следовательно, бóльшим приближением фронта ударной волны к этой поверхности.

IX.8. С увеличением угла конуса $\beta_к$ увеличивается угол скачка θ_c, что влечет за собой более интенсивный разогрев газа около конуса, вследствие чего возрастает степень диссоциации. Этот процесс происходит с поглощением тепла, что вызывает снижение температуры $T_к$ на поверхности конуса по сравнению с той, которая была бы в газе, если бы не происходило физико-химических превращений. Расчеты показали также, что давление $p_к$ на поверхности, вычисленное с учетом диссоциации, мало отличается от давления, рассчитанного без ее учета.

IX.9. Расчет параметров на конусе при заданных условиях невозмущенного сверхзвукового потока произведем с учетом физико-химических превращений обтекающего воздуха. По таблицам стандартной атмосферы находим параметры воздушной атмосферы на высоте $H=5$ *км*; $\rho_\infty=\rho_1=0{,}07511$ *кГ·сек²/м⁴*; $p_\infty=p_1=0{,}5511$ *кГ/см²*; $T_\infty=T_1=255{,}6$ К; $a_\infty=a_1=320{,}5$ *м/сек*; $\mu_{ср}=\mu_{ср1}=28{,}97$.

Скорости звука $a_1=320{,}5$ *м/сек* и числу $\mathbf{M}_1=\mathbf{M}_\infty=20$ соответствует скорость полета

$$V_1=\mathbf{M}_1 a_1=20\cdot 320{,}5=6410\ м/сек.$$

Энтальпия воздуха на рассматриваемой высоте

$$i_1=c_{p1}T_1=1002\cdot 255{,}6=0{,}26\cdot 10^6\ м^2/сек^2.$$

Расчет обтекания конической поверхности обычно начинают с определения параметров газа за косым скачком уплотнения по известным $\mathbf{M}_\infty=\mathbf{M}_1$ и θ_c (см. задачу IV.52).

В первом приближении полагаем величину $\Delta\bar{V}_n=(V_{\theta\infty}-V_{c\infty})/V_{\theta\infty}=(V_{n1}-V_{n2})/V_{n1}=0{,}9$ (см. рис. 3.IX.3) и получаем:

$$p_2=p_1\left(1+k_1\Delta\bar{V}_n\mathbf{M}_1^2\sin^2\theta_c\right)=0{,}5511\left(1+1{,}4\cdot 0{,}9\cdot 20^2\cdot 0{,}766^2\right)=$$
$$=163\ кГ/см^2;$$
$$i_2=i_1+(V_1^2/2)\sin^2\theta_c\,\Delta\bar{V}_n\left(2-\Delta\bar{V}_n\right)=0{,}26\cdot 10^6+$$
$$+\frac{6410}{2}0{,}766^2\cdot 0{,}9\,(2-0{,}9)=12{,}17\cdot 10^6\ м^2/сек^2.$$

Зная i_2 и p_2, по графикам [17] находим $T_2=6675$ К, а по [33] $\mu_{ср2}=24{,}6$. Теперь находим значения:

$$A=\frac{k_1\mathbf{M}_1^2\sin^2\theta_c-1}{2k_1\mathbf{M}_1^2\sin^2\theta_c}=\frac{1{,}4\cdot 20^2\cdot 0{,}766^2-1}{2\cdot 1{,}4\cdot 20^2\cdot 0{,}766^2}=0{,}498;$$

$$B=\frac{1}{k_1\mathbf{M}_1^2\sin^2\theta_c}\left(\frac{T_2}{T_1}\cdot\frac{\mu_{ср1}}{\mu_{ср2}}-1\right)=\frac{1}{1{,}4\cdot 20^2\cdot 0{,}766^2}\left(\frac{6675}{255{,}6}\cdot\frac{29}{24{,}6}-1\right)=0{,}091$$

и по ним определяем $\Delta\bar{V}_n$ во втором приближении:

$$\Delta\bar{V}_n=A+\sqrt{A^2-B}=0{,}498+\sqrt{0{,}498^2-0{,}091}=0{,}894.$$

Так как значения $\Delta\bar{V}_n$ в первом (0,9) и втором (0,894) приближениях не совпадают, произведем дополнительный расчет в третьем приближении, полагая $\Delta\bar{V}_n=0{,}894$:

$$p_2=0{,}5511\left(1+1{,}4\cdot 0{,}894\cdot 20^2\cdot 0{,}766^2\right)=162\ кГ/см^2;$$
$$i_2=0{,}26\cdot 10^6+\frac{6410^2}{2}0{,}766^2\cdot 0{,}894\,(2-0{,}894)=12{,}16\cdot 10^6\ м^2/сек^2.$$

По найденным p_2 и i_2 находим с помощью [17] и [33] $T_2=6670$ К и $\mu_{ср2}=24{,}6$.

Определив соответствующие величины $A=0{,}498$ и $B=0{,}091$, получаем в третьем приближении

$$\Delta\bar{V}_n=0{,}498+\sqrt{0{,}498^2-0{,}091}=0{,}894.$$

Видим, что $\Delta V_n=0{,}894$ совпало с тем значением, которое мы получили во втором приближении. Значит, эта величина найдена правильно. Теперь можно определить параметры газа за скачком, воспользовавшись [17]: $p_2=162$ *кГ/см²*; $i_2=12{,}16\cdot 10^6$ *м²/сек²*; $T_2=6670$ К; $\mu_{ср2}=24{,}6$; $S_2=10{,}4\cdot 10^3$ *м²/(сек²·град)*; $a_2=1640$ *м/сек*.

Определим приближенно область возмущенного течения, т. е. угол между образующими скачка уплотнения и конуса, используя результа-

ты расчета обтекания конуса недиссоциированным потоком. Из рис. 60 [22] находим примерное значение $\theta_c - \beta_к = 5°$. При этом имеем в виду, что действительная величина $\theta_c - \beta_к$ будет еще меньше вследствие влияния диссоциации. Разделим рассматриваемую область при помощи прямых (лучей), выходящих из вершины, на десять интервалов с шагом $|\Delta\theta| = 0{,}5°$. Обозначим соответствующий луч номером, считая первым образующую скачка уплотнения. Таким образом, параметры на скачке теперь будут иметь индекс «1» вместо индекса «2», как это было принято ранее, т. е. $p_1 = p_2 = 162$ *кГ/см²*; $i_1 = i_2 = 12{,}16 \cdot 10^6$ *м²/сек²*; $T_1 = T_2 = 6670$ К; $\mu_{ср1} = \mu_{ср2} = 24{,}6$; $S_1 = S_2 = 10{,}4 \cdot 10^3$ *м²/(сек² · град)*; $a_1 = a_2 = 1640$ *м/сек*.

Параметры на втором луче имеют индекс «2», на третьем — «3» и т. д. Параметры на луче, соответствующем образующей конуса, обозначим индексом «к».

На первом луче

$$\bar{V}_{r1} = V_{r1}/V_\infty = \cos\theta_1 = \cos\theta_c = \cos 50° = 0{,}6428;$$

$$\bar{V}_{\theta 1} = -V_{\theta 1}/V_\infty = -(1 - \Delta\bar{V}_n)\sin\theta_c = -(1 - 0{,}894)\,0{,}766 = -0{,}0812.$$

Определение параметров газа на втором луче осуществляется следующим образом. Радиальная составляющая скорости здесь (см. рис. 3.IX.3)

$$\bar{V}_{r2} = \bar{V}_{r1} + \bar{V}_{\theta 1}\Delta\theta = 0{,}6428 + (-0{,}0812)\left(-\frac{0{,}5}{57{,}3}\right) = 0{,}6435.$$

Нормальная составляющая скорости определяется при помощи формул (3.IX.5) и (3.IX.6), в которых все скорости будем относить не к V_{max}, а к V_∞. Например, вместо $\tilde{V}_{\theta 2} = V_{\theta 2}/V_{max}$ примем $\bar{V}_{\theta 2} = V_{\theta 2}/V_\infty$ и т. д. С учетом этого

$$\left(\frac{d\bar{V}_\theta}{d\theta}\right)_1 = \left\{0{,}0812\,\mathrm{ctg}\,50° + 0{,}643\left[\frac{(-0{,}0812)^2}{1640^2/6410^2} - 2\right]\right\} \times$$

$$\times\left[1 - \frac{(-0{,}0812)^2}{1640^2/6410^2}\right]^{-1} = -1{,}29$$

и

$$\bar{V}_{\theta 2} = -0{,}0812 - 1{,}29\,(-0{,}5/57{,}3) = -0{,}0699.$$

Соответствующая энтальпия

$$i_2 = i_1 + \frac{V_1^2}{2}\left[\left(\bar{V}_{r1}^2 + \bar{V}_{\theta 1}^2\right) - \left(\bar{V}_{r2}^2 + \bar{V}_{\theta 2}^2\right)\right] = 12{,}16 \cdot 10^6 +$$

$$+ \frac{6410^2}{2}\left\{\left[0{,}643^2 + (-0{,}0812)^2\right] - \left[0{,}6435^2 + (-0{,}0699)^2\right]\right\} =$$

$$= 12{,}17 \cdot 10^6\ м/сек^2.$$

Считая, что течение в возмущенной области изэнтропическое, найдем по $S_2 = S_1$ и i_2 с помощью [17] скорость звука $a_2 = 1650$ *м/сек* и безразмерную величину $\bar{a}_2^2 = (a/V_\infty)^2 = (1650/6410)^2 = 0{,}066$. В соответствии с (3.IX.6)

$$\left(\frac{d\bar{V}_\theta}{d\theta}\right)_2 = \left\{0{,}0699\,\mathrm{ctg}\,(50° - 0{,}5°) + 0{,}6435\left[\frac{(-0{,}0699)^2}{0{,}066} - 2\right]\right\} \times$$

$$\times\left[1 - \frac{(-0{,}0699)^2}{0{,}066}\right]^{-1} = -1{,}27.$$

По вычисленным параметрам газа на втором луче можно найти соответствующие параметры на луче с индексом «3»:

$$\bar{V}_{r3} = \bar{V}_{r2} + V_{\theta 2}\,\Delta\theta = 0{,}6435 + (-0{,}0699)\left(-\frac{0{,}5}{57{,}3}\right) = 0{,}644;$$

$$\bar{V}_{\theta 3} = \bar{V}_{\theta 2} + \left(\frac{d\bar{V}_\theta}{d\theta}\right)_2 \Delta\theta = -0{,}0699 + (-1{,}27)\left(-\frac{0{,}5}{57{,}3}\right) = -0{,}0588,$$

$$i_3 = 12{,}174\cdot 10^6 + \frac{6412^2}{2}\{[0{,}6435^2 + (-0{,}0699)^2] -$$

$$- [0{,}644^2 + (-0{,}0588)^2]\} = 12{,}184\cdot 10^6\ м^2/сек^2.$$

По $S_3 = S_1$ и i_3 находим с помощью [17] $a_3 = 1656$ *м/сек*.

Аналогично осуществляем рачеты для других конических поверхностей (см. табл. 3.IX.2).

Таблица 3.IX.2

Номер луча	$\theta = \theta_c + n\Delta\theta$	$\bar{V}_r$	$\bar{V}_\theta$	$\frac{d\bar{V}_\theta}{d\theta}$	$i\cdot 10^{-6}$, $м^2/сек^2$	$\frac{S\cdot 10^{-3},\ м^2}{сек^2\text{-}град}$	a, *м/сек*
1	50°	0,6428	—0,0812	—1,290	12,16	10,4	1640
2	49°30′	0,6435	—0,0699	—1,270	12,17	10,4	1650
3	49°	0,6440	—0,0588	—1,265	12,18	10,4	1656
4	48°30′	0,6445	—0,0477	—1,262	12,19	10,4	1662
5	48°	0,6449	—0,0366	—1,260	12,20	10,4	1668
6	47°30′	0,6452	—0,0255	—1,276	12,21	10,4	1674
7	47°	0,6454	—0,0154	—1,280	12,226	10,4	1680
8	46°30′	0,6455	—0,0042	—1,287	12,23	10,4	1682
9	46°	0,6456	0,0071				

Из табл. 3.IX.2 видно, что величина $\bar{V}_\theta$ на девятом луче изменила знак на противоположный. Это указывает на то, что приращение угла $|\Delta\theta|$ в последнем интервале должно быть меньше выбранного (т. е. меньше 0,5°). По формуле интерполирования [20] найдем это значение:

$$\Delta\theta_{n-1} = -\bar{V}_{\theta 8}\left(\frac{d\bar{V}_\theta}{d\theta}\right)_8^{-1} = 0{,}0042\,(-1{,}287)^{-1} = -0{,}0032 = -11'.$$

Значит, угол конуса $\beta_к = \theta_1 - 7\cdot 0{,}5° - 11' = 46°19'$, а скорость на нем

$$\bar{V}_к = \bar{V}_{rк} = \bar{V}_{r8} + \bar{V}_{\theta 8}\cdot\Delta\theta_{n-1} = 0{,}6455 + 0{,}0042\cdot 0{,}0032 = 0{,}6456.$$

Соответствующая энтальпия газа

$$i_к = i_c + \frac{(\bar{V}_c^2 - \bar{V}_к^2)\,V_\infty^2}{2} = 12{,}16\cdot 10^6 +$$

$$+ \frac{6410^2}{2}(0{,}6428^2 + 0{,}0812^2 - 0{,}6456^2) = 12{,}23\cdot 10^6\ м^2/сек^2.$$

Зная $i_к$ и $S_к$ с помощью графика [17] находим: $p_к = 170{,}5\ кГ/см^2$; $T_к = 6700$ К; $\rho_к = 0{,}73\ кГ\cdot сек^2/м^4$, а также коэффициент давления на конусе:

$$\bar{p}_к = \frac{2\,(p_к - p_\infty)}{k_1\,M_\infty^2\,p_\infty} = \frac{2}{1{,}4\cdot 20^2}\cdot\frac{170{,}5 - 0{,}5511}{0{,}5511} = 1{,}12.$$

Волновое сопротивление для конуса длиной 5 *м*

$$X_в = 0{,}5\cdot 1{,}4\,\pi\,20^2\cdot 1{,}12\cdot 0{,}5511\cdot 10^4\,(5\,\mathrm{tg}\,46°\,19')^2 = 148\cdot 10^6\ кГ.$$

IX.10. При подъеме на высоту острого конуса, движущегося с гиперзвуковой скоростью, за скачком уплотнения вследствие сильного разо-

грева газа будет происходить диссоциация. Этот процесс зависит помимо температуры также от давления, которое убывает с высотой. Известно, что уменьшение давления приводит к увеличению степени диссоциации, а это в свою очередь уменьшает угол скачка θ_c. О характере этого уменьшения можно судить по графикам на рис. 3.IX.5, где сплошными линиями изображены кривые, полученные с учетом диссоциации.

IX.11. Коэффициент волнового сопротивления острого конуса с ростом числа $\mathbf{M}_\infty$ полета уменьшается, что видно, в частности, из приближенной формулы

$$c_{x\text{в}} = \bar{p}_\text{к} = \left(0{,}0016 + 0{,}002\,\mathbf{M}_\infty^{-2}\right)\left(\beta_\text{к}^\circ\right)^{1{,}7}.$$

При физической интерпретации этого явления удобнее исходить из анализа изменения соответствующей величины лобового сопротивления конуса, определяемой из выражения $X_\text{в} = c_{x\text{в}} q_\infty S_\text{мид}$. В этом выражении скоростной напор $q_\infty = 0{,}5\,kp_\infty \mathbf{M}_\infty^2$. Таким образом, если бы коэффициент $c_{x\text{в}}$ был постоянным, то сопротивление изменялось бы пропорционально квадрату числа Маха. Однако исследования показывают, что при сверхзвуковых скоростях такое возрастание пропорционально числу $\mathbf{M}_\infty$ не во второй, а в меньшей степени. Именно это отражает факт некоторого снижения коэффициента $c_{x\text{в}}$ с возрастанием числа Маха.

IX.12. Коэффициент центра давления тела вращения $c_\text{ц.д} = x_\text{ц.д}/x_\text{к}$ может быть вычислен, если известны момент тангажа M_z и нормальная сила N, действующая на это тело. В тех случаях, когда угол атаки мал, удлинение тела и скорость сравнительно невелики, можно пренебречь влиянием на M_z и N силы трения и считать, что момент и нормальная сила есть следствие действия одних лишь сил давления, т. е. $M_z = M_{zp}$, а $N = N_p$. В этом случае для вычисления величины $c_\text{ц.д}$ воспользуемся равенствами (5.1.5), (5.1.6) и (5.1.7), в которых момент M_{zp} и сила N_p заменены их коэффициентами:

$$c_\text{ц.д} = -\frac{m_{zp}}{c_{Np}} = \frac{\int_0^1 \bar{r}\,\tilde{x}\,d\tilde{x} \int_0^\pi \bar{p}\cos\gamma\,d\gamma + (2\lambda_\text{к})^{-1} \int_0^1 \bar{r}^2 \operatorname{tg}\beta\,d\tilde{x} \int_0^\pi \bar{p}\cos\gamma\,d\gamma}{\int_0^1 \bar{r}\,d\tilde{x} \int_0^\pi \bar{p}\cos\gamma\,d\gamma}. \quad (3.\text{IX}.9)$$

Так как движение в возмущенной области около конуса, движущегося под углом атаки, обладает свойством конического течения, в соответствии с которым коэффициент давления $\bar{p}$ не зависит от координат x, r, а является лишь функцией меридионального угла γ, то (3.IX.9) можно написать в виде

$$c_\text{ц.д} = \frac{2\lambda_\text{к} \int_0^1 \bar{r}\,\tilde{x}\,d\tilde{x} + \int_0^1 \bar{r}^2 \operatorname{tg}\beta\,d\tilde{x}}{2\lambda_\text{к} \int_0^1 \bar{r}\,d\tilde{x}}.$$

Для конуса (рис. 3.IX.6): $\bar{r} = \tilde{x}$; $x_\text{к} = x_\text{мид}$; $\lambda_\text{к} = 1/(2\operatorname{tg}\beta_\text{к})$. Поэтому после интегрирования получаем $c_\text{ц.д} = (2/3)(1 + \operatorname{tg}^2\beta_\text{к})$.

Как видим, с утолщением конуса (увеличение угла $\beta_\text{к}$) центр давления сдвигается к хвостовому участку. Это объясняется тем, что возрастают силы от давления, действующие на этом участке, и значительней становится стабилизирующий момент от этих сил, способствующий такому сдвигу центра давления.

IX.13. Важное для практики аэродинамическое свойство затупленных тел, обусловливающее их применение, состоит в том, что они при движении в атмосфере с очень большими скоростями нагреваются

(а следовательно, и разрушаются) меньше, чем заостренные тела. Рассмотрим газодинамические явления, связанные с таким эффектом.

Схема течения около затупленного конического тела изображена на рис. 3.IX.7, *а*. Перед телом *1* образуется отошедшая ударная волна *2* с переменной интенсивностью в различных точках ее поверхности. Наибольшей эта интенсивность будет в окрестности точки *О* полного торможения. Можно считать, что здесь волна представляет собой прямой скачок уплотнения. Переход частиц газа через такой сильный скачок будет сопровождаться значительными потерями полного напора и повышением энтропии. В результате поверхность тела покрывается слоем *3* некоторой толщины, в котором газ обладает высокой энтропией. В этом слое, называемом высокоэнтропийным, скорость газа будет значительно меньше, чем она была бы при прочих равных условиях на поверхности острого конуса, где нет такого интенсивного скачка и газ тормозится слабее (см. рис. 3.IX.7, *б*).

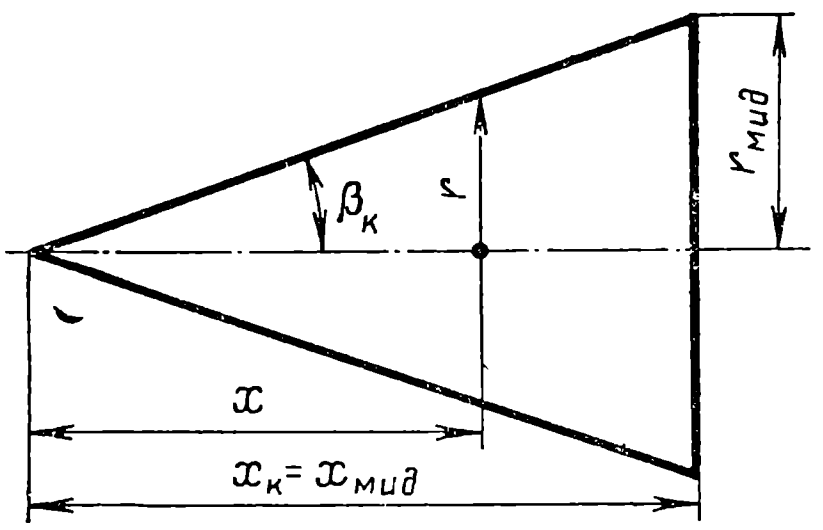


Рис. 3.IX.6. Геометрические размеры острого конуса:

$\bar{r}=r/r_{мид}$; $\tilde{x}=x/x_к$

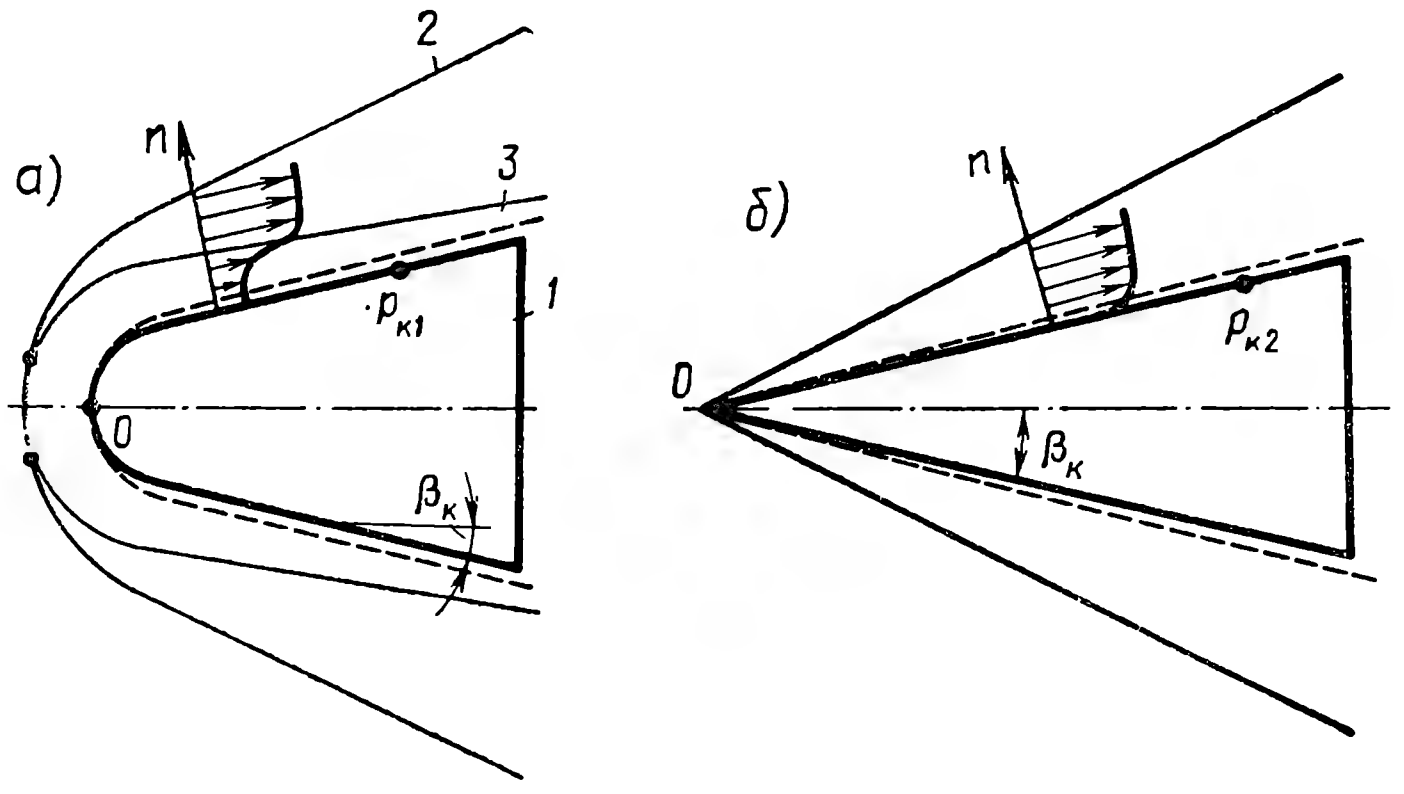


Рис. 3.IX.7. Течение газа около затупленного (*а*) и острого (*б*) конусов

Пограничный слой (пунктирные линии на рис. 3.IX.7), как правило, значительно тоньше высокоэнтропийного слоя, и скорость на внешней границе пограничного слоя у затупленного тела меньше, чем около острого конуса. Такое уменьшение скорости является важной причиной снижения аэродинамического нагрева затупленного тела. Это видно из формулы для удельного теплового потока, передаваемого газом к твердой стенке,

$$q_к = \alpha (T_r - T_{ст}),$$

где T_r и $T_{ст}$ — соответственно температуры восстановления и стенки; α — коэффициент теплоотдачи, зависящий от скорости движения газа V_δ на внешней границе пограничного слоя, плотности газа ρ_δ и ряда других причин.

В общем виде, как показывают исследования, можно записать, что $\alpha = A\rho_\delta V_\delta$, где A — некоторый коэффициент, слабо изменяющийся при заданных условиях обтекания. Таким образом, уменьшение скорости на внешней границе пограничного слоя снижает количество тепла, посту-

пающего от газа к поверхности тела вращения. Если иметь в виду влияние плотности ρ_δ, то следует учитывать, что ее величина на отдельных участках затупленного конуса может быть выше, чем на остром, однако это увеличение не имеет существенного значения в изменении теплопередачи.

Существенная особенность обтекания затупленного тела заключается также в том, что под влиянием затупления изменяется характер течения в пограничном слое. Вследствие уменьшения чисел Рейнольдса, подсчитываемых по скорости в высокоэнтропийном слое, ламинарный пограничный слой переходит в турбулентный гораздо ниже по течению, т. е. протяженность такого слоя возрастает. Это способствует снижению трения и, как следствие, тепловых потоков к стенке.

Рост энтропии обусловливает увеличение (по сравнению с острым конусом) температуры на внешней границе пограничного слоя, что способствует некоторому повышению теплового потока к стенке. Однако суммарный эффект при соответствующем подборе степени и формы затупления связан с уменьшением тепловых потоков.

IX.14. Сравним скорости $V_{к1}$ и $V_{к2}$ в соответствующих точках на поверхностях затупленного и острого конусов, полагая, что скорости V_∞ полета этих конусов одинаковы и диссоциации воздуха у их поверхности не происходит. Примем также, что движение происходит изэнтропически. С учетом этого используем следующие формулы для расчета обтекания:

$$p_{к1} = p'_{0зат}\left(1 - V^2_{к1}/V^2_{max}\right)^{k/(k-1)};$$

$$p_{к2} = p'_{0остр}\left(1 - V^2_{к2}/V^2_{max}\right)^{k/(k-1)}.$$

Первая из этих формул написана применительно к обтеканию затупленного конуса, а вторая — острого. По условию, $p_{к1} = p_{к2}$, поэтому

$$p'_{0\,зат}\left(1 - V^2_{к1}/V^2_{max}\right)^{k/(k-1)} = p'_{0\,остр}\left(1 - V^2_{к2}/V^2_{max}\right)^{k/(k-1)}.$$

Здесь соответствующие давления торможения (для $k = c_p/c_v = 1{,}4$):

$$p'_{0\,зат} = p_0 \frac{166{,}7\,M^7_\infty}{\left(7M^2_\infty - 1\right)^{2{,}5}\left(1 + 0{,}2M^2_\infty\right)^{3{,}5}};$$

$$p'_{0\,остр} = p_0 \frac{166{,}7\,M^7_\infty \sin^7\theta_c}{\left(7M^2_\infty \sin^2\theta_c - 1\right)^{2{,}5}\left(1 + 0{,}2\,M^2_\infty \sin^2\theta_c\right)^{3{,}5}}.$$

Так как величина p_0 (давление изэнтропического торможения) в обоих случаях одна и та же, то, подставляя значения $p'_{0зат}$ и $p'_{0\,остр}$ в предыдущее равенство, получим зависимость, связывающую между собой скорости $V_{к1}$ и $V_{к2}$:

$$\left[\frac{1 - (V_{к1}/V_{max})^2}{1 - (V_{к2}/V_{max})^2}\right] = \left(\frac{7M^2_\infty - 1}{7M^2_\infty \sin^2\theta_c - 1}\right)^{2{,}5/3{,}5} \frac{1 + 0{,}2\,M^2_\infty}{1 + 0{,}2M^2_\infty \sin^2\theta_c} \sin^2\theta_c.$$

Из этого соотношения следует, что на затупленной поверхности конуса скорость $V_{к1}$ будет всегда меньше, чем на заостренной $V_{к2}$.

IX.15. С известным приближением коэффициент волнового сопротивления полусферы определяется зависимостью [20]

$$c_{xв} = 0{,}5\,\bar{p}_0,$$

где $\bar{p}_0$ — коэффициент давления в точке полного торможения. В случае, когда теплоемкости газа неизменны, величина $\bar{p}_0$ с подъемом на высоту при постоянном числе M_∞ не изменяется, так как она зависит лишь от

числа $\mathbf{M}_\infty$ и определяется зависимостью

$$\bar{p}_0 = \frac{2}{k\mathbf{M}_\infty^2}\left\{\frac{k-1}{k+1}\left[\frac{(k+1)^2}{2(k-1)}\right]^{\frac{k}{k-1}} \frac{\mathbf{M}_\infty^2}{\left[2k/(k-1) - 1/\mathbf{M}_1^2\right]^{\frac{1}{k-1}}} - 1\right\}. \quad (3.IX.10)$$

Предельное значение $\bar{p}_0$ имеет место при бесконечно большом значении $\mathbf{M}_\infty$ и равно $\bar{p}_{0\text{пред}}=1{,}83$ (при $k=1{,}4$).

Если рассмотреть случай диссоциации, то, как известно, за счет падения атмосферного давления с подъемом на высоту степень этой диссоциации возрастает. Это в свою очередь вызывает некоторое повышение давления, соответствующее увеличению коэффициента $\bar{p}_0$, и, как следствие, рост $c_{x\text{в}}$. Например, на высоте 10 *км* у полусферы, движущейся с числом $\mathbf{M}_\infty=16{,}7$, действительная величина $\bar{p}_0=2{,}08$, т. е. превышает значение $\bar{p}_0=1{,}83$ без учета диссоциации. Следовательно, будет больше на соответствующую величину и коэффициент сопротивления.

IX.16. По таблицам стандартной атмосферы определим параметры воздуха на высоте $H=15$ *км*: $p_\infty=1234$ *кГ/м*^{2}; $\rho_\infty=0{,}01985$ *кГ·сек*^{2}*/м*^{4}; $T_\infty=216{,}7$ К; $a_\infty=295{,}1$ *м/сек*. По этим параметрам и числу $\mathbf{M}_\infty=15$ рассчитаем отношение плотностей $\bar{\rho}=\rho_\infty/\rho_2$ для прямого скачка уплотнения [20]. Полагаем в первом приближении значение $\Delta\bar{V}=(V_\infty-V_2)/V_\infty=0{,}9$, что соответствует заданию относительной плотности для скачка $\rho_2/\rho_\infty=(1-\Delta\bar{V})^{-1}=(1-0{,}9)^{-1}=10$.

Затем найдем давление за скачком (см. задачу IV.51) $p_2=1234\times(1+1{,}4\cdot 15^2\cdot 0{,}9)=35{,}56\cdot 10^4$ *кГ/м*^{2}, а также вычислим энтальпию i_2, принимая во внимание, что ее значение в набегающем потоке $i_\infty=c_{p\infty}T_\infty=1002\cdot 216{,}7=0{,}2171\cdot 10^6$ *м*^{2}*/сек*^{2}. С учетом этого $i_2=0{,}2171\times10^6+(295{,}1\times15)^2\frac{0{,}9}{2}(2-0{,}9)=9{,}82\cdot 10^6$ *м*^{2}*/сек*^{2}.

По p_2 и i_2 с помощью i—S-диаграммы [17] находим температуру газа за скачком $T_2=5340$ К, а из [33] определяем средний молекулярный вес $\mu_{\text{ср}2}=25{,}2$.

Затем по уравнению состояния находим соответствующую плотность:

$$\rho_2 = \frac{P_2\,\mu_{\text{ср}2}}{R_0\,T_2\,g} = \frac{35{,}56\cdot 10^4\cdot 25{,}2}{848\cdot 5340\cdot 9{,}81} = 0{,}202\ \text{кГ}\cdot\text{сек}^2/\text{м}^4.$$

Таким образом, $\rho_2/\rho_\infty=0{,}202/0{,}01985=10{,}1$; $\Delta\bar{V}=1-\rho_\infty/\rho_2=1-0{,}099=0{,}901$.

Расхождение между величиной $\Delta\bar{V}$, заданной в первом приближении (0,9), и полученным значением (0,901) невелико, поэтому принимаем $\bar{\rho}=\rho_\infty/\rho_2=0{,}099$.

В соответствии с этим относительная величина отхода скачка $\tilde{s}_0=s_0/R_{\text{с.о}}$ (где $R_{\text{с.о}}$ — радиус его кривизны на оси; рис. 3.IX.8):

$$\tilde{s}_0 = \frac{s_0}{R_{\text{с.о}}} = \bar{\rho}(1-\bar{\rho})^{-2}\left[1-(2\bar{\rho}-\bar{\rho}^2)^{1/2}\right] =$$

$$= 0{,}099\,(1-0{,}099)^{-2}\left[1-(2\cdot 0{,}099-0{,}099^2)^{1/2}\right] = 0{,}0593. \quad (3.IX.11)$$

Определив отношение радиусов кривизны ударной волны и сферы:

$$\bar{R}_{\text{с.о}} = \frac{R_{\text{с.о}}}{R_{\text{т}}} = 1/(1-\tilde{s}_0)^{-2,5} = 1\ (1-0{,}0593)^{-2,5} = 1{,}16,$$

находим $R_{\text{с.о}}=R_{\text{т}}\bar{R}_{\text{с.о}}=2\cdot 1{,}16=2{,}32$ *м* и расстояние от этой волны до сферы $s_0=\tilde{s}_0R_{\text{с.о}}=0{,}0593\cdot 2{,}32=0{,}138$ *м*.

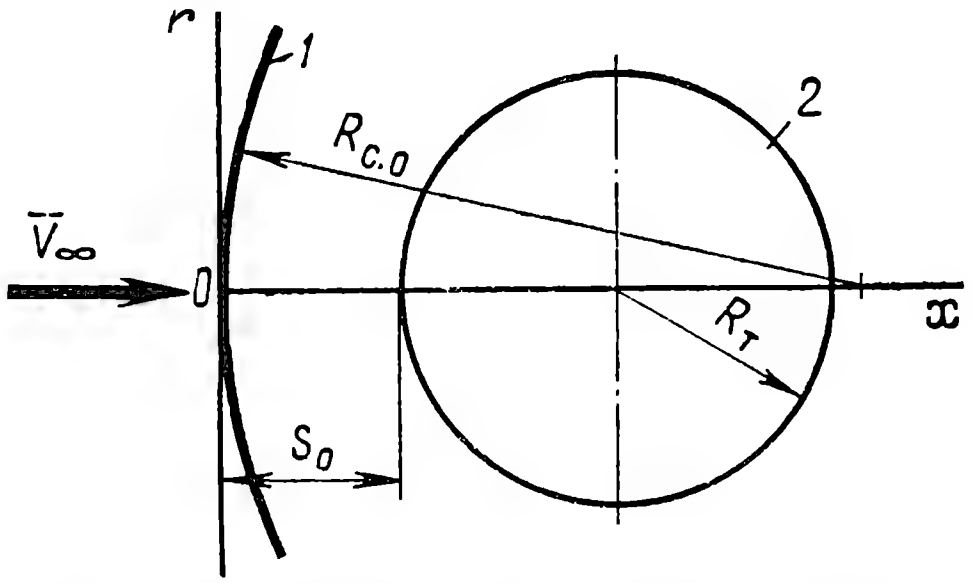


Рис. 3.IX.8. Схема расположения отошедшей головной волны около сферы, движущейся со сверхзвуковой скоростью:

1 — скачок; *2* — сфера

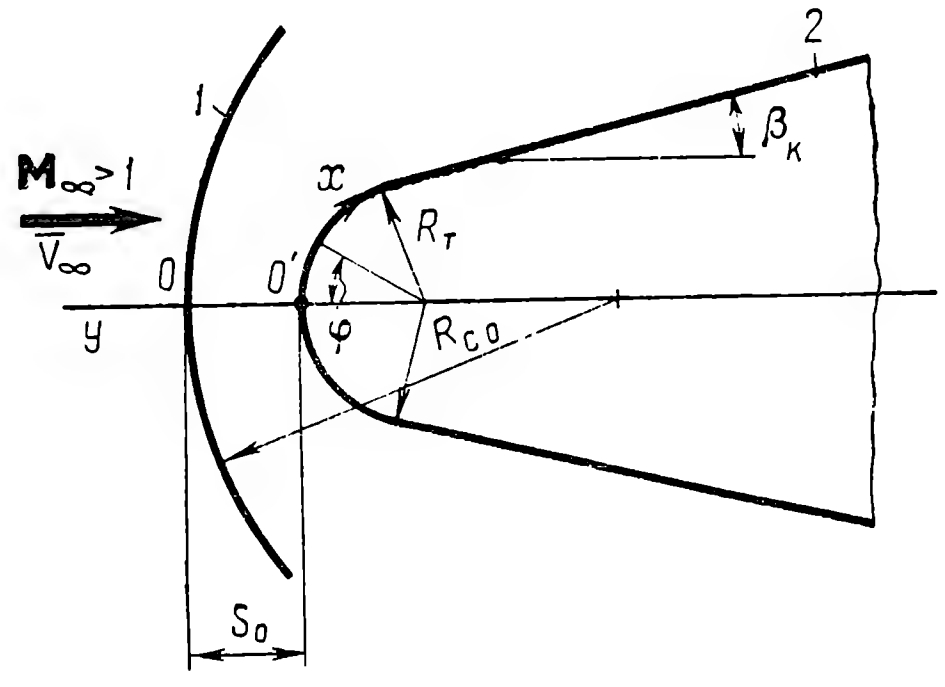


Рис. 3.IX.10. Схема для расчета параметров газа около затупленного конуса:

1 — скачок уплотнения; *2* — затупленный конус

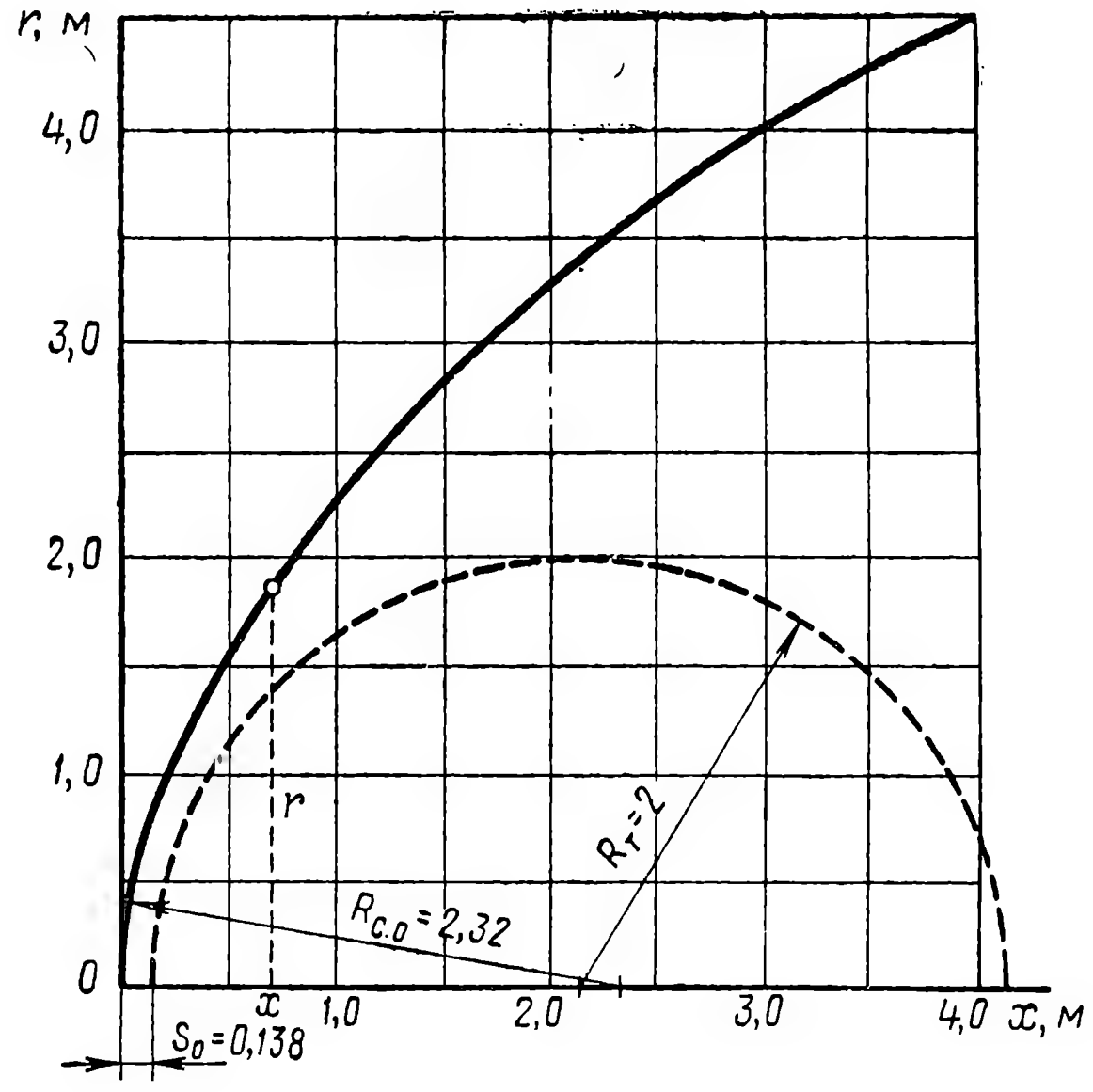


Рис. 3.IX.9. Форма скачка уплотнения около сферы, движущейся со сверхзвуковой скоростью

Для определения формы ударной волны воспользуемся уравнением [4]

$$(x + a)^2/a^2 - r^2/b^2 = 1, \qquad (3.IX.12)$$

в соответствии с которым образующая ударной волны представляется в виде гиперболы с полуосями a и b. Длины этих полуосей:

$$a = R_{с.о}\left(M_\infty^2 - 1\right) = 2{,}32\left(15^2 - 1\right) = 524\ м;$$

$$b = R_{с.о}\sqrt{M_\infty^2 - 1} = 2{,}32\sqrt{15^2 - 1} = 34{,}7\ м.$$

Следовательно,

$$r = \pm 34{,}7\sqrt{(x + 524)^2/524^2 - 1}\ м.$$

Зная отход s_0, можно по этому уравнению построить скачок уплотнения около сферы (рис. 3.IX.9).

IX.17. Из таблиц стандартной атмосферы находим параметры воздуха на высоте $H = 30$ *км*: $p_\infty = 120{,}7$ *кГ/м*^{2}; $\rho_\infty = 1{,}825 \cdot 10^{-3}$ *кГ·сек*^{2}*/м*^{4}; $T_\infty = 230{,}3$ K; $\mu_{ср\infty} = 28{,}97$; $a_\infty = 304{,}8$ *м/сек*.

Рассчитаем параметры воздуха непосредственно за прямой частью ударной волны (рис. 3.IX.10). Следуя [20], положим в первом приближении $\Delta\bar{V} = 0{,}9$, что соответствует отношению плотностей

$$\rho_2/\rho_\infty = (1 - \Delta\bar{V})^{-1} = (1 - 0{,}9)^{-1} = 10.$$

Затем найдем давление за скачком (см. задачу IV.51):

$$p_2 = 120{,}7\left[1 + 1{,}4\left(\frac{4000}{304{,}8}\right)^2 0{,}9\right] = 2{,}64 \cdot 10^4\ кГ/м^2$$

и соответствующую энтальпию:

$$i_2 = 1002 \cdot 230{,}3 + \frac{4000^2}{2}\,0{,}9\,(2 - 0{,}9) = 8{,}11 \cdot 10^6\ м^2/сек^2.$$

По этим величинам из диаграммы [17] определим: $\rho_2 = 1{,}825 \times \times 10^{-2}$ *кГ·сек*^{2}*/м*^{4}; $T_2 = 4250$ K; $S_2 = 11020$ *м*^{2}*/(сек*^{2}*·град)*.

Проверяем, правильно ли выбрана величина $\Delta\bar{V} = 0{,}9$:

$$\Delta\bar{V} = 1 - \rho_\infty/\rho_2 = 1 - 0{,}1825 \cdot 10^{-2}/(1{,}825 \cdot 10^{-2}) = 0{,}9.$$

Видим, что заданная величина $\Delta\bar{V}$ и полученная совпадают, следовательно, параметры за скачком определены правильно.

Найдем относительный отход ударной волны перед точкой полного торможения:

$$\bar{s}_0 = s_0/R_т = 0{,}52\left[\bar{\rho}/(1 - \bar{\rho})\right]^{0{,}86} = 0{,}52\left[0{,}1/(1 - 0{,}1)\right]^{0{,}86} = 0{,}057,$$

а также отношение:

$$s_0/R_{с.о} = \tilde{s}_0 = -\frac{\bar{s}_0^2}{2}\left(1 - \sqrt{1 + 4/\bar{s}_0^2}\right) = -\frac{0{,}057^2}{2}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4}{0{,}057^2}}\right) = 0{,}0538.$$

Градиент скорости в окрестности точки полного торможения (точка O' на рис. 3.IX.10)

$$\tilde{\lambda} = \left(\frac{\partial V_x}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = \frac{V_\infty}{R_т}\sqrt{\left(2\bar{\rho} - \bar{\rho}^2\right)\left(1 - \tilde{s}_0\right)} =$$

$$= \frac{4000}{2}\sqrt{(2 \cdot 0{,}1 - 0{,}1^2)\,(1 - 0{,}0538)} = 843\ 1/сек.$$

Скорость в окрестности этой точки

$$V_x = \tilde{\lambda} x = \tilde{\lambda} R_т \varphi / 57{,}3 = 29{,}3\,\varphi,$$

где φ — полярный угол (см. рис. 3.IX.10).

IX.18. По таблицам стандартной атмосферы находим для высоты $H=10$ *км*; $p_\infty=0{,}2701$ *кГ/см*^{2}; $\rho_\infty=0{,}4217\cdot10^{-1}$ *кГ·сек*^{2}/*м*^{4}; $T_\infty=223{,}2$ К; $a_\infty=299{,}4$ *м/сек*; $\mu_{ср\infty}=28{,}97$; $c_{p\infty}=1002$ *м*^{2}/*сек*^{2}.

По этим данным и числу $\mathbf{M}_\infty=V_\infty/a_\infty=5000/299{,}4=16{,}7$ рассчитаем параметры воздуха непосредственно за прямой частью ударной волны, а также в точке полного торможения на сферическом носке (см. задачу IV.51).

Полагая в первом приближении $\Delta\bar{V}=0{,}9$, получаем: $p_2=0{,}2701\,(1+1{,}4\cdot16{,}7\cdot0{,}9)=92$ *кГ/см*^{2}; $i_2=1002\cdot223{,}2+(5000^2/2)\,0{,}9\cdot1{,}1=12\cdot10^6$ *м*^{2}/*сек*^{2}. Затем по i—p-диаграмме [17] находим: $\rho_2=4{,}2\cdot10^{-1}$ *кГ·сек*^{2}/*м*^{4}; $T_2=6650$ К; $S_2=10640$ *м*^{2}/(*сек*$^2\cdot$*град*). В соответствии с этими данными

$$\Delta\bar{V} = 1 - \rho_\infty/\rho_2 = 1 - 0{,}42\cdot10^{-1}/0{,}42 = 0{,}9.$$

Как видим, это значение совпадает с заданным, и, следовательно, параметры газа за прямым скачком определены.

Найдем параметры воздуха в точке полного торможения на сферическом носке, считая течение за скачком изэнтропическим. Энтальпия в этой точке

$$i_0' = i_\infty + 0{,}5\,V_\infty^2 = 1002\cdot223{,}2 + 0{,}5\cdot5000^2 = 12{,}75\cdot10^6\ м^2/сек^2.$$

С помощью i—p-диаграммы по i_0' и $S_0'=S_2$ определим: $\rho_0'=4{,}6\cdot10^{-1}$ *кГ·сек*^{2}/*м*^{4}; $p_0'=110$ *кГ/см*^{2}; $T_0'=6700$ К. Соответствующий коэффициент давления

$$\bar{p}_0 = \left(2/k_1\,\mathbf{M}_\infty^2\right)\left(p_0'/p_\infty - 1\right) = (2/1{,}4\cdot16{,}7^2)\,(110/0{,}2701 - 1) = 2{,}08.$$

Величина этого коэффициента в произвольной точке обтекаемой поверхности $\bar{p}=\bar{p}_0\cos^2\varphi=2{,}08\cdot\cos^2\varphi$. В частности, в конце сферического участка (см. рис. 2.IX.3), где $\varphi_к=\pi/2-\beta_к=90°-20°=70°$,

$$\bar{p} = \bar{p}_к = 2{,}08\cdot\cos^2 70° = 0{,}244.$$

С известным приближением можно принять, что этому значению равен коэффициент давления на всей конической поверхности.

Теперь определим градиент скорости в точке полного торможения:

$$\tilde{\lambda} = \left(\frac{\partial V_x}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = \frac{1}{R_т}\sqrt{\frac{2\left(p_0'-p_\infty\right)}{\rho_0'}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\,(110-0{,}2701)\,10^4}{4{,}6\cdot10^{-1}}} = 10{,}9\cdot10^2\ 1/сек,$$

и скорость в произвольной точке на сферическом носке:

$$V_x = \tilde{\lambda} x = \tilde{\lambda} R_т \varphi / 57{,}3 = 10{,}9\cdot10^2\cdot2\cdot\varphi/57{,}3 = 0{,}405\cdot10^2\,\varphi.$$

В частности, в конце этого носка (на конусе) $V_к=40{,}5\cdot70=2840$ *м/сек*.

Определим волновое сопротивление конуса с затупленным носком. Соответствующая величина аэродинамического коэффициента согласно формуле (9.4.85) [20]

$$c_{x_в} = \frac{X_в}{q_\infty S_{мид}} = \bar{p}_0\left[\frac{R_т}{r_{мид}^2}\cos^2\beta_к\left(1-\frac{\cos^2\beta_к}{2}\right) + \frac{x_к}{r_{мид}^2}\sin^3\beta_к\,(2r_{мид} - x_к\sin\beta_к)\right].$$

Здесь

$$x_к = \frac{1}{\cos\beta_к}[l - R_т(1 - \sin\beta_к)] = \frac{1}{\cos 20°}[5 - 2(1 - \sin 20°)] = 3{,}91\ м;$$

$$r_{мид} = R_т\cos\beta_к + x_к\sin\beta_к = 2\cdot\cos 20° + [5 - 2(1 - \sin 20°)]\ \mathrm{tg}\,20° = 3{,}21\ м.$$

В соответствии с этим

$$c_{xв} = 2{,}08\left[\frac{2}{3{,}21^2}\cos^2 20°\left(1 - \frac{\cos^2 20°}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{3{,}91}{3{,}21^2}\sin^3 20°(2\cdot 3{,}21 - 3{,}91\cdot\sin 20°)\right] = 0{,}58,$$

а сила волнового сопротивления

$$X_в = 0{,}5\,c_{xв}\,k_1\,p_\infty\,M_\infty^2\,\pi r_{мид}^2 = 0{,}5\cdot 0{,}58\cdot 1{,}4\cdot 0{,}2701\cdot 10^4\times$$

$$\times 16{,}7^2\,\pi\cdot 3{,}21^2 = 9{,}65\cdot 10^6\ кГ.$$

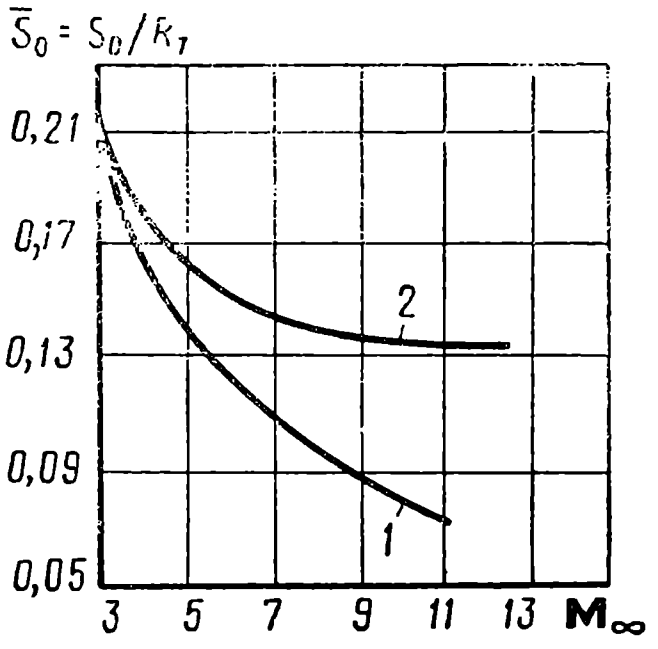


Рис. 3.IX.11. Зависимость величины относительного отхода волны перед сферой от числа Маха полета в случаях:

1 — полностью равновесной диссоциации; *2* — постоянных теплоемкостей

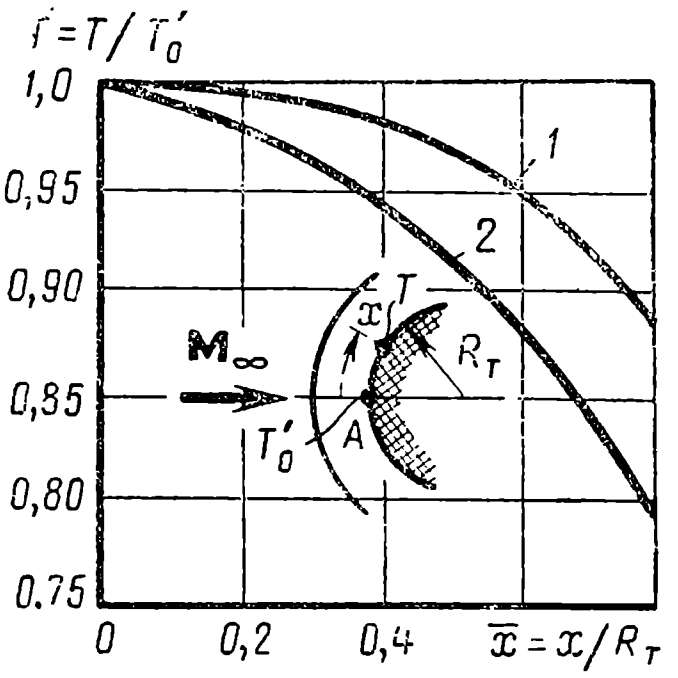


Рис. 3.IX.12. Изменение температуры на поверхности сферического затупления головной части в случаях равновесного *1* и неравновесного *2* расширения газа

IX.19. Если предположить, что между ударной волной и поверхностью тела химических реакций не происходит и газ не меняет своего состава по сравнению с условиями до скачка, то повышение давления никак не отразится на величине отхода.

Возникающая в реальных условиях диссоциация вызывает снижение температуры и обусловливает увеличение плотности, дополнительное поджатие газа и, как следствие, приближение к обтекаемой поверхности переднего фронта ударной волны.

В качестве иллюстрации на рис. 3.IX.11 показано изменение относительной величины отхода $\bar{s}_0 = s_0/R_т$ перед сферой радиуса $R_т = 0{,}4$ *см*, обтекаемой кислородом при $p_\infty = 0{,}0263$ *атм* и $T_\infty = 293$ К, в случаях постоянных теплоемкостей и полностью равновесной диссоциации.

IX.20. Газ, движущийся от точки A полного торможения по поверхности затупления (рис. 3.IX.12), подвергается интенсивному расширению и, следовательно, охлаждению. Это влечет за собой уменьшение степени диссоциации. Процес рекомбинации, который при этом будет происходить более интенсивно, сопровождается дополнительным выделением тепла и соответствующим ростом температуры газа. Очевидно, что такой нагрев будет в случае полностью равновесного течения большим, чем при неравновесном обтекании. Кривые на рис. 3.IX.12, полу-

ченные расчетным путем для сферы радиуса $R_т = 1$ *см*, обтекаемой потоком кислорода при $M_\infty = 10$, $p_\infty = 0{,}01$ *атм* и $T_\infty = 290$ К, показывают, что это превышение температуры на некотором удалении от точки полного торможения составляет примерно 8%.

IX.21. При очень больших скоростях обтекания ($M_\infty > 10$) газ за ударной волной разогревается до очень высоких температур, при которых на его движение существенное влияние могут оказать процессы переноса энергии в форме излучения. Расчеты показали, что излучение газа обусловливает значительное уменьшение температуры и, как следствие, повышение плотности в ударном слое и на поверхности обтекаемого тела. Такое повышение плотности, особенно заметное вблизи точки полного торможения, обусловливает уменьшение отхода ударной волны.

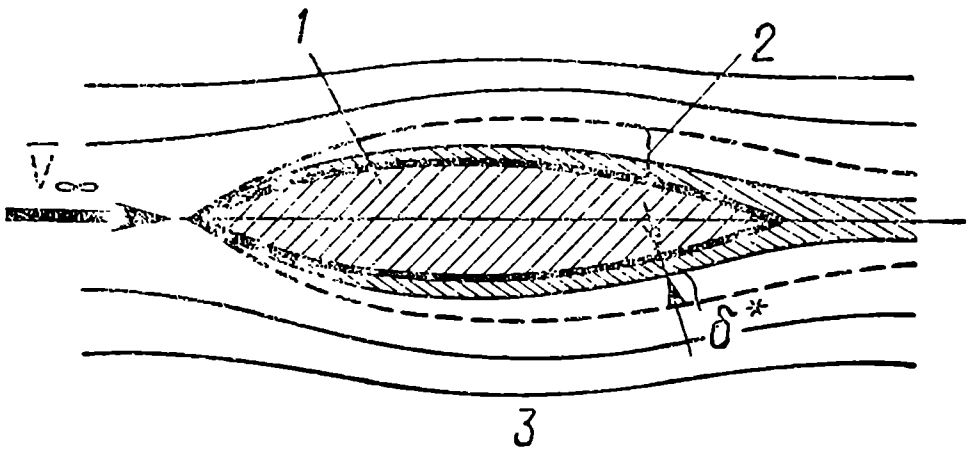


Рис. 3.IX.13. Влияние пограничного слоя на обтекание тела вращения:

1 — тело вращения; *2* — пограничный слой; *3* — свободный поток

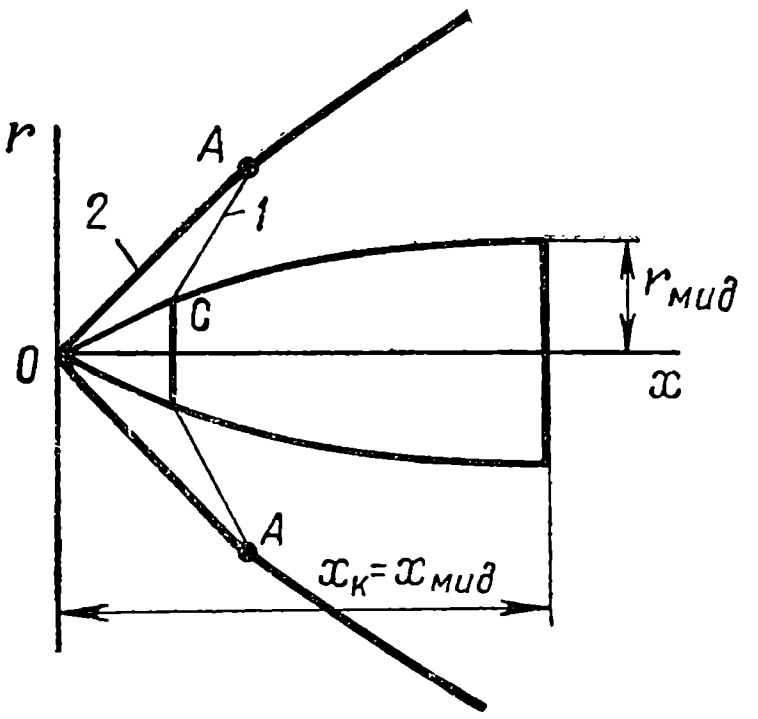


Рис. 3.IX.14. Искривление скачка уплотнения при воздействии на него слабых возмущений, исходящих от поверхности движущегося тела

IX.22. Кривая *1* на рис. 2.IX.4, характеризующая распределение давления по поверхности тела вращения, соответствует обтеканию этого тела несжимаемым потоком ($M_\infty = 0$) идеальной жидкости. На это указывает симметричный относительно вертикальной оси *ab* вид этой кривой. Нетрудно видеть, что лобовое сопротивление тела равно нулю, так как силы давления, действующие на передний участок поверхности, уравновешиваются такими же силами, возникающими в хвостовой части и направленными в противоположном направлении.

Кривая *2* характеризует обтекание того же тела потоком реальной жидкости, обладающей свойствами вязкости. При этом так как избыточное давление на передней части поверхности меньше, то, очевидно, и скорость такого потока будет меньше, чем в первом случае.

Изменение закона распределения давления объясняется возникновением (рис. 3.IX.13) на обтекаемой поверхности пограничного слоя. Такой слой воздействует на внешний поток, оттесняя его от этой поверхности. Возникает явление, связанное с кажущимся «утолщением» обтекаемого тела на величину, равную толщине вытеснения δ^*. В силу этого несжимаемый поток увеличивает свою скорость по сравнению с обтеканием того же тела идеальной средой. Такое увеличение скорости и приводит к снижению давления (см. рис. 2.IX.4).

IX.23. Слабые волны возмущений *1* (рис. 3.IX.14), достигающие скачка уплотнения *2*, взаимодействуют с ним и искривляют его образующую, начиная с точки *A*. В эту точку падает первая такая волна, исходящая из точки *C*, где прямолинейная образующая тела переходит в криволинейную. На криволинейном скачке уплотнения, в силу того что интенсивность его в различных точках неодинакова, происходит изменение характера движения газа: вместо потенциального (безвихревого) оно становится вихревым. Это приводит к увеличению аэродинами-

ческого сопротивления, так как на образование вихрей необратимо затрачивается дополнительная часть кинетической энергии потока. Такой эффект увеличения сопротивления связан с повышением давления на поверхности тела по сравнению с его потенциальным обтеканием.

Проведенные расчеты показали, что учитывать вихревой характер течения газа за скачком следует при достаточно больших скоростях, в частности при таких, которым соответствуют значения параметра $\mathbf{K}_1 = \mathbf{M}_\infty/\lambda_{\text{мид}} > 1{,}5$, где $\lambda_{\text{мид}} = x_{\text{мид}}/(2r_{\text{мид}})$.

IX.24. Линеаризация уравнений движения газа около тонких тел вращения, движущихся под малыми углами атаки, заключается в приведении нелинейных дифференциальных уравнений, не имеющих общих решений, к линейному виду. Такое упрощение уравнений возможно, если сделать предположение, что параметры возмущенного течения сколо тонких тел мало отличается от соответствующих их значений в невозмущенном потоке, т. е. можно записать, в частности, для составляющих скорости (в цилиндрических координатах), $V_x = V_\infty + V_x'$, $V_r = V_r'$; $V_\gamma = V_\gamma'$, а также для давления, плотности и скорости звука: $p = p_\infty + p'$, $\rho = \rho_\infty + \rho'$, $a = a_\infty + a'$. Здесь: V_∞, p_∞, ρ_∞, a_∞ — параметры невозмущенного потока; V_x', V_r', V_γ', p', ρ', a' — добавочные составляющие соответствующих параметров, обусловленные возмущенным характером течения. Значения этих составляющих являются такими по величине, что $V_x' \ll V_\infty$, $V_r' \ll V_\infty$, $V_\gamma' \ll V_\infty$, $p' \ll p_\infty$, $\rho' \ll \rho_\infty$, $a' \ll a_\infty$.

Аналогичному условию должны удовлетворять добавочный потенциал φ' в выражении для его полной величины $\varphi = \varphi_\infty + \varphi'$, т. е. $\varphi' \ll \varphi_\infty$. При этих условиях нелинейное уравнение для потенциальной функции

$$(V_x^2 - a^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + (V_r^2 - a^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}(V_\gamma^2 - a^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial \gamma^2} +$$

$$+ 2V_x V_r \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \cdot \partial r} + \frac{2}{r} V_x V_\gamma \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \cdot \partial \gamma} + \frac{2}{r} V_r V_\gamma \frac{\partial^2\varphi}{\partial r \cdot \partial \gamma} - \frac{V_r(a^2 + V_\gamma^2)}{r} = 0$$

линеаризуется, т. е. преобразуется к виду

$$(1 - \mathbf{M}_\infty^2)\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2\varphi'}{\partial \gamma^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\varphi'}{\partial r} = 0. \qquad (3.\text{IX}.13)$$

Это уравнение, линейное относительно искомой функции φ', составляет теоретическую основу аэродинамики стационарных слабовозмущенных (линеаризованных) течений около тонких тел вращения. В силу малости возмущений перед тонким телом не возникают скачки уплотнения; вместо них в потоке наблюдаются лишь слабые волны возмущений (линии Маха).

IX.25. Потенциал скоростей в случае линеаризованного обтекания тонкого тела вращения можно записать в виде $\varphi = \varphi_\infty + \varphi'$, где φ' — добавочный потенциал скоростей возмущенного линеаризованного потока (потенциал возмущения); φ_∞ — потенциал скоростей невозмущенного потока. В свою очередь величина φ' может быть представлена в виде суммы (рис. 3.IX.15):

$$\varphi' = \varphi_1' + \varphi_2', \qquad (3.\text{IX}.14)$$

где функция $\varphi_1'(x, r)$ представляет собой добавочный потенциал скоростей возмущенного осесимметричного течения, а $\varphi_2'(x, r, \gamma)$ — дополнительную составляющую возмущенного потенциала, обусловленную поперечным обтеканием. Таким образом,

$$\varphi = \varphi_\infty + \varphi_1'(x, r) + \varphi_2'(x, r, \gamma). \qquad (3.\text{IX}.15)$$

В теории линеаризованных течений φ_1' и φ_2' рассматриваются как функ-

ции, которые, являясь решениями уравнений движения, определяют независимые друг от друга потоки.

IX.26. Сущность метода источников заключается в замене обтекаемого тела системой непрерывно распределенных вдоль продольной оси источников и стоков. Закон распределения источников и стоков должен быть таким, чтобы в результате наложения невозмущенного потока на течение от этих источников одна из линий тока суммарного потока совпала бы с образующей тела вращения. В этом случае параметры течения будут такими, как при обтекании реального тела вращения.

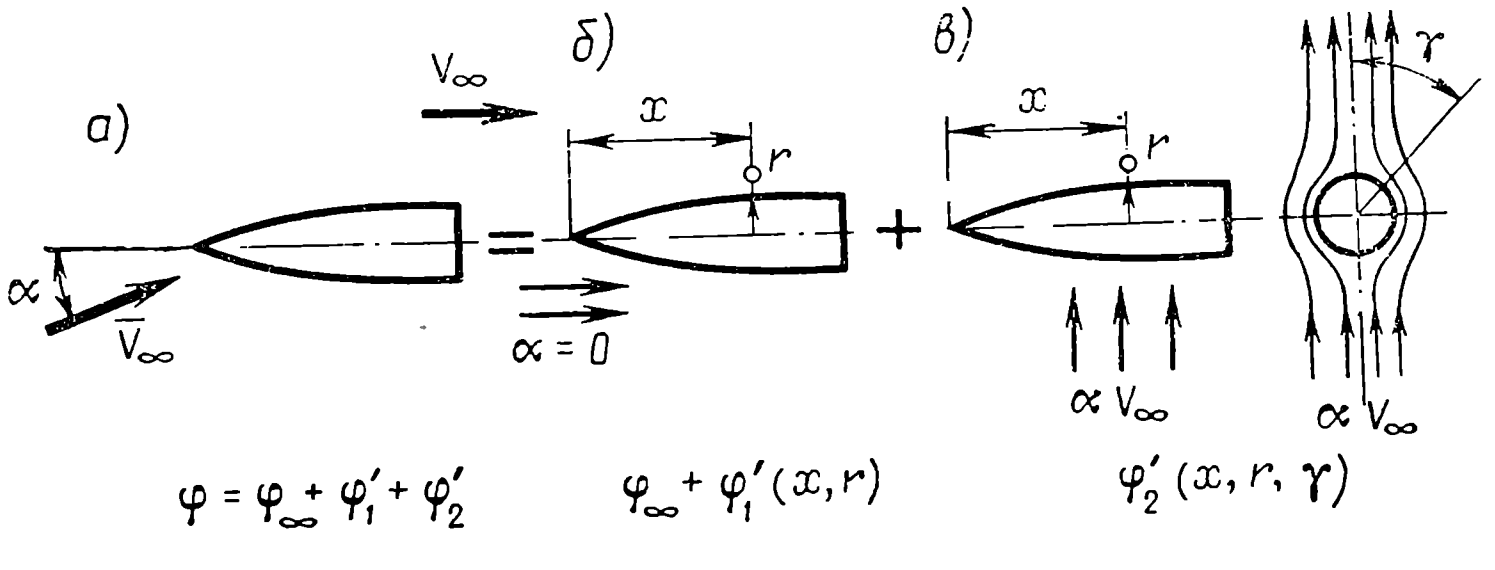


Рис. 3.IX.15. Тонкое тело вращения в линеаризованном потоке под малым углом атаки:

а — несимметричное обтекание; *б* — осесимметричное обтекание; *в* — добавочное поперечное обтекание

IX.27. Исследования показывают, что применение линеаризованных методов расчета обтекания тел вращения дает удовлетворительные результаты, если параметр подобия $\mathbf{K_1 = M_\infty/\lambda_{мид} < 1}$. Таким образом, если число $\mathbf{M_\infty}$ возрастает, то может наступить такой момент, когда для заданного тела вращения с удлинением $\lambda_{мид}$ применять линеаризованный метод будет невозможно, так как в потоке появятся не слабые, как это предполагает теория линеаризованных течений, а сильные возмущения (скачки уплотнения).

IX.28. Коэффициент давления в некоторой точке $A(r, x)$ образующей тонкого тела вращения (см. рис. 2.IX.6)

$$\bar{p} = \frac{1}{\lambda_{мид}^2}\left(2i_x^0 - \frac{6\bar{x}\, i_x^1}{u} + \frac{3\bar{x}^2 i_x^2}{u^2}\right) - \beta^2. \qquad (3.IX.16)$$

Здесь

$$\lambda_{мид} = x_{мид}/(2r_{мид}) = 10/(2 \cdot 0{,}5) = 10;$$

$$\beta = dr/dx = (1 - x/x_{мид})/\lambda_{мид} = (1 - x/10)/10,$$

а функция

$$u = x/(r\alpha') = x/\left(r\sqrt{\mathbf{M}_\infty^2 - 1}\right) = (x/r)\left(1/\sqrt{2^2 - 1}\right) = 0{,}578x/r.$$

Принимая во внимание, что

$$r = x(2 - x/x_{мид})/(2\lambda_{мид}) = (2 - x/10)\, x/20,$$

найдем

$$u = 11{,}56/(2 - x/10).$$

В частном случае при $x = 0$ (коническое острие) значение этой функции

$$u = u_к = 11{,}56/2 = 5{,}78,$$

а у донного среза, где $x = 10$, величина

$$u = u_д = 11{,}56/(2 - 1) = 11{,}56.$$

Таблица 3.IX.3

u	i_x^0	i_x^1	i_x^2	$\bar{x}$	β^2	$\bar{p}$	$\bar{r}^2$
6,0	2,478	8,953	37,21	0,073	0,0086	0,0346	0,0197
6,6	2,575	10,47	48,86	0,248	0,0057	0,0243	0,1888
7,2	2,663	12,04	62,37	0,394	0,0037	0,0156	0,4004
8,4	2,818	15,33	95,18	0,624	0,0014	0,0024	0,7371
9,4	2,932	18,21	128,7	0,770	0,0005	—0,0055	0,8971
10,6	3,052	21,80	176,7	0,909	0,0001	—0,0123	0,9833
11,56	3,140	24,77	221,3	1,000	0	—0,0160	1,0000

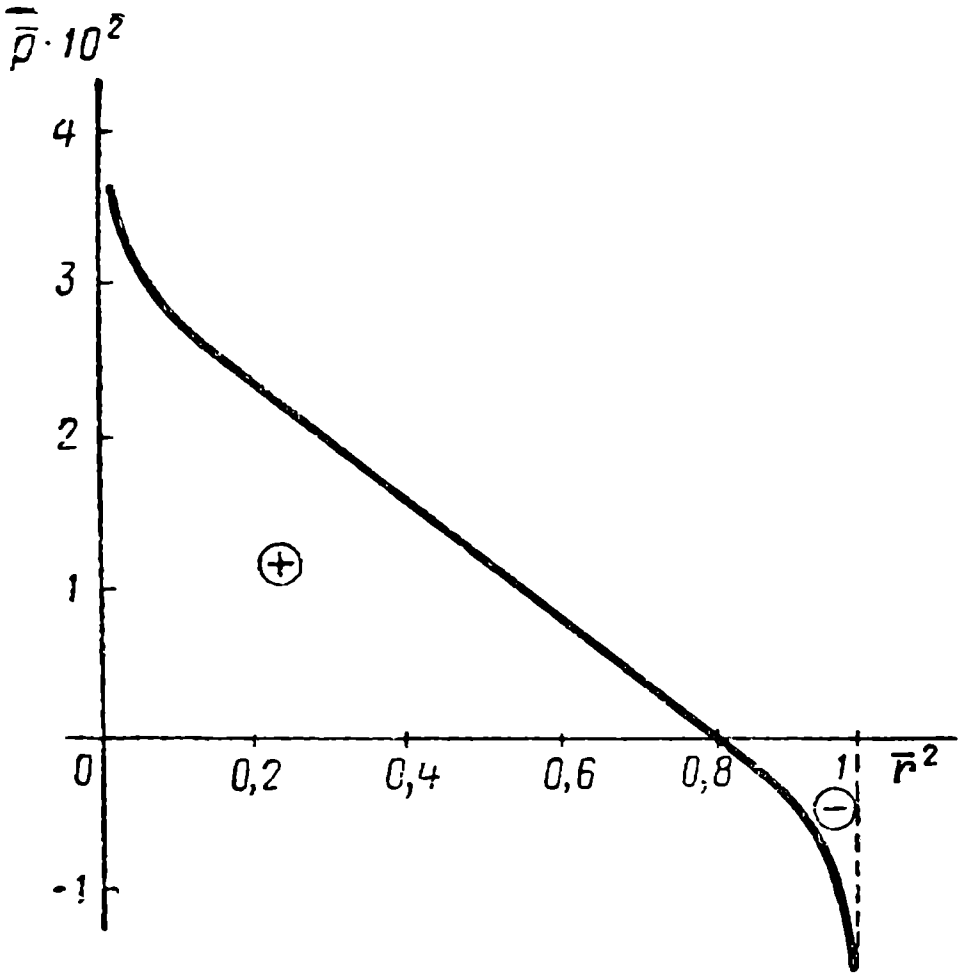


Рис. 3.IX.16. Графическое определение коэффициента волнового сопротивления тела вращения:

$\mu_{\bar{p}}=0{,}5\cdot 10^{-3}$ 1/мм; $\mu_{\bar{r}^2}=10^{-2}$ 1/мм; $\mu_S=0{,}5\times 10^{-5}$ 1/мм²; $S=2350$ мм²

Рис. 3.IX.17. Графическое определение коэффициента нормальной силы:

$\mu_{\bar{c}}=2\cdot 10^{-3}$ 1/мм; $\mu_{\bar{x}}=10^{-2}$ 1/мм; $\mu_S=2\cdot 10^{-5}$ 1/мм²; $S=10\,550$ мм²

Выберем ряд значений u в интервале $5{,}78\leqslant u\leqslant 11{,}56$ и определим для каждого из них по табл. XI-2-1 [21] величины i_x^0, i_x^1, i_x^2. а затем вычислим значения $\bar{x}=x/10$, используя уравнение

$$\bar{x}=x/10=2-11{,}56/u.$$

Одновременно найдем безразмерную величину $\bar{r}^2=r^2/r_{\text{мид}}^2$, применив уравнение

$$\bar{r}^2=\bar{x}^2(2-\bar{x})^2,$$

а также определим квадраты углов:

$$\beta^2=(1/100)(1-x/10)^2.$$

Все результаты расчетов вносим в табл. 3.IX.3.

Используя зависимость (3.IX.16), найдем $\bar{p}$ (см. табл. 3.IX.3), а затем вычислим коэффициент волнового сопротивления:

$$c_{x\text{в}}=\frac{X_{\text{в}}}{q_\infty S_{\text{мид}}}=\int_0^1 \bar{p}\,d\bar{r}^2.$$

Величина этого коэффициента, полученная графическим интегрированием (рис. 3.IX.16), $c_{x\text{в}}=\mu_S S=0{,}0118$.

Соответствующая сила сопротивления (для условий полета вблизи поверхности Земли)

$$X_в = 0{,}5 c_{xв}\, kp_\infty\, M_\infty^2\, \pi r_{мид}^2 = 0{,}5 \cdot 0{,}0118 \cdot 1{,}4 \cdot 1{,}033 \cdot 10^4 \cdot 2^2 \pi \cdot 0{,}5^2 = 270\ кГ.$$

IX.29. Коэффициент волнового сопротивления острого конуса может быть найден по формуле [20]:

$$c_{xв} = \beta_к^2 \left[2 \ln \left(u_к + \sqrt{u_к^2 - 1} \right) - 1 \right],$$

где

$$u_к = 1 / (\alpha' \beta_к) = 1 / \left[\sqrt{M_\infty^2 - 1}\, (r_{мид}/x_к) \right] = 11{,}55.$$

Таким образом,

$$c_{xв} = (1/20)^2 \left[2 \cdot 2{,}303 \lg \left(11{,}55 + \sqrt{11{,}55^2 - 1} \right) - 1 \right] = 0{,}01328.$$

Соответствующая сила сопротивления

$$X_в = 0{,}5 c_{xв}\, kp_\infty\, M_\infty^2\, \pi r_{мид}^2 = 0{,}5 \cdot 0{,}01328 \cdot 1{,}4 \cdot 1{,}033 \cdot 10^4 \cdot 2^2 \cdot \pi \cdot 0{,}5^2 = 292{,}3\ кГ.$$

IX.30. Коэффициент нормальной силы тонкого тела вращения будет равен согласно линеаризованной теории [20]

$$c_{Np} = \frac{N}{q_\infty S_{мид}} = \frac{4\alpha'\alpha}{\lambda_{мид}} \int_0^1 \bar{r} \left(2 i_r^0 - \frac{6\bar{x}}{u}\, i_r^1 + 3 \frac{\bar{x}^2}{u^2}\, i_r^2 \right) d\bar{x}. \qquad (3.IX.17)$$

Здесь:

$$\lambda_{мид} = x_{мид}/(2 r_{мид}) = 10/(2 \cdot 0{,}5) = 10;$$

$$\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = \sqrt{2^2 - 1} = 1{,}73;$$

$$u = x/(\alpha' r) = x/\{1{,}73\, [r_{мид}\, x\, (2 - x/x_{мид})/x_{мид}]\} = 11{,}56/(2 - x/10).$$

Функции i_r^0, i_r^1, i_r^2 находим из табл. XI-2-1 [22] в зависимости от параметра u. Для острия тела ($x=0$) этот параметр $u = u_к = 5{,}78$, а для донного среза ($x=10$) значение $u = u_д = 11{,}56$.

Функции i_r^0, i_r^1, i_r^2, найденные для значений u, расположенных в интервале $5{,}78 \leqslant u \leqslant 11{,}56$, приведены в табл. 3.IX.4.

В табл. 3.IX.4 приведены также относительные координаты $\bar{x} = x/x_{мид}$, найденные по уравнению $\bar{x} = 2 - 11{,}56/u$, и соответствующие безразмерные радиусы $\bar{r} = \bar{x}(2 - \bar{x})$. По этим данным вычислены функции

$$\bar{c} = \frac{4\alpha'\alpha}{\lambda_{мид}}\, \bar{r} \left(2 i_r^0 - \frac{6\bar{x}}{u}\, i_r^1 + 3\bar{x}^2 \frac{i_r^2}{u^2} \right)$$

при условии, что

$$4\alpha'\alpha/\lambda_{мид} = 4 \cdot 1{,}73 \cdot 0{,}1/10 = 0{,}0692.$$

Используя значения функции $\bar{c}$, представленные в табл. 3.IX.4, вычисляем при помощи графического интегрирования (рис. 3.IX.17) коэффициент нормальной силы:

$$c_N = \int_0^1 \bar{c} \cdot d\bar{x} = \mu_S S = 2 \cdot 10^{-5} \cdot 10550 = 0{,}211.$$

Соответствующий коэффициент момента, определяемый относительно поперечной оси, проходящей через острие, определяется для тонкого тела вращения по формуле [20]:

Таблица 3.IX.4

u	i_r^0	i_r^1	i_r^2	$\bar{x}$	$\bar{r}$	$\bar{c}$	$\bar{c}_1$
5,78				0	0	0	0
6,0	5,916	16,51	60,07	0,075	0,144	0,106	0,0020
6,6	6,524	20,24	82,08	0,250	0,438	0,267	0,0169
7,2	7,130	24,34	108,8	0,395	0,634	0,318	0,0314
7,8	7,736	28,80	140,6	0,519	0,770	0,311	0,0404
8,4	8,341	33,62	178,1	0,623	0,858	0,277	0,0432
9,0	8,944	38,80	221,4	0,715	0,919	0,227	0,0405
9,4	9,348	42,47	253,6	0,770	0,948	0,190	0,0366
9,8	9,751	46,29	289,5	0,820	0,968	0,158	0,0324
10,2	10,15	50,26	328,0	0,867	0,982	0,122	0,0264
10,6	10,53	54,40	369,8	0,910	0,995	0,0792	0,0181
11,0	10,93	58,68	415,0	0,950	0,998	0,0539	0,0128
11,56	11,52	65,03	485,0	1,000	1,000	0,0097	0,0024

$$m_z = -\frac{\alpha'\alpha}{\lambda_{\text{мид}}} \int_0^{\bar{x}} \bar{x}\bar{r}\left(2i_r^0 - \frac{6\bar{x}}{u}\, i_r^1 + \frac{3\bar{x}^2}{u^2}\, i_r^2\right) d\bar{x}.$$

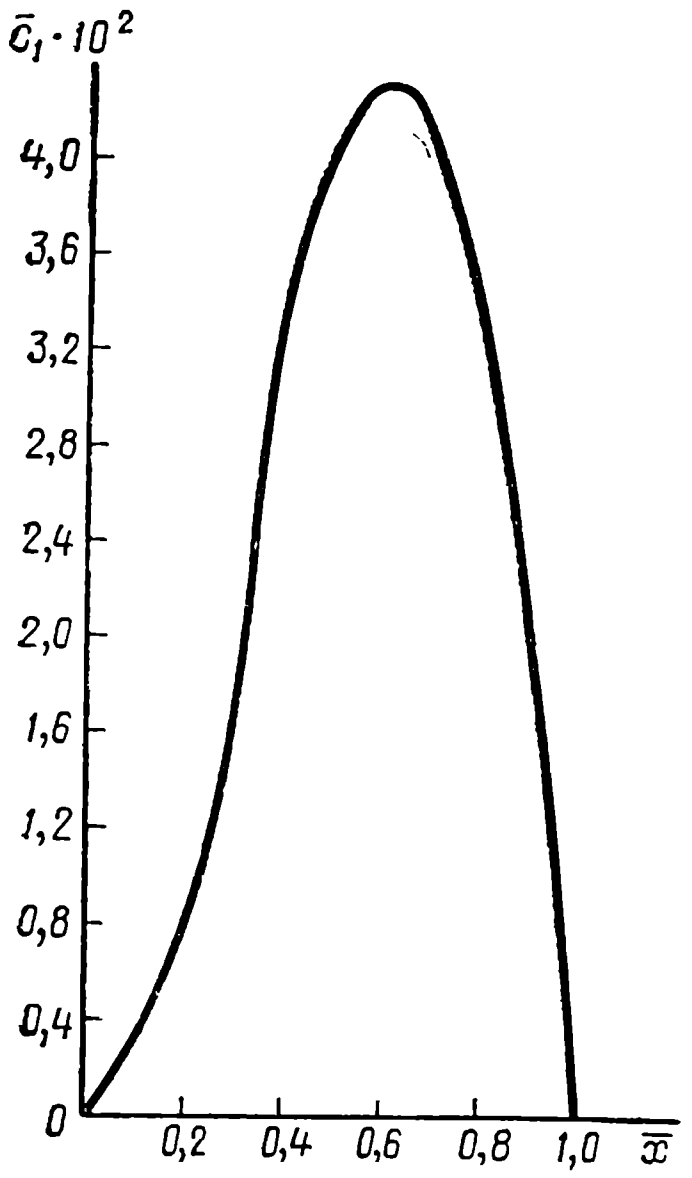


Рис. 3.IX.18. График для определения коэффициента момента:

$\alpha = 0,1$; $\mu_{\bar{x}} = 10^{-2}$ 1/мм; $\mu_{\bar{c}_1} = 2 \cdot 10^{-4}$ 1/мм; $\mu_S = 2 \cdot 10^{-6}$ 1/мм²
$S = 12\,100$ мм²

Вводя обозначение

$$c_1 = \frac{\alpha'\alpha}{\lambda_{\text{мид}}} \bar{x}\bar{r}\left(2i_r^0 - \frac{6\bar{x}}{u}\, i_r^1 + 3\,\frac{\bar{x}^2\, i_r^2}{u^2}\right),$$

найдем

$$m_z = -\int_0^1 \bar{c}_1 \cdot d\bar{x}.$$

Вычисленные значения $\bar{c}_1$ показаны в табл. 3.IX.4. Используя эти значения и осуществляя графическое интегрирование (рис. 3.IX.18), находим

$$m_z = -\mu_s S = -2 \cdot 10^{-6} \cdot 12\,100 = -0,0242.$$

Полученным аэродинамическим коэффициентам соответствуют нормальная сила

$$N = 0,5 c_N k p_\infty \mathbf{M}_\infty^2 \pi r_{\text{мид}}^2 = 0,5 \cdot 0,211 \cdot 1,4 \times$$
$$\times 1,033 \cdot 10^4 \cdot 2^2 \cdot \pi \cdot 0,5^2 = 4,64 \cdot 10^3\ кГ$$

и момент

$$M_z = 0,5 m_z k p_\infty \mathbf{M}_\infty^2 \pi r_{\text{мид}}^2 x_{\text{мид}} = -0,5 \times$$
$$\times 0,0242 \cdot 1,4 \cdot 1,033 \cdot 10^4 \cdot 2^2 \cdot \pi \cdot 0,5^2 \cdot 10 =$$
$$= -5,32 \cdot 10^3\ кГ \cdot м.$$

По найденным значениям m_z и c_N определяем коэффициент центра давления:

$$c_{\text{ц.д}} = -m_z/c_N = 0,0242/0,211 = 0,1146.$$

IX.31. Коэффициент осевой силы тонкого конуса, движущегося под малым углом атаки α, найдем по формуле [20]:

$$c_R = \beta_к^2 \left[2 \ln\left(u_к + \sqrt{u_к^2 - 1}\right) - 1\right] - \alpha^2.$$

Здесь: $\alpha = 0{,}1$; $\beta_к = r_{мид}/x_{мид} = 0{,}5/10 = 0{,}05$;

$$u_к = 1/(\alpha'\beta) = x_{мид}/\left(r_{мид}\sqrt{M_\infty^2 - 1}\right) = 10/\left(0{,}5\sqrt{2^2 - 1}\right) = 11{,}55.$$

По этим величинам находим

$$c_R = 0{,}05^2\left[2 \cdot 2{,}303 \lg\left(11{,}55 + \sqrt{11{,}55^2 - 1}\right) - 1\right] - 0{,}1^2 = 0{,}00328.$$

Соответствующий коэффициент нормальной силы

$$c_N = 2\alpha'\alpha\beta_к\sqrt{u_к^2 - 1} = 2\sqrt{2^2 - 1} \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}05\sqrt{11{,}55^2 - 1} = 0{,}199.$$

Переходя к поточным координатам, определим коэффициенты сопротивления и подъемной силы:

$$c_x = c_R + c_N\alpha = 0{,}00328 + 0{,}199 \cdot 0{,}1 = 0{,}0232;$$

$$c_y = c_N - c_R\alpha = 0{,}199 - 0{,}00328 \cdot 0{,}1 = 0{,}198.$$

Соответствующие сопротивление и подъемная сила будут следующими:

$$X = 0{,}5 c_x k p_\infty M_\infty^2 \pi r_{мид}^2 = 0{,}5 \cdot 0{,}0232 \cdot 1{,}4 \cdot 1{,}033 \cdot 10^4 \cdot 2^2 \cdot \pi \cdot 0{,}5^2 = 510\ кГ;$$

$$Y = 0{,}5 c_y k p_\infty M_\infty^2 \pi r_{мид}^2 = 0{,}5 \cdot 0{,}198 \cdot 1{,}4 \cdot 1{,}033 \cdot 10^4 \cdot 2^2 \cdot \pi \cdot 0{,}5^2 = 4350\ кГ.$$

Коэффициент центра давления конуса

$$c_{ц.д} = 2/3\left(1 + \beta_к^2\right) = 2/3\left(1 + 0{,}05^2\right) = 0{,}668,$$

а коэффициент момента относительно поперечной оси, проходящей через вершину,

$$m_z = -c_{ц.д}\, c_N = -0{,}668 \cdot 0{,}198 = -0{,}1322.$$

Соответствующий момент

$$M_z = 0{,}5 m_z k p_\infty M_\infty^2 \pi r_{мид}^2 x_к = -0{,}5 \cdot 0{,}1322 \cdot 1{,}4 \cdot 1{,}033 \times$$

$$\times\ 10^4 \cdot 2^2 \cdot \pi \cdot 0{,}5^2 \cdot 10 = -29\,030\ кГ \cdot м.$$

X.1. По таблицам атмосферы [31; 50] определяем для заданной высоты $H=10$ *км* параметры воздуха: $p_\delta=0{,}2701$ *кГ/см*^{2}; $\rho_\delta=0{,}04217$ *кГ*$\times$ $\times$*сек*^{2}/*м*^{4}; $\nu_\delta=3{,}52\cdot10^{-5}$ *м*^{2}/*сек*; $T_\delta=223{,}2$ K; $a_\delta=299{,}4$ *м/сек*; $\mu_{ср\,\delta}=28{,}97$. Найдем число Маха свободного потока: $M_\delta=V_\delta/a_\delta=700/299{,}4\approx2{,}34$.

Вычислим длину ламинарного участка $x_{лам}$ из условия, что

$$Re_{кр}=V_\delta x_{лам}/\nu_\delta=10^5,$$

откуда

$$x_{лам}=10^5\nu_\delta/V_\delta=10^5\cdot3{,}52\cdot10^{-5}/700=0{,}503\cdot10^{-2}\,м.$$

Отношение толщин пограничного слоя на ламинарном участке

$$\frac{\delta_{сж}}{\delta_{нсж}}=\left(1+\frac{k-1}{3}M_\delta^2\right)\left(1+\frac{k-1}{2}M_\delta^2\right)^{\frac{n-1}{2}}. \qquad (3.X.1)$$

Здесь для несжимаемой жидкости

$$\delta_{нсж}=b\bar{\delta}_{нсж}=4{,}64\bar{x}^{1/2}b/Re_b^{1/2}, \qquad (3.X.2)$$

где $\bar{x}=x/b$; $Re_b=V_\delta b/\nu_\delta$.

Приняв $b=x_{лам}$ — длине ламинарного участка, будем иметь $Re_b=Re_{кр}=10^5$ и, следовательно,

$$\delta_{нсж}=\frac{4{,}64\cdot0{,}503\cdot10^{-2}}{(10^5)^{1/2}}\bar{x}^{1/2}=7{,}38\cdot10^{-5}\cdot\bar{x}^{1/2}\,м.$$

Полагая $n=0{,}76$, $k=c_p/c_v=1{,}4$ и учитывая, что $M_\delta=2{,}34$, получим

$$\delta_{сж}=\left(1+\frac{1{,}4-1}{3}2{,}34^2\right)\left(1+\frac{1{,}4-1}{2}2{,}34^2\right)^{\frac{0{,}76-1}{2}}7{,}38\cdot10^{-5}\cdot\bar{x}^{1/2}=$$

$$=11{,}6\cdot10^{-5}\cdot\bar{x}^{1/2}\,м.$$

В конце ламинарного участка ($\bar{x}=1$) $\delta_{сж}=11{,}6\cdot10^{-5}$ *м*.
Отношение толщин для $M_\delta=2{,}34$

$$\frac{\delta_{сж}}{\delta_{нсж}}=\left(1+\frac{1{,}4-1}{3}2{,}34^2\right)\left(1+\frac{1{,}4-1}{2}2{,}34^2\right)^{\frac{0{,}76-1}{2}}=1{,}57.$$

Как видим, сжимаемость приводит к увеличению толщины слоя на 57%.

Для напряжения трения имеем зависимость

$$\frac{(\tau_{ст})_{сж}}{(\tau_{ст})_{нсж}}=\left(1+\frac{k-1}{2}M_\delta^2\right)^{\frac{n-1}{2}}=\left(1+\frac{1{,}4-1}{2}2{,}34^2\right)^{\frac{0{,}76-1}{2}}=0{,}912.$$

В соответствии с этим результатом напряжение трения в сжимаемом потоке уменьшается. Для несжимаемой жидкости

$$(\tau_{ст})_{нсж}=0{,}323\rho_\delta V_\delta^2\sqrt{\frac{1}{Re_x}}=$$

$$=\frac{0{,}323\cdot4{,}217\cdot10^{-2}\cdot700^2}{\sqrt{Re_x}}10^{-4}=\frac{66{,}8\cdot10^{-2}}{\sqrt{Re_x}}\frac{кГ}{см^2},$$

где $Re_x=V_\delta x/\nu_\delta=700\cdot x/(3{,}52\cdot10^{-5})=1{,}99\cdot10^7\cdot x$, причем

$$0<x\leqslant x_{лам}.$$

Таким образом,

$$(\tau_{ст})_{сж} = \frac{(\tau_{ст})_{сж}}{(\tau_{ст})_{нсж}} (\tau_{ст})_{нсж} = 0{,}912 \frac{66{,}8 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{\mathbf{Re}_x}} = \frac{60{,}9 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{\mathbf{Re}_x}} \frac{кГ}{см^2}.$$

Для конца ламинарного участка ($x = x_{лам}$), где $\mathbf{Re}_x = \mathbf{Re}_{кр} = 10^5$, $(\tau_{ст})_{сж} = 60{,}9 \cdot 10^{-2}/\sqrt{10^5} = 19{,}3 \cdot 10^{-4}$ $кГ/см^2$.

Отношение местных коэффициентов трения

$$(c_{fx})_{сж}/(c_{fx})_{нсж} = (\tau_{ст})_{сж}/(\tau_{ст})_{нсж} = 0{,}912.$$

Здесь

$$(c_{fx})_{нсж} = 0{,}646/\sqrt{\mathbf{Re}_x} = 2(\tau_{ст})_{нсж}/(\rho_\delta V_\delta^2),$$

поэтому

$$(c_{fx})_{сж} = \frac{2(\tau_{ст})_{сж}}{\rho_\delta V_\delta^2} = \frac{(c_{fx})_{сж}}{(c_{fx})_{нсж}} (c_{fx})_{нсж} = 0{,}912 \frac{0{,}646}{\sqrt{\mathbf{Re}_x}} = \frac{0{,}589}{\sqrt{\mathbf{Re}_x}}.$$

В частности, для конца ламинарного участка

$$(c_{fx})_{сж} = \frac{0{,}589}{\sqrt{10^5}} = 1{,}86 \cdot 10^{-3}.$$

Средний коэффициент трения на ламинарном участке

$$(c_{xf})_{сж} = (c_{xf})_{нсж} \left(1 + \frac{k-1}{2} \mathbf{M}_\delta^2\right)^{\frac{n-1}{2}}. \qquad (3.X.3)$$

Здесь

$$(c_{xf})_{нсж} = 1{,}29/\sqrt{\mathbf{Re}_b}. \qquad (3.X.4)$$

Так как $b = x_{лам}$, то $\mathbf{Re}_b = \mathbf{Re}_{кр} = 10^5$ и

$$(c_{xf})_{нсж} = \frac{1{,}29}{\sqrt{10^5}} = 4{,}09 \cdot 10^{-3},$$

отсюда

$$(c_{xf})_{сж} = 4{,}09 \cdot 10^{-3} \left(1 + \frac{1{,}4-1}{2} 2{,}34^2\right)^{\frac{0{,}76-1}{2}} = 4{,}09 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}912 = 3{,}73 \cdot 10^{-3}.$$

Сила трения, создаваемая обеими сторонами пластинки,

$$X_{f\,лам} = 2c_{xf} q_\delta S_{пл} = 2c_{xf} \frac{k p_\delta \mathbf{M}_\delta^2}{2} l x_{лам} =$$

$$= 2 \cdot 3{,}73 \cdot 10^{-3} \frac{1{,}4 \cdot 0{,}2701 \cdot 2{,}34^2}{2} 1 \cdot 0{,}503 \cdot 10^{-2} \cdot 10^4 = 0{,}385\, кГ.$$

X.2. Определим параметры атмосферы на высоте $H = 10$ $км$ и число $\mathbf{M}_\delta = 700/299{,}4 = 2{,}34$ (см. задачу X.1). Из решения задачи X.1 имеем длину ламинарного участка $x_{лам} = 0{,}503 \cdot 10^{-2}$ $м$. На длине пластинки $x (x_{лам} < x < b)$ пограничный слой будет турбулентным. При расчете параметров этого слоя исходим из предположения, что турбулентный поток начинается у передней кромки. Местный коэффициент турбулентного трения определяется по формуле Дородницына:

$$\frac{0{,}242}{\sqrt{(c_{fx})_{сж}}} = \sqrt{1 + \frac{k-1}{2} \mathbf{M}_\delta^2} \left\{\lg \left[\mathbf{Re}_x (c_{fx})_{сж}\right] - n \lg \left(1 + \frac{k-1}{2} \mathbf{M}_\delta^2\right) + 0{,}33\right\}. \qquad (3.X.5)$$

Внося сюда значения $\mathbf{M}_\delta = 2{,}34$, $k = 1{,}4$, $n = 0{,}76$, получаем

$$\frac{0{,}242}{\sqrt{(c_{fx})_{сж}}} = \sqrt{1 + \frac{1{,}4-1}{2}\,2{,}34^2}\left\{\lg\left[\mathbf{Re}_x\,(c_{fx})_{сж}\right] - \right.$$
$$\left. - 0{,}76\lg\left(1 + \frac{1{,}4-1}{2}\,2{,}34^2\right) + 0{,}33\right\}$$

или

$$0{,}168/\sqrt{(c_{fx})_{сж}} = \lg\left[\mathbf{Re}_x\,(c_{fx})_{сж}\right] + 0{,}09. \qquad (3.X.6)$$

В качестве первого приближения определяем $(c_{fx})_{сж}$ из формулы

$$(c_{fx})_{сж} = \frac{2k^2}{z^2\left(1 + \frac{k-1}{2}\,\mathbf{M}_\delta^2\right)}. \qquad (3.X.7)$$

Примем здесь $z = 10$ и $k = 0{,}391$:

$$(c_{fx})_{сж} = \frac{2\cdot 0{,}391^2}{10^2\left(1 + \frac{1{,}4-1}{2}\,2{,}34^2\right)} = 0{,}00147.$$

После подстановки этой величины в правую часть (3.X.6), положив $\mathbf{Re}_x = 10^6$, найдем

$$0{,}168/\sqrt{(c_{fx})_{сж}} = \lg\left(10^6\cdot 0{,}00147\right) + 0{,}09 = 3{,}26.$$

В соответствии с этим во втором приближении получим $(c_{fx})_{сж} = 0{,}00266$. Произведем повторную подстановку в правую часть (3.X.6):

$$0{,}168/\sqrt{(c_{fx})_{сж}} = \lg\left(10^6\cdot 0{,}00266\right) + 0{,}09 = 3{,}52.$$

Отсюда $(c_{fx})_{сж} = 0{,}00227$.

Осуществляем еще одно приближение:

$$0{,}168/\sqrt{(c_{fx})_{сж}} = \lg\left(10^6\cdot 0{,}00227\right) + 0{,}09 = 3{,}45,$$

откуда $(c_{fx})_{сж} = 0{,}00237$. На этом приближения можно закончить. Координата точки пластинки, которой соответствует эта величина коэффициента трения, находится из условия

$$\mathbf{Re}_x = V_\delta x/\nu_\delta = 10^6 = 700x/\left(3{,}52\cdot 10^{-5}\right),$$

согласно которому

$$x = \left(10^6\cdot 3{,}52\cdot 10^{-5}\right)/700 = 0{,}0503\ м.$$

Аналогично можно найти значения $(c_{fx})_{сж}$ в других заданных точках турбулентной зоны обтекания пластинки. Соответствующие значения толщин пограничного слоя находим из формулы

$$\bar{\delta}_{сж} = \frac{\delta_{сж}}{b} = \frac{0{,}212\bar{x}}{z_{сж}}\left[1 - \frac{\frac{k-1}{2}\,\mathbf{M}_\delta^2}{1 + \frac{k-1}{2}\,\mathbf{M}_\delta^2}\left(1 - \frac{2}{z_{сж}} + \frac{2}{z_{сж}^2}\right)\right]. \qquad (3.X.8)$$

Величину $z_{сж}$ определяем из (3.X.7) по значению $(c_{fx})_{сж} = 0{,}00237$:

$$z_{сж} = \sqrt{\frac{2k^2}{(c_{fx})_{сж}\left(1 + \frac{k-1}{2}\,\mathbf{M}_\delta^2\right)}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0{,}391^2}{0{,}00237\left(1 + \frac{1{,}4-1}{2}\,2{,}34^2\right)}} = 7{,}85.$$

Имея в виду, что безразмерная координата

$$\bar{x} = x/b = 0{,}0503/5 = 1{,}0\cdot 10^{-2},$$

получим

$$\bar{\delta}_{\text{сж}} = \frac{\delta_{\text{сж}}}{b} = \frac{0{,}212\cdot 1\cdot 10^{-2}}{7{,}85}\left[1 - \frac{\frac{1{,}4-1}{2}2{,}34^2}{1+\frac{1{,}4-1}{2}2{,}34^2}\left(1-\frac{2}{7{,}85}+\frac{2}{7{,}85^2}\right)\right] =$$

$$= 0{,}16\cdot 10^{-3}.$$

Аналогично находим толщины для других точек пластинки.

Для сравнения определим на расстоянии от передней кромки $x = 0{,}0503$ *м* коэффициент трения и толщину слоя в случае несжимаемой жидкости:

$$0{,}242/\sqrt{(c_{fx})_{\text{нсж}}} = \lg\left[\mathbf{Re}_x (c_{fx})_{\text{нсж}}\right] + 0{,}33. \qquad (3.X.9)$$

Задавшись $z_{\text{нсж}} = 10$, находим в первом приближении

$$(c_{fx})_{\text{нсж}} = 2k^2/z^2_{\text{нсж}} = 2\cdot 0{,}391^2/10^2 = 0{,}00306.$$

Внося это значение в правую часть (3.X.9), подсчитаем для $\mathbf{Re}_x = 10^6$ во втором приближении

$$0{,}242/\sqrt{(c_{fx})_{\text{нсж}}} = \lg(10^6\cdot 0{,}00306) + 0{,}33 = 3{,}82,$$

откуда $(c_{fx})_{\text{нсж}} = 0{,}004$. Затем проводим следующее приближение:

$$0{,}242/\sqrt{(c_{fx})_{\text{нсж}}} = \lg(10^6\cdot 0{,}004) + 0{,}33 = 3{,}93,$$

согласно которому $(c_{fx})_{\text{нсж}} = 0{,}00378$. Наконец, последнему приближению

$$0{,}242/\sqrt{(c_{fx})_{\text{нсж}}} = \lg(10^6\cdot 0{,}00378) + 0{,}33 = 3{,}91$$

соответствует величина $(c_{fx})_{\text{нсж}} = 0{,}00382$. По этой величине находим

$$z_{\text{нсж}} = k\sqrt{2/(c_{fx})_{\text{нсж}}} = 0{,}391\sqrt{2/0{,}00382} = 8{,}98$$

и относительную толщину слоя

$$\bar{\delta}_{\text{нсж}} = \frac{\delta_{\text{нсж}}}{b} = \frac{0{,}212\,\bar{x}}{z_{\text{нсж}}} = \frac{0{,}212\cdot 1{,}0\cdot 10^{-2}}{8{,}98} = 0{,}235\cdot 10^{-3}.$$

Рассмотрим применение закона «корня седьмой степени». Относительная толщина слоя в несжимаемой жидкости

$$\bar{\delta}_{\text{нсж}} = \delta_{\text{нсж}}/b = 0{,}37\cdot\bar{x}/\mathbf{Re}_x^{1/5}.$$

Для заданного $\mathbf{Re}_x = 10^6$ и соответствующей величины $\bar{x} = x/b = 0{,}0503/5 = 1{,}0\cdot 10^{-2}$ найдем

$$\delta_{\text{нсж}}/b = 0{,}37\cdot 1{,}0\cdot 10^{-2}/(10^6)^{1/5} = 0{,}232\cdot 10^{-3}.$$

Местный коэффициент трения

$$(c_{fx})_{\text{нсж}} = 0{,}0598/\mathbf{Re}_x^{1/5} = 0{,}0598/(10^6)^{1/5} = 0{,}00378.$$

Средний коэффициент трения пластинки на указанном участке b—$x_{\text{лам}}$ (см. рис. 2.X.1)

$$(c_{xf})_{\text{нсж}} = \frac{2X_{f\text{нсж}}}{\rho_\delta V_\delta^2 (b - x_{\text{лам}})\,1} = \frac{0{,}0598}{b - x_{\text{лам}}}\int_{x_{\text{лам}}}^{b}\frac{dx}{\mathbf{Re}_x^{1/5}} =$$

$$= \frac{0{,}0598}{(1-\bar{x}_{\text{лам}})\,\mathbf{Re}_b^{1/5}}\int_{\bar{x}_{\text{лам}}}^{1}\frac{d\bar{x}}{\bar{x}^{1/5}} = \frac{0{,}075\left(1-\bar{x}_{\text{лам}}^{4/5}\right)}{(1-\bar{x}_{\text{лам}})\,\mathbf{R}_b^{1/5}}.$$

Так как $\mathbf{Re}_b = V_\delta b/\nu_\delta = 700\cdot 5/(3{,}52\cdot 10^{-5}) \approx 10^8$ и $\bar{x}_{\text{лам}} = x_{\text{лам}}/b = 0{,}503\times$ $\times 10^{-2}/5 = 1{,}0\cdot 10^{-3}$, то

$$(c_{xf})_{\text{нсж}} = \frac{0{,}075\,[1-(1{,}0\cdot 10^{-3})^{4/5}]}{(1-1{,}0\cdot 10^{-3})\,(10^8)^{1/5}} = 1{,}88\cdot 10^{-3}.$$

С учетом сжимаемости

$$(c_{xf})_{\text{сж}} = (c_{xf})_{\text{нсж}}\,(1+0{,}12\,\mathbf{M}_\delta^2)^{-1/2} = \frac{1{,}88\cdot 10^{-3}}{(1+0{,}12\cdot 2{,}34^2)^{1/2}} = 1{,}46\cdot 10^{-3}.$$

Сила трения турбулентного участка пластинки

$$X_{f\text{т}} = 2\,(c_{xf})_{\text{сж}}\,q_\delta\,S_{\text{пл}} = 2\,(c_{xf})_{\text{сж}}\,\frac{kp_\delta\,\mathbf{M}_\delta^2}{2}\,l\,(b-x_{\text{лам}}) =$$

$$= 2\cdot 1{,}46\cdot 10^{-3}\,\frac{1{,}4\cdot 0{,}2701\cdot 2{,}34^2}{2}\,1\,(5-0{,}00503)\,10^4 = 151 \quad \kappa\Gamma.$$

Сложив эту силу с величиной сопротивления трения на ламинарном участке (см. задачу X.1), получим полную силу трения:

$$X_f = X_{f\text{лам}} + X_{f\text{т}} = 0{,}385\ \kappa\Gamma + 151\ \kappa\Gamma \approx 151\ \kappa\Gamma.$$

X.3. Определяем по таблицам [31; 50] параметры воздуха на высоте $H = 20$ *км*: $p_\delta = 5{,}636\cdot 10^{-2}$ *кГ/см*^{2}; $\rho_\delta = 0{,}9062\cdot 10^{-2}$ *кГ·сек*^{2}*/м*^{4}; $T_\delta = 216{,}7$ К; $a_\delta = 295{,}1$ *м/сек*; $\mu_{\text{ср}\delta} = 28{,}97$; $\mu_\delta = 1{,}45\cdot 10^{-6}$ *кГ·сек/м*^{2}. Число Маха $\mathbf{M}_\delta = V_\delta/a_\delta = 4000/295{,}1 \approx 13{,}55$.

Находим определяющую энтальпию:

$$i^* = 0{,}5\,(i_{\text{ст}} + i_\delta) + 0{,}22\,(i_r - i_\delta). \qquad (3.\text{X}.10)$$

Так как, по условиям, стенка теплоизолированная, то энтальпия газа у такой стенки равна энтальпии восстановления, т. е.

$$i_{\text{ст}} = i_r = i_\delta + rV_\delta^2/2. \qquad (3.\text{X}.11)$$

Примем для ламинарного течения $r_{\text{лам}} = \sqrt{\mathbf{Pr}}$, где при высоких температурах число Прандтля $\mathbf{Pr} = 0{,}64$. Поэтому $r_{\text{лам}} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$. Далее примем $(c_{p\delta})_{T=216{,}7\text{К}} = 0{,}24$ *ккал/(кГ·град)*. В соответствии с этим

$$i_\delta = \left(c_{p_\delta}\right)_{T=216{,}7\text{К}} T_\delta\, gA = 0{,}24\cdot 216{,}7\cdot 9{,}81\cdot 427 = 0{,}218\cdot 10^6\ м^2/сек^2.$$

Следовательно, используя (3.X.11), найдем

$$i_r = 0{,}218\cdot 10^6 + 0{,}8\,(4000^2/2) = 6{,}62\cdot 10^6\ м^2/сек^2.$$

Определяющая энтальпия

$$i^* = 0{,}5\,(6{,}62\cdot 10^6 + 0{,}218\cdot 10^6) + 0{,}22\,(6{,}62\cdot 10^6 - 0{,}218\cdot 10^6) =$$

$$= 4{,}83\cdot 10^6\ м^2/сек^2.$$

Из таблиц [17] по этому значению i^* и $p_\delta = 5{,}636\cdot 10^{-2}\ \kappa\Gamma/см^2$ находим с учетом диссоциации определяющую температуру $T^* = 2940$ К, а из [33] — средний молекулярный вес $\mu^*_{\text{ср}} = 26{,}95$.

Вычислим отношение толщин пограничного слоя в сжимаемом и несжимаемом потоках:

$$\frac{\delta_{\text{сж}}}{\delta_{\text{нсж}}} = \left(\frac{T^*}{T_\delta}\right)^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{\mu_{\text{ср}\delta}}{\mu^*_{\text{ср}}}\right)^{1/2} = \left(\frac{2940}{216{,}7}\right)^{\frac{0{,}76+1}{2}} \left(\frac{28{,}97}{26{,}95}\right)^{1/2} = 10{,}1.$$

Так как

$$\delta_{\text{нсж}} = 4{,}64\cdot \bar{x}^{1/2}\, b/\mathbf{Re}_b^{1/2},\ \bar{x} = x/b,$$

а число Рейнольдса

$$\mathbf{Re}_b = \frac{V_\delta \rho_\delta b}{\mu_\delta} = \frac{4000 \cdot 0{,}9062 \cdot 10^{-2} \cdot 5}{1{,}45 \cdot 10^{-6}} = 1{,}25 \cdot 10^8,$$

то

$$\delta_{\text{нсж}} = 4{,}64 \cdot \bar{x}^{1/2} \cdot 5/(1{,}25 \cdot 10^8)^{1/2} = 2{,}07 \cdot 10^{-3}\, \bar{x}^{1/2}\ м.$$

Следовательно,

$$\delta_{\text{сж}} = 10{,}1 \cdot 2{,}07 \cdot 10^{-3}\, \bar{x}^{1/2} = 2{,}09 \cdot 10^{-2}\, \bar{x}^{1/2}\ м.$$

В конце пластинки, где $\bar{x} = x/b = 1$, $\delta_{\text{сж}} = 2{,}09 \cdot 10^{-2}\ м = 2{,}09\ см$.

Отношение местных коэффициентов трения

$$\frac{(c_{fx})_{\text{сж}}}{(c_{fx})_{\text{нсж}}} = \left(\frac{T^*}{T_\delta}\right)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\mu^*_{\text{ср}}}{\mu_{\text{ср}\delta}}\right)^{1/2} = \left(\frac{2940}{216{,}7}\right)^{\frac{0{,}76-1}{2}} \left(\frac{26{,}95}{28{,}97}\right)^{1/2} = 0{,}695.$$

Имея в виду, что

$$(c_{fx})_{\text{нсж}} = 0{,}646 \sqrt{\frac{\mu_\delta}{V_\delta \rho_\delta x}} = \frac{0{,}646}{\sqrt{\mathbf{Re}_b}}\, \bar{x}^{-1/2} =$$

$$= \frac{0{,}646}{\sqrt{1{,}25 \cdot 10^8}}\, \bar{x}^{-1/2} = 0{,}577 \cdot 10^{-4}\, \bar{x}^{-1/2},$$

найдем

$$(c_{fx})_{\text{сж}} = 0{,}695\, (c_{fx})_{\text{нсж}} = 0{,}695 \cdot 0{,}577 \cdot 10^{-4}\, \bar{x}^{-1/2} = 0{,}401 \cdot 10^{-4}\, \bar{x}^{-1/2}.$$

В частности, у задней кромки пластинки $(\bar{x} = 1)\ (c_{fx})_{\text{сж}} = 0{,}401 \cdot 10^{-4}$.

Отношение средних коэффициентов трения

$$\frac{(c_{xf})_{\text{сж}}}{(c_{xf})_{\text{нсж}}} = \left(\frac{T^*}{T_\delta}\right)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\mu^*_{\text{ср}}}{\mu_{\text{ср}\delta}}\right)^{1/2} = 0{,}695.$$

Так как

$$(c_{xf})_{\text{нсж}} = 1{,}29/\sqrt{\mathbf{Re}_b} = 1{,}29/\sqrt{1{,}25 \cdot 10^8} = 1{,}15 \cdot 10^{-4},$$

то

$$(c_{xf})_{\text{сж}} = 0{,}695\, (c_{xf})_{\text{нсж}} = 0{,}695 \cdot 1{,}15 \cdot 10^{-4} = 0{,}8 \cdot 10^{-4}.$$

Сопротивление трения обеих сторон пластинки

$$X_{f\text{сж}} = 2\, (c_{xf})_{\text{сж}}\, q_\delta\, S_{\text{пл}} = 2 \cdot 0{,}8 \cdot 10^{-4}\, \frac{1{,}4 \cdot 563{,}6 \cdot 13{,}55^2}{2} 5 \cdot 1 = 58\ кГ.$$

Для сравнения определим сопротивление трения без учета сжимаемости:

$$X_{f\text{нсж}} = X_{f\text{сж}}\, \frac{(c_{xf})_{\text{нсж}}}{(c_{xf})_{\text{сж}}} = 58\, \frac{1}{0{,}695} = 83{,}4\ кГ.$$

X.4. Для решения задачи используем параметры воздуха на высоте $H = 20\ км$, приведенные в задаче X.3. Примем число Прандтля $\mathbf{Pr} = 0{,}64$ и определим коэффициент восстановления для турбулентного течения $r_{\text{т}} = \sqrt[3]{\mathbf{Pr}} = 0{,}862$, а также энтальпию газа у стенки, равную энтальпии восстановления:

$$i_r = i_\delta + r_{\text{т}} \frac{V_\delta^2}{2} = 0{,}218 \cdot 10^6 + 0{,}862\, \frac{4000^2}{2} = 7{,}11 \cdot 10^6\ м^2/сек^2,$$

где значение i_δ взято из решения задачи X.3.

Определяющая энтальпия находится по (3.X.10):

$$i^* = 0{,}5\,(7{,}11\cdot 10^6 + 0{,}218\cdot 10^6) + 0{,}22\,(7{,}11\cdot 10^6 - 0{,}218\cdot 10^6) = \\ = 5{,}18\cdot 10^6\ м^2/сек^2.$$

Из таблиц [17] по этому значению определяющей энтальпии i^* и давлению $p_\delta = 5{,}636\cdot 10^{-2}\ кГ/см^2$ находим определяющую температуру $T^* = 3000$ К и средний молекулярный вес [33] $\mu^*_{ср} = 26{,}67$.

Толщину пограничного слоя с учетом диссоциации определяем из выражения

$$\frac{\delta_{сж}}{\delta_{нсж}} = \left(\frac{T^*}{T_\delta}\right)^{\frac{n+1}{5}} \left(\frac{\mu_{ср\delta}}{\mu^*_{ср}}\right)^{1/5} = \left(\frac{3000}{216{,}7}\right)^{\frac{0{,}76+1}{5}} \left(\frac{28{,}97}{26{,}67}\right)^{1/5} = 2{,}55,$$

где $\delta_{нсж} = 0{,}37 \sqrt[5]{\dfrac{\mu_\delta}{V_\delta \rho_\delta}}\, x^{4/5}$; $\dfrac{\delta_{нсж}}{b} = \dfrac{0{,}37}{(\mathbf{Re}_b)^{1/5}}\, \bar{x}^{4/5}$.

Значение $\mathbf{Re}_b = 1{,}25\cdot 10^8$ (см. задачу X.3). Поэтому

$$\frac{\delta_{нсж}}{b} = \frac{0{,}37}{(1{,}25\cdot 10^8)^{1/5}}\, \bar{x}^{4/5} = 0{,}89\cdot 10^{-2}\cdot \bar{x}^{4/5}.$$

Таким образом,

$$\delta_{сж} = 2{,}55\cdot \delta_{нсж} = 2{,}55\cdot 5\cdot 0{,}89\cdot 10^{-2}\cdot \bar{x}^{4/5} = 11{,}4\cdot 10^{-2}\cdot \bar{x}^{4/5}\ м.$$

В частности, на задней кромке ($\bar{x} = 1$) $\delta_{сж} = 11{,}4\cdot 10^{-2}$ м.

Отношения местных и средних коэффициентов трения

$$\frac{(c_{fx})_{сж}}{(c_{fx})_{нсж}} = \frac{(c_{xf})_{сж}}{(c_{xf})_{нсж}} = \left(\frac{T^*}{T_\delta}\right)^{\frac{n-4}{5}} \left(\frac{\mu^*_{ср}}{\mu_{ср\delta}}\right)^{4/5} = \left(\frac{3000}{216{,}7}\right)^{\frac{0{,}76-4}{5}} \left(\frac{26{,}67}{28{,}97}\right)^{4/5} = 0{,}170.$$

Здесь для несжимаемой жидкости:

$$(c_{fx})_{нсж} = 0{,}0598\, x^{-1/5} \left(\frac{\mu_\delta}{V_\delta \rho_\delta}\right)^{1/5} = \frac{0{,}0598\, \bar{x}^{-1/5}}{(\mathbf{Re}_b)^{1/5}} = \\ = \frac{0{,}0598}{(1{,}25\cdot 10^8)^{1/5}}\, \bar{x}^{-1/5} = 0{,}144\cdot 10^{-2}\cdot \bar{x}^{-1/5};$$

$$(c_{xf})_{нсж} = \frac{0{,}075}{(\mathbf{Re}_b)^{1/5}} = \frac{0{,}075}{(1{,}25\cdot 10^8)^{1/5}} = 0{,}18\cdot 10^{-2}.$$

Сила сопротивления трения, создаваемая верхней и нижней сторонами пластинки, равна для несжимаемой жидкости

$$X_{fнсж} = 2\,(c_{xf})_{нсж}\, q_\delta\, S_{пл} = 2\cdot 0{,}18\cdot 10^{-2}\, \frac{1{,}4\cdot 563{,}6\cdot 13{,}55^2}{2}\, 5\cdot 1 \approx 1300\ кГ,$$

а для сжимаемого газа

$$X_{fсж} = X_{fнсж}\,[(c_{xf})_{сж}/(c_{xf})_{нсж}] = 1300\cdot 0{,}170 = 221\ кГ.$$

X.5. Для решения задачи используем параметры воздуха на высоте $H = 10$ км, приведенные в задаче X.1. Определим число Маха: $M_\infty = V_\infty/a_\infty = 5000/299{,}4 \approx 16{,}7$.

По таблицам [23] находим параметры невязкого потока на поверхности конуса, которые принимаются такими же, как на внешней границе пограничного слоя: $V_\delta = V_к = 3651\ м/сек$; $i_\delta = i_к = 6{,}06\cdot 10^6\ м^2/сек^2$; $p_\delta = p_к = 49{,}5\ кГ/см^2$; $\rho_\delta = \rho_к = 0{,}41\ кГ\cdot сек^2/м^4$; $T_\delta = T_к = 4090$ К; $S_\delta = S_к = 9610\ м^2/(сек^2\cdot град)$; $\mu_{ср\delta} = 27{,}70$.

Далее вычисляем определяющую энтальпию:

$$i^* = 0{,}5\,(i_{ст} + i_\delta) + 0{,}22\,(i_r - i_\delta).$$

Так как, по условию, поверхность теплоизолирована, то энтальпия газа на стенке равна энтальпии восстановления, т. е.

$$i_{ст} = i_r = i_\delta + rV_\delta^2/2.$$

Принимая число $\mathbf{Pr}=0{,}64$, найдем коэффициент восстановления $r_{лам}=\sqrt{0{,}64}=0{,}8$. В соответствии с этим

$$i_{ст} = i_r = 6{,}06\cdot 10^6 + 0{,}8\cdot 3651^2/2 = 11{,}4\cdot 10^6\ м^2/сек^2;$$

тогда

$$i^* = 0{,}5\,(11{,}4\cdot 10^6 + 6{,}06\cdot 10^6) + 0{,}22\,(11{,}4\cdot 10^6 - 6{,}06\cdot 10^6) = 9{,}89\cdot 10^6\ м^2/сек^2.$$

По этому значению энтальпии и давлению $p_\delta = p_к = 49{,}5\ кГ/см^2$ найдем из таблиц [17; 34] определяющую температуру $T^*=5475$ К и средний молекулярный вес воздуха $\mu^*_{ср}=25{,}16$.

Произведем расчет пограничного слоя для пластинки по параметрам свободного потока на конусе. Отношение местных толщин ламинарного слоя

$$\frac{\delta_{сж}}{\delta_{нсж}} = \left(\frac{T^*}{T_\delta}\right)^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{\mu_{ср\delta}}{\mu^*_{ср}}\right)^{1/2} = \left(\frac{5475}{4090}\right)^{\frac{0{,}76+1}{2}} \left(\frac{27{,}70}{25{,}16}\right)^{1/2} = 1{,}36,$$

а отношения местных и средних коэффициентов трения

$$\frac{(c_{fx})_{сж}}{(c_{fx})_{нсж}} = \frac{(c_{xf})_{сж}}{(c_{xf})_{нсж}} = \left(\frac{T^*}{T_\delta}\right)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\mu^*_{ср}}{\mu_{ср\delta}}\right)^{1/2} = \left(\frac{5475}{4090}\right)^{\frac{0{,}76-1}{2}} \left(\frac{25{,}16}{27{,}70}\right)^{1/2} = 0{,}915.$$

Проведем аналогичные расчеты для турбулентного пограничного слоя. В этом случае $r_т=\sqrt[3]{0{,}64}=0{,}862$ и, следовательно,

$$i_{ст} = i_r = i_\delta + r_т V_\delta^2/2 = 6{,}06\cdot 10^6 + 0{,}862\cdot 3651^2/2 = 11{,}8\cdot 10^6\ м^2/сек^2;$$

$$i^* = 0{,}5\,(11{,}8\cdot 10^6 + 6{,}06\cdot 10^6) + 0{,}22\,(11{,}8\cdot 10^6 - 6{,}06\cdot 10^6) = 10{,}2\cdot 10^6\ м^2/сек^2.$$

По этому значению энтальпии и давлению $p_\delta = p_к = 49{,}5\ кГ/см^2$ находим из таблиц и графиков [17; 33; 34] определяющую температуру $T^*=5600$ К и средний молекулярный вес $\mu^*_{ср}=25{,}0$.

Отношение местных толщин турбулентного пограничного слоя

$$\frac{\delta_{сж}}{\delta_{нсж}} = \left(\frac{T^*}{T_\delta}\right)^{\frac{n+1}{5}} \left(\frac{\mu_{ср\delta}}{\mu^*_{ср}}\right)^{1/5} = \left(\frac{5600}{4090}\right)^{\frac{0{,}76+1}{5}} \left(\frac{27{,}70}{25{,}0}\right)^{1/5} = 1{,}14.$$

Отношения соответствующих местных и средних коэффициентов трения

$$\frac{(c_{fx})_{сж}}{(c_{fx})_{нсж}} = \frac{(c_{xf})_{сж}}{(c_{xf})_{нсж}} = \left(\frac{T^*}{T_\delta}\right)^{\frac{n-4}{5}} \left(\frac{\mu^*_{ср}}{\mu_{ср\delta}}\right)^{1/5} = \left(\frac{5600}{4090}\right)^{\frac{0{,}76-4}{5}} \left(\frac{25{,}0}{27{,}70}\right)^{1/5} = 0{,}751.$$

Определим области ламинарного и турбулентного пограничных слоев на конусе. С этой целью найдем критическое число Рейнольдса. Из графика [20] видно, что это число является функцией числа $\mathbf{M}_\delta = V_\delta/a_\delta$ и относительной температуры стенки $\bar{T}_{ст}=T_{ст}/T_r$. Скорость потока $V_\delta=3651\ м/сек$, а скорость звука $a_\delta=1214\ м/сек$ определяем из таблиц [17] по $i_\delta=6{,}06\cdot 10^6\ м^2/сек^2$ и $p_\delta=49{,}5\ кГ/см^2$. Следовательно, $\mathbf{M}_\delta=V_\delta/a_\delta=3651/1214=3{,}01$. По этому значению $\mathbf{M}_\delta$ и относительной температуре $\bar{T}_{ст}=T_{ст}/T_r=1$ находим [20] $\mathbf{Re}_{кр}\approx 3{,}8\cdot 10^6$.

Теперь можно найти длину $x_{лам}$ участка конуса, занятого ламинарным пограничным слоем. Записываем:

$$\mathbf{Re}_{кр} = V_\delta x_{лам} \rho_\delta / \mu_\delta = 3{,}8 \cdot 10^6.$$

Здесь коэффициент динамической вязкости

$$\mu_\delta = \mu_\infty (T_\delta / T_\infty)^n = 1{,}49 \cdot 10^{-6} (4090/223{,}2)^{0{,}76} = 13{,}2 \cdot 10^{-6}\ кГ \cdot сек/м^2.$$

Имея также в виду, что $V_\delta = 3651$ $м/сек$, $\rho_\delta = 0{,}41$ $кГ \cdot сек^2/м^4$, получим

$$x_{лам} = \frac{\mu_\delta}{V_\delta \rho_\delta} 3{,}8 \cdot 10^6 = \frac{13{,}2 \cdot 10^{-6}}{3651 \cdot 0{,}41} 3{,}8 \cdot 10^6 = 3{,}35 \cdot 10^{-2}\ м.$$

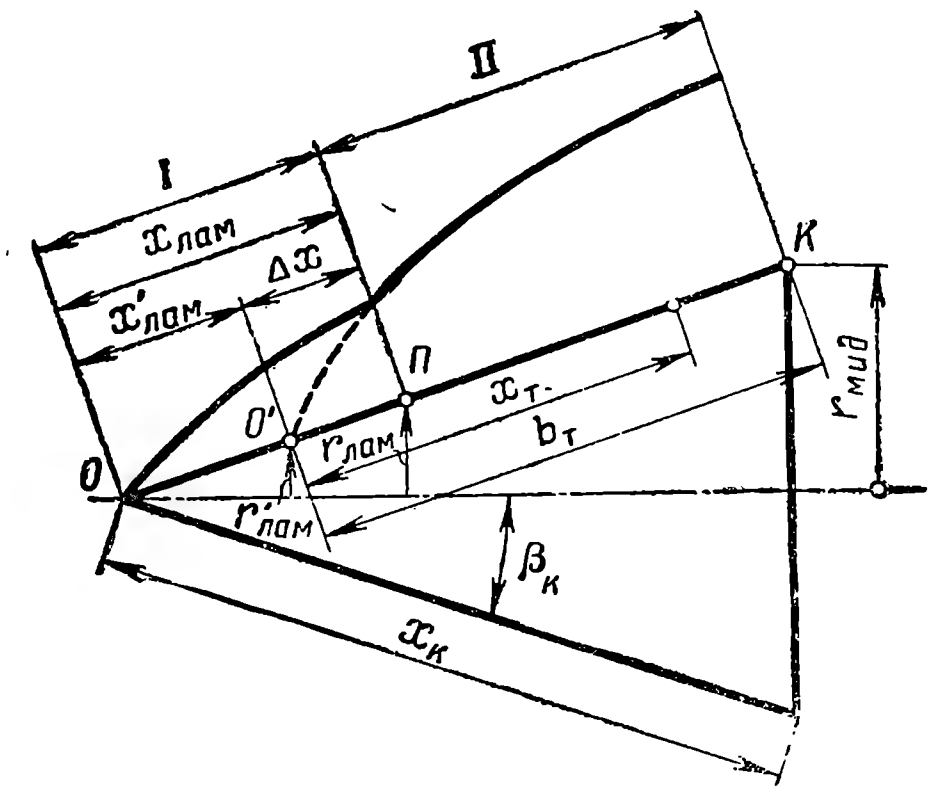


Рис. 3.X.1. К расчету смешанного пограничного слоя на конусе:

I — ламинарный пограничный слой; *II* — турбулентный пограничный слой

На этой длине образующей пограничный слой будет ламинарным, а на остальном участке — турбулентным (рис. 3.X.1).

На ламинарном участке местный коэффициент трения, отнесенный к скоростному напору, рассчитанному по параметрам свободного потока,

$$c_{fxк} = \sqrt{3}\, c_{fxпл} = \sqrt{3} \left[\frac{(c_{fx})_{сж}}{(c_{fx})_{нсж}}\right] (c_{fx})_{нсж} =$$

$$= \sqrt{3}\, 0{,}915\, (c_{fx})_{нсж} = 1{,}58\, (c_{fx})_{нсж}.$$

Для пластинки в несжимаемом потоке

$$(c_{fx})_{нсж} = 0{,}646 \cdot \bar{x}^{-1/2} / \sqrt{\mathbf{Re}_b}$$

$$\left(\bar{x} = x/x_{лам}\right),$$

где $\mathbf{Re}_b = V_\delta \rho_\delta x_{лам} / \mu_\delta = \mathbf{Re}_{кр} = 3{,}8 \cdot 10^6$.

В соответствии с этим

$$(c_{fx})_{нсж} = 0{,}646 \cdot \bar{x}^{-1/2} / \sqrt{3{,}8 \cdot 10^6} = 0{,}332 \cdot 10^{-3} \cdot \bar{x}^{-1/2}.$$

Тогда

$$(c_{fx})_{сж} = 1{,}58 \cdot 0{,}332 \cdot 10^{-3} \cdot \bar{x}^{-1/2} = 0{,}526 \cdot 10^{-3} \cdot \bar{x}^{-1/2}.$$

Соответствующий средний коэффициент трения

$$c_{xfк} = \sqrt{3}\, c_{xfпл} = \sqrt{3} \left[\frac{(c_{xf})_{сж}}{(c_{xf})_{нсж}}\right] (c_{xf})_{нсж} = \sqrt{3} \cdot 0{,}915\, (c_{xf})_{нсж} = 1{,}58\, (c_{xf})_{нсж}.$$

Так как для пластинки

$$(c_{xf})_{нсж} = 1{,}29/\sqrt{\mathbf{Re}_b} = 1{,}29/\sqrt{3{,}8 \cdot 10^6} = 0{,}663 \cdot 10^{-3},$$

то

$$c_{xfк} = 1{,}58 \cdot 0{,}663 \cdot 10^{-3} = 1{,}05 \cdot 10^{-3}.$$

Этот коэффициент отнесен к скоростному напору $\rho_\delta V_\delta^2/2$, рассчитанному по параметрам свободного потока на конусе.

Коэффициент, отнесенный к скоростному напору набегающего потока,

$$c_{xf\infty} = c_{xfк} \frac{\rho_\delta V_\delta^2}{\rho_\infty V_\infty^2} = 1{,}05 \cdot 10^{-3} \frac{0{,}41 \cdot 3651^2}{0{,}04217 \cdot 5000^2} = 5{,}44 \cdot 10^{-3}.$$

Толщина пограничного слоя

$$\delta_к = 0{,}578\, \delta_{пл}, \qquad (3.X.12)$$

где $\delta_{пл} = (\delta_{сж}/\delta_{нсж})\,\delta_{нсж}$. При этом толщина $\delta_{нсж}$ определяется по зависимости

$$\frac{\delta_{нсж}}{x_{лам}} = \bar{\delta}_{нсж} = \frac{4{,}64\cdot\bar{x}^{1/2}}{\sqrt{\mathbf{Re}_b}} = \frac{4{,}64\,\bar{x}^{1/2}}{\sqrt{\mathbf{Re}_{кр}}} = \frac{4{,}64\,\bar{x}^{1/2}}{\sqrt{3{,}8\cdot10^6}} = 2{,}38\cdot10^{-3}\,\bar{x}^{1/2}.$$

В соответствии с этим результатом

$$\delta_{пл} = 1{,}36\,\delta_{нсж} = 1{,}36\cdot2{,}38\cdot10^{-3}\,\bar{x}^{1/2}\,x_{лам} = 1{,}36\cdot2{,}38\cdot10^{-3}\times$$
$$\times\,3{,}35\cdot10^{-2}\,\bar{x}^{1/2} = 10{,}8\cdot10^{-5}\,\bar{x}^{1/2}\ м.$$

В конце ламинарного участка ($\bar{x}=1$) $\delta_{пл}=10{,}8\cdot10^{-5}$ *м*. Таким образом, в конце ламинарного участка на конусе в соответствии с (3.X.12) толщина $\delta_к \approx 0{,}578\cdot0{,}108 = 6{,}3\cdot10^{-2}$ *мм*.

Произведем расчет параметров трения на турбулентном участке. Так как в точке перехода толщины ламинарного и турбулентного пограничных слоев равны, то

$$0{,}578\cdot4{,}64\cdot x_{лам}\,\mathbf{Re}_{кр}^{-1/2}\left(\frac{\delta_{сж}}{\delta_{нсж}}\right)_{лам} = 0{,}523\cdot0{,}37\cdot\Delta x\,\mathbf{Re}_{\Delta x}^{-1/5}\left(\frac{\delta_{сж}}{\delta_{нсж}}\right)_{т},$$

где $\Delta x = O'П$ (см. рис. 3.X.1) и

$$\mathbf{Re}_{\Delta x} = \frac{V_\delta\,\Delta x}{\nu_\delta} = \frac{V_\delta\,\rho_\delta}{\mu_\delta}\,\Delta x = \frac{3651\cdot0{,}41}{13{,}2\cdot10^{-6}}\,\Delta x = 1{,}13\cdot10^8\,\Delta x.$$

Имея в виду, что критическое число Рейнольдса $\mathbf{Re}_{кр}=3{,}8\cdot10^6$, а $x_{лам}=3{,}35\cdot10^{-2}$ *м*, получим

$$0{,}578\cdot4{,}64\cdot3{,}35\cdot10^{-2}\left(3{,}8\cdot10^6\right)^{-1/2}1{,}36 = 0{,}523\cdot0{,}37\times$$
$$\times\,\Delta x\left(1{,}13\cdot10^8\cdot\Delta x\right)^{-1/5}\cdot1{,}14,$$

откуда $\Delta x = O'П = 3{,}8\cdot10^{-3}$ *м*. Эта величина определяет расстояние от точки перехода *П* до условной передней кромки пластинки (точка *O'* на рис. 3.X.1), на которой пограничный слой полностью турбулентный. Отсчет координаты $x_т$ в соответствующих формулах для параметров турбулентного пограничного слоя необходимо вести от точки *O'*. Для местного коэффициента трения на конусе имеем зависимость

$$c_{fxк} = 1{,}17\,c_{fxпл} = 1{,}17\left[\frac{(c_{fx})_{сж}}{(c_{fx})_{нсж}}\right](c_{fx})_{нсж} = 1{,}17\cdot0{,}751\,(c_{fx})_{нсж} = 0{,}879\,(c_{fx})_{нсж},$$

где $(c_{fx})_{нсж} = 0{,}0598\,\bar{x}^{-1/5}/\,(\mathbf{Re}_{bт})^{1/5}$ $(\bar{x}=x/b_т)$.

Согласно рис. 3.X.1

$$b_т = (O'П) + (ПК) = \Delta x + (x_к - x_{лам}) = 0{,}38\cdot10^{-2} + (5 - 3{,}35\cdot10^{-2}) \approx 4{,}97\ м$$

В соответствии с этим

$$\mathbf{Re}_{bт} = \frac{V_\delta\,\rho_\delta\,b_т}{\mu_\delta} = \frac{3651\cdot0{,}41\cdot4{,}97}{13{,}2\cdot10^{-6}} = 5{,}64\cdot10^8;$$

$$(c_{fx})_{нсж} = \frac{0{,}0598\cdot\bar{x}^{-1/5}}{(5{,}64\cdot10^8)^{1/5}} = 0{,}106\cdot10^{-2}\,\bar{x}^{-1/5}.$$

Таким образом, на конусе

$$c_{fxк} = 0{,}879\cdot0{,}106\cdot10^{-2}\cdot\bar{x}^{-1/5} = 0{,}932\cdot10^{-3}\,\bar{x}^{-1/5}.$$

В конце конуса ($\bar{x}=1$) $c_{fxк}=0{,}932\cdot10^{-3}$.

Средний коэффициент трения

$$c_{xf\text{к}} = 1{,}17\, c_{xf\text{пл}} = 1{,}17 \left[\frac{(c_{xf})_{\text{сж}}}{(c_{xf})_{\text{нсж}}}\right] (c_{xf})_{\text{нсж}} = 1{,}17 \cdot 0{,}751\, (c_{xf})_{\text{нсж}} =$$

$$= 1{,}17 \cdot 0{,}75\,1 \frac{0{,}075}{(5{,}64 \cdot 10^8)^{1/5}} = 1{,}17 \cdot 10^{-3}.$$

Отнесем эту величину к скоростному напору набегающего потока:

$$c_{xf\infty} = c_{xf\text{к}} \frac{\rho_\delta V_\delta^2}{\rho_\infty V_\infty^2} = 1{,}17 \cdot 10^{-3} \frac{0{,}41 \cdot 3651^2}{0{,}04217 \cdot 5000^2} = 6{,}06 \cdot 10^{-3}.$$

Толщина пограничного слоя

$$\delta_\text{к} = 0{,}523\, \delta_{\text{пл}} = 0{,}523\, (\delta_{\text{сж}}/\delta_{\text{нсж}})\, \delta_{\text{нсж}} = 0{,}523 \cdot 1{,}14\, \delta_{\text{нсж}} = 0{,}596\, \delta_{\text{нсж}}.$$

Далее находим

$$\delta_{\text{нсж}}/b_\text{т} = 0{,}37\, \bar{x}^{4/5}/(\mathbf{Re}_{b\text{т}})^{1/5} \quad (\bar{x} = x/b_\text{т}).$$

Так как $\mathbf{Re}_{b\text{т}} = 5{,}64 \cdot 10^8$, $b_\text{т} = 4{,}97$ *м*, то

$$\delta_{\text{нсж}} = 4{,}97 \cdot 0{,}37 \cdot \bar{x}^{4/5}/(5{,}64 \cdot 10^8)^{1/5} = 3{,}27 \cdot 10^{-2}\, \bar{x}^{4/5}\ м.$$

Поэтому

$$\delta_\text{к} = 0{,}596 \cdot 3{,}27 \cdot 10^{-2}\, \bar{x}^{4/5} = 1{,}95 \cdot 10^{-2}\, \bar{x}^{4/5}\ м.$$

В конце конуса ($\bar{x} = 1$) $\delta_\text{к} = 1{,}95 \cdot 10^{-2}$ *м*.

Определим средний коэффициент трения для конуса с боковой поверхностью S_δ:

$$c_{xf} = c_{xf\text{к}}^{\text{лам}} \frac{S_{\text{лам}}}{S_\delta} + c_{xf\text{к}}^{\text{т1}} \frac{S_{\text{т1}}}{S_\delta} - c_{xf\text{к}}^{\text{т2}} \frac{S_{\text{т2}}}{S_\delta}.$$

Здесь:

$$c_{xf\text{к}}^{\text{лам}} = c_{xf\infty} = 5{,}44 \cdot 10^{-3};\ c_{xf\text{к}}^{\text{т1}} = c_{xf\infty} = 6{,}06 \cdot 10^{-3};$$

Далее определяем

$$\mathbf{Re}_{\Delta x} = \frac{V_\delta \rho_\delta \Delta x}{\mu_\delta} = \frac{3651 \cdot 0{,}41 \cdot 0{,}38 \cdot 10^{-2}}{13{,}2 \cdot 10^{-6}} = 0{,}431 \cdot 10^6$$

и находим

$$c_{xf\text{к}}^{\text{т2}} = 1{,}17 \cdot 0{,}751 \frac{0{,}075}{(0{,}431 \cdot 10^6)^{1/5}} \cdot \frac{0{,}41 \cdot 3651^2}{0{,}04217 \cdot 5000^2} = 25{,}5 \cdot 10^{-3}.$$

Для соответствующих участков поверхности конуса имеем (см. рис. 3.X.1):

$$S_{\text{лам}} = \pi r_{\text{лам}}\, x_{\text{лам}} = \pi x_{\text{лам}}^2 \sin\beta_\text{к} = \pi\, (3{,}35 \cdot 10^{-2})^2 \sin 40^\circ = 7{,}21 \cdot 10^{-4}\pi;$$

$$S_{\text{т1}} = \pi\, (r_{\text{мид}}\, x_\text{к} - r'_{\text{лам}}\, x'_{\text{лам}}) = \pi \sin\beta_\text{к}\, (x_\text{к}^2 - x'^2_{\text{лам}}).$$

Так как

$$x'_{\text{лам}} = x_{\text{лам}} - \Delta x = 3{,}35 \cdot 10^{-2} - 0{,}38 \cdot 10^{-2} \approx 3 \cdot 10^{-2}\ м,$$

то

$$S_{\text{т1}} = \pi \sin 40^\circ\, [5^2 - (3 \cdot 10^{-2})^2] \approx 16{,}1\pi;$$

$$S_{\text{т2}} = \pi\, (r_{\text{лам}}\, x_{\text{лам}} - r'_{\text{лам}}\, x'_{\text{лам}}) = \pi \sin\beta_\text{к}\, (x_{\text{лам}}^2 - x'^2_{\text{лам}}) =$$

$$= \pi \sin\beta_\text{к}\, [x_{\text{лам}}^2 - (x_{\text{лам}} - \Delta x)^2] = \pi \sin 40^\circ\, [(3{,}35 \cdot 10^{-2})^2 -$$

$$- (3{,}35 \cdot 10^{-2} - 0{,}38 \cdot 10^{-2})^2] = 1{,}54 \cdot 10^{-4}\, \pi.$$

Боковая поверхность конуса

$$S_б = \pi r_{мид}\, x_к = \pi x_к^2 \sin\beta_к = \pi \cdot 5^2 \cdot \sin 40^\circ = 16{,}1\pi.$$

Определяем средний коэффициент трения:

$$c_{xf} = 5{,}44 \cdot 10^{-3} \frac{7{,}21 \cdot 10^{-4}\pi}{16{,}1\pi} + 6{,}06 \cdot 10^{-3} \frac{16{,}1\pi}{16{,}1\pi} -$$

$$- 25{,}5 \cdot 10^{-3} \frac{1{,}54 \cdot 10^{-4}\pi}{16{,}1\pi} \approx 6{,}06 \cdot 10^{-3}.$$

Соответствующая сила сопротивления

$$X_f = c_{xf}\, q_\infty\, S_б = c_{xf} \frac{k p_\infty \mathbf{M}_\infty^2}{2} \pi x_к^2 \sin\beta_к =$$

$$= 6{,}06 \cdot 10^{-3} \frac{1{,}4 \cdot 0{,}2701 \cdot 10^4 \cdot 16{,}7^2}{2} \pi 5^2 \sin 40^\circ \approx 161\,000\ кГ.$$

X.6. Определяем некоторые геометрические характеристики профиля. Угол наклона касательной в произвольной точке находится из выражения

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{2y_{1мид}}{x_{1мид}}\left(1 - \frac{x_1}{x_{1мид}}\right) = \frac{2 \cdot 0{,}04}{1}\left(1 - \frac{x_1}{1}\right) = 0{,}08\,(1 - x_1).$$

В точке передней кромки

$$\operatorname{tg}\beta_0 = (dy_1/dx_1)_{x_1=0} = 0{,}08 \quad (\beta_0 \approx 4^\circ\,34').$$

Из рис. 2.X.2 видно, что элемент дуги

$$dx = dx_1/\cos\beta = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\beta}\, dx_1.$$

Перейдя к переменной интегрирования $u = \operatorname{tg}\beta = 0{,}08(1 - x_1)$, найдем

$$x = \int_{\operatorname{tg}\beta_0}^{\operatorname{tg}\beta} \sqrt{1 + u^2}\left(-\frac{1}{0{,}08}\, du\right) =$$

$$= \frac{1}{0{,}16}\left(\operatorname{tg}\beta_0 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\beta_0} - \operatorname{tg}\beta \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\beta} + \ln \frac{\operatorname{tg}\beta_0 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\beta_0}}{\operatorname{tg}\beta + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\beta}}\right).$$

Например, при $x_1 = 0{,}1$ *м* ($\operatorname{tg}\beta = 0{,}072$)

$$x = \frac{1}{0{,}16}\left(0{,}08 \sqrt{1 + 0{,}08^2} - 0{,}072 \sqrt{1 + 0{,}072^2} + \right.$$

$$\left. + \ln \frac{0{,}08 + \sqrt{1 + 0{,}08^2}}{0{,}072 + \sqrt{1 + 0{,}072^2}}\right) = 0{,}1002\ м.$$

Используя таблицы стандартной атмосферы [31; 50], можно найти по заданной высоте $H = 20$ *км* параметры невозмущенного набегающего потока (см. задачу X.3), а также его скорость $V_\infty = \mathbf{M}_\infty a_\infty = 2 \cdot 295{,}1 = 590$ *м/сек*.

Определим параметры воздуха в свободном потоке около профиля. На клиновидном носке находим по значениям $\mathbf{M}_\infty = 2$ и $\beta_{кл} = \beta_0 = 4{,}574^\circ$ из графика [17] угол наклона скачка уплотнения $\theta_c = 33{,}9^\circ$. Далее вычислим параметры потока за этим скачком, имея в виду, что число $\mathbf{M}_{\infty n} = \mathbf{M}_\infty \sin\theta_c = 2 \cdot 0{,}558 = 1{,}116$:

$$\frac{V_2'}{V_\infty} = \frac{\cos\theta_c}{\cos(\theta_c - \beta_0)} = \frac{0{,}830}{0{,}872} = 0{,}952;$$

$$\frac{p_2'}{p_\infty} = \left(1 + \frac{k-1}{k+1}\right) \mathbf{M}_{n\infty}^2 - \frac{k-1}{k+1} = 1{,}285;$$

$$\frac{\rho_2'}{\rho_\infty} = \frac{\mathbf{M}_{n\infty}^2}{1 - (k-1)/(k+1) + [(k-1)/(k+1)]\,\mathbf{M}_{n\infty}^2} = 1{,}196;$$

$$a_\infty/a_2' = \sqrt{(p_\infty/p_2')\,(\rho_2'/\rho_\infty)} = 0{,}9646;$$

$$\mathbf{M}_2' = (V_2'/V_\infty)\,(a_\infty/a_2')\,\mathbf{M}_\infty = 0{,}952 \cdot 0{,}9646 \cdot 2 = 1{,}8367.$$

Для расчета чисел $\mathbf{M}$ в других точках контура воспользуемся методом характеристик и соответствующей таблицей [17] значений углов $\omega(\mathbf{M})$, определяемых по уравнению $\omega_i = \omega_0 + (\beta_0 - \beta_i)$.

Здесь значение $\omega_0 = 21{,}784°$ находится из той же таблицы по числу $\mathbf{M}_2' = 1{,}8367$ за скачком уплотнения. Например, в точке с координатой $x_1 = 0{,}1$ *м* $\operatorname{tg}\beta_1 = 0{,}08\,(1 - 0{,}1) = 0{,}072$ $(\beta_1 = 4{,}118°)$ угол $\omega_1 = \omega_0 + (\beta_0 - \beta_1) = 21{,}784° + (4{,}574° - 4{,}118°) = 22{,}24°$. По этому значению из таблицы [17] находим соответствующее число $\mathbf{M}$ на внешней границе пограничного слоя $\mathbf{M}_{\delta_1} = 1{,}8528$.

Аналогично рассчитываем числа $\mathbf{M}_{\delta i}$ в других точках контура. По найденным значениям $\mathbf{M}_{\delta i}$ определяем относительную скорость:

$$\bar{V}_{\delta i} = \frac{V_{\delta i}}{V_{\max}} = \left[1 - \left(1 + \frac{k-1}{2}\,\mathbf{M}_{\delta i}^2\right)^{-1}\right]^{1/2}.$$

В частности, для $\mathbf{M}_{\delta 1} = 1{,}8528$

$$\bar{V}_{\delta 1} = \left[1 - \left(1 + \frac{1{,}4 - 1}{2}\,1{,}8528^2\right)^{-1}\right]^{1/2} = 0{,}63805.$$

По табличным данным при помощи численных методов можно определить местные значения производной $d\bar{V}_\delta/dx_1$:

$$\left(\frac{d\bar{V}_\delta}{dx_1}\right)_i = \frac{\bar{V}_{\delta(i+1)} - \bar{V}_{\delta(i-1)}}{2h_{x_1}},$$

где шаг $h_{x1} = 0{,}1$ *м*. В частности, для точки *1*

$$\left(\frac{d\bar{V}_\delta}{dx_1}\right)_1 = \frac{\bar{V}_{\delta 2} - \bar{V}_{\delta_0}}{2h_{x_1}} = \frac{0{,}64126 - 0{,}63474}{2 \cdot 0{,}1} = 0{,}0326 \ \ 1/м.$$

Производные в первой и последней точках находим с использованием конечных разностей. Далее, используя данные о первых производных, определяем вторые производные $d^2\bar{V}_{\delta i}/dx_1^2$.

Для определения параметров ламинарного пограничного слоя необходимо проинтегрировать дифференциальное уравнение [20]:

$$d\lambda/d\xi = M_1(\lambda)\,N_1(\xi) + M_2(\lambda)\,N_2(\xi),$$

где

$$\xi = \int_0^x \frac{p_\delta}{p_0'}\,dx \quad \left(d\xi = \frac{p_\delta}{p_0'}\,dx\right);$$

$$M_1(\lambda) = \frac{\lambda\,(213{,}12 - 1{,}92\lambda - 0{,}2\lambda^2)}{213{,}12 - 5{,}76\lambda - \lambda^2};$$

$$M_2(\lambda) = \frac{7257{,}6 - 1336{,}32\lambda + 37{,}92\lambda^2 + 0{,}8\lambda^3}{213{,}12 - 5{,}76\lambda - \lambda^2};$$

$$N_1(\xi) = \frac{4\bar{V}_\delta \bar{V}'_\delta}{1-\bar{V}_\delta^2} + \frac{\bar{V}''_\delta}{\bar{V}'_\delta};$$

$$N_2(\xi) = \frac{\bar{V}'_\delta \bar{V}_\delta}{1-\bar{V}_\delta^2} + \frac{\bar{V}'_\delta}{\bar{V}_\delta} = \frac{\bar{V}'_\delta}{\bar{V}_\delta\left(1-\bar{V}_\delta^2\right)};$$

$$\bar{V}'_\delta = d\bar{V}_\delta/d\xi; \quad \bar{V}''_\delta = d^2\bar{V}_\delta/d\xi^2.$$

Преобразуем это уравнение к переменной x_1:

$$\frac{d\lambda}{dx_1} = M_1(\lambda)\frac{N_1(\xi)}{dx_1/d\xi} + M_2(\lambda)\frac{N_2(\xi)}{dx_1/d\xi};$$

$$N_1(x_1) = \frac{N_1(\xi)}{dx_1/d\xi} = \frac{4\bar{V}_\delta\left(d\bar{V}_\delta/dx_1\right)}{1-\bar{V}_\delta^2} + \frac{d^2\bar{V}_\delta/d\xi^2}{d\bar{V}_\delta/d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dx_1};$$

$$N_2(x_1) = \frac{N_2(\xi)}{dx_1/d\xi} = \frac{d\bar{V}_\delta/dx_1}{\bar{V}_\delta\left(1-\bar{V}_\delta^2\right)}.$$

Здесь:

$$\frac{d\bar{V}_\delta}{d\xi} = \frac{d\bar{V}_\delta}{dx_1}\cdot\frac{dx_1}{d\xi} = \frac{d\bar{V}_\delta}{dx_1}\cos\beta\frac{p'_0}{p_\delta};$$

$$\frac{d^2\bar{V}_\delta^2}{d\xi^2} = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{d\bar{V}_\delta}{d\xi}\right) = \frac{d}{dx_1}\left(\frac{d\bar{V}_\delta}{d\xi}\right)\frac{dx_1}{dx}\cdot\frac{dx}{d\xi};$$

$$\frac{d}{dx_1}\left(\frac{d\bar{V}_\delta}{d\xi}\right) = \frac{d}{dx_1}\left(\frac{d\bar{V}_\delta}{dx_1}\cos\beta\frac{p'_0}{p_\delta}\right) = \frac{d^2\bar{V}_\delta}{dx_1^2}\cos\beta\frac{p'_0}{p_\delta} +$$

$$+\frac{d\bar{V}_\delta}{dx_1}\cdot\frac{d}{dx_1}(\cos\beta)\frac{p'_0}{p_\delta} + \frac{d\bar{V}_\delta}{dx_1}\cos\beta\frac{d}{dx_1}\left(\frac{p'_0}{p_\delta}\right).$$

Производные $d(\cos\beta)/dx_1$ и $d(p'_0/p_\delta)/dx_1$ определяются следующим образом. Поскольку $\operatorname{tg}\beta = 0{,}08(1-x_1)$, то

$$d\beta/\cos^2\beta = -0{,}08dx_1 \text{ и } d\beta/dx_1 = -0{,}08\cos^2\beta.$$

Следовательно,

$$d(\cos\beta)/dx_1 = -\sin\beta(-0{,}08\cos^2\beta) = 0{,}04\cos\beta\cdot\sin 2\beta.$$

Производная

$$\frac{d}{dx_1}\left(\frac{p'_0}{p_\delta}\right) = \frac{d}{dx_1}\left[\left(1-\bar{V}_\delta^2\right)^{-\frac{k}{k-1}}\right] = -\frac{k}{k-1}\left(1-\bar{V}_\delta^2\right)^{-\frac{k}{k-1}-1}\left(-2\bar{V}_\delta\right)\frac{d\bar{V}_\delta}{dx_1} =$$

$$= \frac{2k}{k-1}\cdot\frac{p'_0}{p_\delta}\cdot\frac{\bar{V}_\delta\left(d\bar{V}_\delta/dx_1\right)}{1-\bar{V}_\delta^2}.$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dx_1}\left(\frac{d\bar{V}_\delta}{d\xi}\right) = \cos\beta\frac{P'_0}{P_\delta}\left[\frac{d^2\bar{V}_\delta}{dx_1^2} + 0{,}04\sin 2\beta\frac{d\bar{V}_\delta}{dx_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{2k}{k-1}\cdot\frac{\bar{V}_\delta}{1-\bar{V}_\delta^2}\left(\frac{d\bar{V}_\delta}{dx_1}\right)^2\right];$$

Таблица 3.X.1

Номера точек	λ	$\Delta\lambda$	$\lambda'=M_1N_1+M_2N_2$	$\Delta\lambda'$	$\Delta^2\lambda'$	$\Delta^3\lambda'$
0	0	0,29649	2,9649	—0,0807		
1	0,29649		2,8842			
0	0	0,29246	2,9649	—0,0801	—0,0333	
1	0,29246	0,28438	2,8848	—0,0468		
2	0,57684		2,8380			
0	0	0,29219	2,9649	—0,0801	—0,0330	—0,0010
1	0,29219	0,28646	2,8848	—0,0471	—0,0340	0,0490
2	0,57865	0,28004 0,28340	2,8377	—0,0131	0,0150	—0,0234
3	0,85869 0,86205	0,28035 0,28223	2,8246	0,0019	—0,0084	—0,0129
4	1,1424 1,1443	0,28521 0,28236	2,8265	—0,0065	—0,0213	—0,0256
5	1,4295 1,4267	0,28046 0,28084	2,8200	—0,0278	—0,0469	0,0614
6	1,7072 1,7075	0,27646 0,27598	2,7922	—0,0747	0,0145	—0,0213
7	1,9840 1,9835	0,26509 0,26836	2,7175	—0,0602	—0,0068	—0,0089
8	2,2486 2,2529	0,26558 0,26253	2,6573	—0,0670	—0,0157	0,1725
9	2,5185 2,5154	0,25460 0,25506	2,5903	—0,0827	0,1568	—0,0460
10	2,7700 2,7705	0,24564 0,25244	2,5076	0,0741	0,1108	—0,1886
11	3,0161 3,0229	0,27487 0,26668	2,5817	0,1849	—0,0778	0,0210
12	3,2978 3,2896	0,28880 0,28345	2,7666	0,1071	—0,0568	0,0738
13	3,5784 3,5730	0,28241 0,29027	2,8737	0,0503	0,0170	—0,0044
14	3,8397 3,8633	0,29334 0,29531	2,9240	0,0673	0,0126	—0,0003
15	4,1516 4,1586	0,30597 0,30304	2,9913	0,0799	0,0123	—0,1028
16	4,4646 4,4616	0,31148 0,31163	3,0712	0,0922	—0,0905	0,0674
17	4,7731 4,7732	0,32145 0,31761	3,1634	0,0017	—0,0231	0,0216
18	5,0946 5,0908	0,30897 0,31534	3,1651	—0,0214	—0,0015	
19	5,3998 5,4061	0,31486 0,31315	3,1437	—0,0229		
20	5,7210 5,7192		3,1208			

$$\frac{d^2\bar{V}_\delta/d\xi^2}{d\bar{V}_\delta/d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dx_1}=\frac{\left[(d/dx_1)(d\bar{V}_\delta/d\xi)\right](dx_1/d\xi)}{(d\bar{V}_\delta/dx_1)\cos\beta p_0'/p_\delta}\cdot\frac{d\xi}{dx_1}=$$

$$=\frac{d^2\bar{V}_\delta/dx_1^2}{d\bar{V}_\delta/dx_1}+0{,}04\sin 2\beta+\frac{2k}{k-1}\cdot\frac{\bar{V}_\delta}{1-\bar{V}_\delta^2}\cdot\frac{d\bar{V}_\delta}{dx_1}.$$

Учитывая, что при $k=1{,}4$ величина $2k/(k-1)=7$,

$$N_1(x_1)=\frac{4\bar{V}_\delta(d\bar{V}_\delta/dx_1)}{1-\bar{V}_\delta^2}+\frac{d^2\bar{V}_\delta/dx_1^2}{d\bar{V}_\delta/dx_1}+0{,}04\sin 2\beta+\frac{7\bar{V}_\delta}{1-\bar{V}_\delta^2}\cdot\frac{d\bar{V}_\delta}{dx_1}.$$

Итак, для определения параметров ламинарного пограничного слоя имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{d\lambda}{dx_1}=M_1(\lambda)N_1(x_1)+M_2(\lambda)N_2(x_1), \qquad (3.X.13)$$

в котором $N_1(x_1)$ и $N_2(x_1)$ вычисляются в каждой точке контура следующим образом:

$$N_1(x_1)=\frac{11\bar{V}_\delta}{1-\bar{V}_\delta^2}\cdot\frac{d\bar{V}_\delta}{dx_1}+0{,}04\cdot\sin 2\beta+\frac{d^2\bar{V}_\delta/dx_1^2}{d\bar{V}_\delta/dx_1};$$

$$N_2(x_1)=\frac{d\bar{V}_\delta/dx_1}{\bar{V}_\delta(1-\bar{V}_\delta^2)}.$$

Используя полученные данные для функций N_1 и N_2, производим численное интегрирование уравнения (3.X.13) и определяем значения λ для каждой из выбранных точек. При этом начальным условием интегрирования является значение $\lambda=0$ для $\xi=0$ $(x_1=0)$. Интегрирование проводим методом конечных разностей с шагом $h_{x1}=0{,}1$ *м* при помощи расчетного бланка (см. табл. 3.X.1).

Поскольку при вычислениях $\Delta\lambda$ используется формула численного интегрирования наклонной строки с учетом конечных разностей третьего порядка, необходимо иметь по крайней мере четыре значения производной $d\lambda/dx_1$. В начале вычислений мы имеем только одно значение производной в начальной точке λ_0', определяемое по (3.X.13) при условии, что для $x_1=0$ значение $\lambda=0$. Для определения недостающих значений можно использовать, в частности, способ последовательных приближений. Этот способ заключается в уточнении полученных значений функций и их производных в первых точках. Расчеты производятся в следующем порядке.

Проводим первое приближение:

$$\Delta\lambda_0=h_{x_1}\lambda_0', \quad \lambda_1=\lambda_0+\Delta\lambda_0,$$

затем второе:

$$\Delta\lambda_0=h_{x_1}\left(\lambda_0'+\frac{1}{2}\Delta\lambda_0'\right), \quad \lambda_1=\lambda_0+\Delta\lambda_0;$$

$$\Delta\lambda_1=h_{x_1}\left(\lambda_1'+\frac{1}{2}\Delta\lambda_0'\right), \quad \lambda_2=\lambda_1+\Delta\lambda_1;$$

далее третье:

$$\Delta\lambda_0=h_{x_1}\left(\lambda_0'+\frac{1}{2}\Delta\lambda_0'-\frac{1}{12}\Delta^2\lambda_0'\right), \quad \lambda_1=\lambda_0+\Delta\lambda_0;$$

$$\Delta\lambda_1=h_{x_1}\left(\lambda_1'+\frac{1}{2}\Delta\lambda_1'-\frac{1}{12}\Delta^2\lambda_0'\right), \quad \lambda_2=\lambda_1+\Delta\lambda_1;$$

№ точек (i)	x_1, *м*	x, *м*	tg β	β_i, *град*	$\beta_0-\beta_i$, *град.*	ω_i, *град.*	$M_{\delta i}$	$\bar{V}_{\delta i}=\frac{V_{\delta i}}{V_{\max}}$	$1-\bar{V}^2_{\delta i}$
0			0,080	4,574	0,000	21,784	1,8367	0,63474	0,59712
1	0,1	0,1002	0,072	4,118	0,456	22,240	1,8528	0,63805	0,59291
2	0,2	0,2004	0,064	3,662	0,912	22,696	1,8685	0,64126	0,58883
3	0,3	0,3005	0,056	3,205	1,369	23,153	1,8850	0,64452	0,58459
4	0,4	0,4006	0,048	2,748	1,826	23,610	1,9010	0,64768	0,58045
5	0,5	0,5007	0,040	2,291	2,283	24,067	1,9171	0,65093	0,57634
6	0,6	0,6008	0,032	1,833	2,741	24,525	1,9334	0,65406	0,57222
7	0,7	0,7009	0,024	1,374	3,200	24,984	1,9494	0,65711	0,56818
8	0,8	0,8010	0,016	0,9165	3,657	25,441	1,9660	0,66029	0,56402
9	0,9	0,9011	0,008	0,4583	4,116	25,900	1,9822	0,66333	0,55998
10	1,0	1,0011	0,000	0,0000	4,574	26,358	1,9991	0,66648	0,55577
11	1,1	1,1011	—0,008	—0,4583	5,032	26,816	2,0161	0,66963	0,55160
12	1,2	1,2012	—0,016	—0,9165	5,490	27,274	2,0323	0,67253	0,54765
13	1,3	1,3013	—0,024	—1,374	5,948	27,732	2,0495	0,67564	0,54345
14	1,4	1,4014	—0,032	—1,833	6,507	28,191	2,0664	0,67869	0,53938
15	1,5	1,5015	—0,040	—2,291	6,865	28,649	2,0829	0,68162	0,53542
16	1,6	1,6016	—0,048	—2,748	7,322	29,106	2,1000	0,68454	0,53135
17	1,7	1,7017	—0,056	—3,205	7,779	29,563	2,1172	0,68754	0,52729
18	1,8	1,8018	—0,064	—3,662	8,236	30,020	2,1346	0,69050	0,52321
19	1,9	1,9020	—0,072	—4,118	8,692	30,476	2,1520	0,69341	0,51916
20	2,0	2,0022	—0,080	—4,574	9,148	30,932	2,1696	0,69634	0,51509

$$\Delta\lambda_2 = h_{x_1}\left(\lambda'_2 + \frac{1}{2}\Delta\lambda'_1 + \frac{5}{12}\Delta^2\lambda'_0\right), \quad \lambda_3 = \lambda_2 + \Delta\lambda_2$$

и, наконец, четвертое:

$$\Delta\lambda_0 = h_{x_1}\left(\lambda'_0 + \frac{1}{2}\Delta\lambda'_0 - \frac{1}{12}\Delta^2\lambda'_0 + \frac{1}{24}\Delta^3\lambda'_0\right), \quad \lambda_1 = \lambda_0 + \Delta\lambda_0;$$

$$\Delta\lambda_1 = h_{x_1}\left(\lambda'_1 + \frac{1}{2}\Delta\lambda'_1 - \frac{1}{12}\Delta^2\lambda'_0 - \frac{1}{24}\Delta^3\lambda'_0\right), \quad \lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda_1;$$

$$\Delta\lambda_2 = h_{x_1}\left(\lambda'_2 + \frac{1}{2}\Delta\lambda'_2 - \frac{1}{12}\Delta^2\lambda'_1 - \frac{1}{24}\Delta^3\lambda'_0\right), \quad \lambda_3 = \lambda_2 + \Delta\lambda_2.$$

Далее вычисления проводят следующим образом. По элементам наклонной строки определяют:

$$(\Delta\lambda_n)_I = h_{x_1}\left(\lambda'_n + \frac{1}{2}\Delta\lambda'_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\lambda'_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3\lambda'_{n-3}\right);$$

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + (\Delta\lambda_n)_I,$$

а по уравнению (3.X.13) находят λ'_{n+1}. Теперь, зная λ'_{n+1}, можно вычислить конечные разности $\Delta\lambda'_n$, $\Delta^2\lambda'_{n-1}$, $\Delta^3\lambda'_{n-2}$ и уточнить $\Delta\lambda_n$ с использованием ломаной строки:

$$(\Delta\lambda_n)_{II} = h_{x_1}\left(\lambda'_n + \frac{1}{2}\Delta\lambda'_n - \frac{1}{12}\Delta^2\lambda'_{n-1} - \frac{1}{24}\Delta^3\lambda'_{n-2}\right).$$

В бланке численного интегрирования (табл. 3.X.1) приведены два значения λ и $\Delta\lambda$: в числителе — менее точное, найденное с помощью на-

Таблица 3.X.2

$d\bar{V}_{\delta i}/dx_1$, 1/м	$d^2\bar{V}_{\delta i}/dx_1^2$, 1/м²	N_{1i}	N_{2i}	λ_i	$\mu_{\delta i}\times10^6$, $\frac{кГ\cdot сек}{м^2}$	$\rho_{\delta i}\times10^2$, $\frac{кГ\cdot сек^2}{м^4}$	$\tau_{сті}$, кГ/м²	$c_{fxi}\times10^3$	$\mathbf{Re}_{xi}\times10^6$	$c_{fxi}^{\lambda=0}\times10^3$
0,0330	—0,0045	0,25586	0,087065	0,0000	1,53	1,08	∞	∞	0	∞
0,0326	—0,0035	0,28426	0,086175	0,29219	1,52	1,06	5,43	3,20	0,396	0,962
0,0323	—0,0025	0,31465	0,085541	0,57865	1,51	1,05	2,20	1,30	0,786	0,682
0,0321	—0,0015	0,34704	0,085193	0,86205	1,51	1,03	1,83	1,09	1,17	0,558
0,0320	—0,0010	0,36536	0,085121	1,1443	1,50	1,01	1,61	0,973	1,55	0,485
0,0319	—0,0010	0,36817	0,085034	1,4267	1,49	0,992	1,47	0,892	1,92	0,435
0,0318	—0,0015	0,35522	0,084967	1,7075	1,48	0,974	1,36	0,835	2,29	0,398
0,0316	—0,0025	0,32481	0,084636	1,9835	1,47	0,957	1,28	0,791	2,65	0,370
0,0313	—0,0030	0,30850	0,084047	2,2529	1,47	0,940	1,21	0,756	3,00	0,347
0,0310	—0,0035	0,29167	0,083455	2,5154	1,46	0,923	1,16	0,729	3,35	0,328
0,0306	—0,0040	0,27293	0,082611	2,7705	1,45	0,906	1,11	0,705	3,69	0,312
0,0302	—0,0030	0,30330	0,081764	3,0229	1,44	0,889	1,07	0,685	4,02	0,299
0,0300	—0,0015	0,35397	0,081452	3,2896	1,43	0,873	1,04	0,670	4,35	0,287
0,0299	—0,0010	0,37354	0,081434	3,5730	1,43	0,856	1,01	0,656	4,67	0,277
0,0298	—0,0010	0,37635	0,081404	3,8633	1,42	0,840	0,978	0,645	4,99	0,268
0,0297	—0,0010	0,37905	0,081382	4,1586	1,41	0,825	0,954	0,635	5,30	0,260
0,0296	—0,0010	0,38185	0,081377	4,4616	1,40	0,810	0,932	0,627	5,60	0,252
0,0295	—0,0010	0,38475	0,081 375	4,7732	1,39	0,794	0,912	0,619	5,90	0,246
0,0294	—0,0015	0,37069	0,081377	5,0908	1,39	0,779	0,893	0,616	6,19	0,240
0,0292	—0,0020	0,35480	0,081111	5,4061	1,38	0,758	0,874	0,612	6,42	0,235
0,0290	—0,0025	0,33869	0,080854	5,7192	1,37	0,749	0,866	0,608	6,75	0,229

клонной строки, в знаменателе — уточненное с помощью ломаной строки. Например, для четвертой точки

$$(\Delta\lambda_3)_I = 0{,}1\left(2{,}8246 - \frac{1}{2}\,0{,}0131 - \frac{5}{12}\,0{,}0340 - \frac{3}{8}\,0{,}0010\right) = 0{,}28035;$$

$$(\lambda_4)_I = \lambda_3 + (\Delta\lambda_3)_I = 0{,}86205 + 0{,}28035 = 1{,}1424.$$

По этому значению из (3.X.13) найдено $\lambda_4'=2{,}8265$ и подсчитаны соответствующие конечные разности. Уточненное значение конечной разности будет следующим:

$$(\Delta\lambda_3)_{II} = 0{,}1\left(2{,}8246 + \frac{1}{2}\,0{,}0019 - \frac{1}{12}\,0{,}0150 - \frac{1}{24}\,0{,}0490\right) = 0{,}28223,$$

а величина $(\lambda_4)_{II}=0{,}86205+0{,}28223=1{,}1443$.

Таким образом, уточнение величины λ_{n+1} преследует две цели: во-первых, оно уменьшает накопленную ошибку вычислений, а во-вторых, является контрольной операцией, помогающей в известной степени выявлению грубых ошибок.

Теперь можно перейти к определению местного напряжения и соответствующего коэффициента трения:

$$\tau_{ст} = \bar{V}_\delta V_{max}\sqrt{\mu_\delta \rho_\delta V_{max}\frac{d\bar{V}_\delta}{dx_1}\cos\beta}\left(1-\bar{V}_\delta^2\right)^{-\frac{1}{2}\left(n+\frac{k+1}{k-1}\right)}\times$$

$$\times\left(2+\frac{\lambda}{6}\right)\frac{1}{\sqrt{\lambda}};$$

$$c_{fx} = \frac{2\tau_{ст}}{\rho_\delta V_\delta^2} = \frac{2}{\bar{V}_\delta V_{max}} \sqrt{\frac{\mu_\delta}{\rho_\delta} V_{max} \frac{d\bar{V}_\delta}{d\bar{x}_1} \cos\beta \left(1 - \bar{V}_\delta^2\right)^{-\frac{1}{2}\left(n + \frac{k+1}{k-1}\right)}} \times$$

$$\times \left(2 + \frac{\lambda}{6}\right) \frac{1}{\sqrt{\lambda}},$$

где $V_{max} = a_\infty \sqrt{\frac{2}{k-1} + \mathbf{M}_\infty^2} = 295{,}1 \sqrt{\frac{2}{1{,}4-1} + 2^2} = 885$ *м/сек*.

Коэффициент динамической вязкости

$$\mu_{\delta i} = \mu_\infty \left(T_{\delta i}/T_\infty\right)^{0{,}76} = \mu_\infty \left[1{,}8\left(1 - \bar{V}_{\delta i}^2\right)\right]^{0{,}76};$$

например, для $x_1 = 0{,}1$ *м*

$$\mu_{\delta 1} = 1{,}45 \cdot 10^{-6} (1{,}8 \cdot 0{,}593)^{0{,}76} = 1{,}52 \cdot 10^{-6}\ кГ \cdot сек/м^2.$$

Плотность

$$\rho_{\delta i} = \frac{\rho_{\delta i}}{\rho_0'} \rho_0' = \frac{\rho_{\delta i}}{\rho_0'} \cdot \frac{\rho_0'}{\rho_2'} \cdot \frac{\rho_2'}{\rho_\infty} \rho_\infty,$$

где $\rho_{\delta i}/\rho_0' = \left(1 - \bar{V}_\delta^2\right)^{1/(k-1)} = \left(1 - \bar{V}_\delta^2\right)^{2{,}5}$;

$$\rho_2'/\rho_0' = \rho_{\delta 0}/\rho_0' = \left(1 - \bar{V}_{\delta 0}^2\right)^{1/(k-1)} = (0{,}597)^{2{,}5} = 0{,}276;$$

$$\rho_2'/\rho_\infty = 1{,}196; \quad \rho_\infty = 0{,}009062\ кГ \cdot сек^2/м^4.$$

Например, в точке *1*

$$\rho_{\delta 1} = 0{,}593^{2{,}5} \frac{1}{0{,}276} 1{,}196 \cdot 0{,}009062 = 0{,}0106\ кГ \cdot сек^2/м^4.$$

Все результаты расчетов $\mu_{\delta i}$, $\rho_{\delta i}$, а также $\tau_{ст i}$ и c_{fxi} приведены в табл. 3.X.2. В этой таблице помещены также значения c_{fxi}, которые получаются без учета продольного градиента скорости:

$$c_{fxi}^{\lambda=0} = 0{,}646 \left(1 + \frac{k-1}{2} \mathbf{M}_{\delta i}^2\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{Re}_x}},$$

$$\text{где } \mathbf{Re}_x = \frac{V_{\delta i} \rho_{\delta i} x}{\mu_{\delta i}} = V_{max} \frac{\bar{V}_{\delta i} \rho_{\delta i} x}{\mu_{\delta i}}.$$

В частности, при $x = 0{,}1002$ *м*

$$\mathbf{Re}_x = \frac{885 \cdot 0{,}63805 \cdot 0{,}0106 \cdot 0{,}1002}{1{,}52 \cdot 10^{-6}} = 0{,}396 \cdot 10^6;$$

$$c_{fxi}^{\lambda=0} = 0{,}646 \left(1 + \frac{1{,}4-1}{2} 1{,}8528^2\right)^{-0{,}125} \frac{1}{\sqrt{0{,}396 \cdot 10^6}} = 0{,}962 \cdot 10^{-3}.$$

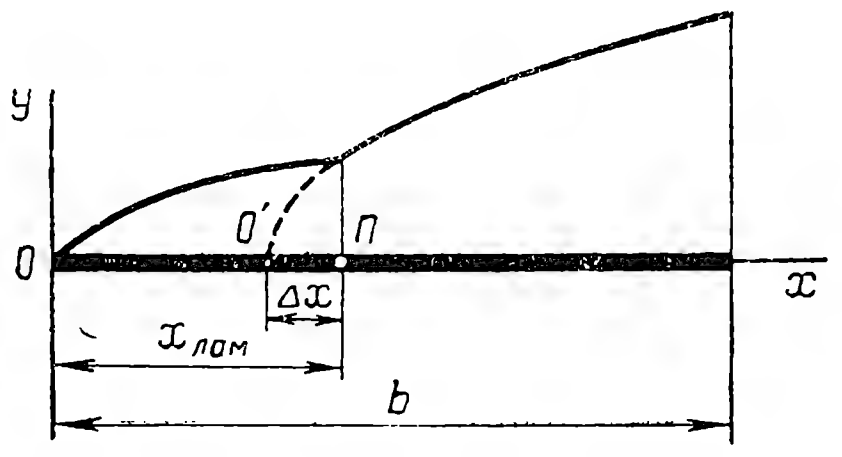


Рис. 3.X.2. Смешанный пограничный слой на плоской пластинке

X.7. По таблицам атмосферы определяем для $H = 10$ *км* параметры воздуха, которые одновременно будут являться параметрами на границе пограничного слоя пластинки (см. задачу X.1). Далее находим число Маха $\mathbf{M}_\infty = \mathbf{M}_\delta = V_\delta/a_\delta = 4000/299{,}4 = 13{,}36$ и определяем протяженность ламинарного участка $x_{лам}$ пограничного слоя (рис. 3.X.2), используя критическое число Рейнольдса:

$$\mathbf{Re}_{кр} = 10^6 = \frac{V_{\delta}\rho_{\delta}x_{лам}}{\mu_{\delta}} = \frac{4000 \cdot 4{,}217 \cdot 10^{-2}\, x_{лам}}{1{,}49 \cdot 10^{-6}};$$

отсюда $x_{лам} = 0{,}0088$ *м*.

Теперь найдем по (3.X.10) определяющую энтальпию. Входящая в (3.X.10) энтальпия восстановления

$$i_r = i_{\delta} + rV_{\delta}^2/2,$$

где $i_{\delta} = c_{p\delta}T_{\delta} = 0{,}24 \cdot 223{,}2 \cdot 9{,}81 \cdot 427 = 0{,}224 \cdot 10^6$ *м²/сек²*, а $r_{лам} = \sqrt{\mathbf{Pr}}$ для ламинарного и $r_т = \sqrt[3]{\mathbf{Pr}}$ для турбулентного течений. Примем число Прандтля $\mathbf{Pr} = 0{,}64$. Тогда для ламинарного потока $r_{лам} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$ и

$$i_r = 0{,}224 \cdot 10^6 + 0{,}8 \cdot 4000^2/2 = 6{,}62 \cdot 10^6 \text{ м}^2/\text{сек}^2,$$

а для турбулентного $r_т = \sqrt[3]{0{,}64} = 0{,}862$ и

$$i_r = 0{,}224 \cdot 10^6 + 0{,}862 \cdot 4000^2/2 = 7{,}12 \cdot 10^6 \text{ м}^2/\text{сек}^2.$$

Для расчета i^* надо знать энтальпию газа при температуре стенки:

$$i_{ст} = c_{p\,ст}\,T_{ст} = 0{,}24 \cdot 300 \cdot 9{,}81 \cdot 427 = 0{,}302 \cdot 10^6 \text{ м}^2/\text{сек}^2.$$

В соответствии с этими данными для ламинарного пограничного слоя

$$i^* = 0{,}5\,(0{,}302 \cdot 10^6 + 0{,}224 \cdot 10^6) + 0{,}22\,(6{,}62 \cdot 10^6 - 0{,}224 \cdot 10^6) = 1{,}67 \cdot 10^6 \text{ м}^2/\text{сек}^2.$$

По таблицам [17; 34], зная $p_{\delta} = 0{,}2701$ *кГ/см²* и $i^* = 1{,}67 \cdot 10^6$ *м²/сек²*, найдем $T^* = 1515$ К, $\mu^*_{ср} = 28{,}97$.

Для турбулентного пограничного слоя

$$i^* = 0{,}5\,(0{,}302 \cdot 10^6 + 0{,}224 \cdot 10^6) + 0{,}22\,(7{,}12 \cdot 10^6 - 0{,}224 \cdot 10^6) = 1{,}78 \cdot 10^6 \text{ м}^2/\text{сек}^2.$$

Из таблиц [17; 34] по этому значению i^* и давлению $p_{\delta} = 0{,}2701$ *кГ/см²* определяем $T^* = 1612$ К, $\mu^*_{ср} = 28{,}97$.

Средний коэффициент трения на ламинарном участке находим из условия

$$\frac{(c_{xf})_{сж}}{(c_{xf})_{нсж}} = \left(\frac{T^*}{T_{\delta}}\right)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\mu^*_{ср}}{\mu_{ср\delta}}\right)^{1/2} = \left(\frac{1515}{223{,}2}\right)^{\frac{0{,}76-1}{2}} \cdot \left(\frac{28{,}97}{28{,}97}\right)^{1/2} = 0{,}787,$$

а на турбулентном —

$$\frac{(c_{xf})_{сж}}{(c_{xf})_{нсж}} = \left(\frac{T^*}{T_{\delta}}\right)^{\frac{n-1}{5}} \cdot \left(\frac{\mu^*_{ср}}{\mu_{ср\delta}}\right)^{4/5} = \left(\frac{1612}{223{,}2}\right)^{\frac{0{,}76-1}{5}} \cdot \left(\frac{28{,}97}{28{,}97}\right)^{4/5} = 0{,}276.$$

Рассмотрим теплопередачу на ламинарном участке пограничного слоя. На этом участке средний коэффициент трения

$$(c_{xf})_{сж} = [(c_{xf})_{сж}/(c_{xf})_{нсж}]\,(c_{xf})_{нсж},$$

где

$$(c_{xf})_{нсж} = \frac{1{,}29}{\sqrt{\mathbf{Re}_{x\ лам}}} = \frac{1{,}29}{\sqrt{\mathbf{Re}_{кр}}} = \frac{1{,}29}{\sqrt{10^6}} = 1{,}29 \cdot 10^{-3},$$

откуда

$$(c_{xf})_{сж} = 0{,}787 \cdot 1{,}29 \cdot 10^{-3} = 1{,}02 \cdot 10^{-3}.$$

Соответствующее среднее число Стантона

$$\mathbf{St} = \frac{(c_{xf})_{сж}}{2}\,\mathbf{Pr}^{-2/3} = \frac{1{,}02 \cdot 10^{-3}}{2}\,0{,}64^{-2/3} = 0{,}687 \cdot 10^{-3},$$

удельный тепловой поток

$$q = \mathrm{St}\,\rho_\delta V_\delta (i_r - i_{ст}) = 0{,}687\cdot 10^{-3}\cdot 4{,}217\cdot 10^{-2}\cdot 9{,}81\times$$

$$\times 4000\,(6{,}62\cdot 10^6 - 0{,}302\cdot 10^6)\,\frac{1}{9{,}81\cdot 427} = 1720\ ккал/(м^2\cdot сек),$$

а полная теплопередача

$$Q_{лам} = qS_{лам} = qx_{лам}\,l = 1720\cdot 0{,}0088\cdot 1 = 15{,}1\ ккал/сек.$$

Рассмотрим турбулентный участок. Определим условную длину пластинки, на которой всюду пограничный слой турбулентный. Исходим из уравнения

$$4{,}64\cdot x_{лам}\,(\mathrm{Re}_{кр})^{-1/2}\cdot\left(\frac{\delta_{сж}}{\delta_{нсж}}\right)_{лам} = 0{,}37\Delta x\,\mathrm{Re}_{\Delta x}^{-1/5}\left(\frac{\delta_{сж}}{\delta_{нсж}}\right)_{т}$$

или

$$4{,}64\cdot 0{,}0088(10^6)^{-1/2}\,5{,}34 = 0{,}37\Delta x\left(\frac{4000\Delta x}{3{,}52\cdot 10^{-5}}\right)^{-1/5} 2{,}00.$$

Здесь:

$$\left(\frac{\delta_{сж}}{\delta_{нсж}}\right)_{лам} = \left(\frac{T^*}{T_б}\right)^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{\mu_{срб}}{\mu^*_{ср}}\right)^{1/2} = \left(\frac{1515}{223{,}2}\right)^{\frac{0{,}76+1}{2}}\cdot\left(\frac{28{,}97}{28{,}97}\right)^{1/2} = 5{,}34;$$

$$\left(\frac{\delta_{сж}}{\delta_{нсж}}\right)_{т} = \left(\frac{T^*}{T_\delta}\right)^{\frac{n+1}{5}}\cdot\left(\frac{\mu_{срб}}{\mu^*_{ср}}\right)^{1/5} = \left(\frac{1612}{223{,}2}\right)^{\frac{0{,}76+1}{5}}\cdot\left(\frac{28{,}97}{28{,}97}\right)^{1/5} = 2{,}00.$$

Таким образом, $\Delta x \approx 0{,}004$ *м*.

Теперь можно определить средний коэффициент трения:

$$c_{xf} = c_{xf}^{т1}\frac{S_{т1}}{S_{пл.т}} - c_{xf}^{т2}\frac{S_{т2}}{S_{пл.т}},$$

где

$$c_{xf}^{т1} = (c_{xf})_{сж}^{т1} = \left[\frac{(c_{xf})_{сж}}{(c_{xf})_{нсж}}\right](c_{xf})_{нсж};$$

$$(c_{xf})_{нсж} = \frac{0{,}075}{(\mathrm{Re}_{b1})^{1/5}}.$$

Так как $b_1 = b - x_{лам} + \Delta x = 5 - 0{,}0088 + 0{,}004 = 4{,}995$ *м*, то

$$\mathrm{Re}_{b1} = \frac{V_\delta\, b_1}{\nu_\delta} = \frac{4000\cdot 4{,}995}{3{,}52\cdot 10^{-5}} = 5{,}67\cdot 10^8,$$

поэтому

$$(c_{xf})_{нсж} = 0{,}075/(5{,}67\cdot 10^8)^{1/5} = 1{,}33\cdot 10^{-3}.$$

Таким образом,

$$c_{xf}^{т1} = 0{,}276\cdot 1{,}33\cdot 10^{-3} = 0{,}368\cdot 10^{-3}.$$

Далее находим

$$c_{xf}^{т2} = (c_{xf})_{сж}^{т2} = \left[\frac{(c_{xf})_{сж}}{(c_{xf})_{нсж}}\right](c_{xf})_{нсж},$$

где

$$(c_{xf})_{нсж} = \frac{0{,}075}{(\mathrm{Re}_{\Delta x})^{1/5}} = \frac{0{,}075}{(V_\delta\,\Delta x/\nu_\delta)^{1/5}} = \frac{0{,}075}{[4000\cdot 0{,}004/(3{,}52\cdot 10^{-5})]^{1/5}} = 5{,}54\cdot 10^{-3}.$$

Таким образом,

$$c_{xf}^{т2} = 0{,}276\cdot 5{,}54\cdot 10^{-3} = 1{,}53\cdot 10^{-3}.$$

В соответствии с этими данными

$$c_{xf} = c_{xf}^{т1}\frac{b - x_{лам} + \Delta x}{b - x_{лам}} - c_{xf}^{т2}\frac{\Delta x}{b - x_{лам}} =$$

$$= 0{,}368\cdot 10^{-3}\frac{5 - 0{,}0088 + 0{,}004}{5 - 0{,}0088} - 1{,}53\cdot 10^{-3}\frac{0{,}004}{5 - 0{,}0088} = 0{,}367\cdot 10^{-3}.$$

Среднее число Стантона

$$\mathbf{St} = \frac{c_{xf}}{2}\mathbf{Pr}^{-2/3} = \frac{0{,}367\cdot 10^{-3}}{2}0{,}64^{-2/3} = 0{,}248\cdot 10^{-3},$$

удельный тепловой поток

$$q = \mathbf{St}\,\rho_\delta V_\delta (i_r - i_{ст}) = 0{,}248\cdot 10^{-3}\cdot 4{,}217\cdot 10^{-2}\times$$

$$\times\, 4000\,(7{,}12\cdot 10^6 - 0{,}302\cdot 10^6)\cdot\frac{1}{427} = 666\ ккал/(м^2\cdot сек),$$

а соответствующая суммарная теплопередача

$$Q_т = qS_{пл.т} = q\,(b - x_{лам})\,l = 666\,(5 - 0{,}0088)\,1 = 3320\ ккал/сек.$$

Полный тепловой поток к одной стороне пластинки

$$Q = Q_{лам} + Q_т = 15{,}1 + 3320 = 3335\ ккал/сек.$$

X.8. При помощи таблиц атмосферы [31; 50] определяем параметры воздуха на высоте $H = 10$ *км* (см. задачу X.1). Заданной высоте и скорости полета соответствует число Маха $\mathbf{M}_\infty = V_\infty/a_\infty = 3500/299{,}4 \approx 11{,}7$.

По таблицам [23] находим параметры невязкого потока на поверхности конуса, которые принимаем за параметры на внешней границе пограничного слоя: $V_\delta = V_{rк} = 2527$ *м/сек*; $i_\delta = i_к = 3{,}16\cdot 10^6$ *м²/сек²*; $p_\delta = p_к = 15$ *кГ/см²*; $\rho_\delta = \rho_к = 0{,}33$ *кГ·сек²/м⁴*; $T_\delta = T_к = 2630$ K; $S_\delta = S_к = 8960$ *м²/(сек²·град)*; $\mu_{ср\delta} = 28{,}91$; $a_\delta = 968$ *м/сек*.

По скорости $V_\delta = 2527$ *м/сек* и скорости звука $a_\delta = 968$ *м/сек* определяем местное число Маха $\mathbf{M}_\delta = V_\delta/a_\delta = 2527/968 = 2{,}61$.

Далее вычисляем определяющую энтальпию по формуле (3.X.10). Входящая в эту формулу энтальпия газа при температуре стенки $T_{ст} = 600$ K равна $i_{ст} = c_{рст}T_{ст} = 0{,}24\cdot 600\cdot 9{,}81\cdot 427 = 0{,}604\cdot 10^6$ *м²/сек²*.

Рассмотрим ламинарный пограничный слой. Полагая число Прандтля $\mathbf{Pr} = 0{,}64$, найдем $r_{лам} = \sqrt{\mathbf{Pr}} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$ и получим:

$$i_r = i_\delta + r_{лам}V_\delta^2/2 = 3{,}16\cdot 10^6 + 0{,}8\cdot 2527^2/2 = 5{,}71\cdot 10^6\ м^2/сек^2;$$

$$i^* = 0{,}5\,(0{,}604\cdot 10^6 + 3{,}16\cdot 10^6) + 0{,}22\,(5{,}71\cdot 10^6 - 3{,}16\cdot 10^6) =$$

$$= 2{,}44\cdot 10^6\ м^2/сек^2.$$

По этому значению i^* и давлению $p_\delta = 15$ *кГ/см²* из таблиц [17; 34] и графиков [17; 33] находим $T^* = 2150$K, $\mu^*_{ср} = 28{,}96$.

Для турбулентного слоя $r_т = \sqrt[3]{\mathbf{Pr}} = \sqrt[3]{0{,}64} = 0{,}862$, следовательно,

$$i_r = i_\delta + r_т V_\delta^2/2 = 3{,}16\cdot 10^6 + 0{,}862\frac{2527^2}{2} = 5{,}91\cdot 10^6\ м^2/сек^2;$$

$$i^* = 0{,}5\,(0{,}604\cdot 10^6 + 3{,}16\cdot 10^6) + 0{,}22\,(5{,}91\cdot 10^6 - 3{,}16\cdot 10^6) =$$

$$= 2{,}48\cdot 10^6\ м^2/сек^2.$$

Из таблиц [17] и графиков [34] по i^* и $p_\delta = 15$ *кГ/см²* находим $T^* = 2155$ K, $\mu^*_{ср} = 28{,}96$.

Произведем расчет средних коэффициентов трения для пластинки по параметрам свободного потока на конусе.

Отношение коэффициентов трения для ламинарного пограничного слоя

$$\frac{(c_{xf})_{\text{сж}}}{(c_{xf})_{\text{нсж}}} = \left(\frac{T^*}{T_\delta}\right)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\mu^*_{\text{ср}}}{\mu_{\text{ср}\delta}}\right)^{1/2} = \left(\frac{2150}{2630}\right)^{\frac{0{,}76-1}{2}} \left(\frac{28{,}96}{28{,}91}\right)^{1/2} = 1{,}04,$$

а для турбулентного —

$$\frac{(c_{xf})_{\text{сж}}}{(c_{xf})_{\text{нсж}}} = \left(\frac{T^*}{T_\delta}\right)^{\frac{n-4}{5}} \left(\frac{\mu^*_{\text{ср}}}{\mu_{\text{ср}\,\delta}}\right)^{4/5} = \left(\frac{2155}{2630}\right)^{\frac{0{,}76-4}{5}} \left(\frac{28{,}96}{28{,}91}\right)^{4/5} = 1{,}14.$$

Определим теперь протяженность ламинарного пограничного слоя. На основании экспериментальных данных установлена следующая зависимость критического числа Рейнольдса от температурного фактора $\overline{T}_{\text{ст}} = T_{\text{ст}}/T_r$:

$$\mathbf{Re}_{\text{кр}}/(\mathbf{Re}_{\text{кр}})_{\overline{T}_{\text{ст}}=1} = (\overline{T}_{\text{ст}})^{-\frac{2}{3}}, \qquad (3.X.14)$$

где $(\mathbf{Re}_{\text{кр}})_{\overline{T}_{\text{ст}}=1}$ — критическое число Рейнольдса при $\overline{T}_{\text{ст}} = T_{\text{ст}}/T_r = 1$.

По значению $\mathbf{M}_\delta = 2{,}61$ из графика [20] находим $(\mathbf{Re}_{\text{кр}})_{\overline{T}_{\text{ст}}=1} \approx 4 \cdot 10^6$ и вычисляем величину $\overline{T}_{\text{ст}} = T_{\text{ст}}/T_r = 0{,}158$ (где температура $T_r = 3805$ K определена из таблиц [34]) по значению $i_r = 5{,}71 \cdot 10^6$ *м*^{2}/*сек*^{2} и $p_\delta = 15$ *кГ*/*см*^{2}). Следовательно, в соответствии с (3.X.14)

$$\mathbf{Re}_{\text{кр}} = (\mathbf{Re}_{\text{кр}})_{\overline{T}_{\text{ст}}=1} (\overline{T}_{\text{ст}})^{-2/3} = 4{,}0 \cdot 10^6 (0{,}158)^{-2/3} \approx 13{,}7 \cdot 10^6.$$

Протяженность ламинарного участка находим из уравнения

$$\mathbf{Re}_{\text{кр}} = V_\delta \rho_\delta x_{\text{лам}}/\mu_\delta.$$

Здесь коэффициент динамической вязкости $\mu_\delta = 9{,}35 \cdot 10^{-6}$ *кГ* · *сек*/*м*^{2}. Учитывая также, что $\rho_\delta = 0{,}33$ *кГ* · *сек*^{2}/*м*^{4} и $V_\delta = 2527$ *м*/*сек*, получим

$$13{,}7 \cdot 10^6 = 2527 \cdot 0{,}33 \cdot x_{\text{лам}}/(9{,}35 \cdot 10^{-5}),$$

откуда $x_{\text{лам}} = 0{,}154$ *м*.

Средний коэффициент трения на ламинарном участке

$$c_{xf\text{к}} = \sqrt{3}\, c_{xf\text{пл}} = \sqrt{3}\, [(c_{xf})_{\text{сж}}/(c_{xf})_{\text{нсж}}]\, (c_{xf})_{\text{нсж}},$$

где

$$(c_{xf})_{\text{нсж}} = 1{,}29/\sqrt{\mathbf{Re}_{\text{кр}}} = 1{,}29/\sqrt{13{,}7 \cdot 10^6} = 0{,}349 \cdot 10^{-3},$$

поэтому

$$c_{xf\text{к}} = \sqrt{3}\ \ 1{,}04 \cdot 0{,}349 \cdot 10^{-3} = 0{,}626 \cdot 10^{-3}.$$

Среднее число Стантона

$$\mathbf{St} = \frac{c_{xf\text{к}}}{2} \mathbf{Pr}^{-2/3} = \frac{0{,}626 \cdot 10^{-3}}{2}\, 0{,}64^{-2/3} = 0{,}422 \cdot 10^{-3},$$

соответствующий удельный тепловой поток

$$q = \mathbf{St}\, \rho_\delta V_\delta (i_r - i_{\text{ст}}) = 0{,}422 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}33 \cdot 2527 \times$$

$$\times (5{,}71 \cdot 10^6 - 0{,}604 \cdot 10^6)\, \frac{1}{427} = 4{,}21 \cdot 10^3\ \textit{ккал}/(\textit{м}^2 \cdot \textit{сек}).$$

Полная теплопередача на ламинарном участке

$$Q_{\text{лам}} = qS_{\text{лам}} = q\pi r_{\text{лам}} x_{\text{лам}} = 4{,}21 \cdot 10^3\, \pi x^2_{\text{лам}} \sin 40^\circ =$$

$$= 4{,}21 \cdot 10^3 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}154^2 \cdot 0{,}643 = 0{,}202 \cdot 10^3\ \textit{ккал}/\textit{сек}.$$

Определим координату точки O' на конусе, являющейся началом турбулентного пограничного слоя (см. рис. 3.X.1). Напишем уравнение

$$0{,}578 \cdot 4{,}64 \cdot x_{\text{лам}}\, \mathbf{Re}_{\text{кр}}^{-1/2} \left(\frac{\delta_{\text{сж}}}{\delta_{\text{нсж}}}\right)_{\text{лам}} = 0{,}523 \cdot 0{,}37\, \Delta x\, \mathbf{Re}_{\Delta x}^{-1/5} \left(\frac{\delta_{\text{сж}}}{\delta_{\text{нсж}}}\right)_{\text{т}}.$$

Здесь:

$$\mathbf{Re}_{\Delta x} = V_\delta\, \rho_\delta\, \Delta x/\mu_\delta = 2527 \cdot 0{,}33 \cdot \Delta x/(9{,}35 \cdot 10^{-6}) = 0{,}892 \cdot 10^8\, \Delta x;$$

$(\delta_{\text{сж}}/\delta_{\text{нсж}})_{\text{лам}}$; $(\delta_{\text{сж}}/\delta_{\text{нсж}})_{\text{т}}$ — отношения местных толщин соответственно для ламинарного и турбулентного пограничных слоев:

$$\left(\frac{\delta_{\text{сж}}}{\delta_{\text{нсж}}}\right)_{\text{лам}} = \left(\frac{T^*}{T_\delta}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \left(\frac{\mu_{\text{ср}\delta}}{\mu^*_{\text{ср}}}\right)^{1/2} = \left(\frac{2150}{2630}\right)^{\frac{0{,}76+1}{2}} \cdot \left(\frac{28{,}91}{28{,}96}\right)^{1/2} = 0{,}838;$$

$$\left(\frac{\delta_{\text{сж}}}{\delta_{\text{нсж}}}\right)_{\text{т}} = \left(\frac{T^*}{T_\delta}\right)^{\frac{n+1}{5}} \cdot \left(\frac{\mu_{\text{ср}\delta}}{\mu^*_{\text{ср}}}\right)^{1/5} = \left(\frac{2155}{2630}\right)^{\frac{0{,}76+1}{5}} \cdot \left(\frac{28{,}91}{28{,}96}\right)^{1/5} = 0{,}933.$$

Таким образом, $\Delta x = 0{,}76 \cdot 10^{-2}$ *м*.

Средний коэффициент трения на турбулентном участке

$$c_{xf\text{к}}^{\text{т1}} = 1{,}17\, c_{xf\text{пл}} = 1{,}17 \left[\frac{(c_{xf})_{\text{сж}}}{(c_{xf})_{\text{нсж}}}\right] (c_{xf})_{\text{нсж}},$$

где $(c_{xf})_{\text{нсж}} = 0{,}075/(\mathbf{Re}_{b\text{т}})^{1/5}$.

Согласно рис. 3.X.1

$$b_{\text{т}} = \Delta x + (x_{\text{к}} - x_{\text{лам}}).$$

Внося сюда $x_{\text{к}} = h/\cos \beta_{\text{к}} = 5/\cos 40° = 6{,}53$ *м*, найдем

$$b_{\text{т}} = 0{,}0076 + (6{,}53 - 0{,}154) \approx 6{,}38\ м.$$

В соответствии с этим

$$\mathbf{Re}_{b\text{т}} = V_\delta\, \rho_\delta\, b_{\text{т}}/\mu_\delta = 2527 \cdot 0{,}33 \cdot 6{,}38/(9{,}35 \cdot 10^{-6}) = 5{,}68 \cdot 10^8;$$

тогда

$$(c_{xf})_{\text{нсж}} = 0{,}075/(5{,}68 \cdot 10^8)^{1/5} = 1{,}33 \cdot 10^{-3}.$$

Поэтому

$$c_{xf\text{к}}^{\text{т1}} = 1{,}17 \cdot 1{,}14 \cdot 1{,}33 \cdot 10^{-3} = 1{,}78 \cdot 10^{-3}.$$

Средний коэффициент турбулентного трения на участке Δx

$$c_{xf\text{к}}^{\text{т2}} = 1{,}17 \left[\frac{(c_{xf})_{\text{сж}}}{(c_{xf})_{\text{нсж}}}\right] (c_{xf})_{\text{нсж}},$$

где $(c_{xf})_{\text{нсж}} = 0{,}075/(\mathbf{Re}_{\Delta x})^{1/5}$.

Так как

$$\mathbf{Re}_{\Delta x} = V_\delta\, \rho_\delta\, \Delta x/\mu_\delta = 2527 \cdot 0{,}33 \cdot 0{,}0076/(9{,}35 \cdot 10^{-6}) = 0{,}676 \cdot 10^6,$$

то

$$c_{xf\text{к}}^{\text{т2}} = 1{,}17 \cdot 1{,}14\, \frac{0{,}075}{(0{,}676 \cdot 10^6)^{1/5}} = 6{,}83 \cdot 10^{-3}.$$

Средний коэффициент трения на турбулентном участке

$$c_{f\text{к}} = c_{xf\text{к}}^{\text{т1}}\, \frac{S_{\text{т1}}}{S_{\text{б.т}}} - c_{xf\text{к}}^{\text{т2}}\, \frac{S_{\text{т2}}}{S_{\text{б.т}}},$$

где $S_{\text{т1}} = \pi \left(r_{\text{мид}}\, x_{\text{к}} - r'_{\text{лам}}\, x'_{\text{лам}}\right) = \pi \sin \beta_{\text{к}} \left(x_{\text{к}}^2 - x'^2_{\text{лам}}\right)$.

Так как $x_{\text{к}} = h/\cos\beta_{\text{к}} = 5/\cos 40° = 6{,}53$ *м* и $x'_{\text{лам}} = x_{\text{лам}} - \Delta x = 0{,}154 - 0{,}0076 = 0{,}146$ *м*, то

$$S_{\text{т1}} = \pi \sin 40° (6{,}53^2 - 0{,}146^2) = 27{,}36\, \pi\ м^2.$$

Далее находим

$$S_{т2} = \pi \sin \beta_к \left(x^2_{лам} - x'^2_{лам}\right) = \pi \sin 40° \left(0{,}154^2 - 0{,}146\right)^2 = 0{,}0015\,\pi\ м^2.$$

Боковая поверхность

$$S_{б.т} \approx S_б = \pi r_{мид}\, x_к = \pi \sin \beta_к\, x^2_к = \pi \sin 40° \cdot 6{,}53^2 = 27{,}38\,\pi\ м^2.$$

Следовательно,

$$c_{xfк} = 1{,}78 \cdot 10^{-3}\, \frac{27{,}36\pi}{27{,}38\pi} - 6{,}83 \cdot 10^{-3}\, \frac{0{,}0015\pi}{27{,}38\pi} = 1{,}77 \cdot 10^{-3}.$$

Соответствующее число Стантона

$$\mathbf{St} = \frac{c_{xfк}}{2}\, \mathbf{Pr}^{-2/3} = \frac{1{,}77 \cdot 10^{-3}}{2}\, 0{,}64^{-2/3} = 1{,}19 \cdot 10^{-3}.$$

Удельный тепловой поток

$$q = \mathbf{St}\, \rho_\delta V_\delta \left(i_r - i_{ст}\right) = 1{,}19 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}33 \cdot 2527 \left(5{,}91 \cdot 10^6 - 0{,}604 \cdot 10^6\right) \frac{1}{427} =$$

$$= 12{,}4 \cdot 10^3\ ккал/(м^2 \cdot сек).$$

Полная теплопередача на турбулентном участке

$$Q_т = q\left(S_{т1} - S_{т2}\right) = 12{,}4 \cdot 10^3 \cdot 27{,}36\pi = 1{,}06 \cdot 10^6\ ккал/сек.$$

Суммарный тепловой поток к конусу

$$Q = Q_{лам} + Q_т = 0{,}202 \cdot 10^3 + 1{,}06 \cdot 10^6 \approx 1{,}06 \cdot 10^6\ ккал/сек.$$

X.9. По таблицам стандартной атмосферы определяем параметры воздуха на высоте $H = 20$ *км* (см. задачу X.3), вычисляем число $\mathbf{M}_\infty$ и энтальпию i_∞:

$$\mathbf{M}_\infty = V_\infty / a_\infty = 4000/295{,}1 = 13{,}55;$$

$$i_\infty = c_{p\infty} T_\infty = 0{,}24 \cdot 216{,}7 \cdot 9{,}81 \cdot 427 = 0{,}218 \cdot 10^6\ м^2/сек^2.$$

Далее рассчитываем параметры воздуха непосредственно за прямой частью ударной волны с учетом диссоциации. Для этого принимаем в первом приближении отношение скоростей за скачком уплотнения и перед ним $V_2/V_\infty = 0{,}15$ (это отношение несколько меньше $V_2/V_\infty = 0{,}17$ за прямым скачком уплотнения без учета физико-химических превращений воздуха). По этому значению V_2/V_∞ определяем давление за ударной волной:

$$p_2/p_\infty = 1 + k_\infty\, \mathbf{M}^2_\infty \left(1 - V_2/V_\infty\right) = 1 + 1{,}4 \cdot 13{,}55^2 \left(1 - 0{,}15\right) = 220.$$

Следовательно, $p_2 = 220\ p_\infty = 220 \cdot 0{,}05636 \approx 12{,}4\ кГ/см^2$.

Энтальпия за скачком уплотнения

$$i_2 = i_\infty + \frac{V^2_\infty}{2}\left[1 - \left(\frac{V_2}{V_\infty}\right)^2\right] = 0{,}218 \cdot 10^6 + \frac{4000^2}{2}\left(1 - 0{,}15^2\right) =$$

$$= 8{,}02 \cdot 10^6\ м^2/сек^2.$$

По значениям $p_2 = 12{,}4\ кГ/см^2$ и энтальпии $i_2 = 8{,}02 \cdot 10^6\ м^2/сек^2$ из графиков [17] и таблиц [34] определяем температуру за ударной волной $T_2 = 4525$ К и средний молекулярный вес воздуха $\mu_{ср2} = 25{,}73$. Затем можно определить новое значение скорости:

$$\frac{V_2}{V_\infty} = \frac{\mu_{ср\infty}}{\mu_{ср2}} \cdot \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{p_\infty}{p_2} = \frac{28{,}97}{25{,}73} \cdot \frac{4525}{216{,}7} \cdot \frac{1}{220} = 0{,}107$$

и найти соответствующие другие параметры.

Удовлетворительные результаты получаются в третьем приближении: $p_2=13{,}0\ кГ/см^2$; $\rho_2=0{,}0875\ кГ\cdot сек^2/м^4$; $T_2=4585$ K; $\mu_{ср2}=25{,}62$;

$$i_2=8{,}13\cdot10^6\ м^2/сек^2;$$

$$S_2=10{,}5\cdot10^3\ м^2/(сек^2\cdot град);\quad V_2=0{,}103V_\infty=412\ м/сек;$$

$$a_2=1344\ м/сек;\quad \mu_2=14{,}3\cdot10^{-6}\ кГ\cdot сек/м^2.$$

Теперь найдем параметры в точке полного торможения сферического носка (точка O на рис. 2.X.3). По значениям $S_2'=10{,}5\cdot10^3\ м^2/(сек^2\times\times град)$ и энтальпии

$$i_0=i_\infty+\frac{V_\infty^2}{2}=0{,}218\cdot10^6+4000^2/2=8{,}22\cdot10^6\ м^2/сек^2$$

из таблиц [17] или графиков [34] находим $p_0'=15\ кГ/см^2$, $T_0'=4620$ K, $\rho_0'=0{,}1\ кГ\cdot сек^2/м^4$. Затем подсчитываем коэффициент динамической вязкости:

$$\mu_0'=\mu_\infty\left(\frac{T_0'}{T_\infty}\right)^{0{,}76}=1{,}45\cdot10^{-6}\left(\frac{4620}{216{,}7}\right)^{0{,}76}=14{,}4\cdot10^{-6}\ кГ\cdot сек/м^2.$$

Градиент скорости в точке торможения

$$\tilde{\lambda}=\left(\frac{dV_x}{dx}\right)_{x=0}=\frac{1}{R_т}\sqrt{\frac{2\left(p_0'-p_\infty\right)}{\rho_0'}}=\frac{1}{1{,}5}\sqrt{\frac{2\,(15-0{,}05636)\,10^4}{0{,}1}}=$$

$$=1153\,\frac{1}{сек}.$$

Удельный тепловой поток в этой точке

$$q_0=0{,}5g\,\mathbf{Pr}^{-2/3}\sqrt{2\rho_0'\mu_0'\tilde{\lambda}}\,(i_r-i_{ст}),$$

где i_r и $i_{ст}$ имеют размерность $ккал/кГ$. Здесь $i_{ст}=c_{pст}T_{ст}$. В свою очередь

$$c_{p\,ст}=c_{p\infty}\left(T_{ст}/T_\infty\right)^{0{,}1}=0{,}24\,(500/216{,}7)^{0{,}1}=0{,}261\ ккал/(кГ\cdot град),$$

поэтому $i_{ст}=0{,}261\cdot500\cdot9{,}81\cdot427=0{,}547\cdot10^6\ м^2/сек$.

Энтальпия восстановления будет такой, как энтальпия торможения $i_r=i_0=8{,}22\cdot10^6\ м^2/сек^2$.

Принимая число $\mathbf{Pr}=0{,}64$, найдем

$$q_0=0{,}5\cdot9{,}81\,(0{,}64)^{-2/3}\sqrt{2\cdot0{,}1\cdot14{,}4\cdot10^{-6}\cdot1153}\,(8{,}22\cdot10^6-$$

$$-0{,}547\cdot10^6)\,\frac{1}{9{,}81\cdot427}=697\,\frac{ккал}{м^2\cdot сек}.$$

В некоторой точке сферического носка с полярным углом φ (см. рис. 2.X.3) удельный тепловой поток

$$q_x=q_0\,(q_x/q_0),$$

где отношение

$$q_x/q_0=2\varphi\sin\varphi\left[\cos^2\varphi+\left(p_\infty/p_0'\right)\sin^2\varphi\right]D^{-1/2}(\varphi).$$

Таблица 3.X.3

№ точек (n)	φ, рад	$(q_x/q_0)_n$	$f_n = \left(\frac{q_x}{q_0}\right)_n \times \sin\varphi_n$	Δf_n	$\Delta^2 f_n$	$\Delta^3 f_n$	ΔJ_n	J_n^{φ}
0	0	1	0	0,0867	—0,0033	—0,0040	0,00379	—
1	0,0873	0,9940	0,0867	0,0834	—0,0073	—0,0025	0,0112	0,00379
2	0,1746	0,9798	0,1701	0,0761	—0,0098	—0,0028	0,0182	0,0150
3	0,2619	0,9513	0,2462	0,0663	—0,0126	—0,0021	0,0245	0,0333
4	0,3492	0,9137	0,3125	0,0537	—0,0147	—0,0016	0,0297	0,0577
5	0,4365	0,8666	0,3662	0,0390	—0,0163	—0,0012	0,0338	0,0875
6	0,5238	0,8103	0,4052	0,0227	—0,0175	0,0010	0,0365	0,121
7	0,6111	0,7457	0,4279	0,0052	—0,0165	0,0001	0,0377	0,158
8	0,6984	0,6739	0,4331	—0,0113	—0,0164	—	0,0374	0,196
9	0,7857	0,5965	0,4218	—0,0277	—	—	0,0357	0,233
10	0,8730	0,5145	0,3941	—	—	—	—	0,269

Функция

$$D(\varphi) = \left(1 - \frac{p_\infty}{p_0'}\right)(4\varphi\cos\varphi - \sin\varphi)\sin^3\varphi + \left(3\,\frac{p_\infty}{p_0'} + 1\right)(\varphi^2 + \sin^2\varphi - \varphi\sin 2\varphi). \qquad (3.X.15)$$

Здесь с хорошим приближением $p_\infty/p_0' = 1/(k\mathbf{M}_\infty^2)$ и при $\mathbf{M}_\infty = 13{,}55$ этим отношением можно пренебречь. Тогда

$$D(\varphi) = (4\varphi\cos\varphi - \sin\varphi)\sin^3\varphi + \varphi^2 + \sin^2\varphi - \varphi\sin 2\varphi.$$

Примем, в частности, $\varphi = 50°$ (конец сферического участка):

$$D(50°) = \left(\frac{4\cdot 50°}{57{,}3}\cos 50° - \sin 50°\right)\sin^3 50° + \left(\frac{50°}{57{,}3}\right)^2 + \sin^2 50° - \frac{50°}{57{,}3}\sin(2\cdot 50°) = 1{,}15;$$

$$2\varphi\sin\varphi\left(\cos^2\varphi + \frac{p_\infty}{p_0'}\sin^2\varphi\right) \approx 2\varphi\sin\varphi\cos^2\varphi = 2\,\frac{50°}{57{,}3}\sin 50°\cos^2 50° = 0{,}552.$$

В соответствии с этим

$$q_{50}/q_0 = 0{,}552/\sqrt{1{,}15} = 0{,}514,$$

откуда

$$q_{50} = q_0\cdot 0{,}514 = 697\cdot 0{,}514 = 359\ \textit{ккал}/(\textit{м}^2\cdot\textit{сек}).$$

Суммарный тепловой поток к сферическому носку

$$Q_{сф} = 2\pi R_т^2 q_0 \int_0^{\varphi} (q_x/q_0)\sin\varphi\, d\varphi. \qquad (3.X.16)$$

Интегрирование (3.X.16) проводится численно с использованием метода конечных разностей (табл. 3.X.3).

При постоянном шаге аргумента $\varphi = 5°$ (0,0873 *рад*) подсчитываются соответствующие значения отношений q_x/q_0 и подынтегральной функции $f = (q_x/q_0)\sin\varphi$. Конечные разности определяются из условий

$$\Delta f_n = f_{n+1} - f_n; \quad \Delta^2 f_n = \Delta f_{n+1} - \Delta f_n; \quad \Delta^3 f_n = \Delta^2 f_{n+1} - \Delta^2 f_n,$$

а величина $J^{\varphi} = \int_0^{\varphi} (q_x/q_0)\sin\varphi \cdot d\varphi$ представляется в следующем виде:

$$J^{\varphi} = \int_0^{h_\varphi} (q_x/q_0)\sin\varphi\cdot d\varphi + \int_{h_\varphi}^{2h_\varphi} (q_x/q_0)\sin\varphi\cdot d\varphi + \cdots + \int_{(n-1)h_\varphi}^{\varphi} (q_x/q_0)\sin\varphi\cdot d\varphi.$$

При этом значение интеграла ΔJ за шаг изменения аргумента вычисляется по формулам горизонтальной и ломаной строк:

для горизонтальной строки последовательных элементов

$$\Delta J_n = h_\varphi\left(f_n + \frac{1}{2}\Delta f_n - \frac{1}{12}\Delta^2 f_n + \frac{1}{24}\Delta^3 f_n\right);$$

для ломаной строки

$$\Delta J_n = h_\varphi\left(f_n + \frac{1}{2}\Delta f_n - \frac{1}{12}\Delta^2 f_{n-1} - \frac{1}{24}\Delta^3 f_{n-2}\right).$$

Например,

$$\Delta J_0 = \int_0^{0,0873} (q_x/q_0)\sin\varphi d\varphi = 0{,}0873\left(0 + \frac{1}{2}0{,}0867 - \frac{1}{12}0{,}0033 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{24}0{,}0040\right) = 0{,}00379.$$

Таким образом, суммарный тепловой поток к сферическому носку в соответствии с (3.X.16)

$$Q_{сф} = 2\cdot 3{,}14\cdot 1{,}5^2\cdot 697\cdot 0{,}269 = 2640 \ \textit{ккал/сек}.$$

Произведем расчет теплопередачи на конической поверхности. В некоторой точке с произвольной координатой x (см. рис. 2.X.3) отношение удельных тепловых потоков

$$\frac{q_x}{q_0} = \frac{2\left(\cos^2\varphi_к + \frac{p_\infty'}{p_0}\sin^2\varphi_к\right)\varphi_к\cos\varphi_к\cdot\bar{x}_к}{\sqrt{D(\varphi_к) + G(\bar{x}_к)}},$$

где $\bar{x}_к = x_к/R_т$; $G(\bar{x}_к) = \frac{16}{3}\left(\cos^2\varphi_к + \frac{p_\infty'}{p_0}\sin^2\varphi_к\right)(\bar{x}_к^3 - \operatorname{tg}^3\varphi_к)\varphi_к\cos^2\varphi_к$.

Функция $D(\varphi_к)$ находится по (3.X.15) для $\varphi = \varphi_к = 50°$. Кроме того, в нашем случае $M_\infty \gg 1$, т. е. можем написать

$$G(\bar{x}_к) = \frac{16}{3}\cos^2\varphi_к\,(\bar{x}_к^3 - \operatorname{tg}^3\varphi_к)\,\varphi_к\cos^2\varphi_к.$$

Полный тепловой поток к боковой поверхности конуса

$$Q_к = 2\pi R_т^2\sin\beta_к\, q_0\int_{\bar{x}_{к1}}^{\bar{x}_{к2}}\left(\frac{q_x}{q_0}\right)\bar{x}_к\cdot d\bar{x}_к. \qquad (3.X.17)$$

Интеграл в (3.X.17) может быть представлен в следующем виде:

$$\int_{\bar{x}_{к1}}^{\bar{x}_{к2}} \left(\frac{q_x}{q_0}\right) \bar{x}_к \cdot d\bar{x}_к = \int_{\bar{x}_{к1}}^{\bar{x}_{к2}} \frac{A\bar{x}_к}{\sqrt{B + C\bar{x}_к^3}}\, \bar{x}_к d\bar{x}_к, \qquad (3.X.18)$$

где

$$A = 2\varphi_к \cos^3 \varphi_к = 2\,\frac{50°}{57,3}\, 0{,}643^3 = 0{,}463;$$

$$B = D(\varphi_к) - \frac{16}{3}\,\varphi_к \cos^4 \varphi_к \operatorname{tg}^3 \varphi_к = D(\varphi_к) - \frac{16}{3}\,\varphi_к \sin^3 \varphi_к \cos \varphi_к =$$

$$= D(50°) - \frac{16 \cdot 50}{3 \cdot 57,3}\, 0{,}766^3 \cdot 0{,}643 = -0{,}192;$$

$$C = \frac{16}{3}\,\varphi_к \cos^4 \varphi_к = \frac{16 \cdot 50}{3 \cdot 57,3}\, 0{,}643^4 = 0{,}794.$$

Пределы интегрирования:

$$\bar{x}_{к1} = \operatorname{tg} \varphi_к = \operatorname{tg} 50° = 1{,}19;$$

$$\bar{x}_{к2} = \frac{R_т \operatorname{tg} \varphi_к + l_к}{R_т} = \operatorname{tg} \varphi_к + \frac{l_к}{R_т} = 1{,}19 + \frac{5}{1{,}5} = 4{,}52.$$

Интегрируя, найдем

$$\int_{\bar{x}_{к1}}^{\bar{x}_{к2}} \left(\frac{q_x}{q_0}\right) \bar{x}_к \cdot d\bar{x}_к = \left(\frac{2A}{3C}\sqrt{B + C\bar{x}_к^3}\right)\Bigg|_{\bar{x}_{к1}}^{\bar{x}_{к2}} =$$

$$= \left(\frac{2 \cdot 0{,}463}{3 \cdot 0{,}794}\sqrt{-0{,}192 + 0{,}794 \cdot \bar{x}_к^3}\right)\Bigg|_{1,19}^{4,52} = 2{,}91.$$

Таким образом, тепловой поток к боковой поверхности конуса в соответствии с (3.X.17)

$$Q_к = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}5^2 \cdot 0{,}643 \cdot 697 \cdot 2{,}91 = 18400 \text{ ккал/сек}.$$

Суммарный тепловой поток к затупленному конусу

$$Q = Q_{сф} + Q_к = 2640 + 18400 = 21000 \text{ ккал/сек}.$$

X.10. Для нахождения дополнительного теплового потока, обусловленного диффузией в пограничном слое, воспользуемся данными, найденными при решении задачи X.9. В результате этого решения получен тепловой поток от разогретого омывающего потока газа к стенке без учета диффузии в пограничном слое. Обозначим величину этого теплового потока $q_{\mathbf{Le}=1}$. Если диффузия учитывается, то тепловой поток к стенке

$$q = q_{\mathbf{Le}=1}\left[1 + (\mathbf{Le}^{2/3}\varphi - 1)\,\frac{i_D}{i_r - i_{ст}}\right], \qquad (3.X.19)$$

где

$$\varphi = \left[1 + 0{,}5\,\mathbf{Sc}^{-2/3}\sqrt{2\rho_0'\mu_0'\,\tilde{\lambda}}\,/(\rho_{ст}\,k_{ст})\right]^{-1} \qquad (3.X.20)$$

так называемый каталитический коэффициент, определяемый константой $k_{ст}$ скорости каталитической реакции в газе, зависящий в свою очередь от материала стенки; **Le** и **Sc** — соответственно числа Льюиса —

Семенова и Шмидта. Величина i_D представляет собой энтальпию диссоциации, равную

$$i_D = u_d(\alpha_\delta - \alpha_{ст}), \tag{3.X.21}$$

где u_d — характеристическая энергия диссоциации; α_δ и $\alpha_{ст}$ — соответственно степени диссоциации на границе пограничного слоя и на стенке.

Рассмотрим следующие два крайних случая теплопередачи в пограничном слое. Первый из этих случаев характеризуется бесконечно малой скоростью рекомбинации, имеющей место на некаталитической стенке, при которой константа скорости реакции $k_{ст} \to 0$. При этом, как следует из (3.X.20), каталитический коэффициент $\varphi \to 0$. Отсюда следует, что

$$q = q_{Le=1}\left[1 - i_D'(i_r - i_{ст})\right]. \tag{3.X.22}$$

Во втором случае скорость рекомбинации рассматривается бесконечно большой, т. е. $k_{ст} \to \infty$ (стенка каталитическая, способствующая бесконечно быстрой реакции). Из (3.X.20) видно, что в этом случае $\varphi \to 1$ и, таким образом,

$$q = q_{Le=1}\left[1 + (\mathbf{Le}^{2/3} - 1)\frac{i_D}{i_r - i_{ст}}\right]. \tag{3.X.23}$$

Вычислим тепловые потоки (3.X.22) и (3.X.23) в окрестности точки полного торможения. Для приближенной оценки энтальпии i_D воспользуемся зависимостью

$$i_D = i_0 - i_{\alpha=0}. \tag{3.X.24}$$

По температуре в точке полного торможения $T_0' = 4620$ К находим энтальпию недиссоциированного воздуха:

$$i_{\alpha=0} = c_{p\infty}\left(\frac{T_0'}{T_\infty}\right)^{0,1} g\,AT_0' = 0{,}24\left(\frac{4620}{216{,}7}\right)^{0,1} 9{,}81 \cdot 427 \times$$

$$\times\, 4620 = 6{,}31 \cdot 10^6 \frac{м^2}{сек^2}.$$

Так как $i_0 = 8{,}22 \cdot 10^6$ $м^2/сек^2$, то энтальпия диссоциации

$$i_D = 8{,}22 \cdot 10^6 - 6{,}31 \cdot 10^6 = 1{,}91 \cdot 10^6\ м^2/сек^2.$$

С учетом этого значения

$$q_0 = q_{(Le=1)0}\left(1 - \frac{1{,}91 \cdot 10^6}{8{,}22 \cdot 10^6 - 0{,}545 \cdot 10^6}\right) = 0{,}751 \cdot q_{(Le=1)0}.$$

Полученный результат показывает, что применение некаталитического материала стенки приводит к снижению теплового потока примерно на 25%.

Во втором случае стенка принимается каталитической ($\varphi = 1{,}0$). Примем для этого случая число Льюиса — Семенова равным $\mathbf{Le} = 1{,}45$. В соответствии с этим значением

$$q_0 = q_{(Le=1)0}\left[1 + (1{,}45^{2/3} - 1)\frac{1{,}91 \cdot 10^6}{8{,}22 \cdot 10^6 - 0{,}545 \cdot 10^6}\right] \approx 1{,}07 \cdot q_{(Le=1)0}.$$

Таким образом, применение стенок из каталитического материала, обусловливающего бесконечно большую скорость рекомбинации, привело к увеличению теплового потока за счет диффузии на 7%. В случае конечной скорости рекомбинации для расчета теплового потока надо пользоваться формулой (3.X.19).

Отношение количества тепла q, выделившегося при конечной скорости рекомбинации, к тепловому потоку $q_{k_{ст}\to\infty}$ в случае бесконечно быстрого катализа будет

$$\frac{q}{q_{k_{ст}\to\infty}} = \frac{1+(\mathbf{Le}^{2/3}\varphi-1)\tilde{i}_D}{1+(\mathbf{Le}^{2/3}-1)\tilde{i}_D}, \qquad (3.X.25)$$

где $\tilde{i}_D = i_D/(i_r - i_{ст})$.

Рассмотрим материал стенки в виде стекловидного вещества, для которого коэффициент $k_{ст}=10$ *см/сек*. В точке полного торможения на охлаждаемой стенке плотность

$$\rho_{ст} = \rho_\infty \frac{p_0'}{p_\infty}\cdot\frac{T_\infty}{T_{ст}} = 9{,}062\cdot10^{-3}\,\frac{15\cdot10^4}{563{,}6}\cdot\frac{216.7}{500} = 1{,}05\,\frac{кГ\cdot сек^2}{м^4}.$$

Пользуясь другими данными, полученными при решении задачи X.9, а также приняв число Шмидта $\mathbf{Sc}=0{,}49$, найдем

$$\varphi = \left(1+\frac{0{,}5\cdot0{,}49^{-2/3}\sqrt{2\cdot0{,}1\cdot14{,}4\cdot10^{-6}\cdot1153}}{1{,}05\cdot10\cdot10^{-2}}\right)^{-1} = 0{,}692.$$

Имея в виду, что $\tilde{i}_D = i_D/(i_r - i_{ст}) = 0{,}249$, получим

$$\frac{q}{q_{k_{ст}\to\infty}} = \frac{1+(1{,}45^{2/3}\cdot0{,}692-1)\,0{,}249}{1+(1{,}45^{2/3}-1)\,0{,}249} = 0{,}908.$$

Таким образом, в реальных случаях применения материалов стенки, обусловливающих конечные скорости рекомбинации, теплопередача будет меньше, чем при бесконечно быстром катализе, но, очевидно, больше, чем в случае некаталитической стенки.

X.11. Из решения задачи X.9 имеем следующие значения параметров на границе слоя в окрестности точки полного торможения: $p_0' = 15$ *кГ/см²*; $T_0' = 4620$ K; $\rho_0' = 0{,}1$ *кГ·сек²/м⁴*; $\mu_0' = 14{,}4\cdot10^{-6}$ *кГ·сек/м²*; $i_0 = i_r = 8{,}22\cdot10^6$ *м²/сек²*. Соответствующий градиент скорости в этой точке $\tilde{\lambda} = 1153$ *1/сек*.

Равновесную радиационную температуру T_e определяем из уравнения теплового баланса

$$\alpha_x(i_r - i_e)/(c_p)_e = \varepsilon\sigma T_e^4, \qquad (3.X.26)$$

в котором коэффициент теплоотдачи

$$\alpha_x = \frac{(c_p)_e}{i_r - i_e}\,q_{\mathrm{Le}=1}\left[1+\left(\mathbf{Le}^{2/3}\cdot\varphi-1\right)\tilde{i}_D\right] \qquad (3.X.27)$$

находится по удельному тепловому потоку

$$q_{\mathrm{Le}=1} = \frac{0{,}5\cdot\mathbf{Pr}^{-2/3}}{A}\sqrt{2\rho_0'\mu_0'\tilde{\lambda}}\,(i_r - i_e) \qquad (3.X.28)$$

и каталитическому коэффициенту

$$\varphi = \left(1+\frac{0{,}5\cdot\mathbf{Sc}^{-2/3}\sqrt{2\rho_0'\mu_0'\tilde{\lambda}}}{\rho_e k_{ст}}\right)^{-1}. \qquad (3.X.29)$$

В уравнении (3.X.26) постоянная Больцмана $\sigma = 1{,}36\cdot10^{-11}$ [*ккал/(м²·сек·град⁴)*]; $(c_p)_e$ [*ккал/кГ·град*], i_e [*м²/сек²*], ρ_e [*кГ·сек²/м⁴*] — соответственно удельная теплоемкость, энтальпия и плотность газа на стенке при равновесной температуре. Далее имеем:

$$\widetilde{i}_D = i_D/(i_r - i_e); \tag{3.X.30}$$

$$i_D = u_d(\alpha_\delta - \alpha_e) = 3\cdot 10^7(\alpha_\delta - \alpha_e)\ м^2/сек^2, \tag{3.X.31}$$

где α_δ и α_e — соответственно степени диссоциации при температурах T_0' и T_e. Следовательно,

$$\widetilde{i}_D = 3\cdot 10^7(\alpha_\delta - \alpha_e)/(i_r - i_e). \tag{3.X.32}$$

Степени диссоциации определяются при помощи соотношений

$$\frac{p}{p_\infty} = \frac{\rho}{\rho_\infty}\cdot\frac{T}{T_\infty}(1+\alpha),\ \frac{p}{p_\infty} = \frac{\rho}{\rho_\infty}\cdot\frac{T}{T_\infty}\cdot\frac{\mu_{ср\infty}}{\mu_{ср}},$$

из которых

$$\alpha = (\mu_{ср\infty}/\mu_{ср}) - 1,$$

где $\mu_{ср\infty}$, $\mu_{ср}$ — средние молекулярные веса воздуха соответственно при T_∞ и T. В соответствии с этим на границе слоя

$$\alpha_\delta = (\mu_{ср\infty}/\mu_{ср\delta}) - 1, \tag{3.X.33}$$

а на стенке

$$\alpha_e = (\mu_{ср\infty}/\mu_{ср e}) - 1. \tag{3.X.34}$$

Здесь величина $\mu_{ср\infty}$ берется из таблиц атмосферы для высоты $H = 20$ *км*.

Таким образом, получаем систему уравнений для определения равновесной радиационной температуры стенки, состоящую из зависимостей (3.X.26) ÷ (3.X.29), (3.X.32) ÷ (3.X.34), а также соотношений:

$$\left.\begin{aligned} (c_p)_e &= c_p(p_0', T_e);\\ i_e &= i_e(p_0', T_e);\\ \mu_{ср e} &= \mu_{ср e}(p_0', T_e);\\ \rho_e &= \frac{p_0'}{g R_0 T_e/\mu_{ср e}}. \end{aligned}\right\} \tag{3.X.35}$$

Первые семь уравнений этой системы можно преобразовать к трем:

$$T_e^4 = \frac{A_1}{\varepsilon\sigma}(i_r - i_e)\left[1 + (\mathbf{Le}^{2/3}\varphi - 1)\widetilde{i}_D\right];$$

$$\widetilde{i}_D = \frac{3\cdot 10^7(\mu_{ср\infty}/\mu_{ср\delta} - \mu_{ср\infty}/\mu_{ср e})}{i_r - i_e};$$

$$\varphi = (1 + A_2/\rho_e)^{-1},$$

где

$$A_1 = \frac{0{,}5\,\mathbf{Pr}^{-2/3}}{A}\sqrt{2\rho_0'\mu_0'\widetilde{\lambda}};\quad A_2 = \frac{0{,}5\,\mathbf{Sc}^{-2/3}\sqrt{2\rho_0'\mu_0'\widetilde{\lambda}}}{k_{ст}}.$$

Подсчитаем значения A_1 и A_2, полагая числа Прандтля $\mathbf{Pr} = 0{,}64$, Льюиса — Семенова $\mathbf{Le} = 1{,}45$ и Шмидта $\mathbf{Sc} = 0{,}49$, а также имея в виду, что $A = 427$ *кГ·м/ккал*:

$$A_1 = \frac{0{,}5\cdot 0{,}64^{-2/3}}{427}\sqrt{2\cdot 0{,}1\cdot 14{,}4\cdot 10^{-6}\cdot 1153} = 0{,}908\cdot 10^{-4}\ ккал\cdot сек/м^4;$$

$$A_2 = \frac{0{,}5\cdot 0{,}49^{-2/3}\sqrt{2\cdot 0{,}1\cdot 14{,}4\cdot 10^{-6}\cdot 1153}}{10\cdot 10^{-2}} = 0{,}467\ кГ\cdot сек^2/м^4.$$

Принимая $\varepsilon=0{,}7$; $\sigma=1{,}36\cdot10^{-11}$ *ккал/(м²·сек·град⁴)*, а также учитывая, что $i_r=i_0=8{,}22\cdot10^6$ *м²/сек²*, $\mu_{cp\infty}=28{,}97$ и $\mu_{cp\delta}=25{,}64$, можно приведенную систему уравнений написать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} T_e^4 &= 9{,}47\cdot10^6\,(8{,}22\cdot10^6-i_e)\,[1+(1{,}28\cdot\varphi-1)\,\tilde{i}_D];\\ \tilde{i}_D &= \frac{3\cdot10^7}{8{,}22\cdot10^6-i_e}\left(1{,}13-\frac{28{,}97}{\mu_{cpe}}\right);\\ \varphi &= (1+0{,}467/\rho_e)^{-1};\ i_e=i_e\,(p_0',\,T_e);\\ \mu_{cpe} &= \mu_{cpe}\,(p_0',\,T_e);\ \rho_e=18\,\mu_{cpe}/T_e. \end{aligned}\right\} \qquad (3.X.36)$$

Эта система уравнений решается методом последовательных приближений. Задаемся в первом приближении температурой $T_e<T_0=4620$ К, равной, например, $T_e=2700$ К. Из таблиц [17] по этому значению T_e и давлению $p_0'=15$ *кГ/см²* определяем энтальпию $i_e=783$ *ккал/кГ* $=3{,}28\cdot10^6$ *м²/сек²*, а также средний молекулярный вес $\mu_{cpe}=28{,}90$. Далее находим:

$$\tilde{i}_D=\frac{3\cdot10^7}{8{,}22\cdot10^6-3{,}28\cdot10^6}\left(1{,}13-\frac{28{,}97}{28{,}90}\right)=0{,}776;$$

$$\rho_e=18\cdot28{,}90/2700=0{,}193\ кГ\cdot сек^2/м^4;$$

$$\varphi=(1+0{,}467/0{,}193)^{-1}=0{,}293.$$

Подставляя значения i_e, $\tilde{i}_D$ и φ, определим $T_{e\mathrm{I}}=2200$ К.

Поскольку разница между температурой T_e, которой задавались, и полученной в результате вычислений значительная, необходимо провести еще ряд приближений. Расчеты показали, что удовлетворительные результаты получаются в четвертом приближении ($i_e=649$ *ккал/кГ* $=2{,}72\cdot10^6$ *м²/сек²*; $\mu_{cpe}=28{,}96$):

$$\tilde{i}_D=\frac{3\cdot10^7}{8{,}22\cdot10^6-2{,}72\cdot10^6}\left(1{,}13-\frac{28{,}97}{28{,}96}\right)=0{,}708;$$

$$\rho_e=18\cdot28{,}96/2319=0{,}225\ кГ\cdot сек^2/м^4;$$

$$\varphi=(1+0{,}467/0{,}225)^{-1}=0{,}326;\quad T_{e\mathrm{IV}}=2338\ \mathrm{K}.$$

Отличие найденной температуры $T_{e\mathrm{IV}}$ от ее значения в предыдущем приближении составляет примерно 0,8%.

X.12. Из решения задачи X.9 имеем тепловой поток в окрестности точки торможения (без учета диффузии) $q_0=q_{(\mathrm{Le}=1)0}=697$ *ккал/(м²×сек)*, а из решения задачи X.10 — тепловой поток с учетом диффузии $q_0=0{,}751\,q_{(\mathrm{Le}=1)0}=523$ *ккал/(м²·сек)*. Энтальпия газа в окрестности точки полного торможения $i_0=i_r=8{,}22\cdot10^6$ *м²/сек²*.

При использовании материала покрытия в виде тефлона эффективная теплота его абляции

$$q^*=\frac{527+0{,}5\,[1+1165/i_0]\,(i_0-i_{ст})}{1+1165/i_0-q_{из}/q_0}, \qquad (3.X.37)$$

где $q_{из}$ — тепловой поток от излучения с поверхности; i_0, *ккал/кГ* — энтальпия торможения; $i_{ст}$, *ккал/кГ* — энтальпия газа на стенке.

Температура газа у стенки примерно равна температуре абляции тефлона ($T_{ст}\approx445$ К). При такой температуре энтальпия $i_{ст}\ll i_0$, а радиационный поток $q_{из}\ll q_0$. Тогда можно написать

$$q^*=\frac{527+0{,}5\,[1+1165/i_0]\,i_0}{1+1165/i_0}. \qquad (3.X.38)$$

Так как здесь

$$i_0 = 8{,}22 \cdot 10^6 \frac{1}{gA} = 8{,}22 \cdot 10^6 \frac{1}{9{,}81 \cdot 427} = 1960 \frac{ккал}{кГ},$$

то

$$q^* = \frac{527 + 0{,}5\,(1 + 1165/1960)\,1960}{1 + 1165/1960} = 1310 \frac{ккал}{кГ}.$$

Удельный унос массы вещества с поверхности

$$m = q_0/q^* = 523/1310 = 0{,}399\ кГ/(м^2 \cdot сек).$$

Снижение теплового потока, обусловленное абляцией, определяется зависимостью

$$q_i/q_0 = 1 - 0{,}5 \cdot i_0/q^*, \qquad (3.X.39)$$

в которой q_i — теплопередача при наличии абляции. Подставляя данные, получим

$$q_i/q_0 = 1 - 0{,}5 \cdot 1960/1310 = 0{,}252.$$

Как видим, в данном случае унос части материала покрытия привел к снижению теплопередачи примерно на 75%.

Рассмотрим покрытие из стекловидного материала.

1. Стекловидное вещество, обладающее свойством одновременного плавления и испарения (30% пластмассы и 70% стекла). Для этого вещества эффективная теплота абляции

$$q^* = \left[125 + 2{,}7 \frac{i_0}{RT_{\infty з}} + 178 \left(\frac{\rho_{\infty н}}{\rho_{\infty з}}\right)^{1/(3+n)} \left(\frac{i_0}{RT_{\infty з}}\right)^{3{,}64/(3+n)}\right] \times$$

$$\times \left(1 - \frac{q_{из}}{q_0}\right)^{-1}. \qquad (3.X.40)$$

Пренебрегая в этом выражении величиной $q_{из}/q_0$, принимая $n=10$ и учитывая, что для атмосферного воздуха у Земли $RT_{\infty з}=18{,}8$ *ккал/кГ*, получим

$$q^* = 125 + 2{,}7 \frac{i_0}{18{,}8} + 178 \left(\frac{\rho_{\infty н}}{\rho_{\infty з}}\right)^{0{,}0769} \left(\frac{i_0}{18{,}8}\right)^{0{,}28}.$$

Подставляя сюда значение $i_0=1960$ *ккал/кГ*, а также величину $\rho_{\infty н}/\rho_{\infty з}=7{,}25 \cdot 10^{-2}$, найденную из таблиц [31; 50], определим

$$q^* = 125 + 2{,}7 \frac{1960}{18{,}8} + 178 \left(7{,}25 \cdot 10^{-2}\right)^{0{,}0769} \left(\frac{1960}{18{,}8}\right)^{0{,}28} = 941\ ккал/кГ.$$

Соответствующий удельный унос массы

$$m = q_0/q^* = 523/941 = 0{,}556\ кГ/(м^2 \cdot сек).$$

Отношение тепловых потоков

$$q_i/q_0 = 1 - \beta \bar{m} i_0/q^*, \qquad (3.X.41)$$

где $\bar{m}=m_v/m$ (m_v — часть вещества, уносимая с поверхности путем испарения). Примем $\bar{m}=0{,}25$ (т. е. 25% вещества испаряется), а также положим $\beta=0{,}5$. Тогда

$$q_i/q_0 = 1 - 0{,}5 \cdot 0{,}25 \cdot 1960/941 = 0{,}74.$$

2. Стекловидное вещество, абляцирующее только плавлением. В этом случае эффективная теплота абляции

$$q^* = 178 \left(\frac{\rho_{\infty н}}{\rho_{\infty з}}\right)^{0{,}0769} \left(\frac{i_0}{18{,}8}\right)^{0{,}28} =$$

$$= 178 \left(7{,}25 \cdot 10^{-2}\right)^{0{,}0769} \left(\frac{1960}{18{,}8}\right)^{0{,}28} = 534\ ккал/кГ.$$

Удельный унос массы

$$m = q_0/q^* = 523/534 = 0{,}979\ кГ/(м^2 \cdot сек).$$

Так как материал плавится, но не испаряется ($\bar{m}=0$), то в соответствии с (3.X.41) $q_i/q_0=1$, т. е. в рассматриваемом случае тепловой поток полностью поглощается расплавленным веществом, уносимым с поверхности.

X.13. Расчет необходимой толщины теплозащитного покрытия спускаемого аппарата связан с определением некоторых параметров внешнего обтекания. При этом необходимо найти температуру торможения T_0' за ударной волной и равновесную радиационную температуру T_e воздуха на стенке. Заданными параметрами являются число $\mathbf{M}_\infty$ и высота полета H, причем адиабатическая температура стенки T_r принимается вдоль траектории равной T_0' (за исключением начального участка атмосферы с высоким разрежением). Полученные таким образом результаты приведены на рис. 3.X.3.

В соответствии с этими данными время полета τ, в течение которого на спускаемый аппарат действует тепловой поток, составляет 26 *сек*. Осредненная по этому времени равновесная температура стенки согласно данным рис. 3.X.3

$$T_{e\,ср} = \sum_{i=1}^{n} T_{ei}\,(\Delta\tau_i/\tau) = 1600\ К.$$

Полагая температуру атмосферы равной 293 К, определим повышение температуры на наружной поверхности стенки:

$$\Delta T_{ст} = 1600 - 293 = 1307\ К.$$

Кроме того, примем, что на внутренней поверхности теплозащитного покрытия температура не должна превышать 373 К. Тогда повышение температуры на этой поверхности

$$\Delta T_{вн} = 373 - 293 = 80\ К.$$

Найдем относительный температурный градиент по толщине обшивки:

$$\varepsilon_п = 1 - \Delta T_{вн}/\Delta T_{ст} = 1 - 80/1307 \approx 0{,}94.$$

Осредняем по времени температуру адиабатической стенки (см. рис. 3.X.3):

$$T_{r\,ср} = \sum_{i=1}^{n} T_{ri}\,(\Delta\tau_i/\tau) = 5870\ К.$$

Используя зависимость

$$\alpha_x\,(T_r - T_{ст}) = \varepsilon\sigma T_{ст}^4,$$

вычисляем среднее значение коэффициента теплоотдачи:

$$\alpha_{ср} = \frac{\varepsilon\sigma T_{ст}^4}{T_{r\,ср} - T_{e\,ср}} = \frac{0{,}8 \cdot 13{,}6 \cdot 10^{-12} \cdot 1600^4}{5870 - 1600} = 0{,}0168\ \frac{ккал}{м^2 \cdot сек \cdot град},$$

где для коэффициента излучения поверхности принято значение $\varepsilon=0{,}8$.

В качестве теплозащитного покрытия выбираем стеклотекстолит, для которого $\lambda=0{,}7 \cdot 10^{-4}$ *ккал/(м·сек·град)*, $\gamma=1600$ *кГ/м*^{3}; $c=0{,}24$ *ккал/(кГ·град)*.

Задача по определению толщины теплозащитного покрытия решается методом итераций. Задаемся ориентировочной толщиной покрытия $\delta_1=10$ *мм* и определяем величину критерия Био:

$$\beta = \alpha_{ср}\,\delta_1/\lambda = 0{,}0168 \cdot 0{,}01/\left(0{,}7 \cdot 10^{-4}\right) = 2{,}4.$$

Таблица 3.X.4

Номер точки на траектории	$\Delta\tau$, *сек*	T_r, К	$u_{уг}$, *мм/сек*	$\delta_{уг}$, *мм*	Номер точки на траектории	$\Delta\tau$, *сек*	T_r, К	$u_{уг}$, *мм/сек*	$\delta_{уг}$, *мм*
1	2	4 370	0,185	0,37	*8*	1	7500	0,309	0,31
2	2	9 000	0,309	0,61	*9*	1	5000	0,220	0,22
3	2	10 500	0,340	0,64	*10*	1	3100	0,170	0,17
4	2	11 500	0,370	0,74	*11*	1	1800	0,03	0,03
5	2	12 000	0,377	0,75	*12*	2	950	—	—
6	2	11 800	0,370	0,74	*13*	3	600	—	—
7	1	10 000	0,340	0,34	$\sum_{n=1}^{11}$	17	—	—	4,92

Используя график [20], находим для $\beta=2{,}4$ и $\varepsilon_п=0{,}94$ критерий Фурье $\varphi=0{,}125$ и определяем толщину теплоизоляции:

$$\delta_1 = \sqrt{a\tau/\varphi} = \sqrt{2\cdot10^{-7}\cdot26/0{,}125} = 6{,}45\ мм.$$

Здесь коэффициент температуропроводности $a=\lambda/(c\gamma)=0{,}7\cdot10^{-4}/(0{,}24\times\times1600)=2\cdot10^{-7}$ *м²/сек*. По найденной величине $\delta_1=6{,}45$ *мм* рассчитываем критерий Био во втором приближении:

$$\beta = 0{,}0168\cdot0{,}00645/(0{,}7\cdot10^{-4}) = 1{,}55.$$

По значениям $\beta=1{,}55$ и $\varepsilon_п=0{,}94$ из графика [20] уточняем критерий Фурье $\varphi=0{,}127$. В соответствии с этой величиной новая толщина покрытия

$$\delta_1 = \sqrt{2\cdot10^{-7}\cdot26/0{,}127} = 6{,}4\ мм.$$

Как видно из проведенного расчета, влияние β на конечный результат незначительно, поэтому допустимо определять значение $\alpha_{ср}$, входящее в величину β с небольшой точностью.

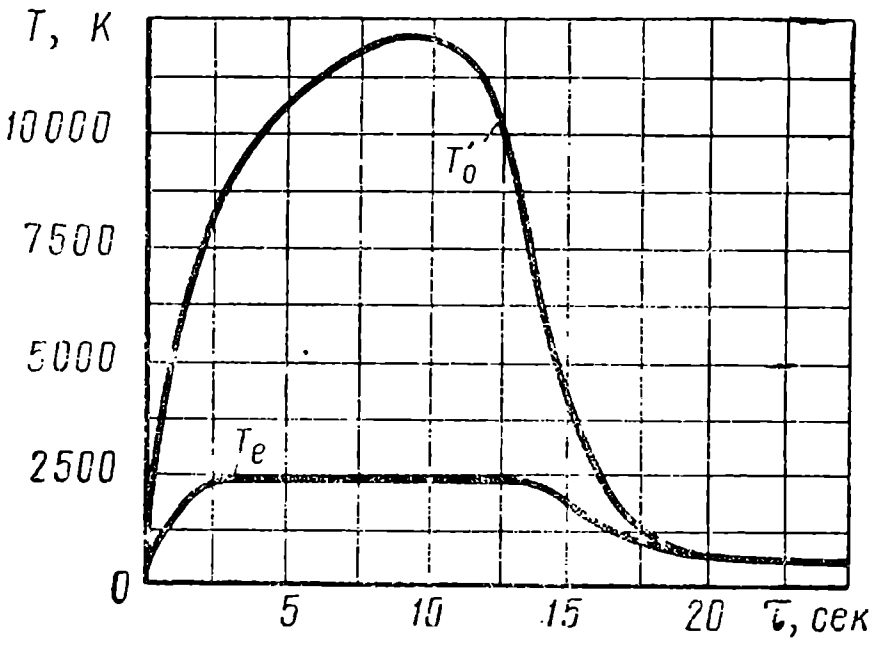


Рис. 3.X.3. График температуры, рассчитанной для условий входа спускаемого аппарата в плотные слои атмосферы

Найденное расчетным путем значение покрытия несколько увеличивают, вводя коэффициент запаса толщины $f=1{,}3\div1{,}6$. Приняв $f=1{,}5$, получим $\delta_1=1{,}5\cdot6{,}4=9{,}6$ *мм*. Эта толщина теплозащитного покрытия рассчитана без учета его абляции и механического повреждения структуры. Для учета этих факторов воспользуемся экспериментальной зависимостью скорости уноса (угара) стеклотекстолита от температуры. Используя эту зависимость, определим толщину угораемого слоя теплозащиты в различных точках траектории, причем в качестве температуры T, являющейся аргументом для скорости угара $u_{уг}$, используем температуру адиабатической стенки T_r. Результаты расчета толщины угораемого слоя представлены в табл. 3.X.4.

Из табл. 3.X.4 следует, что угорание теплозащитного покрытия прекращается до истечения заданного времени полета ($\tau=26$ *сек*), что объясняется уменьшением скорости спускаемого аппарата при торможении в плотных слоях атмосферы и, как результат, снижением темпе-

ратуры T_r до величины 950 К, при которой абляции не происходит. Толщина абляцирующего покрытия достигает величины

$$\delta_{уг} = \sum_{n=1}^{11} \delta_{уг\ n} = 4{,}92\ мм.$$

Толщина слоя повреждения материала составляет, по экспериментальным данным [20], $\delta_{пв} = (0{,}3 \div 0{,}4)\,\delta_{уг}$. Приняв для рассматриваемого случая $\delta_{пв} = 0{,}4 \cdot \delta_{уг} \approx 2$ *мм*, получим толщину разрушенной структуры $\delta_{уг} + \delta_{пв} = 6{,}92$ *мм*. С учетом принятого коэффициента запаса $f = 1{,}5$ эта толщина $\delta_2 = 1{,}5 \cdot 6{,}92 \approx 10{,}4$ *мм*. Таким образом, общая толщина теплозащитного покрытия

$$\delta_{из} = \delta_1 + \delta_2 = 9{,}6\ мм + 10{,}4\ мм = 20\ мм.$$

Определим вес теплозащитного покрытия, приняв, что защитный материал нанесен на переднюю часть сферического спускаемого аппарата, поверхность которой $S = (1/2)\,4\pi r^2 = 6{,}28\ м^2$:

$$G_{из} = \delta_{из}\,\gamma S = 20 \cdot 10^{-3} \cdot 1600 \cdot 6{,}28 = 201\ кГ,$$

что составляет примерно 16% от веса спускаемого аппарата.

XI.1. Аэродинамическая интерференция — это явление взаимодействия частей потока, обтекающего близко расположенные тела, например корпус и крыло (или оперение) летательного аппарата. В результате такого взаимодействия сумма аэродинамических сил или моментов, взятых отдельно (изолированных) крыла, корпуса, оперения и рулей, не равна полной силе или моменту комбинации, состоящей из этих же

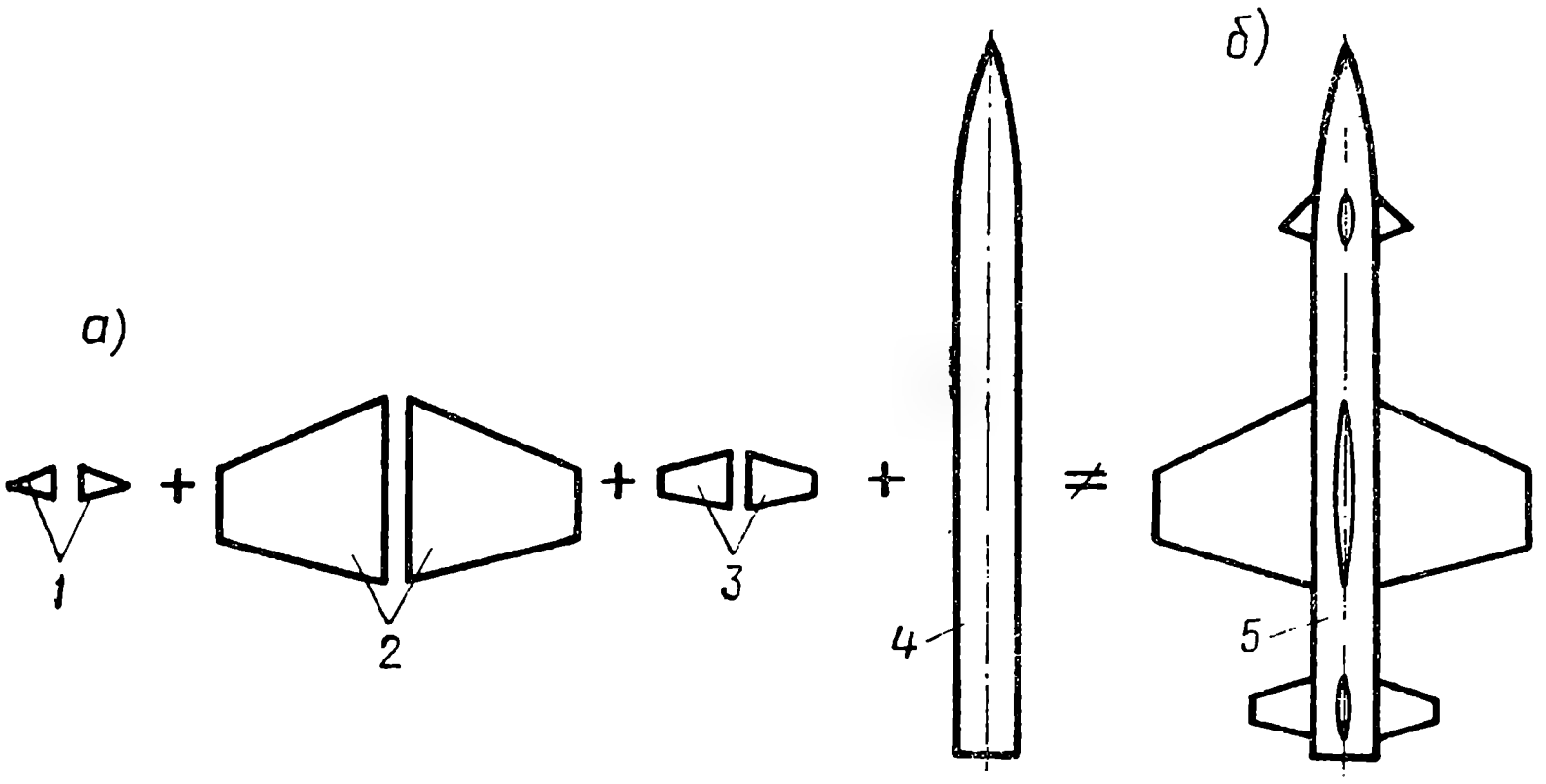


Рис. 3.XI.1. Схема аэродинамической интерференции:

а — изолированные элементы; *б* — элементы, соединенные в единой конструкции (комбинации) летательного аппарата; *1* — рули; *2* — крылья; *3* — оперение; *4* — корпус; *5* — летательный аппарат

элементов и представляющей собой единое целое — летательный аппарат (рис. 3.XI.1).

XI.2. По сравнению с изолированным крылом подъемная сила такого же по размерам и форме крыла при его присоединении к корпусу увеличится. Это происходит потому, что поток, возмущенный корпусом, обтекает крыло под бóльшими местными углами атаки. При этом возрастает перепад давлений снизу и сверху крыла, что и обусловливает увеличение его подъемной силы.

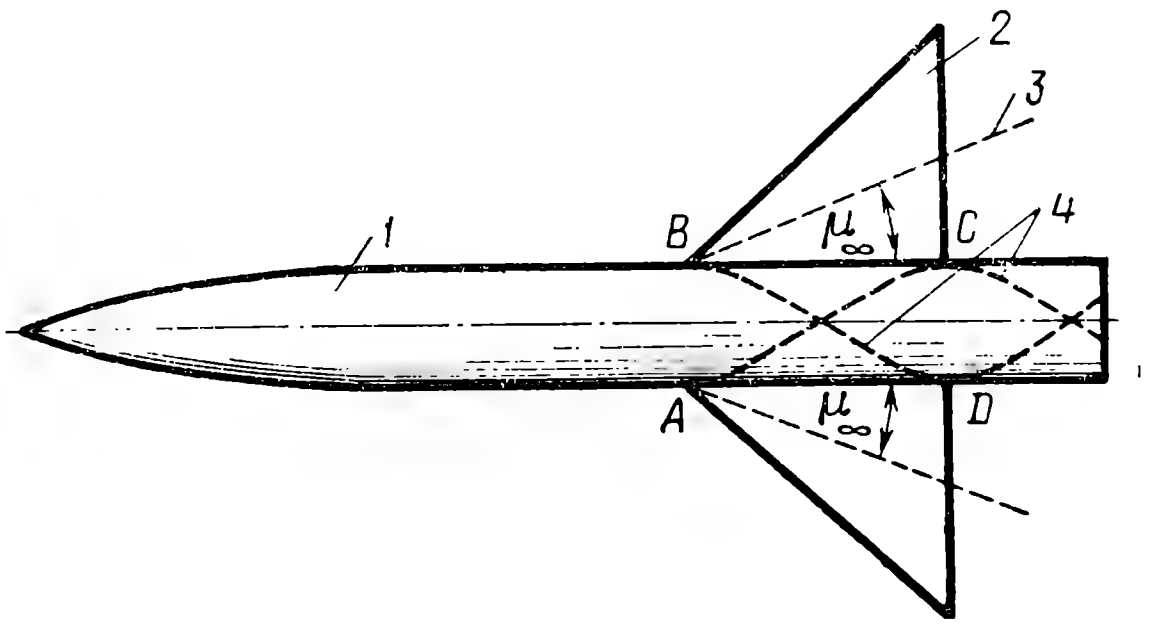


Рис. 3.XI.2. Зоны взаимного влияния крыла и корпуса:

1 — корпус; *2* — крыло; *3* — граница зоны влияния корпуса на крыло; *4* — границы зоны влияния крыла на корпус

XI.3. По сравнению с изолированным корпусом его подъемная сила в присутствии крыла будет больше. Это обусловлено повышением давления на нижней и снижением этого давления на верхней поверхностях корпуса, что вызвано присутствием крыла и влиянием его на обтекание самого корпуса.

XI.4. Размеры зоны взаимного влияния крыла и корпуса в сверхзвуковом потоке обусловлены действием аэродинамического закона, в соответствии с которым возмущения распространяются только вниз по потоку в пределах конусов Маха с полууглом при вершине $\mu_\infty = \arcsin(1/M_\infty)$. На плоском крыле эта зона представляет собой треугольник с вершиной в начале бортовой хорды (рис. 3.XI.2), а на цилиндрической

поверхности корпуса такая зона ограничивается линией пересечения конуса Маха с цилиндром. При этом согласно аэродинамической теории тонкого тела нагрузки, индуцируемые крылом, распространяются по корпусу на площади, расположенной непосредственно под консолями (участок *ABCD* на рис. 3.XI.2).

XI.5. По исходным данным определим вначале коэффициент подъемной силы изолированного крыла:

$$c_{\text{укр}} = c_{\text{ут.кр}}/(K_{\text{т.и}} + K_{\text{т}} + K_{\text{кр}}) = 1{,}9/(0{,}5 + 0{,}8 + 1{,}45) = 0{,}691.$$

Этому значению соответствует коэффициент подъемной силы крыла в присутствии корпуса

$$\Delta c_{y\,\text{кр(т)}} = c_{y\,\text{кр}} K_{\text{кр}} = 0{,}691 \cdot 1{,}45 = 1.$$

XI.6. Прежде всего найдем сумму коэффициентов интерференции $K_{\text{кр}}+K_{\text{т}}=(\bar{s}_m+1)^2/\bar{s}_m^2$, где $\bar{s}_m=s_m/r=2/1=2$. После подстановки $K_{\text{кр}}+K_{\text{т}}=(2+1)^2/2^2=2{,}25$. Далее подсчитываем $K_{\text{т.и}}+K_{\text{кр}}+K_{\text{т}}=c_{\text{ут.кр}}/c_{\text{укр}}=1{,}72/0{,}637=2{,}7$. В соответствии с этим $K_{\text{т.и}}=c_{\text{ут.кр}}/c_{\text{укр}}-(K_{\text{кр}}+K_{\text{т}})=2{,}7-2{,}25=0{,}45$. Коэффициент подъемной силы изолированного корпуса $c_{\text{ут}}=c_{\text{укр}}K_{\text{т.и}}=0{,}637\cdot 0{,}45=0{,}287$.

XI.7. Согласно аэродинамической теории тонкого тела в результате интерференции комбинации корпус — крыло местный угол атаки вдоль корпуса остается постоянным и индуцируемый корпусом на консолях крыла перепад давлений распределяется примерно равномерно по всем несущим поверхностям. Вследствие этого не наблюдается существенного изменения положения центра давления консолей как по размаху, так и по хорде. Иной будет картина на корпусе. Местный угол атаки изменяется вдоль размаха консоли крыла, поэтому крыло в различных поперечных сечениях корпуса будет индуцировать неодинаковые перепады давлений. Это вызовет существенное изменение положения центра давления. Такое влияние интерференции особенно заметно в так называемых предельных случаях. В первом из этих случаев рассматривается бесконечно тонкий корпус. Очевидно, для него центр давления можно считать расположенным на середине бортовой хорды консоли [коэффициент центра давления $(c_{\text{ц.д}})_{\alpha\text{т(кр)}}=0{,}5$]. Второй предельный случай характеризуется бесконечно малым размахом консоли, при котором вся подъемная сила крыла передается на корпус и его центр давления оказывается близким к центру давления изолированного крыла [$(c_{\text{ц.д}})_{\alpha\text{т(кр)}} \approx 2/3$].

XI.8. Тонкой называется такая комбинация корпус — крыло, у которой поперечные размеры (например, размах крыла l) значительно меньше продольной длины L, т. е. $l \ll L$. Течение около такой комбинации носит линеаризованный характер. При этом можно принять, что хвостовой участок корпуса вместе с оперением (крыльями) находится на значительном удалении от носовой части, так что ее влияние на обтекание оперения пренебрежимо мало. Таким образом, хвостовой участок будет обтекаться практически невозмущенным потоком с числом $\mathbf{M}_\infty=1{,}5$. При этом условии рассмотрим расчет аэродинамических характеристик.

Давление. Для расчета коэффициента перепада давления $\Delta\bar{p}=p_{\text{н}}-p_{\text{в}}$ в точках с координатой z на нижней и верхней сторонах корпуса (см. рис. 2.XI.1) с учетом интерференции с крылом необходимо воспользоваться формулой

$$\Delta\bar{p}_{\text{т(кр)}} = \frac{4\alpha\left[\left(1-\frac{r^4}{s^4}\right)\frac{ds}{dx}+2\frac{r}{s}\cdot\frac{dr}{dx}\left(1+\frac{r^2}{s^2}-2\frac{z^2}{r^2}\right)\right]}{\left[\left(1+\frac{r^2}{s^2}\right)^2-4\frac{z^2}{s^2}\right]^{1/2}}.$$

Здесь:

$$\frac{ds}{dx} = \frac{s_m - r_ц}{x_D} = \frac{3{,}2 - 0{,}5}{3} = 0{,}9;$$

$$\frac{dr}{dx} = \frac{r_{дон} - r_ц}{x_D} = \frac{0{,}8 - 0{,}5}{3} = 0{,}1;$$

$$s = r_ц + x\,(ds/dx) = 0{,}5 + 0{,}9x;$$

$$\frac{r}{s} = \frac{r_ц + x\,(dr/dx)}{r_ц + x\,(ds/dx)} = \frac{0{,}5 + 0{,}1x}{0{,}5 + 0{,}9x} = \frac{5 + x}{5 + 9x};$$

$$z/s = (r/s)\cos\theta = (5 + x)\cos\theta/(5 + 9x); \quad z/r = \cos\theta.$$

Учитывая эти данные, получим

$$\bar{\Delta p}_{т(кр)} = \frac{4 \cdot 0{,}1\left\{\left[1 - \left(\frac{5+x}{5+9x}\right)^4\right] 0{,}9 + 2\,\frac{5+x}{5+9x}\,0{,}1\left[1 + \left(\frac{5+x}{5+9x}\right)^2 - 2\cos^2\theta\right]\right\}}{\left\{\left[1 + \left(\frac{5+x}{5+9x}\right)^2\right]^2 - 4\left(\frac{5+x}{5+9x}\right)^2\cos^2\theta\right\}^{1/2}}. \tag{3.XI.1}$$

Для $x=0$ (см. рис. 2.XI.1)

$$\bar{\Delta p}_{т(кр)} = \frac{4 \cdot 0{,}1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0{,}1\,(2 - 2\cos^2\theta)}{(4 - 4 \cdot 1 \cdot \cos^2\theta)^{1/2}}.$$

Для сечения корпуса у донного среза, где $x = x_D = 3$, находим:

$$\frac{5 + x}{5 + 9x} = \frac{5 + 3}{5 + 9 \cdot 3} = 0{,}25;$$

$$\bar{\Delta p}_{т(кр)} = \frac{4 \cdot 0{,}1\,\{[1 - (0{,}25)^4]\,0{,}9 + 2 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}1\,[1 + (0{,}25)^2 - 2\cos^2\theta]\}}{\{[1 + (0{,}25)^2]^2 - 4\,(0{,}25)^2\cos^2\theta\}^{1/2}} =$$

$$= \frac{0{,}4\,[0{,}897 + 0{,}05\,(1{,}06 - 2\cos^2\theta)]}{(1{,}13 - 0{,}25 \cdot \cos^2\theta)^{1/2}}.$$

Задаваясь различными x и θ, можно определить по формуле (3.XI.1) распределение коэффициента перепада давления по корпусу в присутствии крыла.

На крыле коэффициент перепада давления находится по формуле

$$\bar{\Delta p}_{кр(т)} = \frac{4\alpha}{\left[(1 + r^4/s^4) - \frac{z^2}{s^2}\left(1 + \frac{r^4}{z^4}\right)\right]^{1/2}}\left\{\frac{ds}{dx}\left(1 - \frac{r^4}{s^4}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{r}{s} \cdot \frac{dr}{dx}\left[2\left(\frac{r^2}{s^2} - 1\right) + \left(1 - \frac{r^2}{z^2}\right)^2\right]\right\}.$$

После подстановки данных получим

$$\bar{\Delta p}_{кр(т)} = \frac{4 \cdot 0{,}1\left(0{,}9\left[1 - \left(\frac{5+x}{5+9x}\right)^4\right] + \frac{5+x}{5+9x}\,0{,}1\left\{2\left[\left(\frac{5+x}{5+9x}\right)^2 - 1\right] + \left(1 - \frac{r^2}{z^2}\right)^2\right\}\right)}{\left\{\left[1 + \left(\frac{5+x}{5+9x}\right)^4\right] - \frac{z^2}{r^2}\left(\frac{5+x}{5+9x}\right)^2\left(1 + \frac{r^4}{z^4}\right)\right\}^{1/2}}.$$

Для $x=0$ величина $z=r$ и $\bar{\Delta p}_{кр(т)}=0$. Для задней кромки, где $x = x_D = 3$, $r = r_{дон} = 0{,}8$,

$$\Delta\bar{p}_{\text{кр(т)}}=\frac{4\cdot 0{,}1\left(0{,}9\left[1-(0{,}25)^4\right]+0{,}25\cdot 0{,}1\left\{2\left[(0{,}25)^2-1\right]+\left[1-\left(\frac{0{,}8}{z}\right)^2\right]^2\right\}\right)}{\left\{\left[1+(0{,}25)^4\right]-\left(\frac{z}{0{,}8}\right)^2(0{,}25)^2\left[1+\left(\frac{0{,}8}{z}\right)^4\right]\right\}^{1/2}}=$$

$$=\frac{0{,}4\left\{0{,}897+0{,}025\left[-1{,}88+\left(1-\frac{0{,}8^2}{z^2}\right)^2\right]\right\}}{\left[1{,}004-\frac{z^2}{0{,}8^2}\,0{,}0625\left(1+\frac{0{,}8^4}{z^4}\right)\right]^{1/2}}.$$

При отсутствии расширения корпуса в хвостовой части ($dr/dx=0$) коэффициенты перепада давления на корпусе и крыле определяются соответственно из выражений:

$$\Delta\bar{p}_{\text{т(кр)}}=\frac{4\alpha\left(1-\frac{r^4}{s^4}\right)\frac{ds}{dx}}{\left[\left(1+\frac{r^2}{s^2}\right)^2-4\frac{z^2}{s^2}\right]^{1/2}}=\frac{0{,}36\left[1-\left(\frac{5+x}{5+9x}\right)^4\right]}{\left\{\left[1+\left(\frac{5+x}{5+9x}\right)^2\right]^2-4\left(\frac{5+x}{5+9x}\right)^2\cos^2\theta\right\}^{1/2}};$$

$$\Delta\bar{p}_{\text{кр(т)}}=\frac{4\alpha\left(1-\frac{r^4}{s^4}\right)\frac{ds}{dx}}{\left[\left(1+\frac{r^4}{s^4}\right)-\frac{z^2}{s^2}\left(1+\frac{r^4}{z^4}\right)\right]^{1/2}}=$$

$$=\frac{0{,}36\left[1-\left(\frac{5+x}{5+9x}\right)^4\right]}{\left\{\left[1+\left(\frac{5+x}{5+9x}\right)^4\right]-\left(\frac{5+x}{5+9x}\right)^2\left[1+\left(\frac{z}{s}\right)^4\right]\cos^2\theta\right\}^{1/2}}.$$

В частности, в донном сечении летательного аппарата, совпадающем с задней кромкой крыла ($x=x_D=3$),

$$\Delta\bar{p}_{\text{т(кр)}}=\frac{0{,}359}{(1{,}13-0{,}25\cos^2\theta)^{1/2}};$$

$$\Delta\bar{p}_{\text{кр(т)}}=\frac{0{,}359}{\left[1{,}004-0{,}0625\,\frac{z^2}{0{,}8^2}\left(1+\frac{0{,}8^4}{z^4}\right)\right]^{1/2}}.$$

Полученные значения практически мало отличаются от соответствующих коэффициентов для случая, когда имеется какое-либо небольшое изменение радиуса корпуса. Поэтому в расчетах обычно влияние этого изменения не принимают во внимание.

Коэффициенты интерференции. Определим вначале коэффициент $K_{\text{т}}$, равный отношению подъемной силы участка корпуса за счет влияния крыла к подъемной силе изолированного крыла:

$$K_{\text{т}}=\frac{\Delta c_{y\text{т(кр)}}}{c_{y\text{кр}}}=\frac{2}{\pi(\bar{s}_m-1)^2}\left[\frac{\bar{s}_m^2-1}{\bar{s}_m}+\frac{\pi}{2}\left(\bar{s}_m^2+\frac{1}{\bar{s}_m^2}\right)-\frac{(\bar{s}_m^2+1)^2}{\bar{s}_m^2}\operatorname{arctg}\bar{s}_m\right].$$

Примем здесь $\bar{s}_m=s_m/r_{\text{ц}}=3{,}2/0{,}5=6{,}4$. В соответствии с этим

$$K_{\text{т}}=\frac{2}{\pi(6{,}4-1)^2}\left[\frac{6{,}4^2-1}{6{,}4}+\frac{\pi}{2}\left(6{,}4^2+\frac{1}{6{,}4^2}\right)-\frac{(6{,}4^2+1)^2}{6{,}4^2}\operatorname{arctg}6{,}4\right]=0{,}213.$$

Коэффициент интерференции крыла с корпусом

$$K_{\text{кр}}=\frac{\Delta c_{y\text{кр(т)}}}{c_{y\text{кр}}}=\frac{(\bar{s}_m+1)^2}{\bar{s}_m^2}-K_{\text{т}}=\frac{(6{,}4+1)^2}{6{,}4^2}-0{,}213=1{,}122.$$

Подъемная сила комбинации. Величина этой силы находится по формуле [20]:

$$Y_{\text{т.кр}} = 2\alpha\pi\bar{s}_m^2\left(1 - 1/\bar{s}_m^2 + 1/\bar{s}_m^4\right) q_\infty.$$

Внося сюда скоростной напор

$$q_\infty = 0{,}5\, kp_\infty\, \mathbf{M}_\infty^2 = 0{,}5 \cdot 1{,}4 \cdot 10^4 \cdot 1{,}5^2 = 1{,}57 \cdot 10^4\ кГ/м^2$$

и остальные данные, получим

$$Y_{\text{т.кр}} = 2 \cdot 0{,}1 \cdot 3{,}14 \cdot 3{,}2^2 (1 - 1/6{,}4^2 + 1/6{,}4^4)\, 1{,}57 \cdot 10^4 = 9{,}8 \cdot 10^4\ кГ.$$

Уточнение по линеаризованной теории (с учетом влияния числа $\mathbf{M}_\infty$). В соответствии с этой теорией коэффициенты интерференции $K_{\text{т}}$, $K_{\text{кр}}$ сохраняются прежними ($K_{\text{т}}=0{,}213$ и $K_{\text{кр}}=1{,}112$), а коэффициент подъемной силы изолированного крыла определяется по линеаризованной теории.

Угол стреловидности такого крыла (см. рис. 2.XI.1)

$$\varkappa = \operatorname{arctg}\left(\frac{x_D}{s_m - r_{\text{ц}}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{3{,}2 - 0{,}5}\right) = 48°,$$

а угол Маха

$$\mu_\infty = \arcsin\left(1/\mathbf{M}_\infty\right) = \arcsin\left(1/1{,}5\right) = 41°50'.$$

Таким образом $\varkappa < (\pi/2 - \mu_\infty)$, так как $48° < (90° - 41°50') = 48°10'$, и, следовательно, передняя кромка крыла будет сверхзвуковой. В соответствии с этим

$$c_{y\text{кр}} = 4\alpha/\sqrt{\mathbf{M}_\infty^2 - 1} = 4 \cdot 0{,}1/\sqrt{1{,}5^2 - 1} = 0{,}357.$$

Коэффициент подъемной силы корпуса принимаем равным соответствующему значению для головного конуса, полагая при этом, что такой коэффициент рассчитан по площади двух консолей $S_{\text{кр}}$. В результате получим

$$c_{y\text{т}} = 2\alpha'\, \alpha\beta_{\text{к}} \sqrt{u_{\text{к}}^2 - 1}\, (S_{\text{мид}}/S_{\text{кр}}).$$

Здесь:

$$\alpha' = \sqrt{\mathbf{M}_\infty^2 - 1} = \sqrt{1{,}5^2 - 1} = 1{,}12;$$

$$\beta_{\text{к}} = r_{\text{ц}}/x_{\text{г}} = 0{,}5/3 = 0{,}167;$$

$$u_{\text{к}} = 1/(\alpha'\, \beta_{\text{к}}) = 1/(1{,}12 \cdot 0{,}167) = 5{,}5;$$

$$\frac{S_{\text{мид}}}{S_{\text{кр}}} = \frac{\pi r_{\text{ц}}^2}{(s_m - r_{\text{ц}})\, x_D} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}5^2}{(3{,}2 - 0{,}5)\, 3} = 0{,}097.$$

После подстановки этих данных находим

$$c_{y\text{т}} = 2 \cdot 1{,}12 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}167 \sqrt{5{,}5^2 - 1} \cdot 0{,}097 = 0{,}0198.$$

Таким образом, для комбинации корпус — крыло

$$c_{y\text{т.кр}} = c_{y\text{т}} + (K_{\text{т}} + K_{\text{кр}})\, c_{y\text{кр}} = 0{,}0198 + (0{,}213 + 1{,}122)\, 0{,}357 = 0{,}490.$$

Соответствующая подъемная сила

$$Y_{\text{т}} = c_{y\,\text{т.кр}}\, q_\infty\, S_{\text{кр}}.$$

Поскольку

$$S_{\text{кр}} = (s_m - r_{\text{ц}})\, x_D = (3{,}2 - 0{,}5)\, 3 = 8{,}1\ м^2,\ \text{то}$$

$$Y_{\text{т.кр}} = 0{,}490 \cdot 1{,}57 \cdot 10^4 \cdot 8{,}1 = 6{,}22 \cdot 10^4\ кГ.$$

Центр давления. По линеаризованной теории сверхзвукового обтекания центр давления треугольного крыла находится от вершины на расстоянии $^2/_3$ его высоты. Под влиянием интерференции с корпусом это расстояние согласно данным табл. XV-1-1 [21] будет равно для $r/s_m = 1/6{,}4 = 0{,}156$ значению

$$\left(c_{\text{ц.д}}\right)_{\alpha\,\text{кр (т)}}\, x_D = 0{,}654 \cdot 3 = 1{,}96.$$

Центр давления сдвигается ближе к передней кромке по сравнению с изолированным крылом. Для симметричного участка изолированного корпуса центр давления располагается посредине, а под влиянием интерференции (см. табл. XV-1-1 [21]) его расстояние от начала участка изменится и составит 0,532 от длины этого участка, т. е. центр давления сместится к дну.

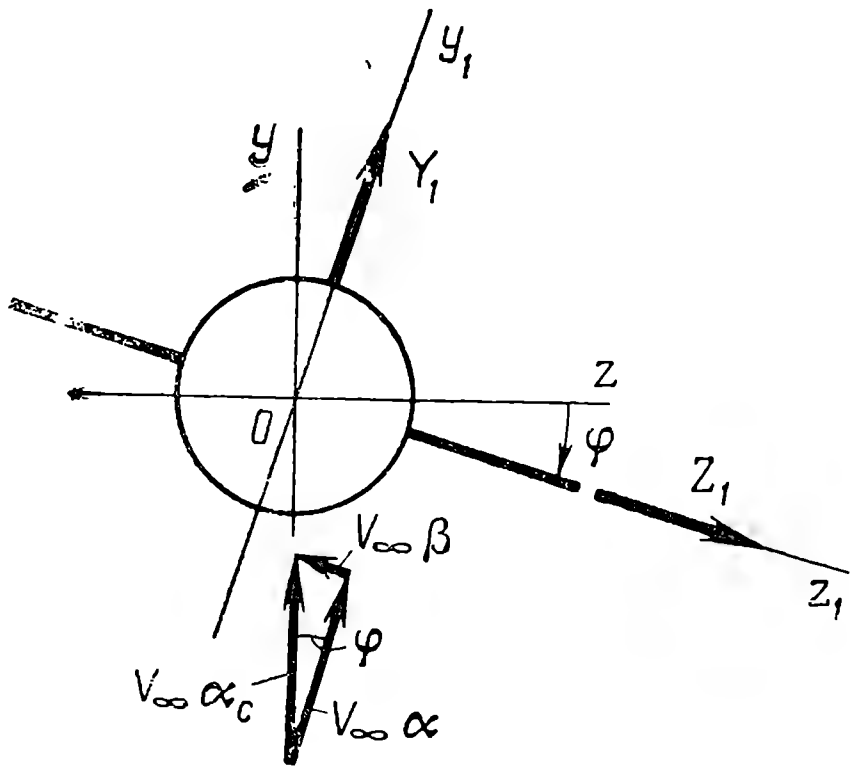


Рис. 3.XI.3. Система координат y_1Oz_1 при крене летательного аппарата

XI.9. Накренение плоской комбинации корпус — крыло, находящейся в сверхзвуковом потоке под углом атаки, изменяет характер интерференции между крылом и корпусом. Правая консоль (рис. 3.XI.3) после накренения находится в поперечном потоке со скоростью $V_\infty \alpha_c$ под углом, меньшим $\pi/2$, а левая — под углом, большим $\pi/2$. Поэтому на правой консоли перепад давлений увеличится, а на левой уменьшится. В соответствии с этим подъемная сила правой консоли возрастает, а левой — уменьшается. Рассмотренный эффект интерференции зависит от углов атаки α и крена φ (или угла скольжения β).

XI.10. При наличии угла крена взаимодействие между крылом и корпусом плоской комбинации приводит к увеличению подъемной силы для правой и уменьшению величины этой силы для левой консоли (см. задачу XI.9). В рамках аэродинамической теории тонкого тела на одинаковых консолях эти изменения подъемных сил оказываются одинаковыми. Следовательно, суммарная подъемная сила комбинации будет оставаться такой, как и при отсутствии накренения.

XI.11. Крыло нулевой толщины не оказывает влияния на обтекание комбинации в направлении оси Oz_1, следовательно, боковая сила в этом направлении создается только корпусом. Величина этой силы обусловлена обтеканием корпуса поперечным потоком со скоростью $V_\infty \beta$ (см. рис. 3.XI.3).

XI.12. Для расчета аэродинамических характеристик используем зависимости, полученные в аэродинамической теории тонкого тела (см., например, [21]).

Давление. Коэффициент перепада давления на нижней и верхней сторонах корпуса, обусловленный интерференцией с крылом,

$$\Delta \bar{p}_{\text{т(кр)}} = \bar{p}^{\text{н}}_{\text{т(кр)}} - \bar{p}^{\text{в}}_{\text{т(кр)}} = \frac{4\alpha\left[\left(1-r^4/s^4\right)\dfrac{ds}{dx} + 2\dfrac{r}{s}\cdot\dfrac{dr}{dx}\left(1+\dfrac{r^2}{s^2}-2\dfrac{z^2}{r^2}\right)\right] + 32\alpha\beta\left(\dfrac{r}{s}\right)\cos\theta\sin^2\theta}{\left[\left(1+\dfrac{r^2}{s^2}\right)^2 - 4\dfrac{z^2}{s^2}\right]^{1/2}}.$$

Отбрасывая член с dr/dx, оказывающий пренебрежимо малое влияние

на давление, и подставляя значения $\alpha=\alpha_c\cos\varphi$, $\beta=\alpha_c\sin\varphi$, $z/r=\cos\theta$, а также другие данные (см. задачу XI.8), найдем

$$\bar{\Delta p}_{т(кр)}=\frac{4\cdot0{,}1\cos20^\circ\left[1-\left(\frac{5+x}{5+9x}\right)^4\right]0{,}9+32\cdot0{,}1\cdot\cos20^\circ\cdot0{,}1\cdot\sin20^\circ\left(\frac{5+x}{5+9x}\right)\cos\theta\sin^2\theta}{\left\{\left[1+\left(\frac{5+x}{5+9x}\right)^2\right]^2-4\left(\frac{5+x}{5+9x}\right)^2\cos^2\theta\right\}^{1/2}}=$$

$$=\frac{0{,}338\left[1-\left(\frac{5+x}{5+9x}\right)^4\right]+0{,}102\left(\frac{5+x}{5+9x}\right)\cos\theta\sin^2\theta}{\left\{\left[1+\left(\frac{5+x}{5+9x}\right)^2\right]^2-4\left(\frac{5+x}{5+9x}\right)^2\cos^2\theta\right\}^{1/2}}.$$

На корпусе у вершины крыла $(x=0)$

$$\bar{\Delta p}_{т(кр)}=0{,}102\cdot\cos\theta\sin^2\theta/2\sin\theta=0{,}051\cdot\cos\theta\sin\theta.$$

У задней кромки крыла, где $x=x_D=3$,

$$\bar{\Delta p}_{т(кр)}=\frac{0{,}338\left[1-\left(\frac{5+3}{5+9\cdot3}\right)^4\right]+0{,}102\left(\frac{5+3}{5+9\cdot3}\right)\cos\theta\sin^2\theta}{\left\{\left[1+\left(\frac{5+3}{5+9\cdot3}\right)^2\right]^2-4\left(\frac{5+3}{5+9\cdot3}\right)^2\cos^2\theta\right\}^{1/2}}=$$

$$=\frac{0{,}338+0{,}026\cdot\cos\theta\sin^2\theta}{(1{,}13-0{,}25\cos^2\theta)^{1/2}}.$$

Рассмотрим коэффициент перепада давлений на крыле в присутствии корпуса:

$$\bar{\Delta p}_{кр(т)}=\frac{4\alpha\left\{\frac{r}{s}\cdot\frac{dr}{dx}\left[\left(1-\frac{r^2}{z^2}\right)^2+2\left(\frac{r^2}{s^2}-1\right)\right]+\frac{ds}{dx}\left(1-\frac{r^4}{s^4}\right)\right\}\pm4\alpha\beta\,\frac{z}{s}\left(1+\frac{r^2}{z^2}\right)\left(1-\frac{r^2}{z^2}\right)^2}{\left[\left(1+\frac{r^2}{s^2}\right)^2-\frac{z^2}{s^2}\left(1+\frac{r^2}{z^2}\right)^2\right]^{1/2}}$$

Отбрасывая здесь член с dr/dx и подставляя имеющиеся данные, найдем

$$\bar{\Delta p}_{кр(т)}=\frac{4\cdot0{,}1\cdot\cos20^\circ\left\{0{,}9\left[1-\left(\frac{5+x}{5+9x}\right)^4\right]\pm4\cdot0{,}1\cos\varphi\,0{,}1\sin\varphi\times\right.}{\left\{\left[1+\left(\frac{5+x}{5+9x}\right)^2\right]^2-\left(\frac{z}{0{,}5+0{,}9x}\right)^2\times\right.}\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{\left.\times\frac{z}{0{,}5+0{,}9x}\left(1+\frac{0{,}5^2}{z^2}\right)\left(1-\frac{0{,}5^2}{z^2}\right)^2\right\}}{\left.\times\left[1+\frac{0{,}5^2}{z^2}\right]^2\right\}^{1/2}}.$$

Здесь знак «+» относится к правой консоли, а «—» — к левой.

В вершине крыла $(x=0)$

$$\bar{\Delta p}_{кр(т)}=\frac{\pm\,0{,}04\cos\varphi\sin\varphi\,\frac{z}{0{,}5}\left(1+\frac{0{,}5^2}{z^2}\right)\left(1-\frac{0{,}5^2}{z^2}\right)^2}{\left[4-\frac{z^2}{0{,}5^2}\left(1+\frac{0{,}5^2}{z^2}\right)^2\right]^{1/2}}.$$

На задней кромке $(x=x_D=3)$

$$\bar{\Delta p}_{кр(т)}=\frac{0{,}338\pm0{,}04\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{z}{3{,}2}\right)\left(1+\frac{0{,}5^2}{z^2}\right)\left(1-\frac{0{,}5^2}{z^2}\right)^2}{\left[1{,}13-\frac{z^2}{3{,}2^2}\left(1+\frac{0{,}5^2}{z^2}\right)\right]^{1/2}}.$$

Подъемная сила комбинации в направлении оси Oy_1 (рис. 3.XI.3)

$$Y_1 = 2\alpha_c \cos\varphi \cdot \pi \bar{s}_m^2 \left(1 - 1/\bar{s}_m^2 + 1/\bar{s}_m^4\right) q_\infty =$$

$$= 2 \cdot 0{,}1 \cdot \cos 20^\circ \cdot 3{,}14 \cdot 3{,}2^2 \left(1 - 1/6{,}4^2 + 1/6{,}4^4\right) 1{,}57 \cdot 10^4 = 9{,}25 \cdot 10^4 \text{ кГ}.$$

Боковая сила

$$Z_1 = -2\alpha_c \pi r_ц^2 \sin\varphi \cdot q_\infty = -2 \cdot 0{,}1 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}5^2 \cdot \sin 20^\circ \cdot 1{,}57 \cdot 10^4 =$$

$$= -0{,}84 \cdot 10^3 \text{ кГ}.$$

Соответствующие аэродинамические коэффициенты:

$$c_{y1} = \frac{Y_1}{q_\infty S_{мид}} = 2\alpha_c \cos\varphi \, \bar{s}_m^2 \left(1 - 1/\bar{s}_m^2 + 1/\bar{s}_m^4\right) =$$

$$= 2 \cdot 0{,}1 \cdot \cos 20^\circ \cdot 6{,}4^2 \left(1 - 1/6{,}4^2 + 1/6{,}4^4\right) = 7{,}64;$$

$$c_{z1} = \frac{Z_1}{q_\infty S_{мид}} = -2\alpha_c \sin\varphi = 2 \cdot 0{,}1 \cdot \sin 20^\circ = -0{,}0685.$$

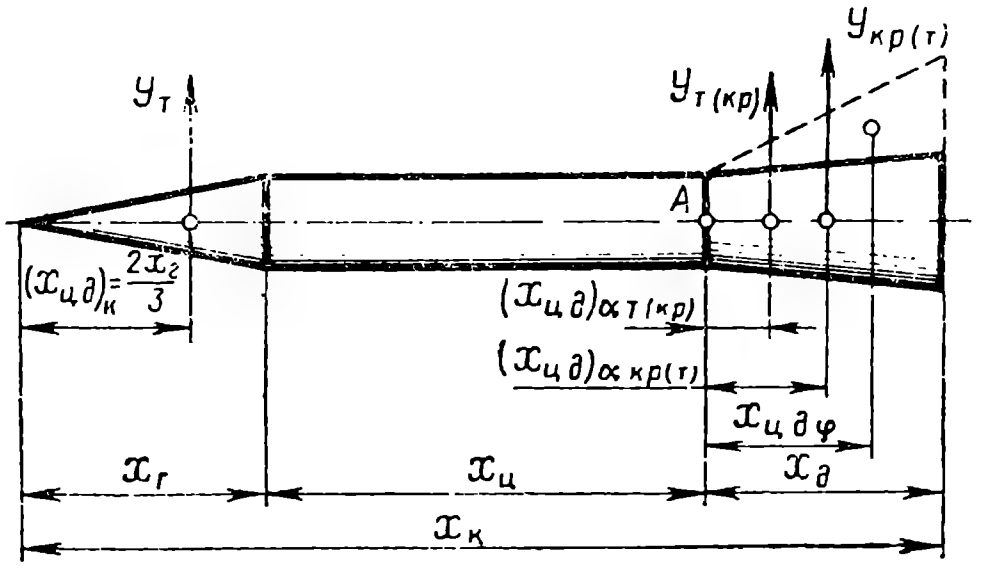


Рис. 3.XI.4. Схема сил, приложенных к летательному аппарату

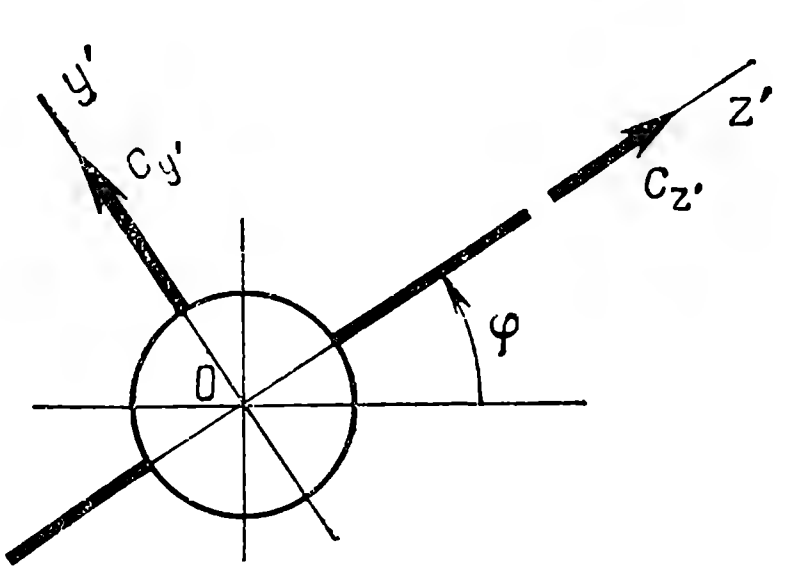


Рис. 3.XI.5. Система координат $y'Oz'$ при крене летательного аппарата

Коэффициент дополнительной подъемной силы консоли, вызванной креном,

$$\Delta c_{y\,кр(т)} = K_\varphi \alpha_c \sin\varphi \cdot c_{y\,кр} / \operatorname{ctg} \varkappa.$$

Из табл. XV-2-1 [21] по значению $r/s_m = 1/6{,}4 = 0{,}156$ находим $K_\varphi = 0{,}683$. Коэффициент $c_{y\,кр}$ принимаем сначала равным соответствующему значению по аэродинамической теории тонкого тела (для характерной площади $S_{мид} = \pi r_ц^2$):

$$c_{y\,кр} = 2\alpha \sin\varphi \left(\bar{s}_m - 1\right)^2 = 2 \cdot 0{,}1 \sin 20^\circ \left(6{,}4 - 1\right)^2 = 1{,}99.$$

В соответствии с этим

$$\Delta c_{y\,кр(т)} = 0{,}683 \cdot 0{,}1 \cdot \sin 20^\circ \cdot 1{,}99 / \operatorname{ctg} 48^\circ = 0{,}023.$$

Вычисляем затем $c_{y\,кр}$ по линеаризованной теории (для характерной площади $S_{кр}$):

$$c_{y\,кр} = 4\alpha / \sqrt{M_\infty^2 - 1} = 4 \cdot 0{,}1 / \sqrt{1{,}5^2 - 1} = 0{,}322.$$

Тогда

$$\Delta c_{y\,кр(т)} = \frac{0{,}683 \cdot 0{,}1 \cdot \sin 20^\circ}{\operatorname{ctg} 48^\circ} \cdot \frac{S_{кр}}{S_{мид}} 0{,}322 = 0{,}0765.$$

Из табл. XV-1-2 [21] по $r/s_m = 0{,}156$ находим относительные координаты центра давления одной консоли при крене (рис. 3.XI.4):

$$\left(c_{ц.д}\right)_{\varphi кр(т)} = \left(x_{ц.д\varphi}/b_{кр}\right)_{кр\,(т)} = 0{,}672;$$

$$\left(z_{\text{ц.д}}\right)_{\varphi\,\text{кр(т)}} = \left(z_{\text{ц.д}\varphi} - r\right)/\left(s_m - r\right) = 0{,}525.$$

Силы и моменты для комбинации корпус — крыло с учетом влияния крена. Коэффициент подъемной силы (рис. 3.XI.5)

$$c_{y'} = \left(c_{y'}\right)_{\text{т}} + \left(dc_y/d\alpha\right)_{\text{кр}}\left(K_{\text{т}} + K_{\text{кр}}\right)\alpha\cos\varphi.$$

Здесь:

$$\alpha = \alpha_{\text{с}}\cos\varphi = 0{,}1\cdot\cos 20^\circ = 0{,}094;$$

$$\left(c_{y'}\right)_{\text{т}} = 2\alpha'\,\alpha\beta_{\text{к}}\sqrt{u_{\text{к}}^2 - 1}\,\left(S_{\text{мид}}/S_{\text{кр}}\right) = 2\cdot 0{,}1\cdot 1{,}12\cdot 0{,}167\sqrt{5{,}5^2 - 1}\times$$

$$\times\, 0{,}097 = 0{,}0191;$$

$$\left(\frac{dc_y}{d\alpha}\right)_{\text{кр}} = 4/\sqrt{\mathbf{M}_\infty^2 - 1} = 4/\sqrt{1{,}5^2 - 1} = 3{,}57.$$

В соответствии с этим

$$c_{y'} = 0{,}0191 + 3{,}57\,(0{,}213 + 1{,}122)\,0{,}1\cos^2 20^\circ = 0{,}442.$$

Коэффициент боковой силы

$$c_{z'} = \left(c_{z'}\right)_{\text{т}} + \left(dc_y/d\alpha\right)_{\text{кр}}\left(K_{\text{т}} + K_{\text{кр}}\right)\beta\cos\varphi,$$

где

$$\beta = \alpha_{\text{с}}\sin\varphi = 0{,}1\cdot\sin 20^\circ = 0{,}0342;$$

$$\left(c_{z'}\right)_{\text{т}} = 2\alpha'\,\alpha_{\text{с}}\sin\varphi\cdot\beta_{\text{к}}\sqrt{u_{\text{к}}^2 - 1}\,\left(S_{\text{мид}}/S_{\text{кр}}\right) =$$

$$= 2\cdot 1{,}12\cdot 0{,}1\cdot\sin 20^\circ\cdot 0{,}167\sqrt{5{,}5^2 - 1}\,0{,}097 = 0{,}00650.$$

Таким образом,

$$c_{z'} = 0{,}00650 + 3{,}57\,(0{,}213 + 1{,}122)\,0{,}0342\cdot 0{,}937 = 0{,}159.$$

Коэффициент момента тангажа относительно поперечной оси, проходящей через вершину крыла (точка A на рис. 3.XI.4),

$$m_{z'} = \left(m_{z'}\right)_{\text{т}} - \left[K_{\text{т}}\left(x_{\text{ц.д}}\right)_{\alpha\text{т(кр)}} + K_{\text{кр}}\left(x_{\text{ц.д}}\right)_{\alpha\text{кр(т)}}\right]\frac{\alpha_{\text{с}}\cos^2\varphi}{x_{\text{к}}}\left(\frac{dc_y}{d\alpha}\right)_{\text{кр}}.$$

Здесь:

$$x_{\text{к}} = x_{\text{г}} + x_{\text{ц}} + x_D = 3 + 6 + 3 = 12\ м;$$

$$\left(m_{z'}\right)_{\text{т}} = \left(c_{z'}\right)_{\text{т}}\frac{x_{\text{ц}} + x_{\text{г}} - (2/3)\,x_{\text{г}}}{x_{\text{к}}} = 0{,}0065\,\frac{6 + 3 - (2/3)\,3}{12} = 0{,}0038.$$

Из табл. XV-1-1 [21] для $r/s_m = 0{,}156$ имеем

$$\left(x_{\text{ц.д}\alpha}/b_{\text{кр}}\right)_{\text{т(кр)}} = 0{,}532,\ \text{а}\ \left(x_{\text{ц.д}\alpha}/b_{\text{кр}}\right)_{\text{кр(т)}} = 0{,}654,\ \text{откуда}$$

$$\left(x_{\text{ц.д}}\right)_{\alpha\text{т(кр)}} = 0{,}532\,x_D = 0{,}532\cdot 3 = 1{,}60;$$

$$\left(x_{\text{ц.д}}\right)_{\alpha\text{кр(т)}} = 0{,}654\,x_D = 0{,}654\cdot 3 = 1{,}96.$$

В соответствии с этими данными

$$m_{z'} = 0{,}0038 - (0{,}213\cdot 1{,}60 + 1{,}122\cdot 1{,}96)\,\frac{0{,}1\cos^2 20^\circ}{12}\cdot\frac{4}{\sqrt{1{,}5^2 - 1}} = -\,0{,}0629.$$

Коэффициент момента крена

$$m_{x'} = -\,K_{\text{кр}}\left(\frac{dc_y}{d\alpha}\right)_{\text{кр}}\frac{\left(z_{\text{ц.д}}\right)_{\alpha\text{кр(т)}}}{x_{\text{к}}}\alpha_{\text{с}}\cos\varphi.$$

Здесь боковая координата центра давления определяется следующим образом. Из табл. XV-1-1 [21] по $r/s_m=0{,}156$ находим

$$(z_{\text{ц.д}})_{\alpha\text{кр(т)}} = (z_{\text{ц.д}\alpha} - r)/(s_m - r) = 0{,}420.$$

Имея в виду, что $r=r_{\text{ц}}=0{,}5$, а $s_m=3{,}2$, подсчитаем:

$$z_{\text{ц.д}\alpha} = 0{,}420\,(s_m - r_{\text{ц}}) + r_{\text{ц}} = 0{,}420\,(3{,}2 - 0{,}5) + 0{,}5 = 1{,}63.$$

Таким образом,

$$m_{x'} = -1{,}122 \cdot 4 \cdot 1{,}63 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}937/(\sqrt{1{,}5^2 - 1}\,12) = -0{,}051.$$

XI.13. При наличии скольжения тонкой крестообразной комбинации (цилиндрический корпус и одинаковые консоли нулевой толщины) особенностью аэродинамической интерференции (в рамках аэродинамической теории тонкого тела) является независимость от угла крена величины подъемной силы, определяемой в вертикальной плоскости, параллельной набегающему потоку и проходящей через продольную ось летательного аппарата. Это следует из формулы

$$Y = 2\alpha_c\,\pi s_m^2\,(1 - 1/\bar{s}_m^2 + 1/\bar{s}_m^4)\,q_\infty.$$

Как видим, в эту формулу угол крена не входит.

Физически такую особенность интерференции можно объяснить следующим образом. Вертикальные консоли нулевой толщины не влияют на обтекание комбинации в продольном направлении под углом атаки α, а горизонтальные — в направлении угла скольжения β. Это позволяет рассматривать два независимых потока, один из которых обтекает комбинацию корпус — вертикальное крыло под углом β, а другой — корпус — горизонтальное крыло под углом α. При этом известно, что суммарная подъемная сила таких плоских комбинаций не зависит от угла крена (см. задачу XI.10). Следовательно, не будет зависеть от этого угла и подъемная сила всей крестообразной комбинации.

XI.14 Для интерференционных сил, вызванных креном ($\alpha\neq0$, $\beta\neq0$), происходит большее смещение центра давления, чем для интерференционных сил при отсутствии скольжения ($\alpha\neq0$, $\beta=0$). Это объясняется дополнительным перераспределением давления за счет воздействия потока, обусловленного скольжением.

XI.15. Момент крена тонкой крестообразной комбинации с одинаковыми консолями, находящейся в невозмущенном сверхзвуковом потоке под углами атаки α и скольжения β, равен нулю, так как согласно аэродинамической теории тонкого тела вертикальные консоли создают такой же по величине момент крена, как и горизонтальные консоли, но обратный по направлению.

XI.16. Если летательный аппарат в виде тонкой крестообразной комбинации находится в слабовозмущенном сверхзвуковом потоке под углом атаки и скольжения, то происходит взаимная интерференция несущих консолей. Наличие вертикальных консолей уменьшает воздействие поперечных потоков со скоростями $V_\infty\alpha$ и $V_\infty\beta$ (рис. 3.XI.3) на перераспределение давления по консолям и снижает индуцированную нормальную силу крыла. Несимметричное обтекание не изменяет распределения давления по корпусу, а координаты центров давления консолей оказываются близкими к соответствующим значениям для изолированных консолей, поэтому интерференция крыла с корпусом не оказывает заметного влияния на положение центра давления всего аппарата.

XI.17. Влияние хвостовой части корпуса, расположенного за консолями крыла, на аэродинамические характеристики летательного аппарата с уменьшением числа $\mathbf{M}_\infty$ будет возрастать, так как вследствие увеличения угла Маха [$\mu_\infty=\arcsin(1/\mathbf{M}_\infty)$] на все большую площадь кор-

нуса будет передаваться нагрузка, индуцируемая крылом (см. рис. 3.XI.2).

XI.18. Влияние хвостовой части корпуса, расположенной за консолями крыла, сказывается в смещении центра давления в направлении к донному срезу, поскольку нагрузки, индуцируемые крылом, распространяются на эту часть корпуса и способствуют возникновению большего стабилизирующего эффекта.

XI.19. Рассмотрим расчет по аэродинамической теории тонкого тела. Коэффициент перепада давлений на нижней и верхней сторонах корпуса в присутствии крыла

$$\Delta\bar{p}_{т(кр)} = -4\alpha \frac{4\frac{z^2}{r^2}\cdot\frac{dr}{dx}\cdot\frac{r}{s} - \left(1+\frac{r^2}{s^2}\right)\left[2\frac{r}{s}\cdot\frac{dr}{dx}+\frac{ds}{dx}\left(1-\frac{r^2}{s^2}\right)\right]}{\left[\left(1+\frac{r^2}{s^2}\right)^2 - 4\frac{z^2}{s^2}\right]^{1/2}} \pm$$

$$\pm \frac{64\alpha\beta\frac{z^2}{s^2}(1-z^2/r^2)}{\left[\left(1+\frac{r^2}{s^2}\right)^2 - 4\frac{z^2}{s^2}\right]^{1/2}\left[\left(1-\frac{r^2}{s^2}\right)^2 + 4\frac{z^2}{s^2}\right]^{1/2}},$$

где знак плюс относится к правой половине корпуса, а минус — к левой. В нашем случае корпус на участке расположения консоли имеет постоянный радиус, поэтому $dr/dx=0$. Учитывая также, что $\alpha=\alpha_c\cos\varphi$ и $\beta=\alpha_c\sin\varphi$, найдем

$$\Delta\bar{p}_{т(кр)} = \frac{4\alpha_c\cos\varphi\frac{ds}{dx}\left(1-\frac{r^4}{s^4}\right)}{\left[\left(1+\frac{r^2}{s^2}\right)^2 - 4\frac{z^2}{s^2}\right]^{1/2}} \pm$$

$$\pm \frac{64\alpha_c^2\cos\varphi\sin\varphi\frac{z^2}{s^2}\left(1-\frac{z^2}{r^2}\right)}{\left[\left(1+\frac{r^2}{s^2}\right)^2 - 4\frac{z^2}{s^2}\right]^{1/2}\left[\left(1-\frac{r^2}{s^2}\right)^2 + \frac{4z^2}{s^2}\right]^{1/2}}.$$

Вычисляем (см. рис. 2.XI.2):

$$\alpha_c\sin\varphi = 0{,}1\cdot\sin 20^\circ = 0{,}0342; \quad \alpha_c\cos\varphi = 0{,}1\cdot\cos 20^\circ = 0{,}0940;$$

$$\frac{ds}{dx} = \frac{s_m - r_ц}{x_D} = \frac{3{,}5-0{,}5}{3} = 1; \quad s = r + x\frac{ds}{dx} = 0{,}5 + x;$$

$$\frac{r}{s} = \frac{r}{r + x\,(ds/dx)} = \frac{0{,}5}{0{,}5+x} = \frac{1}{1+2x};$$

$$z/r = \cos\theta; \quad z/s = (z/r)/(r/s) = \cos\theta/(1+2x).$$

С учетом этих данных

$$\Delta\bar{p}_{т(кр)} = \frac{4\cdot 0{,}094\left[1-\frac{1}{(1+2x)^4}\right]}{\left\{\left[1+\frac{1}{(1+2x)^2}\right]^2 - 4\cos^2\theta\frac{1}{(1+2x)^2}\right\}^{1/2}} \pm$$

$$\pm \frac{64\cdot 0{,}094\cdot 0{,}0342\cdot\cos^2\theta\frac{1}{(1+2x)^2}(1-\cos^2\theta)}{\left\{\left[1+\frac{1}{(1+2x)^2}\right]^2 - 4\cos^2\theta\frac{1}{(1+2x)^2}\right\}^{1/2}\left\{\left[1-\frac{1}{(1+2x)^2}\right]^2 + 4\cos^2\theta\frac{1}{(1+2x)^2}\right\}^{1/2}} =$$

$$= \frac{0{,}376\left[1-\dfrac{1}{(1+2x)^4}\right]}{\left\{\left[1+\dfrac{1}{(1+2x)^2}\right]^2-\dfrac{4\cos^2\theta}{(1+2x)^2}\right\}^{1/2}} \pm$$

$$\pm \frac{\dfrac{0{,}204\cdot\cos^2\theta\cdot\sin^2\theta}{(1+2x)^2}}{\left\{\left[1+\dfrac{1}{(1+2x)^2}\right]^2-\dfrac{4\cos^2\theta}{(1+2x)^2}\right\}^{1/2}\left\{\left[1-\dfrac{1}{(1+2x)^2}\right]^2+\dfrac{4\cos^2\theta}{(1+2x)^2}\right\}^{1/2}}.$$

Коэффициент давления для $x=0$ (точки на корпусе у вершины крыла)

$$\Delta\bar{p}_{т(кр)} = \pm\frac{0{,}204\cdot\cos^2\theta\sin^2\theta}{2\sin\theta\cdot 2\cos\theta} = \pm 0{,}05\cos\theta\sin\theta.$$

Для $x=x_D=3$

$$\Delta\bar{p}_{т(кр)} = \frac{0{,}376\,(1-0{,}00042)}{[(1+0{,}0204)^2-4\cdot 0{,}0204\cos^2\theta]^{1/2}} \pm$$

$$\pm\frac{0{,}204\cos^2\theta\sin^2\theta 0{,}0204}{[(1+0{,}0204)^2-4\cdot 0{,}0204\cos^2\theta]^{1/2}\,[(1-0{,}0204)^2+4\cdot 0{,}0204\cos^2\theta]^{1/2}} =$$

$$= \frac{0{,}376}{(1{,}04-0{,}0816\cos^2\theta)^{1/2}} \pm \frac{0{,}0042}{(1{,}04-0{,}0816\cos^2\theta)^{1/2}(0{,}996+0{,}0816\cos^2\theta)^{1/2}}.$$

Коэффициент перепада давления на горизонтальных консолях (на правой со знаком плюс, на левой — со знаком минус)

$$\Delta\bar{p}_{кр(т)} = \frac{4\alpha\dfrac{ds}{dx}\left(1-\dfrac{r^4}{s^4}\right)}{\left[1+\dfrac{r^4}{s^4}-\dfrac{z^2}{s^2}\left(1+\dfrac{r^4}{s^4}\right)\right]^{1/2}} \pm \frac{4\dfrac{z^2}{s^2}\alpha\beta\left(1-\dfrac{r^4}{z^4}\right)^2}{\left[\left(1+\dfrac{r^4}{s^4}\right)^2-\dfrac{z^4}{s^4}\left(1+\dfrac{r^4}{z^4}\right)^2\right]^{1/2}}.$$

Подставляя данные, получим

$$\Delta\bar{p}_{кр(т)} = \frac{4\cdot 0{,}1\cos 20^\circ\,[1-1/(1+2x)^4]}{\{1+1/(1+2x)^4-[z^2/(0{,}5+x)^2][1+1/(1+2x)^4]\}^{1/2}} \pm$$

$$\pm\frac{[4z^2/(0{,}5+x)^2]\,0{,}1\cdot\cos 20^\circ\cdot 0{,}1\cdot\sin 20^\circ\,[1-(0{,}5/z)^4]^2}{\{[1+1/(1+2x)^4]^2-[z/(0{,}5+x)]^4\,[1+(0{,}5/z)^4]^2\}^{1/2}} =$$

$$= \frac{0{,}376\,[1-1/(1+2x)^4]}{\{1+1/(1+2x)^4-[z/(0{,}5+x)]^2\,[1+1/(1+2x)^4]\}^{1/2}} \pm$$

$$\pm\frac{0{,}0128\,[1-(0{,}5/z)^4]^2\,z^2/(0{,}5+x)^2}{\{[1+1/(1+2x)^4]^2-[z/(0{,}5+x]^4\,[1+(0{,}5/z)^4]^2\}^{1/2}}.$$

Для $x=0$

$$\Delta\bar{p}_{кр(т)} = \pm\frac{0{,}0128\,(z/0{,}5)^2\,[1-(0{,}5/z)^4]^2}{\{4-(z/0{,}5)^4\,[1+(0{,}5/z)^4]^2\}^{1/2}},$$

а для $x=x_D=3$

$$\Delta\bar{p}_{кр(т)} = \frac{0{,}376\,(1-0{,}00042)}{[1+0{,}00042-(z^2/12{,}25)\,(1+0{,}00042)]^{1/2}} \pm$$

$$\pm\frac{0{,}128\,[1-(0{,}5/z)^4]^2\,z^2/12{,}25}{\{(1+0{,}00042)^2-(z^4/150)\,[1+(0{,}5/z)^4]^2\}^{1/2}} =$$

$$= \frac{0{,}376}{(1-z^2/12{,}25)^{1/2}} \pm \frac{0.001\cdot z^2\,[1-(0{,}5/z)^4]^2}{\{1-(z^4/150)\,[1+(0{,}5/z)^4]^2\}^{1/2}}.$$

Вычисляем коэффициент перепада давлений на нижней (знак плюс) и верхней (знак минус) консолях:

$$\Delta\bar{p}_{\text{кр(т)}} = \frac{4\beta\,(ds/dx)\,(1-r^4/s^4)}{[1+r^4/s^4-(y^2/s^2)\,(1+r^4/s^4)^2]^{1/2}} \pm$$
$$\pm \frac{4\,(y^2/s^2)\,\alpha\beta\,(1-r^4/y^4)^2}{[(1+r^4/s^4)^2-(y^4/s^4)\,(1+r^4/y^4)^2]^{1/2}}.$$

После соответствующих подстановок получим

$$\Delta\bar{p}_{\text{кр(т)}} = \frac{4\cdot 0{,}1\cdot\sin 20^\circ\,[1-0{,}5^4/(0{,}5+x)^4]}{\{1+0{,}5^4/(0{,}5+x)^4-[y^2/(0{,}5+x)^4]\,(1+0{,}5^4/y^4)^2\}^{1/2}} \pm$$
$$\pm \frac{4\,[y^2/(0{,}5+x)^2]\,0{,}1\cdot\cos 20^\circ\cdot 0{,}1\cdot\sin 20^\circ\,(1-0{,}5^4/y^4)^2}{\{[1+0{,}5^4/(0{,}5+x)^4]^2-[y^4/(0{,}5+x)^4]\,(1+0{,}5^4/y^4)^2\}^{1/2}} =$$
$$= \frac{0{,}137\,[1-0{,}5^4/(0{,}5+x)^4]}{\{1+0{,}5^4/(0{,}5+x)^4-[y^2/(0{,}5+x)^2]\,(1+0{,}5^4/y^4)^2\}^{1/2}} \pm$$
$$\pm \frac{0{,}0128\,[y^2/(0{,}5+x)^2]\,(1-0{,}5^4/y^4)^2}{\{[1+0{,}5^4/(0{,}5+x)^4]^2-[y^4/(0{,}5+x)^4]\,(1+0{,}5^4/y^4)^2\}^{1/2}}.$$

Для $x=0$

$$\Delta\bar{p}_{\text{кр(т)}} = \pm\frac{0{,}0128\,(y^2/0{,}5^2)\,(1-0{,}5^4/y^4)^2}{[4-(y^4/0{,}5^4)\,(1+0{,}5^4/y^4)^2]^{1/2}},$$

а для $x=x_D=3$

$$\Delta\bar{p}_{\text{кр(т)}} = \frac{0{,}137\,(1-0{,}00042)}{[1+0{,}00042-(y^2/12{,}25)\,(1+0{,}5^4/y^4)]^{1/2}} \pm$$
$$\pm \frac{0{,}0128\,(y^2/12{,}25)\,(1-0{,}5^4/y^4)^2}{[(1+0{,}00042)^2-(y^4/150)\,(1+0{,}5^4/y^4)]^{1/2}} =$$
$$= \frac{0{,}137}{[1-(y^2/12{,}25)\,(1+0{,}5^4/y^4)]^{1/2}} \pm \frac{0{,}001y^2\,(1-0{,}5^4/y^4)^2}{[1{,}004-(y^2/150)\,(1+0{,}5^4/y^4)]^{1/2}}.$$

Рассчитаем действующие силы, моменты и их коэффициенты. Коэффициент дополнительной силы, действующей на корпус в направлении отсчета угла α, отнесенный к площади $S_{\text{кр}}$ двух изолированных консолей,

$$\Delta c^{\alpha}_{y\,\text{т(кр)}} = K_{\text{т}}\,(dc_y/d\alpha)_{\text{кр}}\,\alpha_{\text{с}}\cos\varphi.$$

Здесь производную $(dc_y/d\alpha)_{\text{кр}}$ определим по линеаризованной теории. С этой целью вычислим вначале угол стреловидности крыла:

$$\varkappa = \operatorname{arctg}\left(\frac{s_m - r_{\text{ц}}}{x_{\text{д}}}\right) = \operatorname{arctg}\frac{3{,}5-0{,}5}{3} = 45^\circ$$

и угол Маха:

$$\mu_\infty = \arcsin\left(1/\mathbf{M}_\infty\right) = \arcsin(1/1{,}5) = 41^\circ 50'.$$

Согласно этим данным $\varkappa<\pi/2-\mu_\infty$ ($45^\circ<\pi/2-41^\circ 50'=48^\circ 10'$) и, следовательно, передняя кромка крыла будет сверхзвуковой. Для такого крыла

$$(dc_y/d\alpha)_{\text{кр}} = 4/\sqrt{\mathbf{M}_\infty^2-1} = 4/\sqrt{1{,}5^2-1} = 3{,}57.$$

Из табл. XV-1-1 [21] по величине $r/s_m=0{,}5/3{,}5=0{,}143$ находим $K_{\text{т}}=0{,}195$, тогда

$$\Delta c^{\alpha}_{\text{ут(кр)}} = 0{,}195\cdot 3{,}57\cdot 0{,}1\cdot\cos 20^\circ = 0{,}0655.$$

Соответствующий коэффициент силы в направлении отсчета угла β

$$\Delta c^{\beta}_{y\,\text{т(кр)}} = -K_{\text{т}}\,(dc_y/d\alpha)_{\text{кр}}\,\alpha_{\text{с}}\sin\varphi = -0{,}195\cdot 3{,}57\cdot 0{,}1\sin 20^\circ = -0{,}024.$$

В направлении оси Oy' коэффициент подъемной силы

$$c_{y'_{т(кр)}} = \Delta c^{\alpha}_{y\,т(кр)} \cos\varphi - \Delta c^{\beta}_{y\,т(кр)} \sin\varphi = 0{,}0655 \cdot \cos 20° + $$

$$+ 0{,}024 \cdot \sin 20° = 0{,}0698.$$

Боковая сила в направлении Oz' равна нулю. Коэффициент подъемной силы всей комбинации (см. рис. 3.XI.5)

$$c_{y'} = c_{y'_т} + \left(dc_y/d\alpha\right)_{кр} \left(K_т + K_{кр}\right) \alpha_с,$$

где

$$c_{y'_т} = 2\alpha'\alpha_с \beta_к \sqrt{u_к^2 - 1}\, S_{мид}/S_{кр} =$$

$$= 2\sqrt{1{,}5^2 - 1}\, 0{,}1\, \frac{0{,}5}{3} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{1{,}5^2 - 1}\, 0{,}5/3}} \cdot \frac{3{,}14 \cdot 0{,}5^2}{(3{,}5 - 0{,}5)\, 3} = 0{,}0198.$$

Коэффициент $K_{кр}$ находим из табл. XV-1-1 [21] по значению $r/s_m = 0{,}143$. Его величина $K_{кр} = 1{,}113$. В соответствии с этими данными

$$c_{y'} = 0{,}0198 + 3{,}57\,(0{,}195 + 1{,}113)\, 0{,}1 = 0{,}484.$$

Вычислим теперь коэффициент момента тангажа (см. рис. 3.XI.4):

$$m_{z'} = \frac{M_{z'}}{q_\infty S_{кр}\, x_к} = m_{z'_т} - \frac{(x_{ц.д})_{\alpha кр(т)} K_{кр} + (x_{ц.д})_{\alpha т(кр)} K_т}{x_к} \left(\frac{dc_y}{d\alpha}\right)_{кр} \alpha_с.$$

Ранее был найден коэффициент $m_{z'_т} = 0{,}0038$ (рассчитанный по площади консолей $S_{кр}$). Кроме того, по табл. XV-1-1 [21] определим, зная $r/s_m = 0{,}143$, безразмерные коэффициенты центров давления:

$$(c_{ц.д})_{\alpha кр(т)} = (x_{ц.д\alpha}/b_{кр})_{кр(т)} = 0{,}654;$$

$$(c_{ц.д})_{\alpha т(кр)} = (x_{ц.д\alpha}/b_{кр})_{т(кр)} = 0{,}530.$$

По этим данным находим, полагая $b_{кр} = x_D = 3$ *м*,

$$(x_{ц.д})_{\alpha кр(т)} = 0{,}654 \cdot 3 = 1{,}96; \quad (x_{ц.д})_{\alpha т(кр)} = 0{,}530 \cdot 3 = 1{,}59.$$

Таким образом,

$$m_{z'} = 0{,}0038 - \frac{1{,}96 \cdot 1{,}113 + 1{,}59 \cdot 0{,}195}{12}\, 3{,}57 \cdot 0{,}1 = -0{,}070.$$

Определим подъемную силу:

$$Y' = c_{y'} q_\infty S_{кр} = 0{,}484 \cdot 1{,}57 \cdot 10^4\, (3{,}2 - 0{,}5)\, 3 = 6{,}2 \cdot 10^4\ кГ$$

и момент:

$$M_{z'} = m_{z'} q_\infty S_{кр}\, x_к = -0{,}070 \cdot 1{,}57 \cdot 10^4 \cdot 8{,}1 \cdot 12 = -10{,}7 \cdot 10^4\ кГ \cdot м.$$

Затем подсчитаем координату центра давления:

$$x_{ц.д} = -M_{z'}/Y' = 10{,}7 \cdot 10^4/(6{,}2 \cdot 10^4) = 1{,}73\ м.$$

По теории тонкого тела определим суммарные силы и коэффициенты. Коэффициент подъемной силы в направлении оси Oy_1 (см. рис. 3.XI.3)

$$c_{y1} = 2\alpha \bar{s}_m^2 \left(1 - 1/\bar{s}_m^2 + 1/\bar{s}_m^4\right).$$

Так как здесь $\bar{s}_m = s_m/r = 3{,}2/0{,}5 = 6{,}4$, то

$$c_{y1} = 2 \cdot 0{,}1 \cdot \cos 20° \cdot 6{,}4^2 \left(1 - 1/6{,}4^2 + 1/6{,}4^4\right) = 7{,}51.$$

Коэффициент боковой силы в направлении оси Oz_1

$$c_{z1} = -2\bar{\beta}\bar{s}_m^2\left(1 - 1/\bar{s}_m^2 + 1/\bar{s}_m^4\right) = -2\cdot 0{,}1\cdot\sin 20^\circ\cdot 6{,}4^2\left(1 - 1/6{,}4^2 + 1/6{,}4^4\right) = -2{,}74.$$

Найдем соответствующие силы Y_1 и Z_1:

$$Y_1 = c_{y1}\, q_\infty\, S_{\text{мид}} = 7{,}51\cdot 1{,}57\cdot 10^4\cdot 0{,}785 = 9{,}30\cdot 10^4\ \text{кГ};$$

$$Z_1 = c_{z1}\, q_\infty\, S_{\text{мид}} = -2{,}74\cdot 1{,}57\cdot 10^4\cdot 0{,}785 = -3{,}40\cdot 10^4\ \text{кГ}.$$

Коэффициент подъемной силы в направлении оси Oy

$$c_y = 2\alpha_c\bar{s}_m^2\left(1 - 1/\bar{s}_m^2 + 1/\bar{s}_m^4\right) = 2\cdot 0{,}1\cdot 6{,}4^2\left(1 - 1/6{,}4^2 + 1/6{,}4^4\right) = 8.$$

Соответствующая сила

$$Y = c_y\, q_\infty\, S_{\text{мид}} = 8\cdot 1{,}57\cdot 10^4\cdot 0{,}785 = 9{,}94\cdot 10^4\ \text{кГ}.$$

Как уже было установлено ранее, боковая сила в направлении оси Oz' равна нулю.

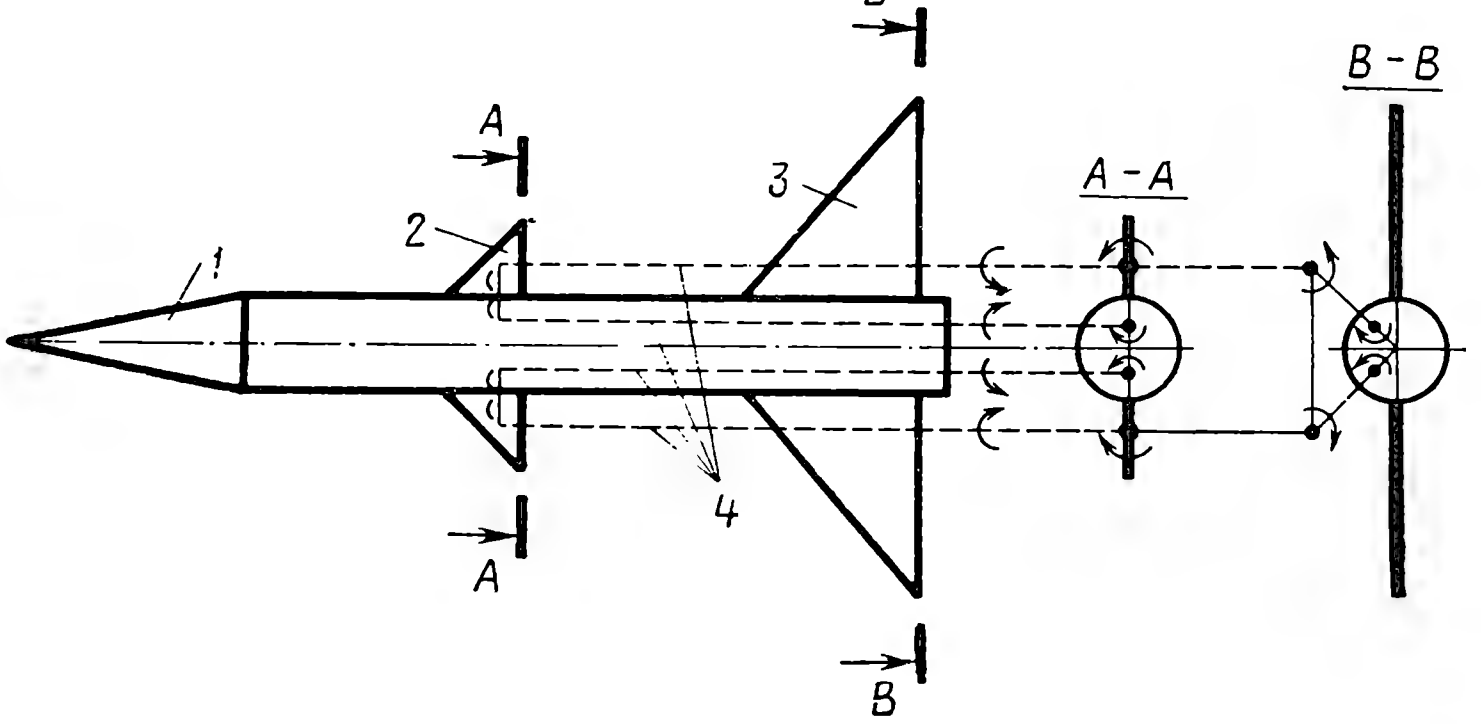


Рис. 3.XI.6. Упрощенная вихревая модель комбинации корпус — крыло:

1 — корпус; *2* — крыло; *3* — оперение; *4* — П-образные вихри

XI.20. Физическая природа интерференции между оперением и крылом заключается в том, что вихревая пелена, сбегающая с крыла и проходящая вблизи оперения, вызывает скос и торможение потока и, как следствие, уменьшение его угла атаки и подъемной силы.

XI.21. Крыло, присоединенное к корпусу, сильнее скашивает поток. Это объясняется тем, что такое крыло вследствие интерференции с корпусом обладает большей, чем изолированное крыло, подъемной силой. При возросшей подъемной силе интенсивнее будет сбегающая с крыла вихревая пелена, индуцирующая за ним бóльшие скорости и сильнее скашивающая поток.

XI.22. Упрощенная вихревая модель комбинации корпус — крыло, применяемая при исследовании интерференции оперения с крылом при сверхзвуковых скоростях, представляет собой две пары П-образных вихрей (рис. 3.XI.6). Причем присоединенный вихрь (перекладина «П») расположен частично на консоли крыла и корпусе. Один свободный вихрь сбегает с консоли, а другой располагается вдоль корпуса. Направление вращения этих сопряженных вихрей противоположное.

XI.23. Коэффициент эффективности оперения находится по формуле

$$\eta_{\text{оп}} = \frac{Y_{\text{т.кр.оп}} - Y_{\text{т.кр}}}{Y_{\text{т.оп}} - Y_{\text{т}}} = 1 + \frac{i_{\text{оп}}\, K_{\text{кр}}\left(dc_y/d\alpha\right)_{\text{кр}}\, S_{\text{кр}}\left(\bar{s}_m^2\right)_{\text{оп}}}{8\left[(\bar{s}_m)_{\text{оп}} + r_{\text{оп}}\right]^2\pi\left[(\bar{s}_m)_{\text{оп}} - r_{\text{оп}}\right](z_v - r_{\text{кр}})}. \quad (3\ \text{XI}.2)$$

Эта формула определяет отношение приращения подъемной силы при установке оперения на комбинацию крыло — корпус к приращению подъемной силы при установке оперения на изолированный корпус.

Параметр $i_{оп}$ в (3.XI.2) представляет собой отношение двух безразмерных величин: приращения подъемной силы корпуса и оперения под воздействием вихря и циркуляции, характеризующей интенсивность сбегающего вихря, и вычисляется по выражению

$$i_{оп} = -\frac{4\bar{z}_v\,[(\bar{s}_m)_{оп} - 1]\,(K_{кр})_{оп}}{(\bar{y}_v^2 + \bar{z}_v^2)\,(\bar{s}_m)_{оп}}.$$

Боковая координата вихря у оперения z_v в расчетах интерференции берется такой же, как на крыле, поскольку исследования показывают, что смещение вихря в боковом направлении мало.

Из табл. XV-2-1 [21] находим для $r/(s_m)_{кр} = 0{,}5/2{,}5 = 0{,}2$ значение $(z_v - r)/(s_m - r)_{кр} = 0{,}76$, по которому определяем координату:

$$z_v = r + 0{,}76\,[(s_m)_{кр} - r] = 0{,}5 + 0{,}76\,(2{,}5 - 0{,}5) = 2{,}02$$

и ее относительное значение:

$$\bar{z}_v = z_v/(s_m)_{оп} = 2{,}02/1{,}5 = 1{,}34.$$

Координату y_v найдем в соответствии с рис. 2.XI.3 как катет прямоугольника ABC, предполагая, что она расположена под центром тяжести площади оперения с учетом части, занятой корпусом, а направление вихрей совпадает с направлением потока:

$$y_v = (x_{ц.т})_{оп}\,\alpha = 4 \cdot 0{,}1 = 0{,}4.$$

Относительная величина этой координаты

$$\bar{y}_v = y_v/(s_m)_{оп} = 0{,}4/1{,}5 = 0{,}267.$$

По табл. XV-1-1 определяем для $r/(s_m)_{оп} = 0{,}5/1{,}5 = 0{,}333$ значение $(K_{кр})_{оп} = 1{,}285$. Имея в виду также, что $(\bar{s}_m)_{оп} = (s_m)_{оп}/r = 1{,}5/0{,}5 = 3$, найдем

$$i_{оп} = -\frac{4 \cdot 1{,}34\,(3-1)\,1{,}285}{[(0{,}267)^2 + (1{,}34)^2]\,3} = -2{,}45.$$

Теперь можно вычислить коэффициент эффективности по формуле (3.XI.2), в которой $K_{кр}$ определяется из табл. XV-1-1 [21] по $r/(s_m)_{кр} = 0{,}5/2{,}5 = 0{,}2$ и равен $K_{кр} = 1{,}162$. Для определения $(dc_y/d\alpha)_{кр}$ необходимо сначала установить характер передней кромки крыла. Угол стреловидности

$$\varkappa = \operatorname{arctg}\frac{x_{кр}}{(s_m)_{кр} - r_ц} = \operatorname{arctg}\frac{2}{2{,}5 - 0{,}5} = 45°,$$

а угол Маха

$$\mu_\infty = \arcsin\left(1/M_\infty\right) = \arcsin\left(1/1{,}5\right) = 41°50'.$$

Отсюда видно, что

$$\varkappa < \pi/2 - \mu_\infty \quad (45° < \pi/2 - 41°50' = 48°10').$$

Таким образом, передняя кромка является сверхзвуковой. Для этого случая

$$(dc_y/d\alpha)_{кр} = 4/\sqrt{M_\infty^2 - 1} = 4/\sqrt{1{,}5^2 - 1} = 3{,}57$$

Имея в виду, что площади консолей крыла

$$S_{кр} = [(s_m)_{кр} - r]\,x_{кр} = (2{,}5 - 0{,}5)\,2 = 4\ м^2,$$

найдем после подстановки в (3.XI.2) всех данных

$$\eta_{оп} = 1 + \frac{-2{,}45 \cdot 1{,}162 \cdot 3{,}57 \cdot 4 \cdot 1{,}5^2}{8\,(1{,}5 + 0{,}5)^2\, 3{,}14\,(1{,}5 - 0{,}5)\,(2{,}02 - 0{,}5)} = 0{,}4.$$

XI.24. Согласно аэродинамической теории тонкого тела сила, создаваемая рулевой поверхностью, сосредоточивается на ее передней кромке, поэтому форма этой поверхности не влияет на величину управляющей силы. С физической точки зрения это можно объяснить следующим. На летательных аппаратах, которые могут считаться тонкими телами, размах рулевой поверхности сравнительно невелик, поэтому изменения подъемной силы, которые имеют место при изменении формы рулевой поверхности и объясняются различной несущей способностью участков поверхности, расположенных на различных удалениях от корпуса, получаются незначительными.

XI.25. По табл. XV-1-1 [21] для отношения $r/s_m = r_s = 0{,}6/1{,}5 = 0{,}4$ находим коэффициент интерференции $K_{кр} = 1{,}349$. С его помощью, используя свойство подвижного крыла вызывать при повороте на угол δ такую же подъемную силу, как и при повороте комбинации корпус — неподвижное крыло на угол атаки $\alpha = \delta$, определим суммарную управляющую силу:

$$Y_р = K_{кр} Y_{кр} = 1{,}349 \cdot 9000 = 12\,100 \ \kappa Г.$$

Далее подсчитаем значение коэффициента интерференции:

$$k_{кр} = \Delta Y_{кр(т)\delta} / Y_{кр} = K_{кр}^2 / (1 + r_s)^2 = 1{,}349^2 / (1 + 0{,}4)^2 = 0{,}928$$

и соответствующую подъемную силу:

$$\Delta Y_{кр(т)\delta} = k_{кр} Y_{кр} = 0{,}928 \cdot 9000 = 8350 \ \kappa Г.$$

Поскольку $Y_р = \Delta Y_{кр(т)\delta} + \Delta Y_{т(кр)\delta}$, то

$$\Delta Y_{т(кр)\delta} = Y_р - \Delta Y_{кр(т)\delta} = 12140 - 8350 = 3790 \ \kappa Г.$$

XI.26. Отношение коэффициентов подъемной силы рулей и соответствующих изолированных крыльев

$$\frac{Y_р}{Y_{кр}} = \frac{2}{\pi\,(1 - \bar{s}_i)^2}\left[\frac{\pi}{4}\left(1 - r_s^2\right)^2 - \left(\bar{s}_i^2 - r_s^4\right)^{1/2}\left(1 - \bar{s}_i^2\right)^{1/2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(1 + r_s^4\right)\arcsin\frac{1 - 2\bar{s}_i^2 + r_s^4}{1 - r_s^4} + r_s^2 \arcsin\frac{\left(1 + r_s^4\right)\bar{s}_i^2 - 2r_s^4}{\left(1 - r_s^4\right)\bar{s}_i^2}\right],$$

где $\bar{s}_i = s_i/s_m = 1{,}25/2{,}5 = 0{,}5$; $\quad r_s = r/s_m = 0{,}5/2{,}5 = 0{,}2$.

Внося эти данные, получим

$$\frac{Y_р}{Y_{кр}} = \frac{c_{yр}}{c_{y\,кр}} = \frac{2}{\pi\,(1 - 0{,}5)^2}\left[\frac{\pi}{4}(1 - 0{,}2^2)^2 - (0{,}5^2 - 0{,}2^4)^{1/2}(1 - 0{,}5^2)^{1/2} + \right.$$

$$+ \frac{1}{2}(1 + 0{,}2^4)\arcsin\frac{1 - 2 \cdot 0{,}5^2 + 0{,}2^4}{1 - 0{,}2^4} +$$

$$\left. + 0{,}2^2 \arcsin\frac{(1 + 0{,}2^4)\,0{,}5^2 - 2 \cdot 0{,}2^4}{(1 - 0{,}2^4)\,0{,}5^2}\right] = 1{,}59.$$

Определим $c_{y\,кр}$ изолированного крыла. Поскольку его форма и размеры, а также условия обтекания (M_∞ и $\alpha = \delta$) оказываются такими же, как в задаче XI.23, то имеем

$$c_{y\,кр} = (dc_y/d\alpha)_{кр}\,\alpha = 3{,}57 \cdot 0{,}1 = 0{,}357.$$

В соответствии с этим для руля

$$c_{ур} = c_{укр}\,(c_{ур}/c_{укр}) = 0{,}357 \cdot 1{,}59 = 0{,}56.$$

Таким образом, подъемная сила руля вследствие интерференции оказывается большей, чем соответствующего изолированного крыла.

XI.27. Отношение коэффициентов подъемной силы руля (подвижного крыла) и изолированных консолей $c_{ур}/c_{укр} = K_{кр}$. Этот коэффициент интерференции $K_{кр}$ по данным табл. XV-1-1 [21] для $r/s_m = 0{,}5/2{,}5 = 0{,}2$ равен 1,162. Поэтому $c_{у\,р}/c_{у\,кр} = 1{,}162$.

Как видно, подъемная сила руля возрастает за счет интерференции с корпусом более чем на 16% по сравнению с изолированным крылом.

Из решения предыдущей задачи имеем $c_{у\,кр} = 0{,}357$. В соответствии с этим

$$c_{ур} = c_{укр}\,(c_{ур}/c_{укр}) = 0{,}357 \cdot 1{,}162 = 0{,}416.$$

XI.28. Коэффициент подъемной силы летательного аппарата, отнесенный к площади изолированного крыла, определяется в виде суммы нескольких составляющих:

$$c_y = c_{ут} + (c_y)_{кр(т)} + (c_y)_{т(кр)} + (c_y)_{оп(т)} + (c_y)_{т(оп)} + (c_y)_{(т.оп)в}.$$

Найдем каждую из этих составляющих. Коэффициент подъемной силы корпуса принимаем равным соответствующему коэффициенту для головного конуса:

$$c_{ут} = 2\alpha'\alpha\beta_k \sqrt{u_к^2 - 1}\, S_{мид}/S_{кр},$$

где

$$\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = \sqrt{1{,}5^2 - 1} = 1{,}12;$$

$$\beta_k = r/x_г = 0{,}5/3 = 0{,}167;$$

$$u_k = 1/(\alpha'\,\beta_k) = 1\,(1{,}12 \cdot 0{,}167) = 5{,}35;$$

$$S_{мид}/S_{кр} = \pi r^2/\{x_{кр}\,[(s_m)_{кр} - r]\} = 3{,}14 \cdot 0{,}5^2/[2\,(2{,}5 - 0{,}5)] = 0{,}196.$$

В соответствии с этими данными

$$c_{ут} = 2 \cdot 0{,}1 \cdot 1{,}12 \cdot 0{,}167 \sqrt{5{,}35^2 - 1}\; 0{,}196 = 0{,}039.$$

Коэффициент подъемной силы поворотного крыла в присутствии корпуса

$$(c_y)_{кр(т)} = (K_{кр}\,\alpha + k_{кр}\,\delta_{кр})\,(c_y^\alpha)_{кр}.$$

Для изолированного крыла производная

$$(c_y^\alpha)_{кр} = (dc_y/d\alpha)_{кр} = 4/\sqrt{M_\infty^2 - 1} = 4/\sqrt{1{,}5^2 - 1} = 3{,}57.$$

Этот результат соответствует сверхзвуковой передней кромке крыла (см. решение задачи XI.23).

Далее из табл. XV-1-1 [21] по отношению $r/(s_m)_{кр} = r_s = 0{,}5/2{,}5 = 0{,}2$ находим $K_{кр} = 1{,}162$ и определяем

$$k_{кр} = K_{кр}^2/(1 + r_s)^2 = 1{,}162^2/(1 + 0{,}2)^2 = 0{,}938.$$

С учетом этих величин

$$(c_y)_{кр(т)} = (1{,}162 \cdot 0{,}1 + 0{,}938 \cdot 0{,}05)\,3{,}57 = 0{,}583.$$

Коэффициент подъемной силы корпуса в присутствии крыла

$$(c_y)_{т(кр)} = (K_т\,\alpha + k_т\delta_{кр})\,(c_y^\alpha)_{кр}.$$

Здесь $K_т$ находится из таблицы XV-1-1 [21] по $r/(s_m)_{кр}=0{,}2$ и равен 0,278, а коэффициент $k_т$ — из выражения

$$k_т = K_{кр} - k_{кр} = 1{,}162 - 0{,}938 = 0{,}224.$$

Таким образом,

$$(c_y)_{т(кр)} = (0{,}278 \cdot 0{,}1 + 0{,}224 \cdot 0{,}05)\, 3{,}57 = 0{,}139.$$

Коэффициент подъемной силы оперения в присутствии корпуса (без учета влияния вихрей крыла)

$$(c_y)_{оп(т)} = (K_{оп}\,\alpha + k_{оп} \cdot \delta_{оп})\,(c_y^{\alpha})_{оп}\,(S_{оп}/S_{кр}).$$

Консоли оперения геометрически подобны консолям крыла и, таким образом, имеют также сверхзвуковые передние кромки и то же значение коэффициента $(c_y^{\alpha})_{оп} = (c_y^{\alpha})_{кр} = 3{,}57$.

Отношение площадей

$$\frac{S_{оп}}{S_{кр}} = \frac{[(s_m)_{оп} - r]\,x_{оп}}{[(s_m)_{кр} - r]\,x_{кр}} = \frac{(1{,}5 - 0{,}5)\,1}{(2{,}5 - 0{,}5)\,2} = 0{,}25.$$

Коэффициент $K_{оп}$, найденный из табл. XV-1-1 [21] по параметру $r/(s_m)_{оп} = r_s = 0{,}5/1{,}5 = 0{,}333$, равен 1,285, а коэффициент

$$k_{оп} = K_{оп}^2/(1 + r_s)_{оп}^2 = 1{,}285^2/(1 + 0{,}333)^2 = 0{,}926.$$

Таким образом,

$$(c_y)_{оп(т)} = (1{,}285 \cdot 0{,}1 + 0{,}929 \cdot 0{,}05)\, 3{,}57 \cdot 0{,}25 = 0{,}156.$$

Коэффициент подъемной силы корпуса в присутствии оперения (без учета влияния вихрей крыла)

$$(c_y)_{т(оп)} = [(K_т)_{оп}\,\alpha + (k_т)_{оп}\,\delta_{оп}]\,(c_y^{\alpha})_{оп}\,(S_{оп}/S_{кр}).$$

Здесь $(K_т)_{оп}$ согласно данным табл. XV-1-1 [21] и величине $r/(s_m)_{оп} = 0{,}333$ равен 0,495, а коэффициент

$$(k_т)_{оп} = K_{оп} - k_{оп} = 1{,}285 - 0{,}926 = 0{,}359.$$

В соответствии с этими данными

$$(c_y)_{т(оп)} = (0{,}495 \cdot 0{,}1 + 0{,}359 \cdot 0{,}05)\, 3{,}57 \cdot 0{,}25 = 0{,}06.$$

Коэффициент подъемной силы оперенного участка, вызываемой влиянием вихрей крыла,

$$(c_y)_{(т.оп)в} = i_{оп}\,\frac{(c_y^{\alpha})_{кр}\,(c_y^{\alpha})_{оп}\,(K_{кр}\,\alpha + k_{кр}\,\delta_{кр})\,[(s_m)_{оп} - r]}{2\pi\lambda_{оп}\,(z_v - r)}.$$

Здесь удлинение изолированного оперения

$$\lambda_{оп} = \frac{4\,[(s_m)_{оп} - r]^2}{S_{оп}} = \frac{4\,(1{,}5 - 0{,}5)^2}{(1{,}5 - 0{,}5)\,1} = 4.$$

Из решения задачи XI.23 имеем $i_{оп} = -2{,}45$. Внося эти данные и другие известные величины, получим

$$(c_y)_{(т.оп)в} = -\,2{,}45\,\frac{3{,}57 \cdot 3{,}57\,(1{,}162 \cdot 0{,}1 + 0{,}938 \cdot 0{,}05)\,(1{,}5 - 0{,}5)}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 4\,(2{,}02 - 0{,}5)} = -\,0{,}093.$$

Теперь вычисляем суммарный коэффициент подъемной силы:

$$c_y = 0{,}039 + 0{,}583 + 0{,}139 + 0{,}156 + 0{,}06 - 0{,}093 = 0{,}884$$

и соответствующую величину этой силы:

$$Y = c_y q_\infty S_{кр} = c_y\,\frac{kp_\infty M_\infty^2}{2}\,[(s_m)_{кр} - r]\,x_{кр} = 0{,}884\,\frac{1{,}4 \cdot 10^4 \cdot 1{,}5^2}{2}\,(2{,}5 - 0{,}5)2 =$$

$$= 5{,}67 \cdot 10^4\ кГ.$$

XI.29. Подсчитаем необходимые для дальнейшего расчета величины:

$$r_s = r/s_m = 0{,}5/2{,}5 = 0{,}2;\quad \bar{s}_i = s_i/s_m = 1{,}5/2{,}5 = 0{,}6;$$
$$q_\infty = (k/2)\, p_\infty\, M_\infty^2 = (1{,}4/2)\, 10^4 \cdot 1{,}5^2 = 1{,}57 \cdot 10^4\ кГ/м^2.$$

Здесь величина скоростного напора вычислена при условии, что полет происходит в атмосфере воздуха при давлении $p_\infty = 10^4\ кГ/м^2$. Согласно аэродинамической теории тонкого тела [21] подъемная сила комбинации корпус — крыло — руль, обусловленная отклонением подвижного органа управления с той же хордой, что и у заданного руля,

$$Y_{р.п.п} = 4\delta q_\infty s_m^2 \left[\frac{\pi}{4}(1-r_s^2)^2 - r_s(1-r_s^2) + \frac{(1+r_s^2)^2}{2}\arcsin\frac{1-r_s^2}{1+r_s^2}\right] =$$
$$= 4\delta q_\infty s_m^2 \left[\frac{\pi}{4}(1-0{,}2^2)^2 - 0{,}2(1-0{,}2^2) + \frac{(1+0{,}2^2)^2}{2}\arcsin\frac{1-0{,}2^2}{1+0{,}2^2}\right] =$$
$$= 1{,}17\,(4\delta q_\infty s_m^2).$$

Теперь получим для этой комбинации подъемную силу, вызванную отклонением внешнего руля с той же хордой, что и у заданного,

$$Y_{р.вш} = 4\delta q_\infty s_m^2 \left[\frac{\pi}{4}(1-r_s^2)^2 - (\bar{s}_i^2 - r_s^4)^{1/2}(1-\bar{s}_i^2)^{1/2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}(1+r_s^4)\arcsin\frac{1-2\bar{s}_i^2+r_s^4}{1-r_s^4} + r_s^2\arcsin\frac{(1+r_s^4)\bar{s}_i^2 - 2r_s^4}{(1-r_s^4)\bar{s}_i^2}\right] =$$
$$= 4\delta q_\infty s_m^2 \left[\frac{\pi}{4}(1-0{,}2^2)^2 - (0{,}6^2 - 0{,}2^4)^{1/2}(1-0{,}6^2)^{1/2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}(1+0{,}2^4)\arcsin\frac{1-2\cdot 0{,}6^2+0{,}2^4}{1-0{,}2^4} + 0{,}2^2\arcsin\frac{(1+0{,}2^4)\,0{,}6^2 - 2\cdot 0{,}2^4}{(1-0{,}2^4)\,0{,}6^2}\right] =$$
$$= 0{,}448\,(4\delta q_\infty s_m^2).$$

Затем определяем отношение подъемной силы, зависящей от отклонения внутреннего руля, к соответствующей величине этой силы для изолированного крыла, представляющего собой соединенные вместе внутренние рули:

$$\left(\frac{Y_{р.вн}}{Y_{кр.вн}}\right)_{т.т} = \frac{Y_{р.п.п} - Y_{р.вш}}{2\pi\delta q_\infty (s_i - r)^2} = \frac{(1{,}17 - 0{,}488)\,4\delta q_\infty s_m^2}{2\pi\delta q_\infty (s_i - r)^2} =$$
$$= \frac{2\,(1{,}17 - 0{,}488)\,2{,}5^2}{\pi\,(1{,}5 - 0{,}5)^2} = 2{,}71.$$

Значение подъемной силы для изолированного крыла, вычисленное по линеаризованной теории,

$$(Y_{кр.вн})_{л.т} = 2\,(s_i - r)^2\, b_p\, q_\infty \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} =$$
$$= 2\,(1{,}5 - 0{,}5)^2\, 0{,}25 \cdot 1{,}57 \cdot 10^4 \frac{4\cdot 0{,}1}{\sqrt{1{,}5^2 - 1}} = 2830\ кГ.$$

Этому значению соответствует подъемная сила комбинации корпус — крыло — внутренний руль

$$Y_{р.вн} = (Y_{р.вн}/Y_{кр.вн})_{т.т}\,(Y_{кр.вн})_{л.т} = 2{,}71 \cdot 2830 = 7660\ кГ.$$

XI.30. Вычисляем вначале с учетом интерференции производную по углу атаки α от коэффициента нормальной силы комбинации корпус — крыло — оперение:

$$(c_N^\alpha)_{т.кр.о.п} = (K_{кр} + K_т + K_{т.и})(c_N^\alpha)_{кр} + (K_{оп} + K_т)(c_N^\alpha)_{оп}(S_{оп}/S_{кр}). \quad (3.XI.3)$$

Эта формула содержит результаты расчета коэффициентов интерференции для комбинаций соответственно корпус — крыло и корпус — оперение. Определим эти коэффициенты, используя графики и таблицы, приведенные в [21]. По величине $(r_s)_{кр} = r/(s_m)_{кр} = 1/4{,}1 = 0{,}244$ из табл. XV-3-1 находим $K_{кр} = (c_y)_{кр(т)}/(c_y)_{кр} = 1{,}2$, а по графику на рис. XV-1-8, *б* для

$$2\alpha' r/b_{кр} = 2\sqrt{M_\infty^2 - 1}\,(r/b_{кр}) = 2\sqrt{2{,}68^2 - 1}\,(1/4{,}7) = 1{,}06;$$

$$\alpha' \operatorname{tg} \varepsilon_{кр} = \sqrt{M_\infty^2 - 1}\,\frac{(S_m)_{кр} - r}{b_{кр}} = \sqrt{2{,}68^2 - 1}\,\frac{4{,}1 - 1}{4{,}7} = 1{,}65$$

определяем $\bar{K}_т = 3{,}3$. Подсчитав

$$\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = \sqrt{2{,}68^2 - 1} = 2{,}49; \quad \left(\frac{\partial c_N}{\partial \alpha}\right)_{кр} = (c_N^\alpha)_{кр} = \frac{4}{\sqrt{2{,}68^2 - 1}} =$$

$$= 1{,}61; \quad b_{к.ц}/b_{кр} = 0 \text{ и } (s_m)_{кр}/r = 4{,}1,$$

получим

$$K_т = \bar{K}_т/[\alpha' (\partial c_N/\partial \alpha)_{кр} (1 + b_{к.ц}/b_{кр})(s_m/r - 1)] =$$

$$= 3{,}3/[2{,}49 \cdot 1{,}61 \cdot 1\,(4{,}1 - 1)] = 0{,}266.$$

Аналогично находятся соответствующие коэффициенты интерференции для оперения. По величине $(r_s)_{оп} = r/(s_m)_{оп} = 1/2 = 0{,}5$ из табл. XV-3-1 определяем $K_{оп} = (c_y)_{оп(т)}/(c_y)_{оп} = 1{,}45$, а по графику на рис. XV-1-8, *а* для

$$2\alpha' r/(b_{кр})_{оп} = 2 \cdot 2{,}49/1{,}5 = 3{,}32 \text{ и } \alpha' \operatorname{tg} \varepsilon_{оп} = \alpha' [(s_m)_{оп} - r]/(b_{кр})_{оп} =$$

$$= 2{,}49\,(2 - 1)/1{,}5 = 1{,}65$$

получаем $\bar{K}_т = 0{,}5$ и по этому значению находим

$$K_т = 0{,}5/[2{,}49 \cdot 1{,}61 \cdot 1 \cdot (2 - 1)] = 0{,}125.$$

Вычислим коэффициент $K_{т.и}$, учитывающий подъемную силу изолированного корпуса:

$$K_{т.и} = (c_N^\alpha)_т S_{мид}/[(c_N^\alpha)_{кр} S_{кр}].$$

Для этого найдем по теории тонкого тела производную от коэффициента нормальной силы корпуса по углу α:

$$(c_N^\alpha)_т = (\partial c_N/\partial \alpha)_т = \partial(2\alpha)/\partial\alpha = 2.$$

Производная от коэффициента подъемной силы крыла по углу α была определена ранее: $(c_N^\alpha)_{кр} = 1{,}61$. Так как площадь $S_{мид} = \pi r^2 = 3{,}14$, а площадь крыла (сумма площадей двух консолей)

$$S_{кр} = [(s_m)_{кр} - r](b_{кр} - b_{к.ц}) = (4{,}1 - 1)\,4{,}7 = 14{,}6,$$

то

$$K_{т.и} = 2 \cdot 3{,}14/(1{,}61 \cdot 14{,}6) = 0{,}267.$$

Учитывая, что площадь оперения

$$S_{оп} = [(s_m)_{оп} - r]\,[(b_{кр})_{оп} - (b_{к.ц})_{оп}] = (2 - 1)\,1{,}5 = 1{,}5,$$

произведем расчет по формуле (3.XI.3):

$$\left(c_N^{\alpha}\right)_{\text{т.кр.оп}} = (1{,}2 + 0{,}266 + 0{,}267)\,0{,}0282 +$$

$$+ (1{,}45 + 0{,}125)\,0{,}0282\,\frac{1{,}5}{14{,}6} = 0{,}0534.$$

В этой формуле принято для коэффициентов равенство $\left(c_N^{\alpha}\right)_{\text{оп}} = \left(c_N^{\alpha}\right)_{\text{кр}}$ ввиду одинаковой формы в плане крыла и оперения и, кроме того, произведен их пересчет с радианной меры измерения углов на градусную:

$$\left(c_N^{\alpha}\right)_{\text{оп}} = \left(c_N^{\alpha}\right)_{\text{кр}} = 1{,}61/57{,}3 = 0{,}0282.$$

Производные от коэффициентов нормальной силы крыла и оперения в присутствии корпуса по углу их поворота δ определяются из следующих выражений:

$$\left(c_N^{\delta}\right)_{\text{кр.т}} = \left(k_{\text{кр}} + k_{\text{т}}\right)\left(c_N^{\alpha}\right)_{\text{кр}};$$

$$\left(c_N^{\delta}\right)_{\text{оп.т}} = \left(k_{\text{оп}} + k_{\text{т}}\right)\left(c_N^{\alpha}\right)_{\text{оп}}\left(S_{\text{оп}}/S_{\text{кр}}\right).$$

Входящие в эти выражения коэффициенты интерференции определим с помощью табл. XV-3-1 [21]. По величине $(r_s)_{\text{кр}}=0{,}244$ находим $k_{\text{кр}}=0{,}94$, $k_{\text{т}}=0{,}27$, а по значению $(r_s)_{\text{оп}}=0{,}5$ — величины $k_{\text{оп}}=0{,}94$, $k_{\text{т}}=0{,}51$. Таким образом,

$$\left(c_N^{\delta}\right)_{\text{кр.т}} = (0{,}94 + 0{,}27)\,0{,}0282 = 0{,}0341;$$

$$\left(c_N^{\delta}\right)_{\text{оп.т}} = (0{,}94 + 0{,}51)\,0{,}0282\,(1{,}5/14{,}6) = 0{,}0042.$$

Для вычисления производной от коэффициента продольного момента по углу α воспользуемся формулой

$$\left(m_z^{\alpha}\right)_{\text{т.кр оп}} = \{K_{\text{кр}}\left[x_{\text{вр}} - \left(x_{\text{ц.д}\alpha}\right)_{\text{кр}}\right] + K_{\text{т}}\left[x_{\text{вр}} - \left(x_{\text{ц.д}\alpha}\right)_{\text{т}}\right] +$$

$$+ K_{\text{т.и}}\left[x_{\text{вр}} - \left(x_{\text{ц.д}}\right)_{\text{т}}\right]\}\,c_{N\text{кр}}^{\alpha}/x_{\text{к}} + \{K_{\text{оп}}\left[x_{\text{вр}} - \left(x_{\text{ц.д}\alpha}\right)_{\text{оп}}\right] +$$

$$+ K_{\text{т}}\left[x_{\text{вр}} - \left(x_{\text{ц.д}\alpha}\right)_{\text{т}}\right]\}\,c_{N\text{оп}}^{\alpha}\cdot S_{\text{оп}}/\left(S_{\text{кр}}\,x_{\text{к}}\right). \qquad (3.\text{XI}.4)$$

Определим входящие сюда координаты центров давления. По значению $(r_s)_{\text{кр}}=0{,}244$ из табл. XV-1-1 [21] находим $(x_{\text{ц.д}\alpha}/b_{\text{кр}})_{\text{кр(т)}}=0{,}648$. В соответствии с этим

$$\left(x_{\text{ц.д}\alpha}\right)_{\text{кр}} = x_{\text{кр}} + \left(x_{\text{ц.д}\alpha}/b_{\text{кр}}\right)_{\text{кр(т)}}\cdot b_{\text{кр}} = 10{,}7 + 0{,}648\cdot 4{,}7 = 13{,}75.$$

По значению $2\alpha' r/b_{\text{кр}}=1{,}06$, используя график XV-1-9, *б* [21], получаем $(x_{\text{ц.д}\alpha}/b_{\text{кр}})_{\text{т(кр)}}=1{,}05$ и определяем

$$\left(x_{\text{ц.д}\alpha}\right)_{\text{т}} = x_{\text{кр}} + \left(x_{\text{ц.д}\alpha}/b_{\text{кр}}\right)_{\text{т(кр)}}\cdot b_{\text{кр}} = 10{,}7 + 1{,}05\cdot 4{,}7 = 15{,}6.$$

Точно так же находятся координаты центра давления оперения. Из табл. XV-1-1 для $(r_s)_{\text{оп}}=0{,}5$ получаем $(x_{\text{ц.д}\alpha}/b_{\text{кр}})_{\text{оп(т)}}=0{,}647$ и подсчитываем

$$\left(x_{\text{ц.д}\alpha}\right)_{\text{оп}} = x_{\text{оп}} + \left(x_{\text{ц.д}\alpha}/b_{\text{кр}}\right)_{\text{оп(т)}}\left(b_{\text{кр}}\right)_{\text{оп}} = 18 + 0{,}647\cdot 1{,}5 = 18{,}97.$$

Расстояние до центра давления корпуса в соответствии с аэродинамической теорией тонкого тела

$$\left(x_{\text{ц.д}}\right)_{\text{т}} = x_{\text{мид}}\left[1 - W_{\text{т}}/\left(\pi r_{\text{мид}}^2\,x_{\text{мид}}\right)\right],$$

где $W_{\text{т}}=a\pi r_{\text{мид}}^2\,x_{\text{мид}}$ — объем головной части; a — коэффициент этого объема. Для оживальной головной части $a=0{,}495$, поэтому

$$\left(x_{\text{ц.д}}\right)_{\text{т}} = x_{\text{мид}}\,(1 - a) = 5{,}5\,(1 - 0{,}495) = 2{,}78.$$

Далее по графику на рис. XV-1-9, *а* [21] для величины $2\alpha' r/\left(b_{\text{кр}}\right)_{\text{оп}}=3{,}32$ находим $\left[x_{\text{ц.д}\alpha}/\left(b_{\text{кр}}\right)_{\text{оп}}\right]_{\text{т(оп)}}=0{,}67$ и подсчитываем координату центра

давления дополнительной нормальной силы корпуса, обусловленной влиянием оперения,

$$(x_{\text{ц.д}\alpha})_{\text{т}} = x_{\text{оп}} + [x_{\text{ц.д}\alpha}/(b_{\text{кр}})_{\text{оп}}]_{\text{т(оп)}} \cdot (b_{\text{кр}})_{\text{оп}} = 18 + 0{,}67 \cdot 1{,}5 = 19.$$

Подставим найденные величины в (3.XI.4):

$$(m_z^{\alpha})_{\text{т.кр.оп}} = [1{,}2\,(10{,}5 - 13{,}75) + 0{,}266\,(10{,}5 - 15{,}6) +$$
$$+ 0{,}267\,(10{,}5 - 2{,}78)]\,0{,}0282/21 + [1{,}45\,(10{,}5 - 18{,}97) +$$
$$+ 0{,}125\,(10{,}5 - 19)]\,0{,}0282\,1{,}5/(14{,}6 \cdot 21) = -0{,}0063.$$

Вычислим теперь производные $(m_z^{\delta})_{\text{кр.т}}$ и $(m_z^{\delta})_{\text{оп.т}}$. С этой целью по табл. XV-3-1 [21] для значения $(r_s)_{\text{кр}}=0{,}244$ найдем $(x_{\text{ц.д}\delta}/b_{\text{кр}})_{\text{кр(т)}}=0{,}667$, а для $(r_s)_{\text{оп}}=0{,}5$ определим $[x_{\text{ц.д}\delta}/(b_{\text{кр}})_{\text{оп}}]_{\text{оп(т)}}=0{,}664$. Имея эти данные, подсчитаем:

$$(x_{\text{ц.д}\delta})_{\text{кр}} = x_{\text{кр}} + (x_{\text{ц.д}\delta}/b_{\text{кр}})_{\text{кр(т)}} \cdot b_{\text{кр}} = 10{,}7 + 0{,}667 \cdot 4{,}7 = 13{,}85;$$

$$(x_{\text{ц.д}\delta})_{\text{оп}} = x_{\text{оп}} + [x_{\text{ц.д}\delta}/(b_{\text{кр}})_{\text{оп}}]_{\text{оп(т)}} \cdot (b_{\text{кр}})_{\text{оп}} = 18 + 0{,}664 \cdot 1{,}5 = 19.$$

Искомые значения производных будут равны:

$$(m_z^{\delta})_{\text{кр.т}} = \{k_{\text{кр}}\,[x_{\text{вр}} - (x_{\text{ц.д}\delta})_{\text{кр}}] + k_{\text{т}}\,[x_{\text{вр}} - (x_{\text{ц.д}\alpha})_{\text{т}}]\}\, c_{N\text{кр}}^{\alpha}/x_{\text{к}} =$$
$$= [0{,}94\,(10{,}5 - 13{,}85) + 0{,}27\,(10{,}5 - 15{,}6)]\,0{,}0282/21 = -0{,}0061;$$

$$(m_z^{\delta})_{\text{оп.т}} = \{k_{\text{оп}}\,[x_{\text{вр}} - (x_{\text{ц.д}\delta})_{\text{оп}}] + k_{\text{т}}\,[x_{\text{вр}} - (x_{\text{ц.д}\alpha})_{\text{т}}]\}\, c_{N\text{оп}}^{\alpha}\, S_{\text{оп}}/(S_{\text{кр}}\, x_{\text{к}}) =$$
$$= [0{,}94\,(10{,}5 - 19) + 0{,}51\,(10{,}5 - 19)]\,0{,}0282 \cdot 1{,}5/(14{,}6 \cdot 21) = -0{,}00171.$$

Вычислив остальные составляющие коэффициентов нормальной силы c_N' и продольного момента m_z', можно определить их значения для всей комбинации, не учитывая пока влияния вихрей крыла. Найдем эти величины для следующих условий полета: угол атаки $\alpha=6°$; углы поворота оперения $(\delta_e)_{\text{оп}}=0$; 10 и 15°; угол поворота крыла $(\delta_e)_{\text{кр}}=0$. Соответствующие расчетные зависимости имеют следующий вид:

$$c_N = (c_N^{\alpha})_{\text{т.кр.оп}}\,\alpha + (c_N^{\delta})_{\text{оп.т}}\,(\delta_e)_{\text{оп}} + (c_N^{\alpha})_{\text{кр(т)}}\,(\delta_e)_{\text{кр}};$$

$$m_z' = (m_z^{\alpha})_{\text{т.кр.оп}}\,\alpha + (m_z^{\delta})_{\text{оп.т}}\,(\delta_e)_{\text{оп}} + (m_z^{\delta})_{\text{кр(т)}}\,(\delta_e)_{\text{кр}}.$$

После подстановки в них данных получим:

$(\delta_e)_{\text{оп}}$, *град*	c_N'	$-m_z'$
0	0,320	0,0380
10	0,362	0,0551
15	0,383	0,0637

Теперь произведем расчет этих аэродинамических характеристик с учетом влияния вихрей крыла. Коэффициент нормальной силы

$$c_N = c_N' + \frac{i_{\text{оп}}[K_{\text{кр}}\,\alpha + k_{\text{кр}}\,(\delta_e)_{\text{кр}}]\, c_{N\text{кр}}^{\alpha}\, c_{N\text{оп}}^{\alpha}\,(s_m - r)_{\text{оп}} \cdot 57{,}3}{2\pi\lambda_{\text{оп}}\,[(z_v - r)/(s_m - r)]_{\text{кр}}\,(s_m - r)_{\text{кр}}}.$$

Определим входящие сюда неизвестные величины. Удлинение

$$\lambda_{\text{оп}} = 4\,[(s_m)_{\text{оп}} - r]/(b_{\text{кр}})_{\text{оп}} = 4\,(2 - 1)/1{,}5 = 2{,}67.$$

Из графика XV-2-8 [21] по $\lambda = b_{\text{к.ц}}/b_{\text{кр}} = 0$ и

$\lambda_{\text{кр}}\,\alpha' = 4\,[(s_m)_{\text{кр}} - r]\,\alpha'/b_{\text{кр}} = 4\,(4{,}1 - 1)\,2{,}49/4{,}7 = 6{,}55$ (где $\lambda_{\text{кр}} = 2{,}64$)

получим $[(z_v - r)/(s_m - r)]_{\text{кр}} = 0{,}68$.

По графику XV-2-9 найдем значение коэффициента интерференции $i_{оп}$. Для этого предварительно подсчитаем значение $(\Delta x_{ц.т})_{оп} = (b_{кр})_{оп} \frac{1}{3} \cdot \frac{2(s_m)_{оп} - 1}{(\bar{s}_m)_{оп} + 1} = \frac{1,5}{3} \cdot \frac{2 \cdot 2 - 1}{2 + 1} = 0,5$ — координаты центра тяжести консолей оперения и перекрываемой ими части корпуса (см. рис. 2.XI.6), а также значения

$$(z_v/s_m)_{оп} = \{[(z_v - r)/(s_m - r)]_{оп}[1 - (r_s)_{кр}] + (r_s)_{кр}\}(s_m)_{кр}/(s_m)_{оп} =$$
$$= \{0,68(1 - 0,244) + 0,244\}\, 4,1/2 = 1,56$$

и

$$(y_v/s_m)_{оп} = \{[x_{оп} - x_{кр} - b_{кр} + (\Delta x_{ц.т})_{оп}]\,\alpha - b_{оп}(\delta_e)_{кр}\}/[57,3(s_m)_{оп}] =$$
$$= [(18 - 10,7 - 4,7 + 0,5)\,6]/(57,3 \cdot 2) = 0,162.$$

В соответствии с полученными значениями $(z_v/s_m)_{оп} = 1,56$, $(y_v/s_m)_{оп} = 0,162$ и величиной $(r/s_m)_{оп} = 0,5$ коэффициент $i_{оп} = -1,3$.

Согласно этим данным

$$c_N = c'_N - \frac{1,3 \cdot 7,2 \cdot 0,0282 \cdot 0,0282\,(2 - 1)\,57,3}{2 \cdot 3,14 \cdot 2,67 \cdot 0,68\,(4,1 - 1)} = c'_N - 0,012,$$

откуда

$$\Delta c'_N = c_N - c'_N = -0,012;$$
$$m_z = m'_z + \Delta c'_N [x_{вр} - (x_{ц.дб})_{оп}]/x_к =$$
$$= m'_z + \Delta c'_N (10,5 - 19)/21 = m'_z - \Delta c'_N \cdot 0,405.$$

По этим зависимостям, используя ранее полученные значения c'_N и m'_z, найдем следующие значения аэродинамических коэффициентов:

$(\delta_e)_{оп}$ *град*	c_N	$-m_z$	$c_{ц.д} = -m_z/c_N$
0	0,308	0,0331	0,107
10	0,350	0,0502	0,144
15	0,371	0,0588	0,158

Определим продольную и поперечную эффективность поворотных консолей хвостового оперения. Производная коэффициента момента крена m_x по углу δ_a при дифференциальном отклонении горизонтальных консолей, характеризующая поперечную эффективность, равна

$$\partial m_x/\partial \delta_a = -\lambda_{кр} \cdot 0,167\,[1 + 3,71\,(r_s)_{оп}](c_N^\alpha)_{кр.л.н}/(c_N^\alpha)_{кр.т.т}.$$

Отношение статических производных $c_{N кр}^\alpha$, вычисленных соответственно по линеаризованной теории и аэродинамической теории тонкого тела,

$$(c_N^\alpha)_{кр.л.н}/(c_N^\alpha)_{кр.т.т} = 8/(\pi \alpha' \lambda_{кр}).$$

Так как $\alpha' \lambda_{кр} = 6,55$, то

$$(c_N^\alpha)_{кр.л.н}/(c_N^\alpha)_{кр.т.т} = 8/(3,14 \cdot 6,55) = 0,389.$$

Таким образом,

$$\partial m_x/\partial \delta_a = -2,64 \cdot 0,167\,(1 + 3,71 \cdot 0,5)0,389 = -0,490.$$

Производная коэффициента продольного момента по углу δ_e при симметричном отклонении горизонтальных консолей, характеризующая продольную эффективность, определяется по следующей формуле:

$$\partial m_z/\partial \delta_e = \frac{-b_{оп}}{l}\left\{k_{оп}\left[\left(\frac{x_{ц.д\delta}}{b_{кр}}\right)_{оп} + \left(\frac{x_{ц.т}}{b_{кр}}\right)_{оп}\right] + \right.$$
$$\left. + k_т\left[\left(\frac{x_{ц.д\alpha}}{b_{кр}}\right)_{т(оп)} + \left(\frac{x_{ц.т}}{b_{кр}}\right)_{оп}\right]\right\} c_{N оп}^\alpha.$$

Для нахождения этой величины предварительно найдем из табл. XV-1-1 [21] по $(r_s)_{оп}=0{,}5$ значение $(x_{ц.д\alpha}/b_{кр})_{т(оп)}=0{,}598$, а также вычислим

$$(x_{ц.т})_{оп} = x_{оп} - x_{вр} + (\Delta x_{ц.т})_{оп} = 18 - 10{,}5 + 0{,}5 = 8.$$

Приняв в качестве характерного размера l длину корпуса $x_к=21$, после подстановки получим

$$\partial m_z/\partial \delta_e = \frac{-1{,}5}{21}\left[0{,}94\left(0{,}664+\frac{8}{1{,}5}\right)+0{,}51\left(0{,}598+\frac{8}{1{,}5}\right)\right]1{,}61 = -0{,}996.$$

Для сравнения полученных расчетом значений коэффициентов c_N и m_z при $\alpha=6°$ с соответствующими экспериментальными данными из лабораторной работы 6.2.1 пересчитаем эти коэффициенты на площадь $S_{мид}=3{,}14$. Тогда получим:

δ, *град*	c_N	$-m_z$
0	$0{,}308\,\frac{14{,}6}{3{,}14}=1{,}43$	$0{,}0331\,\frac{14{,}6}{3{,}14}=0{,}154$
10	$0{,}350\,\frac{14{,}6}{3{,}14}=1{,}63$	$0{,}0502\,\frac{14{,}6}{3{,}14}=0{,}234$
15	$0{,}371\,\frac{14{,}6}{3{,}14}=1{,}72$	$0{,}0588\,\frac{14{,}6}{3{,}14}=0{,}274$

Совпадение результатов удовлетворительное.

XII.1. По таблицам атмосферы [50] определим параметры воздуха на высоте $H=100$ *км*: $p_i=2{,}18\cdot10^{-3}$ *кГ/м*^{2}; $\rho_i=3{,}81\cdot10^{-8}$ *кГ·сек*^{2}*/м*^{4}; $T_i=199$ К. Из этих же таблиц найдем среднюю скорость молекул $\bar{c}_i=381{,}8$ *м/сек*, по которой определим наиболее вероятную скорость:

$$c_m=\bar{c}_i\sqrt{\pi/4}=381{,}8\sqrt{\pi/4}=338\ м/сек$$

и скорость звука:

$$a_i=\bar{c}_i\sqrt{\pi k/8}=381{,}8\sqrt{\pi\cdot1{,}4/8}=283\ м/сек.$$

Вычислим теперь число Кнудсена:

$$\mathbf{Kn}=0{,}264\sqrt{V_\infty\mu_i/(p_iL)}. \qquad (3.XII.1)$$

Для нахождения μ_i воспользуемся формулой $\mu_i=\mu_н(T_i/T_н)^{0,76}$. Внося сюда значения $\mu_н=1{,}82\cdot10^{-6}$ *кГ·сек/м*^{2} и $T_н=288$ К, найдем

$$\mu_i=1{,}82\cdot10^{-6}(199/288)^{0,76}=1{,}38\cdot10^{-6}\ кГ\cdot сек/м^2.$$

Учитывая значения $L=5$ *м* и $V_\infty=3000$ *м/сек*, получим

$$\mathbf{Kn}=0{,}264\sqrt{3000\cdot1{,}38\cdot10^{-6}/(2{,}18\cdot10^{-3}\cdot5)}=0{,}164.$$

Согласно кинетической теории газов при $0{,}1<\mathbf{Kn}<1{,}0$ обтекание характеризуется скольжением. Таким образом, в соответствии с полученным значением числа Кнудсена ($\mathbf{Kn}=0{,}164$) течение около пластинки и будет определяться режимом скольжения.

XII.2. Режиму свободномолекулярного течения соответствуют числа Кнудсена $\mathbf{Kn}=l/\delta>10$ (где l — длина свободного пробега молекулы; δ — толщина пограничного слоя у задней кромки пластинки, вычисленная по обычным соотношениям для сплошной среды). Это число определяется по формуле (3.XII.1). Внося в нее $L=10$ *м* и $V_\infty=5000$ *м/сек*, получим

$$\mathbf{Kn}=0{,}264\sqrt{5000\mu_i/(p_i\,10)}=5{,}91\sqrt{\mu_i/p_i}.$$

Приняв здесь минимальное значение $\mathbf{Kn}=10$, найдем

$$1{,}70=\sqrt{\mu_i/p_i}.$$

Зададимся наименьшим значением μ_i в диапазоне высот $0\leqslant H\leqslant200$ *км*. Эта величина соответствует температуре стратосферного воздуха $T_i=216{,}7$ К. В этом случае значение p_i будет наименьшим, а соответствующая высота наибольшей. При таком значении высоты предположение о свободномолекулярном течении будет более достоверным. Приняв $T_н=288$ К, $\mu_н=1{,}82\cdot10^{-6}$ *кГ·сек/м*^{2}, найдем

$$\mu_i=\mu_н(T_i/T_н)^{0,76}=1{,}82\cdot10^{-6}(216{,}7/288)^{0,76}=1{,}48\cdot10^{-6}\ кГ\cdot сек/м^2.$$

С учетом этого $1{,}70=\sqrt{1{,}48\cdot10^{-6}/p_i}$, а соответствующее давление $p_i=5{,}19\cdot10^{-11}$ *кГ/см*^{2}. По таблицам атмосферы [50] находим $H\geqslant400$ *км*.

XII.3. Схема зеркального отражения молекул от поверхности реализуется в том случае, когда она очень гладкая и наклонена под малым углом атаки. Однако даже при полированной поверхности только малая часть молекул отражается зеркально. Наиболее вероятной оказывается схема диффузного отражения, которая предполагает наличие шероховатостей и щелей, размеры которых соизмеримы с поперечными размерами молекул. В этой схеме молекулы в результате соударения с поверхностью полностью передают ей свой импульс и энергию, попадая в щель или оказываясь между бугорками шероховатостей. По исте-

чении некоторого малого промежутка времени они отражаются от нее в произвольном направлении с некоторой скоростью.

XII.4. Для расчета наиболее вероятной скорости молекул воспользуемся зависимостью $c_m = \bar{c}_i \sqrt{\pi/4}$. Подставив в нее значение $\bar{c}_i = 832$ *м/сек*, получим

$$c_m = 832 \sqrt{\pi/4} = 737 \text{ м/сек}.$$

По величине $\bar{c}_i$ можно найти также скорость звука:

$$a_i = \bar{c}_i \sqrt{\pi k/8} = 832 \sqrt{\pi \cdot 1{,}4/8} = 616 \text{ м/сек}.$$

XII.5. Давление, вызванное взаимодействием со стенкой падающих и отраженных молекул, определяется количеством движения, передаваемым этими молекулами в нормальном к стенке направлении. Численно одна молекула обусловливает давление, равное ее количеству движения mv (где m — масса молекулы; v — нормальная составляющая скорости). Полное давление получается в результате суммирования давлений от всех взаимодействующих со стенкой молекул.

XII.6. Так как при диффузной схеме взаимодействия падающая молекула полностью теряет тангенциальную составляющую количества движения, равную mu (где u — тангенциальная составляющая скорости), то это и обусловливает эффект трения и возникновение соответствующего касательного напряжения. Просуммировав действие всех молекул в единицу времени, получим величину напряжений трения. В случае указанной схемы взаимодействия при отражении равновероятно любое направление молекул, покидающих стенку, поэтому они не создают напряжения трения. Таким образом, трение обусловлено лишь диффузным взаимодействием с поверхностью падающих молекул.

XII.7. По таблицам атмосферы [50] определяем параметры: $p_i = 4{,}19 \cdot 10^{-5}$ *кГ/м*^{2}; $\rho_i = 0{,}114 \cdot 10^{-9}$ *кГ·сек*^{2}*/м*^{4}; $T_i = 1207$ К; $\bar{c}_i = 954{,}7$ *м/сек*. Наиболее вероятная скорость, соответствующая найденной величине $\bar{c}_i$,

$$c_m = 954{,}7 \sqrt{\pi/4} = 845 \text{ м/сек},$$

а скорость звука

$$a_i = 954{,}7 \sqrt{\pi \cdot 1{,}4/8} = 708 \text{ м/сек}.$$

Число Маха, рассчитанное по этой скорости звука, $\mathbf{M}_\infty = V_\infty/a_i = 7000/708 = 9{,}9$. Теперь найдем величину

$$\bar{x}^2 = \sin^2 \beta \, \mathbf{M}_\infty^2 \, k/2, \qquad (3.\text{XII}.2)$$

где β — угол наклона касательной к контуру в заданной точке. Этот угол определяется из уравнения

$$\operatorname{tg} \beta = dy/dx = (2\Delta/b)(1 - 2x/b).$$

Так как координата заданной точки $x = 2{,}5$ *м*, то

$$\operatorname{tg} \beta = (2 \cdot 5/10)(1 - 2 \cdot 2{,}5/10) = 0{,}5.$$

Для точки на хвостовом участке ($x = 7{,}5$ *м*)

$$\operatorname{tg} \beta = (2 \cdot 5/10)(1 - 2 \cdot 7{,}5/10) = -0{,}5.$$

В соответствии с этими данными

$$\bar{x}^2 = 0{,}2 \cdot 9{,}9^2 \cdot 1{,}4/2 = 13{,}7 \; (\bar{x} = 3{,}7).$$

По полученным данным рассчитываем коэффициент давления на передней стороне поверхности, обусловленный соударением с падающими молекулами. Так как найденная величина $\bar{x} = 3{,}7$ достаточно

велика, то с хорошим приближением можно использовать для такого расчета зависимость

$$\bar{p}_{if} = \frac{2p_{if}}{\rho_i V_\infty^2} = 2\sin^2\beta\left(1 + \frac{1}{2\bar{x}^2}\right). \qquad (3.XII.3)$$

Для рассматриваемой точки с $\bar{x}=3{,}7$ и $\sin^2\beta=0{,}2$

$$\bar{p}_{if} = 2\cdot 0{,}2\,[1 + 1/(2\cdot 13{,}7)] = 0{,}415.$$

Соответствующее абсолютное давление

$$p_{if} = \bar{p}_{if}\rho_i V_\infty^2/2 = 0{,}415\cdot 0{,}114\cdot 10^{-9}\cdot 7000^2/2 = 0{,}115\cdot 10^{-2}\ кГ/м^2.$$

Коэффициент давления за счет отраженных молекул

$$\bar{p}_{rf} = (\sin^2\beta/\bar{x})\sqrt{\pi T_r/T_i}, \qquad (3.XII.4)$$

где для условия достаточно большого значения $\bar{x}$ можно принять

$$T_r/T_i = (5 + k\mathbf{M}_\infty^2)(k-1)/(k+1). \qquad (3.XII.5)$$

Подставляя данные, получаем:

$$T_r/T_i = (5 + 1{,}4\cdot 9{,}9^2)(1{,}4-1)/(1{,}4+1) = 23{,}7;$$

$$\bar{p}_{rf} = (0{,}2/3{,}7)\sqrt{\pi\cdot 23{,}7} = 0{,}466.$$

Соответствующее абсолютное давление

$$p_{rf} = \bar{p}_{rf}\rho_i V_\infty^2/2 = 0{,}466\cdot 0{,}114\cdot 10^{-9}\cdot 7000^2/2 = 0{,}129\cdot 10^{-2}\ кГ/м^2.$$

Полный коэффициент давления, обусловленный действием падающих и отраженных молекул,

$$\bar{p}_f = \bar{p}_{if} + \bar{p}_{rf} = 0{,}415 + 0{,}466 = 0{,}881.$$

Соответствующее абсолютное давление

$$p_f = p_{if} + p_{rf} = 1{,}15\cdot 10^{-3} + 1{,}29\cdot 10^{-3} = 2{,}44\cdot 10^{-3}\ кГ/м^2.$$

Коэффициенты давления в точке на задней стенке поверхности (при $\bar{x}>2$) считаем с достаточным приближением равными нулю ($\bar{p}_{ib}=\bar{p}_{rb}=0$). Следовательно, будут равны нулю и соответствующие абсолютные давления.

Рассчитаем коэффициент и напряжение трения. Для точки на передней стороне коэффициент трения (при $\bar{x}>2$) можно принять равным

$$(c_{if})_f = \sin 2\beta = 0{,}798,$$

а соответствующее напряжение трения

$$\tau_{if} = (c_{if})_f\rho_i V_\infty^2/2 = 0{,}798\cdot 0{,}114\cdot 10^{-9}\cdot 7000^2/2 = 2{,}21\cdot 10^{-3}\ кГ/м^2.$$

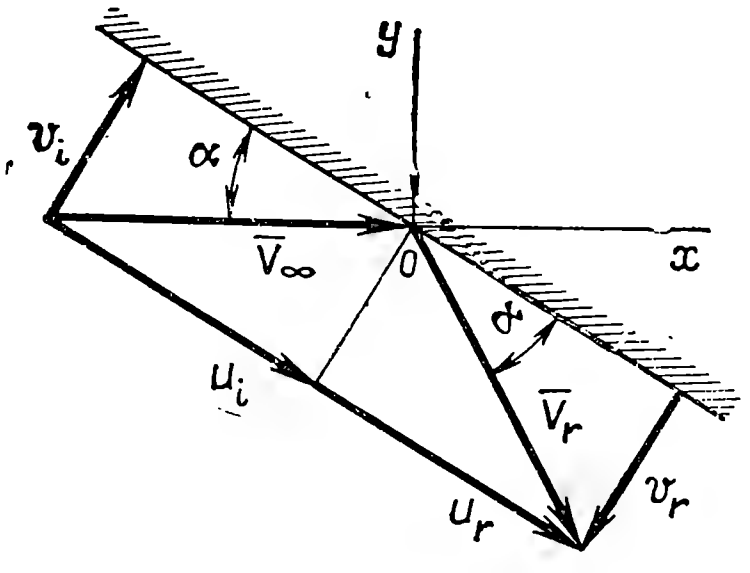


Рис. 3.XII.1. Схема зеркального отражения молекул

Для точки на задней стороне $(c_{if})_b=0$ и, следовательно, соответствующее напряжение трения $\tau_{ib}=0$.

XII.8. В соответствии со схемой зеркального отражения молекул (рис. 3.XII.1) касательная составляющая скорости не меняется ни по величине, ни по направлению, в то время как нормальная составляющая, сохраняя свою величину, изменяет направление на обратное. В соответствии с этим $p_i=p_r=p$ и $\tau_i=\tau_r=\tau$. Подставив эти значения в выражения для коэффициентов аккомодации, получим:

$$f_n = \frac{p_i - p_r}{p_i - p_{ст}} = \frac{p - p}{p - p_{ст}} = 0, \quad f_\tau = \frac{\tau_i - \tau_r}{\tau_i} = \frac{\tau - \tau}{\tau} = 0.$$

XII.9. Для анализа влияния аккомодации на изменение коэффициента давления воспользуемся выражением $\bar{p}_f = 2(2-f)\sin^2\beta$, полученным для «холодной» стенки ($T_{ст} < T_i$) и значений $\bar{x} > 2$. Из этого выражения видно, что с ростом коэффициента аккомодации величина $\bar{p}_f$ уменьшается. Физически такой эффект объясняется уменьшением числа молекул, которые, отражаясь зеркально, создают дополнительный импульс («реактивную» силу) и способствуют повышению давления.

XII.10. По таблицам атмосферы [50] находим для высоты $H = 100$ *км* параметры воздуха: $p_i = 2{,}18 \cdot 10^{-3}$ *кГ/м²*; $\rho_i = 3{,}81 \cdot 10^{-8}$ *кГ × сек²/м⁴*; $T_i = 199$ K, а также ускорение силы тяжести $g = 9{,}50$ *м/сек²* и среднюю скорость молекул $\bar{c}_i = 381{,}8$ *м/сек*. Найденному значению $\bar{c}_i$ соответствуют наиболее вероятная скорость молекул $c_m = 381{,}8 \sqrt{\pi/4} = 338$ *м/сек*, скорость звука $a_i = 381{,}8 \sqrt{\pi \cdot 1{,}4/8} = 283$ *м/сек* и число Маха $\mathbf{M}_\infty = V_\infty / a_i = 3000/283 = 10{,}6$. Этой величине соответствует значение

$$\bar{x}^2 = \sin^2\alpha \mathbf{M}_\infty^2 k/2 = \sin^2 10^\circ \cdot 10{,}6^2 \cdot 1{,}4/2 = 2{,}38 \quad (\bar{x} = 1{,}54).$$

Определим отношение температур отраженных и падающих молекул, используя формулу

$$\frac{T_r}{T_i} = \frac{T_{ст}}{T_i}\left[\frac{(1-\eta)\,E_i\,k_2}{2mN_i R T_{ст}\,k_1} + \eta\right], \qquad (3.XII.6)$$

в которой

$$E_i = \frac{1}{2} mN_i \left[V_\infty^2 + RT_i\left(4 + \frac{1}{\varphi + 1}\right)\right]; \qquad (3.XII.7)$$

$$\varphi = e^{-\bar{x}^2}\left[\pm \bar{x}\sqrt{\pi}\,(1 \pm \operatorname{erf}\bar{x})\right]^{-1}; \qquad (3.XII.8)$$

$$k_2 = 1 + \frac{1}{E_i} \cdot \frac{5 - 3k}{k - 1} \cdot \frac{mRT_i}{2} N_i; \qquad (3.XII.9)$$

$$k_1 = (k+1)/[4(k-1)]. \qquad (3.XII.10)$$

В (3.XII.8) знак «+» относится к передней стороне поверхности, а «—» — к задней. Входящая в формулу для φ функция $\operatorname{erf}\bar{x}$ определяется по величине $\bar{x}$ из таблицы [42]. Подсчитываем коэффициент φ:

$$\varphi = e^{-2{,}38}\left[\pm 1{,}54 \cdot \sqrt{\pi}\,(1 \pm 0{,}971)\right]^{-1},$$

а также значения:

$$RT_i = 9{,}50 \cdot 29{,}27 \cdot 199 = 55\,400 \text{ м}^2/\text{сек}^2;$$

$$RT_{ст} = 9{,}50 \cdot 29{,}27 \cdot 300 = 83500 \text{ м}^2/\text{сек}^2.$$

$$\frac{E_i}{2mN_i\,RT_{ст}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{RT_{ст}}\left[V_\infty^2 + RT_i\left(4 + \frac{1}{\varphi + 1}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{83\,500}\left[3000^2 + 55400\left(4 + \frac{1}{e^{-2{,}38}\left[\pm 1{,}54 \cdot \sqrt{\pi}\,(1 \pm 0{,}971)\right]^{-1} + 1}\right)\right].$$

Для передней стороны после преобразований, беря знак «+», получим

$$E_i/(2mN_i\,RT_{ст}) = 27{,}8;$$

а для задней стороны (знак «—»)

$$E_i/(2mN_i\,RT_{ст}) = 28{,}1.$$

Далее находим отношение

$$\frac{E_i}{2mN_i\,RT_i} = \frac{E_i}{2mN_i\,RT_{\text{ст}}} \cdot \frac{T_{\text{ст}}}{T_i},$$

которое для передней стороны

$$E_i/(2mN_iRT_i) = 27{,}8 \cdot 300/199 = 41{,}8,$$

а для задней

$$E_i/(2mN_i\,RT_i) = 28{,}1 \cdot 300/199 = 42{,}4.$$

Теперь вычислим соответственно для передней и задней сторон:

$$k_2 = 1 + \frac{1}{41{,}8} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{5 - 3 \cdot 1{,}4}{1{,}4 - 1} = 1{,}01;$$

$$k_2 = 1 + \frac{1}{42{,}4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{5 - 3 \cdot 1{,}4}{1{,}4 - 1} = 1{,}01.$$

Так как параметр $k_1 = (1{,}4+1)/[4(1{,}4-1)] = 1{,}5$ то с учетом других полученных данных отношения температур будут следующими:

для передней стороны поверхности

$$\frac{T_r}{T_i} = \frac{300}{199}\left[\frac{(1-0{,}7)\,27{,}8 \cdot 1{,}01}{1{,}5} + 0{,}7\right] = 9{,}52;$$

для задней

$$\frac{T_r}{T_i} = \frac{300}{199}\left[\frac{(1-0{,}7)\,28{,}1 \cdot 1{,}01}{1{,}5} + 0{,}7\right] = 9{,}60.$$

Коэффициент давления, обусловленный взаимодействием с падающими и отраженными молекулами,

$$\bar{p} = \frac{2(p_i + p_r)}{\rho_i V_\infty^2} = \sin^2\alpha\left\{(2-f)\left[\frac{\pm e^{-\bar{x}^2}}{\bar{x}\sqrt{\pi}} + \left(1 + \frac{1}{2\bar{x}^2}\right)(1 \pm \operatorname{erf}\bar{x})\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{f}{2\bar{x}^2}\sqrt{\frac{T_{\text{ст}}}{T_i}}\left[e^{-\bar{x}^2} \pm \bar{x}\sqrt{\pi}\,(1 \pm \operatorname{erf}\bar{x})\right]\right\}. \qquad (3.\text{XII}.11)$$

Из таблицы [42] по $\bar{x} = 1{,}54$ находим $\operatorname{erf}\bar{x} = 0{,}971$, а из таблицы [8] $e^{-\bar{x}^2} = 0{,}0926$. По этим данным определяем:

для передней стороны

$$\bar{p}_f = \sin^2 10^\circ\left\{(2-0{,}9)\left[\frac{0{,}0926}{1{,}54\sqrt{\pi}} + \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 2{,}38}\right)(1 + 0{,}971)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{0{,}9}{2 \cdot 2{,}38}\sqrt{\frac{300}{199}}\left[0{,}0926 + 1{,}54\sqrt{\pi}\,(1 + 0{,}971)\right]\right\} = 0{,}119;$$

для задней

$$\bar{p}_{\text{в}} = \sin^2 10^\circ\left\{(2-0{,}9)\left[\frac{-0{,}0926}{1{,}54\sqrt{\pi}} + \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 2{,}38}\right)(1 - 0{,}971)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{0{,}9}{2 \cdot 2{,}38}\sqrt{\frac{300}{199}}\left[0{,}0926 - 1{,}54\sqrt{\pi}\,(1 - 0{,}971)\right]\right\} = 0{,}139 \cdot 10^{-3}.$$

Напряжение трения

$$c_f = \frac{2\tau}{\rho_i V_\infty^2} = f \sin\alpha \cos\alpha\left[\frac{\pm e^{-x^2}}{\bar{x}\sqrt{\pi}} + (1 \pm \operatorname{erf}\bar{x})\right]. \qquad (3.\text{XII}.12)$$

После подстановки данных находим

$$c_f = 0{,}9 \sin 10^\circ \cos 10^\circ\left[\frac{\pm\,0{,}0926}{1{,}54\sqrt{\pi}} + (1 \pm 0{,}971)\right].$$

Таким образом, для передней стороны (знак «+») $(c_f)_f=0{,}308$, а для задней (знак «—») $(c_f)_b=-0{,}462\cdot10^{-3}$.

Для сравнения определим коэффициенты давления и трения в случае полного диффузного отражения ($f=1$).

Коэффициент давления

$$\bar{p}_{f(b)}=\sin^2\alpha\left\{\frac{\pm e^{-\bar{x}^2}}{\bar{x}\sqrt{\pi}}+\left(1+\frac{1}{2\bar{x}^2}\right)(1\pm\operatorname{erf}\bar{x})+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\bar{x}^2}\sqrt{\frac{T_{ст}}{T_i}}\left[e^{-x^2}\pm\bar{x}\sqrt{\pi}\,(1\pm\operatorname{erf}\bar{x})\right]\right\}=$$

$$=\sin^2 10^\circ\left\{\frac{\pm0{,}0926}{1{,}54\sqrt{\pi}}+\left(1+\frac{1}{2\cdot2{,}38}\right)(1\pm0{,}971)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\cdot2{,}38}\sqrt{\frac{300}{199}}\left[0{,}0926\pm1{,}54\sqrt{\pi}\,(1\pm0{,}971)\right]\right\}.$$

В соответствии с этим результатом на передней стороне (знак «+») $\bar{p}_f=0{,}116$, а на задней (знак «—») $\bar{p}_b=0{,}147\cdot10^{-3}$.

Коэффициент трения

$$c_f=\sin\alpha\cos\alpha\left[\frac{\pm e^{-\bar{x}^2}}{\bar{x}\sqrt{\pi}}+(1\pm\operatorname{erf}\bar{x})\right]=$$

$$=\sin10^\circ\cos10^\circ\left[\frac{\pm0{,}0926}{1{,}54\sqrt{\pi}}+(1\pm0{,}971)\right].$$

Отсюда следует, что на передней стороне $(c_f)_f=0{,}342$, а на задней $(c_f)_b=-0{,}518\cdot10^{-3}$. Сравнение полученных данных показывает, что при отсутствии аккомодации коэффициенты трения возрастают, коэффициент давления на передней стороне убывает, а на задней увеличивается.

XII.11. Из решения задачи XII.10 известны: $\bar{x}=1{,}54$; $RT_i=5{,}54\times\times10^4$ *м²/сек²*, $V_\infty=3000$ *м/сек*; $\rho_i=3{,}81\cdot10^{-8}$ *кГ·сек²/м⁴*; $T_r/T_i=9{,}52$ (для передней стороны) и $T_r/T_i=9{,}6$ (для задней стороны).

Для расчета энергии падающих молекул воспользуемся выражением

$$E_i=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\rho_i\sqrt{RT_i}\left[e^{-\bar{x}^2}\pm\bar{x}\sqrt{\pi}\,(1\pm\operatorname{erf}\bar{x})\right]\times$$

$$\times\left[V_\infty^2+RT_i\left(4+\frac{1}{\varphi+1}\right)\right],\qquad(3.XII.13)$$

в котором знак «+» относится к передней поверхности, а знак «—» — к задней. Подставляем в это выражение данные:

$$E_i=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,3{,}81\cdot10^{-8}\sqrt{5{,}54\cdot10^4}\,[0{,}0926\pm1{,}54\sqrt{\pi}\,(1\pm0{,}971)]\times$$

$$\times\left[3000^2+5{,}54\cdot10^4\left(4+\frac{1}{\varphi+1}\right)\right],$$

причем для передней стороны берем $\varphi=0{,}974\cdot10^{-2}$, а для задней $\varphi=$ $=-0{,}663$. В результате вычислений получаем значения $(E_i)_f=91$ *кГ*$\times$ $\times$*м*/(*м²·сек*) (для передней стороны) и $(E_i)_b=0{,}246$ *кГ·м*/(*м²·сек*) (для задней стороны).

Энергию отраженных молекул определим по формуле

$$E_r=\sqrt{2/\pi}\,\rho_i\,RT_i\,(T_r/T_i)\sqrt{RT_i}\left[e^{-\bar{x}^2}\pm\bar{x}\sqrt{\pi}\,(1\pm\operatorname{erf}\bar{x})\right].\qquad(3.XII.14)$$

Производим вычисления с учетом того, что для передней стороны $T_r/T_i=9{,}52$, а для задней $T_r/T_i=9{,}6$:

$$E_r = \sqrt{2/\pi}\cdot 3{,}81\cdot 10^{-8}\cdot 5{,}54\cdot 10^4\,(T_r/T_i)\sqrt{5{,}54\cdot 10^4}\,[0{,}0926 \pm$$
$$\pm\, 1{,}54\sqrt{\pi}\,(1+0{,}971)].$$

В результате находим для передней стороны $(E_r)_f=20{,}7$ *кГ·м/(м²·сек)*, а для задней $(E_r)_b=0{,}0547$ *кГ·м/(м²·сек)*.

XII.12. Из решения задачи XII.10 используем данные о коэффициентах давления и трения на пластинке в случае, когда принимается во внимание смешанный характер отражения (коэффициент аккомодации импульса $f=0{,}9$) и учитывается, что коэффициент термической аккомодации $\eta=0{,}7$. Значения коэффициентов давления и трения следующие:

$$\bar{p}_f = \frac{2(p_i+p_r)}{\rho_i V_\infty^2} = 0{,}119, \quad \bar{p}_b = \frac{2(p_i+p_r)}{\rho_i V_\infty^2} = 0{,}139\cdot 10^{-3};$$

$$(c_f)_f = \frac{2\tau_f}{\rho_i V_\infty^2} = 0{,}308, \quad (c_f)_b = \frac{2\tau_f}{\rho_i V_\infty^2} = -0{,}462\cdot 10^{-3}.$$

По этим значениям рассчитаем аэродинамические коэффициенты и соответствующие силы, принимая во внимание, что ширина пластинки (хорда) $L=5$ *м*, а длина (размах) $l=2$ *м*.

Коэффициент сопротивления для передней стороны пластинки

$$c_{xf} = \frac{2X_f}{\rho_i V_\infty^2 S_{кр}} = \bar{p}_f \sin\alpha + (c_f)_f \cos\alpha = 0{,}119\cdot\sin 10^\circ +$$
$$+ 0{,}308\cdot\cos 10^\circ = 0{,}324,$$

а соответствующая сила

$$X_f = c_{xf}\frac{\rho_i V_\infty^2}{2} S_{кр} = 0{,}324\,\frac{3{,}81\cdot 10^{-8}\cdot 3000^2}{2}\,5\cdot 2 = 0{,}545\ кГ.$$

Аналогичный коэффициент для задней стороны

$$c_{xb} = \frac{2X_f}{\rho_i V_\infty^2 S_{кр}} = \bar{p}_b \sin\alpha + (c_f)_b \cos\alpha = 0{,}139\cdot 10^{-3}\cdot\sin 10^\circ -$$
$$- 0{,}462\cdot 10^{-3}\cos 10^\circ = -0{,}431\cdot 10^{-3},$$

а сила

$$X_b = c_{xb}\,\frac{\rho_i V_\infty^2}{2} S_{кр} = -0{,}431\cdot 10^{-3}\,\frac{3{,}81\cdot 10^{-8}\cdot 3000^2}{2}\,5\cdot 2 = -0{,}74\cdot 10^{-3}\ кГ.$$

Суммарный коэффициент сопротивления

$$c_x = c_{xf} - c_{xb} = 0{,}324 + 0{,}431\cdot 10^{-3} = 0{,}324$$

и соответствующая сила

$$X = X_f - X_b = 0{,}545 + 0{,}74\cdot 10^{-3} = 0{,}546\ кГ.$$

Рассчитаем коэффициент подъемной силы для передней стороны пластинки:

$$c_{yf} = \frac{2Y_f}{\rho_i V_\infty^2 S_{кр}} = \bar{p}_f \cos\alpha - (c_f)_f \sin\alpha = 0{,}119\cos 10^\circ -$$
$$- 0{,}308\sin 10^\circ = 0{,}063.$$

Этот же коэффициент для задней стороны

$$c_{yb}=\frac{2Y_b}{\rho_i V_\infty^2 S_{\text{кр}}}=p_b\cos\alpha-(c_f)_b\sin\alpha=0{,}139\cdot10^{-3}\cos10^\circ+$$

$$+0{,}462\cdot10^{-3}\sin10^\circ=0{,}217\cdot10^{-3}.$$

Соответствующие значения подъемной силы будут следующими:

$$Y_f=c_{yf}\frac{\rho_i V_\infty^2}{2}S_{\text{кр}}=0{,}063\frac{3{,}81\cdot10^{-8}\cdot3000^2}{2}5\cdot2=0{,}108\ \kappa\Gamma;$$

$$Y_b=c_{yb}\frac{\rho_i V_\infty^2}{2}S_{\text{кр}}=0{,}217\cdot10^{-3}\frac{3{,}81\cdot10^{-8}\cdot3000^2}{2}5\cdot2=0{,}372\cdot10^{-3}\ \kappa\Gamma.$$

Суммарный коэффициент подъемной силы

$$c_y=c_{yf}-c_{yb}=0{,}63\cdot10^{-1}-0{,}217\cdot10^{-3}=0{,}0628,$$

а величина этой силы

$$Y=Y_f-Y_b=0{,}108-0{,}372\cdot10^{-3}=0{,}108\ \kappa\Gamma.$$

Аэродинамическое качество

$$K=c_y/c_x=0{,}0628/0{,}324=0{,}194.$$

XII.13. Для расчета удельного теплового потока воспользуемся выражением

$$q=\frac{\eta\rho_i}{2}\sqrt{\frac{RT_i}{2\pi}}\left\{k_2\left[V_\infty^2+RT_i\left(4+\frac{1}{\varphi+1}\right)\right]-4RT_{\text{ст}}k_1\right\}\Big|\ e^{-\bar{x}^2}\pm$$

$$\pm\bar{x}\sqrt{\pi}\left(1\pm\operatorname{erf}\bar{x}\right)\Big],\qquad(3.\text{XII}.15)$$

в котором для передней стороны принимается знак «+», а для задней «—». Из решения задачи XII.10 имеем: $\rho_i=3{,}81\cdot10^{-8}\ \kappa\Gamma\cdot сек^2/м^4$; $\eta=0{,}7$; $RT_i=5{,}54\cdot10^4\ м^2/сек^2$; $RT_{\text{ст}}=8{,}35\cdot10^4\ м^2/сек^2$; $\bar{x}=1{,}54$; $\operatorname{erf}\bar{x}=0{,}971$; $e^{-\bar{x}^2}=0{,}0926$; $k_1=1{,}5$, а также значения $\varphi=0{,}974\cdot10^{-2}$, $k_2=1{,}01$ для передней стороны и $\varphi=-0{,}663$, $k_2=1{,}01$ для задней стороны.

Подставляя соответствующие данные, определяем удельный тепловой поток к передней стороне поверхности:

$$q_f=\frac{0{,}7\cdot3{,}81\cdot10^{-8}}{2}\sqrt{\frac{5{,}54\cdot10^4}{2\pi}}\left\{1{,}01\left[3000^2+5{,}54\cdot10^4\left(4+\frac{1}{1+0{,}974\cdot10^{-2}}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-4\cdot8{,}35\cdot10^4\cdot1{,}5\right]\left[0{,}0926+1{,}54\sqrt{\pi}\,(1+0{,}971)\right]\frac{1}{427}=0{,}138\ \frac{ккал}{м^2\cdot сек}$$

и соответствующую величину теплопередачи:

$$Q_f=q_f S_{\text{кр}}=0{,}138\cdot5\cdot2=1{,}38\ ккал/сек.$$

Удельный тепловой поток к задней поверхности

$$q_b=\frac{0{,}7\cdot3{,}81\cdot10^{-8}}{2}\sqrt{\frac{5{,}54\cdot10^4}{2\pi}}\left\{1{,}01\left[3000^2+5{,}54\cdot10^4\left(4+\frac{1}{1-0{,}663}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-4\cdot8{,}35\cdot10^4\cdot1{,}5\right\}\left[0{,}0926-1{,}54\sqrt{\pi}\,(1-0{,}971)\right]\frac{1}{427}=0{,}376\cdot10^{-3}\ \frac{ккал}{м^2\cdot сек},$$

а соответствующая теплопередача

$$Q_b=q_b S_{\text{кр}}=0{,}376\cdot10^{-3}\,5\cdot2=3{,}76\cdot10^{-3}\ ккал/сек.$$

Суммарный удельный тепловой поток к пластинке

$$q = q_f + q_b = 0{,}138 + 0{,}376 \cdot 10^{-3} = 0{,}138 \ ккал/(м^2 \cdot сек),$$

а теплопередача

$$Q = Q_f + Q_b = qS_{кр} = 1{,}38 + 3{,}76 \cdot 10^{-3} = 1{,}38 \ ккал/сек.$$

Равновесную температуру стенки рассчитываем по формуле

$$T_e = \frac{k_2 T_i}{4k_1}\left(2\bar{x}_\infty^2 + 4 + \frac{1}{\varphi + 1}\right), \qquad (3.XII.16)$$

в которой

$$\bar{x}_\infty^2 = \mathbf{M}_\infty^2 k/2 = 10{,}6^2 \cdot 1{,}4/2 = 78{,}6.$$

С учетом этой величины для передней стороны поверхности

$$T_{ef} = \frac{1{,}01 \cdot 199}{4 \cdot 1{,}5}\left(2 \cdot 78{,}6 + 4 + \frac{1}{1 + 0{,}974 \cdot 10^{-2}}\right) = 5450 \text{ K},$$

а для задней

$$T_{eb} = \frac{1{,}01 \cdot 199}{4 \cdot 1{,}5}\left(2 \cdot 78{,}6 + 4 + \frac{1}{1 - 0{,}663}\right) = 5490 \text{ K}.$$

XII.14. Определим при помощи таблиц атмосферы [50] параметры воздуха на высоте $H = 160$ *км*: $p_i = 4{,}19 \cdot 10^{-5}$ *кГ/м*^{2}; $\rho_i = 1{,}14 \cdot 10^{-10}$ *кГ* $\times$ $\times$ *сек*^{2}/*м*^{4}; $T_i = 1207$ K; $\bar{c}_i = 954{,}7$ *м/сек*.

По величине $\bar{c}_i$ находим наиболее вероятную скорость молекул:

$$c_m = \bar{c}_i \sqrt{\pi/4} = 954{,}7 \sqrt{\pi/4} = 845 \ м/сек$$

и скорость звука:

$$\alpha_i = \bar{c}_i \sqrt{\pi k/8} = 954{,}7 \sqrt{\pi \cdot 1{,}4/8} = 708 \ м/сек.$$

Соответствующее число Маха

$$\mathbf{M}_\infty = V_\infty/a_i = 4000/708 = 5{,}68.$$

Далее находим величину

$$\bar{x}^2 = \sin^2 \beta \mathbf{M}_\infty^2 k/2.$$

Здесь угол β определяем из условия

$$\operatorname{tg} \beta = 2\Delta/b = 1 \cdot 2/8 = 0{,}25.$$

В соответствии с этим $\sin \beta = 0{,}242$ и

$$\bar{x}^2 = 0{,}242^2 \cdot 5{,}68^2 \cdot 1{,}4/2 = 1{,}3 \quad (\bar{x} = 1{,}14).$$

Так как профиль симметричный и установлен под нулевым углом атаки, то значения коэффициентов сопротивления для передних и задних плоскостей профиля будут одинаковыми, а для всего профиля коэффициент сопротивления будет вдвое больше, чем для одной поверхности.

Коэффициент сопротивления, обусловленный взаимодействием падающих молекул с передней поверхностью,

$$c_{xif} = \operatorname{tg} \beta \left[\frac{e^{-\bar{x}^2}}{\bar{x}\sqrt{\pi}} + \left(1 + \frac{\sin^2 \beta}{2\bar{x}^2}\right)(1 + \operatorname{erf} \bar{x})\right]. \qquad (3.XII.17)$$

Из таблицы [42] по $\bar{x} = 1{,}14$ определяем $\operatorname{erf} \bar{x} = 0{,}893$, а из таблицы [8] $e^{-\bar{x}^2} = 0{,}273$. Согласно этим данным для передней стороны профиля

$$c_{xif} = 0{,}25\left[\frac{0{,}273}{1{,}14\pi} + \left(1 + \frac{0{,}242^2}{2 \cdot 1{,}3}\right)(1 + 0{,}893)\right] = 0{,}518,$$

а для задней

$$c_{xib} = \operatorname{tg}\beta \left[\frac{-e^{-\bar{x}^2}}{\bar{x}\sqrt{2\pi}} + \left(1 + \frac{\sin^2\beta}{2\bar{x}^2}\right)(1 - \operatorname{erf}\bar{x}) \right] =$$

$$= 0{,}25 \left[\frac{-0{,}273}{1{,}14\sqrt{\pi}} + \left(1 + \frac{0{,}242^2}{2 \cdot 1{,}3}\right)(1 - 0{,}893) \right] = -0{,}65 \cdot 10^{-2}.$$

Полный коэффициент сопротивления, обусловленный действием падающих молекул на переднюю и заднюю стороны поверхности,

$$c_{xi} = c_{xif} - c_{xib} = 0{,}518 + 0{,}65 \cdot 10^{-2} = 0{,}524.$$

Отраженные частицы также создают силу сопротивления, коэффициент которой

$$c_{xr} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2\beta \operatorname{tg}\beta}{\bar{x}^2} \sqrt{\frac{T_r}{T_i}} \left[e^{-\bar{x}^2} \pm \bar{x}\sqrt{\pi}(1 \pm \operatorname{erf}\bar{x}) \right], \qquad (3.XII.18)$$

где знак «+» относится к передней стороне, а знак «—» — к задней. Отношение T_r/T_i находим по формуле

$$\frac{T_r}{T_i} = \left[1 + \frac{k\mathbf{M}_\infty^2}{4} + \frac{1}{4(\varphi + 1)} \right] \frac{k_2}{k_1}, \qquad (3.XII.19)$$

в которой

$$\varphi = e^{-\bar{x}^2} \left[\pm \bar{x}\sqrt{\pi}(1 \pm \operatorname{erf}\bar{x}) \right]^{-1};$$

$$k_2 = 1 + \frac{1}{E_i} \cdot \frac{5 - 3k}{k - 1} \cdot \frac{mRT_i}{2} N_i, \quad k_1 = \frac{k+1}{4(k-1)}.$$

Производим вычисления:

$$\varphi = e^{-1{,}3} \left[\pm 1{,}14\sqrt{\pi}(1 \pm 0{,}893) \right]^{-1};$$

$$RT_i = 9{,}33 \cdot 29{,}27 \cdot 1207 = 3{,}29 \cdot 10^5 \ м^2/сек^2.$$

Одновременно находим отношение

$$\frac{2E_i}{mRT_i N_i} = \frac{1}{RT_i} \left[V_\infty^2 + RT_i \left(4 + \frac{1}{\varphi + 1}\right) \right].$$

Приняв здесь для передней стороны $\varphi = 0{,}715 \cdot 10^{-1}$, получаем

$$\frac{2E_i}{mRT_i N_i} = \frac{1}{3{,}29 \cdot 10^5} \left[4000^2 + 3{,}29 \cdot 10^5 \left(4 + \frac{1}{1 + 0{,}715 \cdot 10^{-1}}\right) \right] = 53{,}5,$$

а для задней ($\varphi = -1{,}27$)

$$\frac{2E_i}{mRT_i N_i} = \frac{1}{3{,}29 \cdot 10^5} \left[4000^2 + 3{,}29 \cdot 10^5 \left(4 + \frac{1}{1 - 1{,}27}\right) \right] = 48{,}6.$$

Согласно этим данным для передней стороны

$$k_2 = 1 + \frac{1}{53{,}5} \cdot \frac{5 - 3 \cdot 1{,}4}{1{,}4 - 1} = 1{,}04$$

и для задней

$$k_2 = 1 + \frac{1}{48{,}6} \cdot \frac{5 - 3 \cdot 1{,}4}{1{,}4 - 1} = 1{,}04.$$

Так как параметр $k_1 = (1{,}4+1)/[4(1{,}4-1)] = 1{,}5$, то с учетом других полученных величин отношение температур для передней поверхности

$$\frac{T_r}{T_i} = \left[1 + \frac{1{,}4 \cdot 5{,}68^2}{4} + \frac{1}{4(1 + 0{,}0715)} \right] \frac{1{,}04}{1{,}5} = 8{,}68,$$

а для задней

$$\frac{T_r}{T_i} = \left[1 + \frac{1{,}4 \cdot 5{,}68^2}{4} + \frac{1}{4\,(1 - 1{,}27)}\right] \frac{1{,}04}{1{,}5} = 7{,}90.$$

Теперь можно вычислить коэффициенты сопротивления:
для передней стороны

$$c_{xf} = \frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}242^2 \cdot 0{,}25}{1{,}3} \sqrt{8{,}68}\,[0{,}273 + 1{,}14\,\sqrt{\pi}\,(1 + 0{,}893)] = 0{,}678 \cdot 10^{-1},$$

для задней

$$c_{xrb} = \frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}242^2 \cdot 0{,}25}{1{,}3} \sqrt{7{,}90}\,[0{,}273 - 1{,}14\sqrt{\pi}\,(1 - 0{,}893)] = 0{,}901 \cdot 10^{-3}.$$

Полный коэффициент сопротивления за счет отраженных молекул

$$c_{xr} = c_{xrf} - c_{xrb} = 0{,}678 \cdot 10^{-1} - 0{,}901 \cdot 10^{-3} = 0{,}0669.$$

Суммарный коэффициент сопротивления обтекаемого тела

$$c_x = c_{xi} + c_{xr} = 0{,}524 + 0{,}0669 = 0{,}591,$$

а соответствующая аэродинамическая сила

$$X = c_x \frac{\rho_i V_\infty^2}{2} S_{\text{кр}} = 0{,}591 \frac{1{,}145 \cdot 10^{-10} \cdot 4000^2}{2} 8 \cdot 4 = 0{,}0173\ кГ.$$

XII.15. При помощи таблиц атмосферы [50] определяем параметры воздуха на высоте $H = 200$ *км*: $p_i = 1{,}66 \cdot 10^{-5}$ *кГ/м*^{2}; $\rho_i = 3{,}74 \cdot 10^{-11}$ *кГ* $\times$ $\times$ *сек*^{2}/*м*^{4}; $T_i = 1404$ K; $\bar{c}_i = 1063$ *м/сек*; $g_i = 9{,}22$ *м/сек*^{2}. Найденному значению $\bar{c}_i$ соответствует

$$c_m = \bar{c}_i \sqrt{\pi/4} = 1063 \sqrt{\pi/4} = 941\ м/сек$$

и

$$a_i = \bar{c}_i \sqrt{\pi k/8} = 1063 \sqrt{\pi \cdot 1{,}4/8} = 787\ м/сек.$$

По заданной скорости V_∞ и величине a_i вычисляем число Маха:

$$\mathbf{M}_\infty = V_\infty / a_i = 4\,500/787 = 5{,}72.$$

Учитывая, что, по условию, $\beta_к = 15°$, найдем

$$\bar{x}_к^2 = \sin^2\beta_к\, \mathbf{M}_\infty^2\, k/2 = \sin^2 15° \cdot 5{,}72^2 \cdot 1{,}4/2 = 1{,}54 \quad (\bar{x}_к = 1{,}24).$$

В соответствии с этими значениями

$$\bar{x}_\infty^2 = \mathbf{M}_\infty^2\, k/2 = 5{,}72^2 \cdot 1{,}4/2 = 22{,}9 \quad (\bar{x}_\infty = 4{,}78).$$

Из таблицы [42] по $\bar{x}_к = 1{,}24$ находим значение $\operatorname{erf} \bar{x}_к = 0{,}920$, а из таблицы [8] $e^{-\bar{x}_к^2} = 0{,}214$. Затем вычисляем

$$\varphi = e^{-\bar{x}_к^2}\,[\bar{x}_к \sqrt{\pi}\,(1 + \operatorname{erf} \bar{x}_к)]^{-1} = 0{,}214\,[1{,}24 \sqrt{\pi}\,(1 + 0{,}92)]^{-1} = 0{,}0507$$

и находим отношение

$$\frac{2E_i}{mN_i\, RT_i} + \frac{1}{RT_i}\left[V_\infty^2 + RT_i\left(4 + \frac{1}{\varphi + 1}\right)\right],$$

в котором

$$RT_i = 9{,}22 \cdot 29{,}27 \cdot 1404 = 3{,}8 \cdot 10^5\ м^2/сек^2.$$

После соответствующих подстановок получаем

$$\frac{2E_i}{mN_i\, RT_i} = \frac{1}{3{,}8 \cdot 10^5}\left[4500^2 + 3{,}8 \cdot 10^5\left(4 + \frac{1}{1 + 0{,}0507}\right)\right] = 58{,}1.$$

Таким образом, коэффициент

$$k_2 = 1 + \frac{1}{E_i} \cdot \frac{5-3k}{k-1} \cdot \frac{mRT_i}{2} N_i = 1 + \frac{1}{58,1} \cdot \frac{5-3\cdot 1,4}{1,4-1} = 1,03.$$

Учитывая, что $k_1 = (k+1)/[4(k-1)] = 1,5$, найдем отношение температур:

$$\frac{T_r}{T_i} = \left[1 + \frac{k\mathbf{M}_\infty^2}{4} + \frac{1}{4(\varphi+1)}\right] \frac{k_2}{k_1} =$$

$$= \left[1 + \frac{1,4\cdot 5,72^2}{4} + \frac{1}{4(1+0,0507)}\right] \frac{1,03}{1,5} = 8,73.$$

Подставляя полученные результаты, рассчитаем коэффициент силы сопротивления, действующей на переднюю сторону поверхности:

$$c_{xf} = c_{xif} + c_{xrf} = \frac{e^{-\bar{x}_к^2}}{\bar{x}_к} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{\sin\beta_к}{2\bar{x}_\infty} \sqrt{\frac{T_r}{T_i}}\right) +$$

$$+ (1 + \operatorname{erf} \bar{x}_к)\left(1 + \frac{1}{2\bar{x}_\infty^2} + \frac{\sin\beta_к}{2\bar{x}_\infty} \sqrt{\pi \frac{T_r}{T_i}}\right) =$$

$$= \frac{0,214}{1,24}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{\sin 15^\circ}{2\cdot 4,78}\sqrt{8,73}\right) +$$

$$+ (1 + 0,92)\left(1 + \frac{1}{2\cdot 22,9} + \frac{\sin 15^\circ}{2\cdot 4,78}\sqrt{\pi\cdot 8,73}\right) = 2,35.$$

Коэффициент силы сопротивления, действующей на донную часть поверхности при больших значениях $\bar{x}_\infty$ ($\bar{x}_\infty > 2$), можно принять равным нулю ($c_{xb} = c_{xib} + c_{xrb} = 0$). Следовательно, суммарный коэффициент сопротивления конуса

$$c_x = c_{xf} + c_{xb} = c_{xf} = 2,35,$$

а соответствующая аэродинамическая сила

$$X = c_x \rho_i V_\infty^2 S_{мид}/2.$$

С учетом того, что

$$S_{мид} = \pi r_{мид}^2 = \pi (h\cdot \operatorname{tg}\beta)^2 = \pi (5 \operatorname{tg} 15^\circ)^2 = 5,64\ м^2,$$

эта сила

$$X = 2,35\cdot 3,74\cdot 10^{-11}\cdot 4\,500^2\cdot 5,64/2 = 5,04\cdot 10^{-3}\ кГ.$$

XII.16. Определяем по таблицам атмосферы [50] параметры воздуха на заданной высоте $H = 100$ *км*: $p_i = 2,18\cdot 10^{-3}$ *кГ*/*м*^{2}; $\rho_i = 3,81\cdot 10^{-8}$ *кГ*$\times$ $\times$*сек*^{2}/*м*^{4}; $T_i = 199$ K; $\bar{c}_i = 381,8$ *м*/*сек*.

Затем находим скорость звука:

$$a_i = \bar{c}_i \sqrt{\pi k/8} = 381,8\sqrt{\pi\cdot 1,4/8} = 283\ м/сек$$

и соответствующее число Маха:

$$\mathbf{M}_\infty = V_\infty/a_i = 4000/283 = 14,2.$$

По этому числу подсчитываем величину

$$\bar{x}_\infty^2 = \mathbf{M}_\infty^2\, k/2 = 14,2^2\cdot 1,4/2 = 140 \quad (\bar{x}_\infty = 11,8).$$

Принимаем, что отношение температур T_r/T_i одинаково для всех точек поверхности и равно его значению в точке с углом наклона касательной $|\beta| = 45^\circ$, которой соответствует величина

$$\bar{x}^2 = \sin^2\beta\, M_\infty^2\, k/2 = \sin^2 45^\circ \cdot 14{,}2^2 \cdot 1{,}4/2 = 70 \quad (\bar{x} = 8{,}36).$$

Так как найденное значение $\bar{x}$ велико, то можно принять в уравнении (3.XII.19) $\varphi \approx 0$, а в формуле (3.XII.9) $k_2 \approx 1$. Учитывая также, что $k_1 = 1{,}5$, определим отношение

$$\frac{T_r}{T_i} = \left(1 + \frac{1{,}4 \cdot 14{,}2^2}{4} + \frac{1}{4}\right)\frac{1}{1{,}5} = 47{,}5.$$

Величина этого отношения принимается во внимание при расчете суммарного коэффициента сопротивления цилиндра:

$$c_x = \frac{\sqrt{\pi}\, e^{-\bar{x}_\infty^2/2}}{\bar{x}_\infty}\left\{I_0\left(\frac{\bar{x}_\infty^2}{2}\right) + \left(\bar{x}_\infty^2 + \frac{1}{2}\right)\left[I_0\left(\frac{\bar{x}_\infty^2}{2}\right) + I_1\left(\frac{\bar{x}_\infty^2}{2}\right)\right]\right\} + \\ + \frac{\pi^{3/2}}{4\bar{x}_\infty}\sqrt{\frac{T_r}{T_i}}. \qquad (3.XII.20)$$

Для больших значений аргумента $\bar{x}_\infty^2$ модифицированные функции Бесселя можно рассчитать по следующим зависимостям:

$$I_0\left(\frac{\bar{x}_\infty^2}{2}\right) = \frac{e^{\bar{x}_\infty^2/2}}{\sqrt{\pi \bar{x}_\infty^2}}\left[1 + \frac{1^2}{4\bar{x}_\infty^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2!\,(4\bar{x}_\infty^2)^2} + \cdots\right]; \qquad (3.XII.21)$$

$$I_1\left(\frac{\bar{x}_\infty^2}{2}\right) = \frac{e^{\bar{x}_\infty^2/2}}{\sqrt{\pi \bar{x}_\infty^2}}\left[1 - \frac{1 \cdot 3}{4\bar{x}_\infty^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2!\,(4\bar{x}_\infty^2)} - \cdots\right]. \qquad (3.XII.22)$$

После подстановки соответствующих данных получим:

$$I_0\left(\frac{\bar{x}_\infty^2}{2}\right) = \frac{e^{70}}{\sqrt{\pi \cdot 140}}\left(1 + \frac{1}{4 \cdot 140} + \frac{9}{2 \cdot 16 \cdot 140^2} + \cdots\right) = \frac{e^{70}}{11{,}8\sqrt{\pi}}\, 1{,}002;$$

$$I_1\left(\frac{\bar{x}_\infty^2}{2}\right) = \frac{e^{70}}{\sqrt{\pi \cdot 140}}\left(1 - \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 140} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 16 \cdot 140^2} - \cdots\right) = \frac{e^{70}}{11{,}8\sqrt{\pi}} 0{,}995.$$

Таким образом,

$$c_x = \frac{\sqrt{\pi}\, e^{-70}}{11{,}8}\left[\frac{e^{70}}{11{,}8\sqrt{\pi}}\, 1{,}002 + \left(140 + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{e^{70}}{11{,}8\sqrt{\pi}}\, 1{,}002 + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{e^{70}}{11{,}8\sqrt{\pi}}\, 0{,}995\right)\right] + \frac{\pi^{3/2}}{4 \cdot 11{,}8}\sqrt{47{,}5} = 2{,}82.$$

Соответствующая аэродинамическая сила

$$X = c_x \frac{\rho_i V_\infty^2}{2} S = c_x \frac{\rho_i V_\infty^2}{2} 2R_т\, l = 2{,}82\, \frac{3{,}81 \cdot 10^{-8} \cdot 4000^2}{2} 2 \cdot 2 \cdot 5 = 17{,}2\ кГ.$$

XII.17. Рассмотрим общую формулу для расчета коэффициента сопротивления тела вращения с криволинейной образующей при условии зеркального отражения молекул от поверхности. Из рис. 3.XII.2 видно, что элементарный поток массы

$$dm = 2\pi\rho_i V_\infty r \cdot dr = 2\pi\rho_i V_\infty rr' \cdot dx,$$

где ρ_i — плотность воздуха на заданной высоте; $r' = dr/dx$.

При зеркальном взаимодействии угол отражения β равен углу падения. Общее изменение направления скорости относительно оси тела вращения определяется углом 2β. Это изменение направления вызывает изменение количества движения молекул при отражении от участка поверхности $2\pi r dr$, которому соответствует лобовое сопротивление

$$dX = 2\pi\rho_i V_\infty^2 (1 - \cos 2\beta)\, rr'\, dx.$$

Интегрируя последнее выражение, получаем полное сопротивление:

$$X = 2\pi\rho_i V_\infty^2 \int_0^{x_{мид}} (1 - \cos 2\beta)\, rr'\, dx.$$

Поскольку $1-\cos 2\beta = 2\sin^2\beta = 2(r')^2/[1+(r')^2]$, то

$$X = 4\pi\rho_i V_\infty^2 \int_0^{x_{мид}} \frac{r(r')^3}{1+(r')^2}\, dx.$$

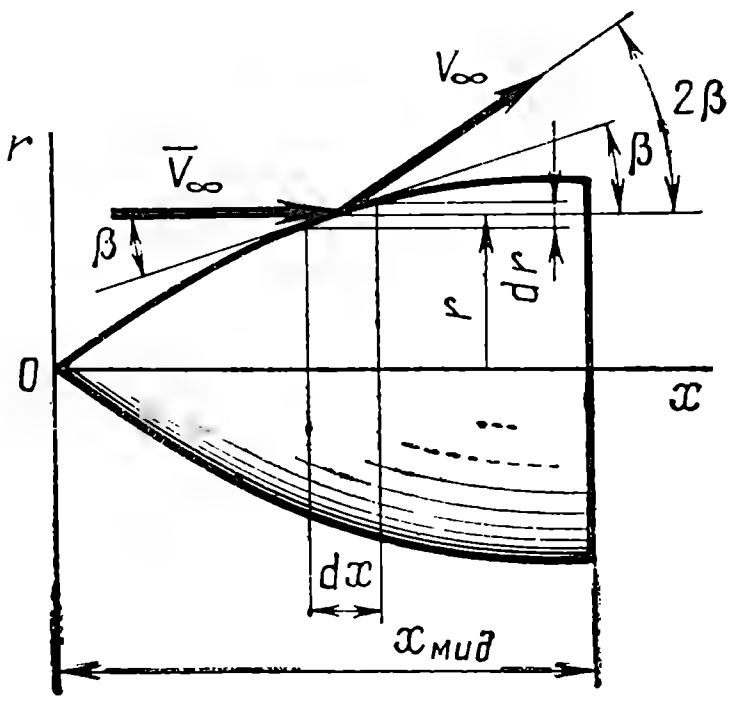


Рис. 3.XII.2. К расчету коэффициента сопротивления тела вращения при зеркальном отражении

Эту же силу можно выразить через коэффициент сопротивления c_x:

$$X = c_x\left(\rho_i V_\infty^2/2\right)\pi r_{мид}^2,$$

а затем найти выражение для этого коэффициента

$$c_x = 16\,\lambda_{мид}\int_0^1 \frac{\bar{r}(r')^3}{1+(r')^2}\, d\bar{x}. \qquad (3.XII.23)$$

Для параболического тела вращения $\bar{r} = \bar{x}(2-\bar{x})$, а производная

$$r' = dr/dx = (1/\lambda_{мид})(1-\bar{x}).$$

Следовательно,

$$(c_x)_п = 16\lambda_{мид}^{-2}\int_0^1 \frac{\bar{x}(2-\bar{x})(1-\bar{x})^3}{1+(1/\lambda_{мид})^2(1-\bar{x})^2}\, d\bar{x}.$$

В результате интегрирования получим

$$(c_x)_п = \left\{\frac{\lambda_{мид}^4}{2} + \frac{3\lambda_{мид}^2}{12} - \left(\frac{\lambda_{мид}^6}{2} + \frac{\lambda_{мид}^4}{2}\right)\ln\left[1+(1/\lambda_{мид})^2\right]\right\} 16\lambda_{мид}^{-2}. \qquad (3.XII.24)$$

Для конуса уравнение образующей $\bar{r} = \bar{x}$, а производная $r' = 1/(2\lambda_{мид})$. Поэтому

$$(c_x)_к = 16\,\lambda_{мид}\int_0^1 \frac{\bar{x}\,[1/(2\lambda_{мид})]^3}{1+[1/(2\lambda_{мид})]^2}\, d\bar{x}.$$

Интегрируя, найдем

$$(c_x)_к = \frac{1}{\lambda_{мид}^2\{1+[1/(2\lambda_{мид})]^2\}}. \qquad (3.XII.25)$$

Так как для конуса

$$\lambda_{мид}^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2\beta_к} - 1\right), \text{ то } (c_x)_к = 4\sin^2\beta_к.$$

После подстановки $\lambda_{мид} = 2$ ($\beta_к = 14°$) имеем $(c_x)_п = 0{,}32$, $(c_x)_к = 0{,}235$.

XII.18. При зеркальной схеме отражения (см. рис. 3.XII.1) полностью сохраняется касательная составляющая скорости ($u_i = u_r$), а нормальная составляющая изменяется по направлению, оставаясь постоянной по величине ($v_i = -v_r$). Для этой схемы отражения коэффициент аккомодации импульса $f = 0$.

При диффузном отражении молекулы, соударяясь со стенкой, попадают в щель или в пространство между бугорками поверхности и практически полностью абсорбируются стенкой, передавая ей свой импульс и энергию. По истечении некоторого промежутка времени они отражаются от нее в произвольном направлении с некоторой скоростью (рис. 3.XII.3). Следует учесть, что любое направление отражения равновероятно. При таком отражении коэффициент аккомодации импульса $f = 1$.

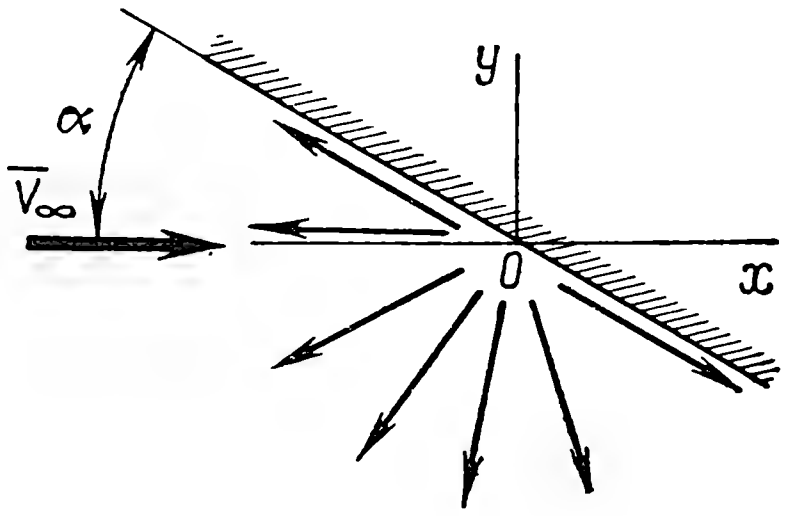


Рис. 3.XII.3. Схема диффузного отражения

На практике чаще реализуется схема смешанного отражения, при которой бо́льшая часть молекул отражается диффузно, а меньшая — зеркально. В этом случае величина коэффициента аккомодации импульса соответствует условию $0 < f < 1$. Так как смешанная схема является наиболее общей, то, получив соответствующие зависимости для этой схемы, можно затем в случае зеркального или полностью диффузного отражения найти из этих зависимостей необходимые результаты, приняв соответственно $f = 0$ или $f = 1$.

Рассчитаем коэффициент сопротивления конуса для общего случая отражения. По таблицам атмосферы [50] определяем параметры воздуха на высоте $H = 100$ *км*: $p_i = 2{,}18 \cdot 10^{-3}$ *кГ/м²*; $\rho_i = 3{,}81 \cdot 10^{-8}$ *кГ × сек²/м⁴*; $T_i = 199$ K; $\bar{c}_i = 381{,}8$ *м/сек*.

Соответствующая скорость звука

$$a_i = \bar{c}_i \sqrt{\pi k/8} = 381{,}8 \sqrt{\pi \cdot 1{,}4/8} = 283 \text{ м/сек}.$$

Для заданных условий рассчитываем параметры:

$$\bar{x}_к^2 = \sin^2 \beta_к \, M_\infty^2 \, k/2 = \sin^2 30^\circ \cdot 2^2 \cdot 1{,}4/2 = 0{,}7 \quad (\bar{x}_к = 0{,}835);$$

$$\bar{x}_\infty^2 = M_\infty^2 \, k/2 = 2^2 \cdot 1{,}4/2 = 2{,}8 \quad (\bar{x}_\infty = 1{,}67).$$

Определяем значение функции φ для передней поверхности конуса и для донного среза, используя выражение (3.XII.8). Для этого из таблицы [42] по $\bar{x}_к = 0{,}835$ находим $\operatorname{erf} \bar{x}_к = 0{,}762$, по $\bar{x}_\infty = 1{,}67$ — значение $\operatorname{erf} \bar{x}_\infty = 0{,}982$, а из таблицы [8] — соответственно $e^{-\bar{x}_к^2} = 0{,}497$ и $e^{-\bar{x}_\infty^2} = 0{,}0608$.

Используя найденные значения, вычисляем для передней поверхности

$$\varphi_f = 0{,}497 \left[0{,}835 \sqrt{\pi} \, (1 + 0{,}762)\right]^{-1} = 0{,}191$$

и для донного среза

$$\varphi_b = 0{,}0608 \left[-1{,}67 \sqrt{\pi} \, (1 - 0{,}982)\right]^{-1} = -1{,}14.$$

Затем рассчитываем величину

$$RT_i = 9{,}50 \cdot 29{,}27 \cdot 199 = 5{,}54 \cdot 10^4 \text{ м}^2/\text{сек}^2$$

и отношения соответственно для передней стороны:

$$\frac{2E_i}{mN_i RT_i} = \frac{1}{RT_i}\left[V_\infty^2 + RT_i\left(4 + \frac{1}{\varphi+1}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{5{,}54\cdot 10^4}\left[2^2\cdot 283^2 + 5{,}54\cdot 10^4\left(4 + \frac{1}{1+0{,}191}\right)\right] = 10{,}6$$

и для задней:

$$\frac{2E_i}{mN_i RT_i} = \frac{1}{5{,}54\cdot 10^4}\left[2^2\cdot 283^2 + 5{,}54\cdot 10^4\left(4 + \frac{1}{1-1{,}14}\right)\right] = 1{,}03.$$

Подставляя полученные данные в (3.XII.9), рассчитываем величину коэффициента k_2 для передней поверхности

$$k_2 = 1 + \frac{1}{10{,}6}\cdot\frac{5-3\cdot 1{,}4}{1{,}4-1} = 1{,}19$$

и для донного среза

$$k_2 = 1 + \frac{1}{1{,}03}\cdot\frac{5-3\cdot 1{,}4}{1{,}4-1} = 2{,}94.$$

Принимая $k=1{,}5$, находим отношение температур для передней поверхности:

$$\frac{T_r}{T_i} = \left[1 + \frac{kM_\infty^2}{4} + \frac{1}{4(\varphi+1)}\right]\frac{k_2}{k_1} = \left[1 + \frac{1{,}4\cdot 2^2}{4} + \frac{1}{4(1+0{,}191)}\right]\frac{1{,}19}{1{,}5} = 2{,}61$$

и для задней

$$\frac{T_r}{T_i} = \left[1 + \frac{1{,}4\cdot 2^2}{4} + \frac{1}{4(1-1{,}14)}\right]\frac{2{,}94}{1{,}5} = 1{,}2.$$

В случае смешанного отражения коэффициент давления на передней поверхности конуса, обусловленный взаимодействием падающих и отраженных молекул определится из выражения

$$\bar{p}_f = \bar{p}_{if} + \bar{p}_{rf} = \sin^2\beta_к\left\{(2-f)\left[\frac{e^{-\bar{x}_к^2}}{\bar{x}_к\sqrt{\pi}} + \left(1 + \frac{1}{2\bar{x}_к^2}\right)(1+\operatorname{erf}\bar{x}_к)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{f}{2\bar{x}_к^2}\sqrt{\frac{T_r}{T_i}}\left[e^{-\bar{x}_к^2} + \bar{x}_к\sqrt{\pi}\,(1+\operatorname{erf}\bar{x}_к)\right]\right\}, \qquad (3.XII.26)$$

а напряжение трения —

$$(c_f)_f = f\sin\beta_к\cos\beta_к\left[\frac{e^{-\bar{x}_к^2}}{\bar{x}\sqrt{\pi}} + (1+\operatorname{erf}\bar{x}_к)\right]. \qquad (3.XII.27)$$

Коэффициент сопротивления для элементарной площадки поверхности конуса (рис. 3.XII.4) будет равен

$$dc_{xf} = \bar{p}_f\sin\beta_к + (c_f)_f\cos\beta_к,$$

а суммарный коэффициент сопротивления

$$c_{xf} = \int_{\bar{S}}[\bar{p}_f\sin\beta_к + (c_f)_f\cos\beta_к]\,d\bar{S}, \qquad (3.XII.28)$$

где $\bar{S}=S/S_{мид}$.

Для острого конуса

$$d\bar{S} = \frac{dS}{S_{мид}} = \frac{2\pi r\,dl}{\pi r_{мид}^2} = \frac{2\pi r\,dr}{\pi r_{мид}^2\sin\beta_к} = \frac{d\bar{r}^2}{\sin\beta_к}.$$

После подстановки значений коэффициента давления (3.XII.26) и напряжения трения (3.XII.27) в (3.XII.28) и интегрирования получаем

$$c_{xf} = \sin^2\beta_к \left\{(2-f)\left[\frac{e^{-\bar{x}_к^2}}{\bar{x}_к\sqrt{\pi}} + \left(1+\frac{1}{2\bar{x}_к^2}\right)(1+\operatorname{erf}\bar{x}_к)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{f}{2\bar{x}_к^2}\sqrt{\frac{T_r}{T_i}}\left[e^{-\bar{x}_к^2} + \bar{x}_к\sqrt{\pi}(1+\operatorname{erf}\bar{x}_к)\right]\right\} +$$

$$+ f\cos^2\beta_к\left[\frac{e^{-\bar{x}_к^2}}{\bar{x}_к\sqrt{\pi}} + (1+\operatorname{erf}\bar{x}_к)\right]. \qquad (3.XII.29)$$

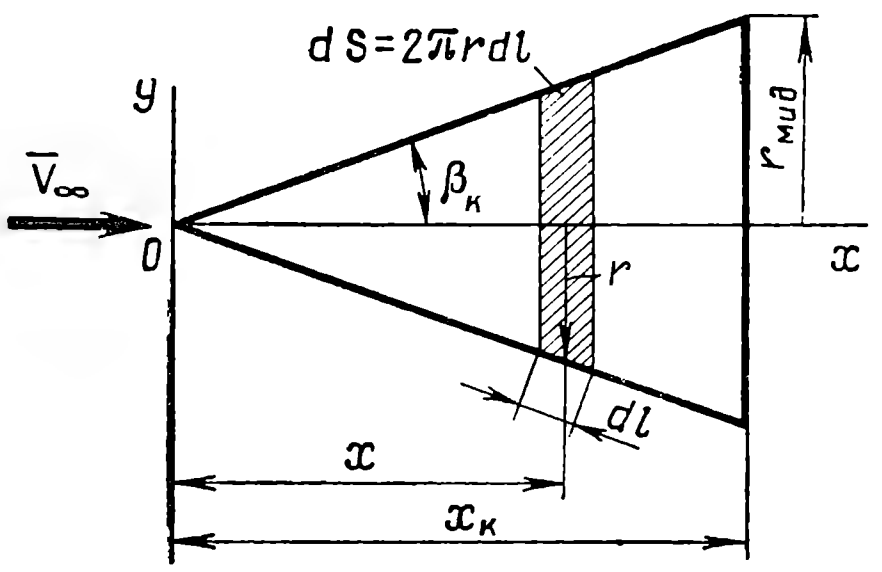


Рис. 3. XII.4. К расчету обтекания конуса свободномолекулярным потоком

Для донного среза величина $(c_f)_b$ не оказывает влияния на значение коэффициента сопротивления конуса, так как совпадает по направлению с плоскостью дна, которая нормальна оси конуса. Следовательно, коэффициент c_{xb} зависит только от величины коэффициента давления, обусловленного взаимодействием с поверхностью падающих и отраженных молекул, и находится из выражения (3.XII.3), в котором следует принять $\beta=\pi/2$ и заменить $\bar{x}$ на $-\bar{x}_\infty$. Коэффициент силы, действующей на донную поверхность, в этом случае равен коэффициенту давления:

$$c_{xb} = c_{x\,дон} = \bar{p}_b = (2-f)\left[\frac{-e^{-\bar{x}_\infty^2}}{\bar{x}_\infty\sqrt{\pi}} + \left(1+\frac{1}{2\bar{x}_\infty^2}\right)(1-\operatorname{erf}\bar{x}_\infty)\right] +$$

$$+ \frac{f}{2\bar{x}_\infty^2}\sqrt{\frac{T_r}{T_i}}\left[e^{-\bar{x}_\infty^2} - \bar{x}_\infty\sqrt{\pi}\,(1-\operatorname{erf}\bar{x}_\infty)\right]. \qquad (3.XII.30)$$

Суммарный коэффициент сопротивления конуса с учетом того, что на донный срез действует подталкивающая сила, равен

$$c_x = c_{xf} - c_{x\,дон}. \qquad (3.XII.31)$$

Для заданных условий задачи определяем значения коэффициентов:

$$c_{xf} = \sin^2 30^\circ\left\{(2-f)\left[\frac{0{,}497}{0{,}835\sqrt{\pi}} + \left(1+\frac{1}{2\cdot 0{,}7}\right)(1+0{,}762)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{f}{2\cdot 0{,}7}\sqrt{2{,}61}\,[0{,}497 + 0{,}835\sqrt{\pi}\,(1+0{,}762)]\right\} + f\cos^2 30^\circ \times$$

$$\times\left[\frac{0{,}497}{0{,}835\sqrt{\pi}} + (1+0{,}762)\right] = 1{,}53 + 1{,}42\,f;$$

$$c_{x\,дон} = (2-f)\left[\frac{-0{,}0608}{1{,}67\sqrt{\pi}} + \left(1+\frac{1}{2\cdot 2{,}8}\right)(1-0{,}982)\right] +$$

$$+ \frac{f}{2\cdot 2{,}8}\sqrt{1{,}2}\,[0{,}0608 - 1{,}67\sqrt{\pi}\,(1-0{,}982)] = 0{,}0012 + 0{,}00087\,f;$$

$$c_x = c_{xf} - c_{x\,дон} = 1{,}53 + 1{,}42\,f - 0{,}0012 - 0{,}00087\,f = 1{,}53 + 1{,}42\,f.$$

В случае зеркального отражения молекул воздуха в этих формулах следует положить $f=0$. Тогда $c_{xf}=1{,}53$ и $c_{x\text{дон}}=1{,}2\cdot10^{-3}$. Соответствующая величина $c_x=c_{xf}-c_{x\text{дон}}=1{,}53$.

Для полностью диффузного отражения коэффициент $f=1$, следовательно, $c_{xf}=2{,}95$, $c_{x\text{дон}}=2{,}07\cdot10^{-3}$, $c_x=c_{xf}-c_{x\text{дон}}=2{,}95$.

При смешанном отражении принимаем согласно условию задачи $f=0{,}8$. Соответствующие значения коэффициентов будут следующими: $c_{xf}=2{,}66$; $c_{x\text{дон}}=1{,}9\cdot10^{-3}$; $c_x=c_{xf}-c_{x\text{дон}}=2{,}66$.

Согласно ударной теории Ньютона сила сопротивления определяется полной потерей количества движения частиц на площади наибольшего поперечного сечения. Так как рассматривается обтекание конуса под нулевым углом атаки, то его наибольшая площадь равна $\pi r^2_{\text{мид}}$, а действующая сила сопротивления при обтекании его свободномолекулярным потоком со скоростью V_∞ будет $X=\rho_\infty V^2_\infty \pi r^2_{\text{мид}}$. Следовательно, коэффициент сопротивления

$$c_x = 2X/(\rho_\infty V^2_\infty \pi r^2_{\text{мид}}) = 2.$$

Согласно ньютоновской схеме эластичного отражения частицы после столкновения продолжают движение вдоль стенки, т. е. отклоняются на угол встречи молекул со стенкой. При этом нормальная составляющая скорости погашается, а касательная остается без изменения. Для этой схемы изменение количества движения по нормали к элементарной площадке dS в единицу времени равно

$$\rho_\infty V_n (V_n - 0)\, dS = \rho_\infty V^2_n\, dS,$$

где $V_n=V_\infty \sin\beta_к$ — нормальная составляющая скорости. Отсюда значение коэффициента давления

$$\bar{p}_к = 2(\rho_\infty V^2_n)/(\rho_\infty V^2_\infty) = 2\sin^2\beta_к.$$

Так как для конуса $c_x=\bar{p}_к$, то

$$c_x = 2\sin^2\beta_к = 2\sin^2 30° = 0{,}5. \qquad (3.XII.32)$$

В рассмотренных ньютоновских схемах отражения взаимодействия молекул с донным срезом конуса не происходит и, следовательно, $c_{x\text{дон}}=0$.

Для расчета значения c_x при зеркальной схеме ньютоновского отражения воспользуемся выражением (3.XII.25). После подстановки в него значения $\lambda_{\text{мид}}=1/(2\operatorname{tg}\beta_к)=1/(2\operatorname{tg}30°)=0{,}867$ получим

$$c_x = \frac{1}{0{,}867^2\{1+[1/(2\cdot0{,}867)]^2\}} = 1.$$

Разница значений, полученных при расчете по формулам (3.XII.32) и (3.XII.25), объясняется тем, что в первом случае не учитывается действие отраженных от поверхности молекул.

Если сравнить значения коэффициентов сопротивления в случае зеркального отражения молекул, рассчитанные по зависимостям (3.XII.25) и (3.XII.29), в котором положим $f=1$, то одинаковые результаты получим, если во второй зависимости примем $\bar{x}>2$ и соответственно $\operatorname{erf}\bar{x}\approx\approx1$, а $e^{-\bar{x}^2}\approx0$. При меньших значениях $\bar{x}$ величина коэффициента c_x, рассчитанная по зависимости (3.XII.29), оказывается большей. Это объясняется тем, что в формуле (3.XII.25) не учитывается реальный характер взаимодействия молекул с поверхностью конуса.

XII.19. По таблицам атмосферы [50] определяем параметры воздуха на заданной высоте $H=160$ *км*: $p_i=4{,}19\cdot10^{-5}$ *кГ/м*^{2}; $\rho_i=1{,}14\times\times10^{-10}$ *кГ·сек*^{2}*/м*^{4}; $T_i=1207$ K; $\bar{c}_i=954{,}7$ *м/сек*.

По известному значению $\bar{c}_i$ вычисляем скорость звука:

$$a_i = \bar{c}_i \sqrt{\pi k/8} = 954{,}7 \sqrt{\pi \cdot 1{,}4/8} = 708 \text{ м/сек}.$$

По величине $\mathbf{M}_\infty = 3{,}0$, углу атаки $\alpha = 30°$ и $k = 1{,}4$ рассчитываем параметр:

$$\bar{x}^2 = \sin^2 \alpha \mathbf{M}_\infty^2 \, k/2 = \sin^2 30° \cdot 3^2 \cdot 1{,}4/2 = 1{,}58 \quad (\bar{x} = 1{,}26).$$

Принимая $T_{ст} = T_r$, определим из (3.XII.19) отношение:

$$\frac{T_r}{T_i} = \left[1 + \frac{k\mathbf{M}_\infty^2}{4} + \frac{1}{4(\varphi+1)}\right] \frac{k_2}{k_1}.$$

Для нахождения величины φ воспользуемся формулой (3.XII.8). По значению $\bar{x} = 1{,}26$, используя таблицу [42], найдем $\operatorname{erf} \bar{x} = 0{,}925$, а из таблицы [8] — величину $e^{-\bar{x}^2} = 0{,}206$. Для передней поверхности пластинки

$$\varphi_f = 0{,}206 \left[1{,}26 \sqrt{\pi} \, (1 + 0{,}925)\right]^{-1} = 0{,}048,$$

а для задней

$$\varphi_b = 0{,}206 \left[-1{,}26 \sqrt{\pi} \, (1 - 0{,}925)\right]^{-1} = -1{,}23.$$

Далее вычисляем

$$RT_i = 9{,}33 \cdot 29{,}27 \cdot 1207 = 3{,}29 \cdot 10^5 \text{ м}^2/\text{сек}^2,$$

затем находим для передней стороны

$$\frac{2E_i}{mN_i RT_i} = \frac{1}{3{,}29 \cdot 10^5} \left[3^2 \cdot 708^2 + 3{,}29 \cdot 10^5 \left(4 + \frac{1}{1 + 0{,}048}\right)\right] = 18{,}6$$

и для задней

$$\frac{2E_i}{mN_i RT_i} = \frac{1}{3{,}29 \cdot 10^5} \left[3^2 \cdot 708^2 + 3{,}29 \cdot 10^5 \left(4 + \frac{1}{1 - 1{,}23}\right)\right] = 13{,}3.$$

Используя полученные данные, по зависимости (3.XII.9) вычисляем значения коэффициента k_2 соответственно для передней стороны:

$$k_2 = 1 + \frac{1}{18{,}6} \cdot \frac{5 - 3 \cdot 1{,}4}{1{,}4 - 1} = 1{,}11$$

и для задней

$$k_2 = 1 + \frac{1}{13{,}3} \cdot \frac{5 - 3 \cdot 1{,}4}{1{,}4 - 1} = 1{,}15.$$

Следовательно, отношение температур для передней стороны с учетом значения $k_1 = 1{,}5$

$$\frac{T_r}{T_i} = \left[1 + \frac{1{,}4 \cdot 3^2}{4} + \frac{1}{4(1 + 0{,}048)}\right] \frac{1{,}11}{1{,}5} = 3{,}24,$$

а для задней

$$\frac{T_r}{T_i} = \left[1 + \frac{1{,}4 \cdot 3^2}{4} + \frac{1}{4(1 - 1{,}23)}\right] \frac{1{,}15}{1{,}5} = 2{,}35.$$

Рассчитаем значения коэффициентов давления от действия падающих и отраженных молекул соответственно для передней и задней поверхностей крыла:

$$\bar{p}_f = \sin^2 \alpha \left\{(2 - f)\left[\frac{e^{-\bar{x}^2}}{\bar{x}\sqrt{\pi}} + \left(1 + \frac{1}{2\bar{x}^2}\right)(1 + \operatorname{erf} \bar{x})\right] + \frac{f}{2\bar{x}^2} \sqrt{\frac{T_r}{T_i}} \times \right.$$

$$\left. \times \left[e^{-\bar{x}^2} + \bar{x}\sqrt{\pi}(1 + \operatorname{erf} \bar{x})\right]\right\} = \sin^2 30° \left\{(2 - f)\left[\frac{0{,}206}{1{,}26\sqrt{\pi}} + \right.\right.$$

$$+\left(1+\frac{1}{2\cdot 1{,}58}\right)(1+0{,}925)\Big]+\frac{f}{2\cdot 1{,}58}\sqrt{3{,}24}\,[0{,}206+1{,}26\sqrt{\pi}\,(1+0{,}925)]\Big\}=$$

$$=1{,}32-0{,}015f;$$

$$\bar{p}_b=\sin^2\alpha\left\{(2-f)\left[\frac{-e^{-\bar{x}^2}}{\bar{x}\sqrt{\pi}}+\left(1+\frac{1}{2\bar{x}^2}\right)(1-\operatorname{erf}\bar{x})\right]+\frac{f}{2\bar{x}^2}\times\right.$$

$$\left.\times\sqrt{\frac{T_r}{T_i}}\,[e^{-\bar{x}^2}-\bar{x}\sqrt{\pi}\,(1-\operatorname{erf}\bar{x})]\right\}=\sin^2 30^\circ\left\{(2-f)\times\right.$$

$$\times\left[\frac{-0{,}206}{1{,}26\sqrt{\pi}}+\left(1+\frac{1}{2\cdot 1{,}58}\right)(1-0{,}925)\right]+\frac{f}{2\cdot 1{,}58}\sqrt{2{,}35}\times$$

$$\left.\times\,[0{,}206-1{,}26\sqrt{\pi}\,(1-0{,}925)]\right\}=0{,}00325+0{,}00813f.$$

Соответствующие коэффициенты трения для передней поверхности

$$(c_f)_f=f\sin\alpha\cos\alpha\left[\frac{e^{-\bar{x}^2}}{\bar{x}\sqrt{\pi}}+(1+\operatorname{erf}\bar{x})\right]=$$

$$=f\sin 30^\circ\cos 30^\circ\left[\frac{0{,}206}{1{,}26\sqrt{\pi}}+(1+0{,}925)\right]=0{,}875f,$$

для задней

$$(c_f)_b=f\sin\alpha\cos\alpha\left[\frac{-e^{-\bar{x}^2}}{\bar{x}\sqrt{\pi}}+(1-\operatorname{erf}\bar{x})\right]=$$

$$=f\sin 30^\circ\cos 30^\circ\left[\frac{-0{,}206}{1{,}26\sqrt{\pi}}+(1-0{,}925)\right]=-0{,}00758f.$$

Суммарный коэффициент лобового сопротивления

$$c_x=\bar{p}_f\sin\alpha+(c_f)_f\cos\alpha-\bar{p}_b\sin\alpha-(c_f)_b\cos\alpha=$$

$$=(1{,}32-0{,}015f)\sin 30^\circ+0{,}875f\cos 30^\circ-(0{,}00325+$$

$$+0{,}00813f)\sin 30^\circ+0{,}00758f\cos 30^\circ=0{,}658+0{,}752f.$$

Коэффициент подъемной силы крыла

$$c_y=\bar{p}_f\cos\alpha-(c_f)_f\sin\alpha-\bar{p}_b\cos\alpha-(c_f)_b\sin\alpha=$$

$$=(1{,}32-0{,}015f)\cos 30^\circ-0{,}875f\sin 30^\circ-(0{,}00325+$$

$$+0{,}00813f)\cos 30^\circ+0{,}00758f\sin 30^\circ=1{,}14-0{,}559f.$$

Отсюда аэродинамическое качество тонкой пластинки

$$K=c_y/c_x=(1{,}14-0{,}559f)/(0{,}658+0{,}752f).$$

Производя вычисления для значений $f=0$; 0,8 и 1,0, получим соответственно $K=1{,}73$; 0,55 и 0,404. Такой характер изменения качества летательного аппарата объясняется тем, что при уменьшении f величина c_f также убывает, а это приводит к уменьшению величины c_x и увеличению c_y.

Для ньютоновской схемы эластичного отражения (см. задачу XII.18) коэффициент давления на нижней поверхности $\bar{p}=2\sin^2\alpha$. Соответствующие значения аэродинамических коэффициентов

$$c_x=2\sin^3\alpha\ \text{ и }\ c_y=2\sin^2\alpha\cos\alpha,$$

а аэродинамическое качество

$$K = c_y/c_x = \cos\alpha/\sin\alpha = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Для заданных условий задачи при $\alpha=30°$ значение $K=\operatorname{ctg}30°=1{,}73$.

При ударной схеме ньютоновского отражения (см. задачу XII.18) коэффициент давления $\bar{p}=2\sin^2\alpha$, а коэффициент трения $c_f=2\sin\alpha\cos\alpha$. Соответствующие аэродинамические коэффициенты будут следующими:

$$c_y = 2\sin^2\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha\sin\alpha;$$

$$c_x = 2\cos^2\alpha\sin\alpha + 2\sin^2\alpha\sin\alpha.$$

Аэродинамическое качество

$$K = c_y/c_x = \cos\alpha(\sin\alpha - \cos\alpha).$$

Для условий задачи при $\alpha=30°$ значение $K=\cos 30°(\sin 30°-\cos 30°)=-0{,}312$. Такое значительное уменьшение аэродинамического качества летательного аппарата, отрицательного по знаку, объясняется резким возрастанием касательной составляющей поверхностной аэродинамической силы.

XII.20. По таблицам атмосферы [50] определяем параметры воздуха на высоте $H=100$ *км*: $p_i=2{,}18\cdot10^{-3}$ *кГ/м*^{2}; $\rho_i=3{,}81\cdot10^{-8}$ *кГ·сек*^{2}/*м*^{4}; $T_i=199$ K; $\bar{c}_i=381{,}8$ *м/сек*.

По значению $\bar{c}_i$ находим скорость звука:

$$a_i = 381{,}8\sqrt{\pi\cdot1{,}4/8} = 283 \text{ м/сек}$$

и соответствующее число Маха:

$$\mathbf{M}_\infty = V_\infty/a_i = 7\,960/283 = 28{,}2.$$

Удельный тепловой поток в некоторой точке с углом β наклона касательной к направлению скорости потока

$$q = 1{,}17\cdot10^{-3}\eta\rho_i V_\infty^3\left(1+\frac{5}{k\mathbf{M}_\infty^2}\right)\sin\beta = 1{,}17\cdot10^{-3}\cdot0{,}7\times$$

$$\times\,3{,}81\cdot10^{-8}\cdot7960^3\left(1+\frac{5}{1{,}4\cdot28{,}2^2}\right)\sin\beta = 15{,}7\sin\beta \text{ ккал/(м}^2\cdot\text{сек)}. \quad (3.\text{XII}.33)$$

В точке полного торможения, для которой $\beta=\pi/2$, величина этого теплового потока $q_0=15{,}7$ *ккал/(м*$^2\cdot$*сек)*.

Теплопередачу в точке полного торможения можно также отыскать по экспериментальной формуле

$$q_0 = 7{,}35\cdot10^7\eta(\rho_{\infty н}/\rho_{\infty з})(V_\infty/V_c)^3 \text{ ккал/(м}^2\cdot\text{сек)}, \quad (3.\text{XII}.34)$$

в которой V_c — первая космическая скорость; $\rho_{\infty н}$ и $\rho_{\infty з}$ — плотность воздуха соответственно на высоте H и у Земли. Отношение этих плотностей определяется по таблицам атмосферы [50]:

$$\frac{\rho_{\infty н}}{\rho_{\infty з}} = \frac{\rho_i}{\rho_з} = \frac{3{,}81\cdot10^{-8}}{1{,}25\cdot10^{-1}} = 3{,}04\cdot10^{-7}.$$

Так как, по условию, $V_\infty=V_c$ и $\eta=0{,}7$, то

$$q_0 = 7{,}35\cdot10^7\cdot0{,}7\,(3{,}04\cdot10^{-7})\,1 = 15{,}6 \text{ ккал/(м}^2\cdot\text{сек)}.$$

По известному тепловому потоку можно определить равновесную радиационную температуру стенки ($T_{ст}=T_e$):

$$T_e = q^{1/4}(\varepsilon\sigma)^{-1/4}. \quad (3.\text{XII}.35)$$

Так как $\varepsilon=0{,}8$ и $\sigma=1{,}36\cdot10^{-11}$ *ккал/(м*$^2\cdot$*сек*$\cdot$K^4), то $(\varepsilon\sigma)^{-1/4}=(0{,}8\times\times1{,}36\cdot10^{-11})^{-1/4}=550$. В соответствии с этим

$$T_e = 550\cdot q_0^{1/4} = 550\,(15{,}6)^{1/4} = 1090\text{K}.$$

Таблица перевода единиц измерения, применяющихся в аэродинамике, из системы МКГСС в Международную систему (СИ); ГОСТ 9867—61

Наименование и обозначение	Старая единица (система МКГСС)	Новая система (СИ)
	Основные единицы	
Длина	Метр (*м*)	Метр (*м*)
Масса	—	Килограмм (*кг*)
Сила	Килограмм (*кГ*)	—
Время	Секунда (*сек*)	Секунда (*сек*)
Температура термодинамическая (абсолютная)	Градус (по шкале Кельвина, °К)	Градус (по шкале Кельвина, К)
	1 *кГ* = 9,81 *н* (ньютон)	
	Производные единицы	
Скорость	1 *м/сек*	1 *м/сек*
Ускорение	1 *м/сек*^{2}	1 *м/сек*^{2}
Ускорение силы тяжести	9,81 *м/сек*^{2}	9,81 *м/сек*^{2}
Плотность (масса единицы объема)	1 *кГ·сек*^{2}/*м*^{4}	9,81 *кг/м*^{3}
Удельный объем (объем единицы массы)	1 *м*^{4}/(*кГ·сек*^{2})	0,102 *м*^{3}/*кг*
Удельный вес (вес единицы объема)	1 *кГ/м*^{3}	9,81 *н/м*^{3}
Весовой секундный расход	1 *кГ/сек*	9,81 *н/сек*
Давление	1 *кГ/см*^{2}	9,81·10^4 *н/м*^{2}
Коэффициент динамической вязкости	1 *кГ·сек/м*^{2}	9,81 *н·сек/м*^{2}
Коэффициент кинематической вязкости	1 *м*^{2}/*сек*	1 *м*^{2}/*сек*
Работа, энергия	1 *кГ·м*	9,81 *дж* (джоуль)
Мощность	1 *кГ·м/сек*	9,81 *вт* (ватт)
Количество теплоты	1 *ккал*	4,19·10^3 *дж*
Удельная теплоемкость	1 *ккал*/(*кГ·град*)	4,19·10^3 *дж*/(*кг·град*)
Энтропия (удельная)	1 *ккал*/(*кГ·град*)	4,19·10^3 *дж*/(*кг·град*)
Энтальпия (удельная)	1 *ккал/кГ*	4,19·10^3 *дж/кг*
Удельный тепловой поток	1 *ккал*/(*м*^{2}·*сек*)	4,19·10^3 *вт/м*^{2}
Коэффициент теплоотдачи	1 *ккал*/(*м*^{2}·*сек·град*)	4,19·10^3 *вт*/(*м*^{2}·*град*)
Коэффициент теплопроводности	1 *ккал*/(*м·сек·град*)	4,19·10^3 *вт*/(*м·град*)
Коэффициент лучеиспускания абсолютно черного тела (постоянная Стефана — Больцмана)	1,36·10^{-11} *ккал*/(*м*^{2}·*сек*××*град*^{4})	5,67·10^{-8} *вт*/(*м*^{2}·*град*^{4})
Постоянная Больцмана	14,1·10^{-25} *кГ·м/град*	1,38·10^{-23} *дж/град*
Газовая постоянная	1 *кГ·м*/(*кГ·град*)	9,81 *дж*/(*кг·град*)
Универсальная газовая постоянная	1,99 *ккал*/(*град*×× *кмоль*) = 847,82 *кГ* ×× *м*/(*град·кмоль*)	8,31·10^3 *дж*/(*град*×× *кмоль*)

ЛИТЕРАТУРА

1. Аржаников Н. С., Мальцев В. Н. Аэродинамика. Оборонгиз, 1956.
2. Аржаников Н. С., Садекова Г. С. Аэродинамика больших скоростей. «Высшая школа», 1965.
3. Аэрофизические исследования сверхзвуковых течений. «Наука», 1967.
4. Белоцерковский О. М. Обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком газа. Изд. Вычислительного центра АН СССР, 1967.
5. Белоцерковский О. М. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. «Наука», 1965.
6. Бабенко К. И. [и др.]. Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом. «Наука», 1964.
7. Бойко Н. А. [и др.]. Измерение давлений при быстропротекающих процессах. «Энергия», 1970.
8. Бронштейн П. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. «Наука», 1965.
9. Гинзбург И. П. Аэродинамика. «Высшая школа», 1966.
10. Горлин С. М. Экспериментальная аэромеханика. «Высшая школа», 1970.
11. Горлин С. М., Слезингер И. И. Аэромеханические измерения. «Наука», 1964.
12. Горшенин Д. С., Мартынов А. К. Руководство к практическим занятиям в аэродинамической лаборатории. «Машиностроение», 1967.
13. Давидсон В. Е. Основы газовой динамики в задачах. «Высшая школа», 1965.
14. Дородницын А. А. Пограничный слой в сжимаемом газе. «Прикладная математика и механика». 1942, т. VI, вып. 6.
15. Дракин И. М. Аэродинамический и лучистый нагрев в полете. Оборонгиз, 1961.
16. Идельчик И. Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. Госэнергоиздат, 1960.
17. Кибардин Ю. А. [и др.]. Атлас газодинамических функций при больших скоростях и высоких температурах воздушного потока. Госэнергоиздат, 1961.
18. Козлов Л. В. Экспериментальное исследование поверхностного трения на плоской пластине в сверхзвуковом потоке при наличии теплообмена. Изв. АН СССР, ОТН. «Механика и машиностроение». 1963, № 2.
19. Кочин Н. Е. [и др.]. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1, 2. Физматгиз, 1963.
20. Краснов Н. Ф. Аэродинамика. «Высшая школа», 1971.
21. Краснов Н. Ф. [и др.]. Аэродинамика ракет. «Высшая школа», 1968.
22. Краснов Н. Ф. Аэродинамика тел вращения. «Машиностроение», 1964.
23. Кузнецов С. И. Диаграммы и таблицы течения диссоциирующего воздуха около клина, конуса и выпуклой поверхности. Оборонгиз, 1962.
24. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1958.
25. Лебедев А. А., Чернобровкин Л. С. Динамика полета. Оборонгиз, 1962.
26. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. «Наука», 1970.
27. Мартынов А. К. Экспериментальная аэродинамика. Оборонгиз, 1951.
28. Мельников А. П. Аэродинамика больших скоростей. Воениздат, 1961.
29. Мхитарян А. М. Аэродинамика. «Машиностроение», 1970.
30. Надеждин Ф. В., Левчук Н. Д. Задачник по экспериментальной аэродинамике. Оборонгиз, 1945.
31. Остославский И. В., Стражева И. В. Динамика полета. Траектории летательных аппаратов. Оборонгиз, 1963.
32. Паничкин И. А., Ляхов А. Б. Основы газовой динамики и их приложение к расчету сверхзвуковых аэродинамических труб. Изд. Киевского университета, 1965.
33. Предводителев А. С. [и др.]. Термодинамические функции воздуха для

температур от 1000 до 12000° К и давлений от 0,001 до 1000 *атм* (графики функций). Изд-во АН СССР, 1960.
34. Предводителев А. С. Таблицы термодинамических функций воздуха (для температур от 6000 до 12000° К и давлений от 0,001 до 1000 *атм.*). Изд-во АН СССР, 1957.
35. Повх И. Л. Техническая гидромеханика. «Машиностроение», 1964.
36. Рахматулин Х. А. [и др.]. Газовая динамика. «Высшая школа», 1965.
37. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. «Наука», 1965.
38. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1, 2. «Наука», 1970.
39. Фабрикант И. Я. Аэродинамика. «Наука», 1964.
40. Христианович С. А. Обтекание тел газом при больших скоростях. Труды ЦАГИ, № 481, 1940.
41. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. Физматгиз, 1959.
42. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. «Наука», 1970.
43. Осватич К., Шварценбергер Р. Сборник задач и упражнений по газовой динамике. «Мир», 1967.
44. Поуп А., Гойн К. Аэродинамические трубы больших скоростей. «Мир», 1968.
45. Современная техника аэродинамических исследований при гиперзвуковых скоростях. «Машиностроение», 1965.
46. Техника гиперзвуковых исследований. «Мир», 1964.
47. Ударные трубы. ИЛ, 1962.
48. Ферри А. Аэродинамика сверхзвуковых течений. Гостехиздат, 1953.
49. Ракетная техника и космонавтика (AJAA).
50. ГОСТ 4401—64.
51. Повх И. Л. Аэродинамический эксперимент в машиностроении. «Машиностроение», 1955.
52. Пенкхёрст Р., Холдер Д. Техника эксперимента в аэродинамических трубах. ИЛ, 1955.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие . . . 3

Раздел первый

МЕТОДЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ И АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО РАСЧЕТА

Глава I. *Аэродинамические трубы* 7

§ 1.1. Принципы устройства и работы аэродинамических труб 7

1. Основные понятия 7
2. Классификация труб и основные требования, предъявляемые к ним . 13
3. Основные виды экспериментов в аэродинамических трубах 18
4. Влияние условий эксперимента в трубах на величину аэродинамических коэффициентов 21

§ 1.2. Трубы дозвуковых скоростей 23

1. Незамкнутые трубы (трубы прямого действия) 23
2. Замкнутые аэродинамические трубы 25
3. Трубы с низкой турбулентностью 25
4. Аэродинамические трубы переменной плотности 26
5. Расчет аэродинамических труб 27

§ 1.3. Трубы околозвуковых скоростей 28

§ 1.4. Сверхзвуковые аэродинамические трубы 31

1. Труба кратковременного действия 31
2. Гиперзвуковые аэродинамические трубы 35
3. Аэродинамические установки адиабатического сжатия 37
4. Газодинамический расчет сверхзвуковых аэродинамических труб [32] 38
5. Определение допустимых размеров моделей 44

§ 1.5. Ударные трубы 46

1. Устройство и принцип работы 46
2. Аэродинамические ударные трубы 48
3. Газодинамический расчет ударных труб 48

Глава II. *Измерительные приборы и устройства* . 50

§ 2.1. Манометры и приемники давления газа (насадки) 50

1. Жидкостные манометры 50
2. Электрические датчики давления 54
3. Измерение разрежений 60
4. Групповой регистрирующий манометр 61
5. Приемники давления газа (насадки) 64

§ 2.2. Приборы для измерения скорости потока 71

1. Термоанемометры 71

Стр.
2. Другие приборы для измерения скорости 76
3. Приборы для измерения направления скорости потока . 77
§ 2.3. Приборы для тепловых измерений 81
1. Температура 81
2. Теплопередача 85
§ 2.4. Аэродинамические весы 86
1. Общие понятия 86
2. Внешние аэродинамические весы 87
3. Внутренние аэродинамические весы 93
4. Аэродинамические весы с пьезоэлектрическими датчиками усилий . 96
5. Аэродинамические весы для измерения сил и моментов летательных аппаратов, совершающих колебательные движения . . . 97
§ 2.5. Оптические приборы 98
1. Зеркально-менисковый прибор конструкции Д. Д. Максутова 99
2. Интерферометр системы Маха—Цендера 103

Глава III. *Техника и методика измерения параметров газовых течений* . . . 106
§ 3.1. Тарировка измерительных приборов и устройств 106
Работа 3.1.1. Тарировка жидкостного микроманометра . . . 106
Работа 3.1.2. Тарировка насадков 110
Работа 3.1.3. Тарировка пятиточечного насадка, предназначенного для определения направления скорости потока 114
Работа 3.1.4. Статическая тарировка приборов для измерения температуры 117
Работа 3.1.5. Динамическая тарировка датчиков температуры торможения 119
Работа 3.1.6. Тарировка термоанемометра 121
Работа 3.1.7. Тарировка трехкомпонентных тензометрических весов 124
§ 3.2. Измерение параметров газового потока 129
Работа 3.2.1. Измерение скорости потока при помощи насадка 129
Работа 3.2.2. Определение скорости воздушного потока по методу измерения перепада давлений 132
Работа 3.2.3. Определение числа Маха невозмущенного сверхзвукового потока 135
Работа 3.2.4. Определение поля давлений и скоростей в аэродинамической трубе 139
Работа 3.2.5. Исследование турбулентности воздушного потока . 145
Работа 3.2.6. Определение угла скоса потока 148
Работа 3.2.7. Исследование параметров газового потока в ударной трубе 150

Глава IV. *Аэродинамические исследования на моделях крыльев* . . 154

§ 4.1. Экспериментальное определение аэродинамических характеристик профиля 155
Работа 4.1.1. Определение аэродинамических коэффициентов профиля крыла в дозвуковом потоке по измеренным давлениям на его поверхности 155
Работа 4.1.2. Определение лобового сопротивления профиля в дозвуковом потоке методом импульсов 176
Работа 4.1.3. Определение коэффициента подъемной силы профиля методом электроаналогии 182
Работа 4.1.4. Профиль крыла в сверхзвуковом потоке 196
Работа 4.1.5. Исследование сверхзвукового обтекания профиля оптическим методом 209
Работа 4.1.6. Исследование влияния скольжения крыла на обтекание профиля 218
§ 4.2. Экспериментальное определение аэродинамических характеристик крыла 229
Работа 4.2.1. Исследование распределения давления по крылу 229
Работа 4.2.2. Измерение аэродинамических сил и моментов, действующих на крыло 239

Стр.

Глава V. *Экспериментальная аэродинамика тел вращения* . . . 249

§ 5.1. Определение аэродинамических характеристик тел вращения по измерениям давлений 250
Работа 5.1.1. Исследование распределения давления по обтекаемой поверхности тела вращения 250
Работа 5.1.2. Исследование влияния инжекции газа на обтекание затупленного тела вращения 268
§ 5.2. Исследование аэродинамических характеристик тел вращения при помощи аэродинамических весов 275
Работа 5.2.1. Применение тензометрических весов для измерения аэродинамических сил и моментов 275

Глава VI. *Исследование аэродинамических параметров летательных аппаратов* 283

§ 6.1. Аэродинамическая интерференция 283
Работа 6.1.1. Экспериментальное исследование влияния интерференции на обтекание летательного аппарата 283
Работа 6.1.2. Исследование аэродинамической интерференции летательного аппарата при помощи весовых испытаний 288
Работа 6.1.3. Аэродинамические исследования оперения 291
§ 6.2. Исследование устойчивости летательных аппаратов 297
Работа 6.2.1. Измерение параметров статической устойчивости 297
Работа 6.2.2. Исследование динамической устойчивости летательных аппаратов 303
§ 6.3. Определение аэродинамических характеристик органов управления . . . 307
Работа 6.3.1. Аэродинамические исследования руля в виде поворотной консоли 307
Работа 6.3.2. Исследование рулевого устройства в виде интерцептора . . 313
Работа 6.3.3. Исследование комбинированного органа управления (КОУ) 320
Работа 6.3.4. Определение шарнирного момента руля 325

Глава VII. *Экспериментальные исследования трения* 330

§ 7.1. Определение параметров пограничного слоя 330
Работа 7.1.1. Измерение давления и температуры торможения в пограничном слое 330
Работа 7.1.2. Исследование пульсаций скорости в пограничном слое на плоской пластинке 340
Работа 7.1.3. Исследование распределения давления и полного аэродинамического сопротивления шара, обтекаемого потоком вязкой несжимаемой жидкости 344
Работа 7.1.4. Исследование влияния шероховатости на обтекание поверхности 351
Работа 7.1.5. Весовые измерения силы трения . . 356

Раздел второй

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ПО АЭРОДИНАМИКЕ

I. Основные сведения из аэродинамики . . . 361
II. Кинематика жидкой среды 368
III. Основы динамики жидкости и газа 373
IV. Теория скачков уплотнения 377
V. Метод характеристик 384
VI. Профиль и крыло конечного размаха в потоке несжимаемой жидкости 389
VII. Профиль в потоке сжимаемого газа 391
VIII. Крыло в сверхзвуковом потоке 396

Стр.
IX. Аэродинамика тел вращения 398
X. Трение и теплопередача 401
XI. Аэродинамическая интерференция 403
XII. Аэродинамика разреженной среды 407

Раздел третий

ОТВЕТЫ НА ВОПРОСЫ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО АЭРОДИНАМИКЕ

I. Основные сведения из аэродинамики 409
II. Кинематика жидкой среды 427
III. Основы динамики жидкости и газа 458
IV. Теория скачков уплотнения 477
V. Метод характеристик 509
VI. Профиль и крыло конечного размаха в потоке несжимаемой жидкости 530
VII. Профиль в потоке сжимаемого газа 539
VIII. Крыло в сверхзвуковом потоке 589
IX. Аэродинамика тел вращения 619
X. Трение и теплопередача 642
XI. Аэродинамическая интерференция 679
XII. Аэродинамика разреженной среды 704
Таблица перевода единиц измерения, применяющихся в аэродинамике, из системы МКГСС в Международную систему (СИ); ГОСТ 9867—61 . . . 725
Литература 726

**Николай Федорович Краснов, Всеволод Николаевич Кошевой,
Анатолий Николаевич Данилов, Вадим Федорович Захарченко,
Евгений Эдуардович Боровский, Александр Иванович Хлупнов**

ПРИКЛАДНАЯ АЭРОДИНАМИКА

Редактор В. А. Титова. Художник В. З. Казакевич. Художественный редактор Н. К. Гуторов. Технический редактор З. В. Нуждина. Корректоры Г. А. Чечеткина, М. И. Козлова

Т—07358. Сдано в набор 31/VII—73 г. Подп. к печати 6/V—74 г. Формат 70×108$^{1}/_{16}$. Бумага типогр. № 1. Объем 45,75 печ. л. 64,05 усл. п. л. Уч.-изд. л. 56,48. Изд. № Стд-187. Тираж 9000 экз. Цена 2 р. 31 к.

План выпуска литературы для вузов и техникумов издательства «Высшая школа» на 1974 г. Позиция № 125
Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14. Издательство «Высшая школа»

Владимирская типография Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
Гор. Владимир, ул. Победы, д. 18-б.
Зак. 927

Опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать	Чья вина
44	10 св.	Конденсация воздуха. Определим потребную температуру	Конденсация кислорода начинается раньше, чем азота, поэтому тем-	Тип.
141	1 сн.	$\cdots \frac{k-1}{2} \mathbf{M}_{\infty}^2 \Big)^{-k/-1)}$	$\cdots \frac{k-1}{2} \mathbf{M}_{\infty}^2 \Big)^{-k/(k-1)}$	Тип.
161	7 св.	$\cdots m_{\infty}^{y}, \ldots$	$\cdots m_{z}^{c_y}, \ldots$	Тип.
168	5 сн.	$c_{Rp} = F\mu - \mu \quad (4.1.5)$	$c_{Rp} = F_x \mu_{\bar{p}} \mu_{\bar{y}}, \quad (4.1.56)$	Тип.
168	20 сн.	$\cdots p = f_2(y),\ p = f_3)(x^2)$ и $p = f_4(y^2)$.	$\cdots \bar{p} = f_2(\bar{y}),\ \bar{p} = f_3(\bar{x}^2)$. и $\bar{p} = f_4(\bar{y}^2)$.	Тип.
172	5 сн.	$\cdots \mathbf{Re}_{\infty} = V_{\infty} b/\nu_{\infty} = \cdots$	$\mathbf{Re}_{\infty} = V_{\infty} b/\nu_{\infty} = \cdots$	Тип.
206	2 сн.	$p = f_1(x) \cdots$	$\bar{p} = f_1(\bar{x}) \cdots$	Тип.
275	23 сн.	$\cdots \overline{R}_{c0} = R_{c0} R_T$:	$\cdots \bar{R}_{c0} = R_{c0}/R_T$:	Тип.
412	17 сн.	$M_y = M_{x1} \sin\alpha + \cdots$	$M_y = -M_{x1} \sin\alpha + \cdots$	Авт.
509	10 св.	$\cdots \left(1 - \frac{V^2}{V_{max}^2}\right)^{\frac{1}{1-k}} =$	$\cdots \left(1 - \frac{V^2}{V_{max}^2}\right)^{\frac{1}{k-1}} =$	Тип.
509	11 св.	$\cdots \left(1 - \frac{V^2}{V_{max}^2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \cdots$	$\cdots \left(1 - \frac{V^2}{V_{max}^2}\right)^{\frac{k}{k-1}}$	Тип.
532	3 сн.	$\cdots + p_{\infty}/\rho$	$\cdots + p/\rho_{\infty}$	Тип.
549	Ф-ла (3.VII.16)	$\cdots \frac{k-1}{k+1}\Big)\Big\vert\Big(1 \cdots$	$\cdots \frac{k-1}{k+1}\Big) \Big/ \Big(1 \cdots$	Тип.
549	10 св.	$\cdots \frac{1,4-1}{1,4+1}\Big)\Big\vert\Big(1 \cdots$	$\cdots \frac{1,4-1}{1,4+1}\Big) \Big/ \Big(1 \cdots$	Тип.
552	3 св.	$\cdots \frac{1,4-1}{1,4+1}\Big)\Big\vert\Big(1 \ldots$	$\cdots \frac{1,4-1}{1,4+1}\Big) \Big/ \Big(1 \cdots$	Тип.
572	10 св.	$\cdots \frac{1,4-1}{1,4+1}\Big)\Big\vert\Big(1 \ldots$	$\cdots \frac{1,4-1}{1,4+1}\Big) \Big/ \Big(1 \cdots$	Тип.
626	1 св.	$\bar{V}_{r3} = \bar{V}_{r2} + V_{\theta 2}\,\Delta\theta = \cdots$	$\bar{V}_{r3} = \bar{V}_{r2} + \bar{V}_{\theta 2}\,\Delta\theta = \cdots$	Тип.
630	1 сн.	$\cdots s_{\theta} = \tilde{s}_0 R_{c.o} = \cdots$	$\cdots \tilde{s}_0 = s_0 R_{c.o} = \cdots$	Тип.
650	18 сн.	$\cdots = V_{\delta\rho\delta}\, x_{лам} \cdots$	$\cdots = V_{\delta}\, \rho_{\delta}\, x_{лам} \cdots$	Тип.
661	1 св.	$\cdots = \frac{V_{\delta\rho\delta}\, x_{лам}}{\mu_{\delta}} = \cdots$	$\cdots = \frac{V_{\delta}\, \rho_{\delta} x_{лам}}{\mu_{\delta}} = \cdots$	Тип.
691	1 св.	$\frac{\cdots (1 - r^4/s^4)}{\cdots (1 + r^4/s^4)^2\vert^{1/2}} \pm$	$\frac{\cdots (1 - r^4/s^4)}{\cdots (1 + r^4/s^4)]^{1/2}} \pm$	Тип.